

第4章 根轨迹分析法

通过对控制系统的时域分析,我们知道,系统的稳定性和输出响应中的瞬态分量都由系统闭环特征方程的特征根(闭环传递函数的极点)所决定。你可能有问题:当系统的某个参数发生变化时,特征根会随之在 s 复平面上移动,系统的性能也就会发生变化。是的,确实如此!因此,我们可以根据特征根在 s 复平面上的分布来分析系统的性能,也可以根据系统的性能指标要求来确定满足该指标的特征根的位置,并进一步确定相关的系统参数。这就是根轨迹分析的意义。

鉴于高阶特征方程的求解具有较大的难度,1948年伊文思(W•R•Evans)提出了一种求闭环系统特征根的简便图解法,称为根轨迹法。

4.1 根轨迹的基本概念

根轨迹法主要研究当系统的某一参数发生变化时,如何根据系统已知的开环传递函数的零极点,来确定系统的闭环特征根的移动轨迹。

下面我们可以结合具体的例子来说明根轨迹的含义。

设控制系统的结构如图4.1所示,图中 $G(s) = \frac{K}{s(s+2)}$, $H(s) = 1$, 系统的开环传递函数为

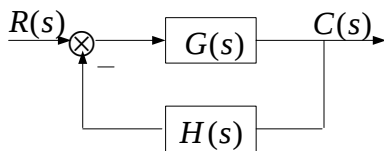


图4.1 系统结构图

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)}$$

其中, K 为开环传递函数零极点形式的放大系数,也称为根轨迹增益。

系统的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + 2s + K}$$

则闭环特征方程为

$$s^2 + 2s + K = 0$$

可以解出该方程的根为 $s_1 = -1 + \sqrt{1-K}$, $s_2 = -1 - \sqrt{1-K}$

可见, s_1 、 s_2 是随参数 K 的变化而变化的。改变 K 值时,特征根 s_1 、 s_2 的变化值如表4.1所示,在 s 平面上的轨迹变化如图4.2所示。图中的粗实线就称为系统的根轨迹,根轨迹上的箭头方向表示 $K \rightarrow \infty$ 时,闭环极点的变化方向,标注的数据代表与闭环极点位置相应的开环增益 K 的数值。

表 4.1

K	S_1	S_2
0	0	-2
0.5	-0.29	-1.707
1	-1	-1
$\vdots 2$	$\vdots 1+j$	$\vdots -1-j$
∞	$-1+j\infty$	$-1-j\infty$

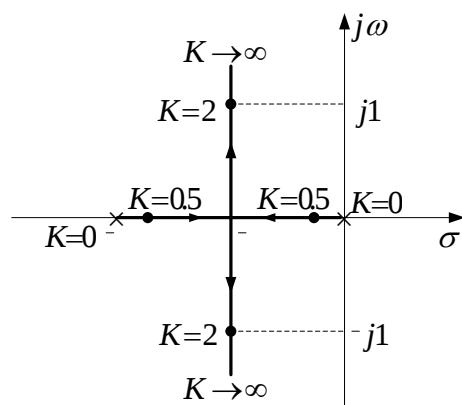


图 4.2 闭环特征根的轨迹

实际上,图中的根轨迹是由两条分支组成的:①当 $K=0$ 时,闭环特征根 s_1 、 s_2 与开环极点重合,即开环极点为根轨迹的起点。②当 $0 < K < 1$ 时, s_1 、 s_2 为两个不相等的负实数根,此时系统处于过阻尼状态。③当 $K=1$ 时, s_1 、 s_2 重合于 $(-1, j0)$ 点,系统呈现临界阻尼状态。④当 $1 < K < \infty$ 时, s_1 、 s_2 为共轭复根,根轨迹由 $(-1, j0)$ 点离开负实轴进入复平面,且因为 s_1 、 s_2 的实部恒等于 -1 ,所以 s_1 的根轨迹沿 $s = -1$ 的直线向上移动,而 s_2 的根轨迹沿 $s = -1$ 的直线向下移动。随着 $K \rightarrow \infty$, s_1 、 s_2 在 $s = -1$ 直线的无穷远处,为根轨迹的两个终点。此时,系统工作在欠阻尼状态,输出呈现衰减振荡形式。

你已看到,根轨迹不仅直观地表示出了参数 K 变化时闭环极点的位置,而且反映了参数 K 变化对系统性能的影响。

现在你可能产生新的问题了:通过根轨迹的变化趋势来分析系统的性能是比较直观,但问题是如何快捷地得到系统的根轨迹图呢?采用解析法来绘制高阶系统的根轨迹显然是不合适的,我们来学习一种简便的图解绘制方法。

4.2 绘制根轨迹的基本条件和规则

4.2.1 根轨迹方程

用图解的方法绘制根轨迹的依据是根轨迹方程。设系统结构如图 4.1 所示,系统开环传递函数为 $G(s)H(s)$,则系统的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

系统的闭环特征方程为

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

可见,满足开环传递函数等于 -1 的 s 即为闭环特征根,也就是根轨迹上的一个点。

已知系统开环传递函数的一般表达式为

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}, n \geq m \quad (4.1)$$

其中, $-z_i$ 为开环传递函数的零点, $-p_j$ 为开环传递函数的极点, K 为根轨迹增益。定义根轨迹方程为

$$\frac{K \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} = -1 \quad (4.2)$$

式(4.2)中 s 为复数, 所以该式又可以分解为

① 幅值方程

$$\left| \frac{K \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} \right| = 1 \quad (4.3)$$

② 相角方程

$$\sum_{i=1}^m \angle(s + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s + p_j) = \pm(2k+1)\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

你会发现, 特征根 s 满足的幅值条件与根轨迹增益 K 有关, 而相角条件与 K 无关。因此, 所有满足相角条件的 s 就构成了闭环特征根的根轨迹。把满足相角条件的 s 值代入幅值方程, 必能求出一个与之相对应的 K 值, 即满足相角条件的点必然同时满足幅值条件。而对于一个确定的 K 值, 将有无穷多个 s 值满足幅值条件, 其中只有根轨迹上的点既满足幅值条件又满足相角条件, 即满足幅值条件的 s 值不一定都满足相角条件。

4.2.2 绘制根轨迹的基本规则

当根轨迹增益 $K = 0 \rightarrow \infty$ 变化时, 要精确地绘制闭环特征根在 s 平面上的移动轨迹是比较困难的。但可以根据幅值方程和相角方程找到根轨迹的一些关键点和基本特征, 绘制出近似的根轨迹曲线。我们来学习绘制规则。

(1) 根轨迹的分支数

由根轨迹方程 (4.2) 知系统的特征方程为

$$(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n) + K(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m) = 0$$

因为 $n \geq m$, 所以特征方程的最高次幂为 n , 即有 n 个特征根。当 $K = 0 \rightarrow \infty$ 时, 每个特征根都由起点向终点连续移动, 形成一条根轨迹, n 个根就有 n 条根轨迹。

(2) 根轨迹的起点与终点

根轨迹的起点是指 $K = 0$ 时, 特征根在 s 平面上的位置。此时根轨迹方程为

$$\frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = -\infty$$

当 $\prod_{j=1}^n (s + p_j) = 0$ 时, 上式成立, 即 $s = -p_j$ 。所以, 开环传递函数的极点便是根轨迹的起点。

根轨迹的终点是指 $K \rightarrow \infty$ 时, 特征根在 s 平面上的位置。①当 $K \rightarrow \infty$ 时,

由根轨迹方程知 $\frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = 0$, 当 $\prod_{i=1}^m (s + z_i) = 0$ 即 $s = -z_i$ 时, 等式成立。即

系统开环传递函数的零点便是根轨迹的终点。②因为 $n \geq m$, 所以有 m 条根轨迹是终止于开环传递函数的零点的, 而另外 $n - m$ 条根轨迹的终点在何处呢? 我们

考虑 s 平面的无穷远点, 即 $K \rightarrow \infty$ 时有 $\frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} \approx \frac{1}{s^{n-m}} = 0$, 满足

根轨迹方程, 所以另外 $n - m$ 条根轨迹终止于无穷远点。

(3) 根轨迹的对称性

控制系统闭环特征方程的系数是由实际物理系统的结构决定的, 均为实数, 所以闭环特征根若为实数根, 则分布在 s 平面的实轴上; 若为复数, 则成对出现为共轭复根。因此它们形成的根轨迹必对称于实轴。

例 4.1 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K[s + (1 - j)][s + (1 + j)]}{s(s + 1)(s + 3)}$$

试确定系统的根轨迹。

解: ① 由系统的开环传递函数知, $n = 3, m = 2$, 所以系统有 3 条根轨。

② 根轨迹起点为 $p_1 = 0, -p_2 = -1, -p_3 = -3$ 。

③ 根轨迹终点为 $-z_1 = -1 + j, -z_2 = -1 - j$; 另外 $n - m = 1$ 条根轨迹终止于无穷远点。 $K = 0 \rightarrow \infty$ 时, 系统根轨迹如图 4.3 所示。图中 “ $\times$ ” 表示开环传递函数的极点 (根轨迹起点), “ o ” 表示开环传递函数的零点 (根轨迹终点)。

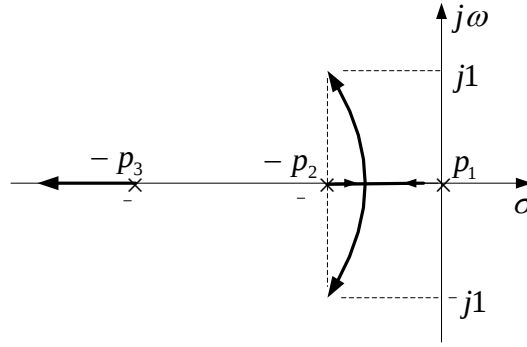


图 4.3 例 4.1 系统的根轨迹

(4) 实轴上的根轨迹

若实轴上的某一点是根轨迹上的点，则它必然满足相角方程 (4.4) 式。设系统的开环零、极点分布如图 4.4 (a) 所示，实轴上分布的零、极点将实轴分成了若干个区间断。

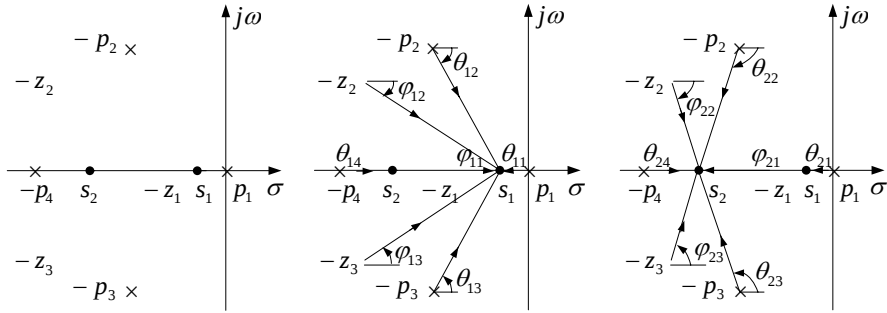


图 4.4 实轴上根轨迹的分布

① 在 $[-z_1, p_1]$ 区间上取一点 s_1 ，由各开环零、极点向 s_1 分别引矢量，如图 4.4 (b) 中带箭头线段所示。设： $\angle(s_1 - p_j) = \theta_{1j}$ ， $\angle(s_1 - z_i) = \varphi_{1i}$

则有： $\theta_{12} = -\theta_{13}$ ， $\varphi_{12} = -\varphi_{13}$ ，此时

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \angle(s_1 - z_i) - \sum_{j=1}^4 \angle(s_1 - p_j) &= \varphi_{11} + \varphi_{12} + \varphi_{13} - \theta_{11} - \theta_{12} - \theta_{13} - \theta_{14} \\ &= \varphi_{11} - \theta_{11} - \theta_{14} = -180^\circ \end{aligned}$$

可见， s_1 满足相角方程，是根轨迹上的一个点。

② 在 $[-p_4, -z_1]$ 区间段上取一点 s_2 ，由各个开环零、极点向 s_2 引矢量，如图 4.4 (c) 中带箭头线段所示。设 $\angle(s_2 - p_j) = \theta_{2j}$ ， $\angle(s_2 - z_i) = \varphi_{2i}$ ，则有：

$\theta_{22} = -\theta_{23}$ ， $\varphi_{22} = -\varphi_{23}$ ，此时

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \angle(s_2 - z_i) - \sum_{j=1}^4 \angle(s_2 - p_j) &= \varphi_{21} + \varphi_{22} + \varphi_{23} - \theta_{21} - \theta_{22} - \theta_{23} - \theta_{24} \\ &= \varphi_{21} - \theta_{21} - \theta_{24} = -360^\circ \end{aligned}$$

s_2 不满足相角方程，因此它不是根轨迹上的一个点。

综上所述,实轴上的根轨迹只能是那些其右侧实数开环零点和开环极点总数为奇数的区间段。而s平面上的共轭复数开环零、极点对确定实轴上的根轨迹没有影响。

(5) 根轨迹的渐近线

当 $n > m$ 时,有 $n - m$ 条根轨迹终止于无穷远点,其方向需要由根轨迹的渐近线来确定。

① 渐近线与实轴的夹角

设无穷远点是根轨迹上的点,记为 s ,则它到各开环零、极点的矢量与实轴正方向的夹角可看作都是相等的,记为 θ 。 s 应满足相角方程:

$$\sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) = \pm(2k+1)\pi$$

即 $m\theta - n\theta = \pm(2k+1)\pi$, 则

$$\theta = \frac{\pm(2k+1)\pi}{n-m}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \Lambda \quad (4.6)$$

当 k 增大时, θ 将重复出现。显然渐近线的数目等于终点在无穷远点的根轨迹的数目。

② 渐近线与实轴的交点

若无穷远点 s 是根轨迹上的点,则可以认为 s 平面上的所有有限开环零、极点到它的矢量长度均相等,即对无穷远闭环极点 s 来说,所有的开环零、极点汇集成一个点,用 $-\sigma_A$ 表示。它就是所求渐近线与实轴的交点。

由根轨迹方程(4.2)有

$$\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\Lambda(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\Lambda(s+p_n)} = -1 \quad (4.7)$$

当 $s = \infty$ 时,认为

$$s + z_1 = s + z_2 = \Lambda = s + z_m = s + p_1 = s + p_2 = \Lambda = s + p_n = s + \sigma_A$$

代入幅值方程(4.3)有

$$\frac{K}{(s + \sigma_A)^{n-m}} = -1$$

即

$$(s + \sigma_A)^{n-m} = -K \quad (4.8)$$

可以将(4.7)式展开成

$$-K = \frac{s^n + (\sum_{j=1}^n p_j)s^{n-1} + \Lambda}{s^m + (\sum_{i=1}^m z_i)s^{m-1} + \Lambda} = s^{n-m} + (\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i)s^{n-m-1} + \Lambda$$

将(4.8)式代入上式得

$$(s + \sigma_A)^{n-m} = s^{n-m} + (\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i)s^{n-m-1} + \Lambda$$

利用二次项定理将上式左边展开得

$$s^{n-m} + (n-m)\sigma_A s^{n-m-1} + \Lambda = s^{n-m} + \left(\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i\right)s^{n-m-1} + \Lambda$$

上式两边 s^{n-m-1} 项的系数应相等, 于是有

$$-\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^n (-p_j) - \sum_{i=1}^m (-z_i)}{n-m} \quad (4.9)$$

例 4.2 已知系统开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)}$, 试绘制系统的根轨迹。

的根轨迹。

解: ① $n=3$, $m=0$, 所以相应应有 3 条根轨迹, 且全部趋于无穷远点;

②根轨迹的起点与终点

起点: $p_1=0$, $-p_2=-1$, $-p_3=-3$

终点: 无穷远点

③实轴上的根轨迹

$[-1, 0]$ 和 $[-\infty, -3]$ 区间段为实轴上的根轨迹

④根轨迹的渐进线

渐近线与实轴的夹角: $\theta = \frac{\pm(2k+1)\pi}{3} = \pm 60^\circ, 180^\circ \quad k=1, 2$

渐近线与实轴的交点: $-\sigma_A = \frac{0-1-3-0}{3} = -\frac{4}{3}$

系统根轨迹如图 4.5 所示, 图中虚线为根轨迹的渐近线, 两条根轨迹沿 $\pm 60^\circ$ 方向趋于无穷远点, 另一条根轨迹从 $-p_3$ 出发沿负实轴方向趋于无穷远点。

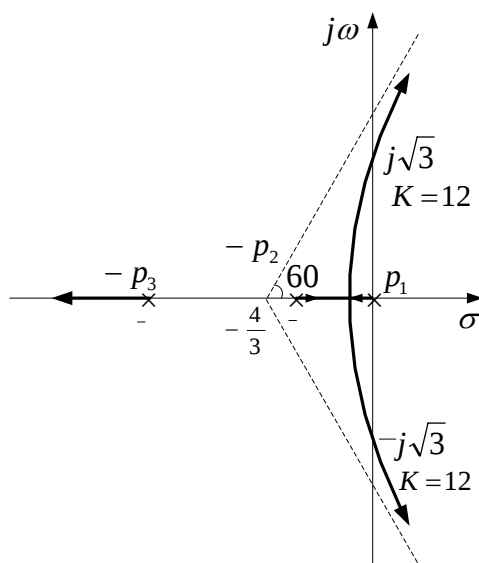


图 4.5 例 4.2 系统的根轨迹

(6) 根轨迹的分离点和会合点

根轨迹在实轴相交后进入复平面的点称为根轨迹的分离点,而根轨迹由复平面进入实轴的交汇点称为根轨迹的会合点。分离点与会合点实际上是闭环特征方程的重根。常见的分离点和会合点一般都在实轴上,即系统的特征根中有实数重根,如图4.6所示。但当系统特征根具有复数重根时,分离点和会合点也可能产生于共轭复数对中。如图4.7所示。鉴于分离点和会合点的实质就是特征方程的重根,因此可用求解特征方程重根的方法对它们进行求解。

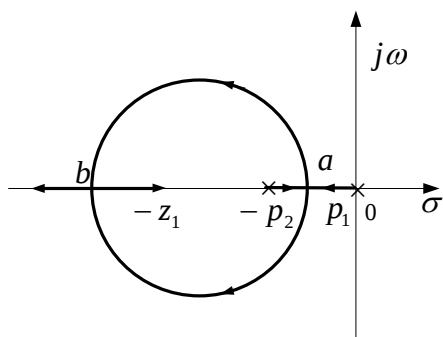


图4.6 实轴上根轨迹的分离点和回合点

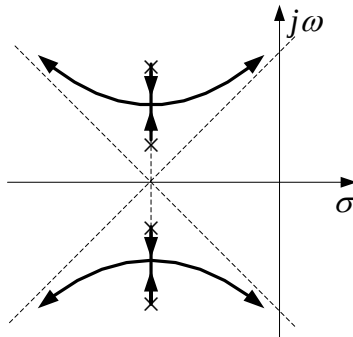


图4.7 根轨迹的复数分离点

设系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{KB(s)}{A(s)} \quad (4.10)$$

闭环特征方程为

$$KB(s) + A(s) = 0 \quad (4.11)$$

由代数方程式解的性质可知,当

$D(s) = A(s) + KB(s) = 0$ 且 $D'(s) = A'(s) + KB'(s) = 0$ 同时成立时,特征方程有重根存在。化简上述方程可得:

$$A(s)B'(s) - A'(s)B(s) = 0 \quad (4.12)$$

式(4.12)即为确定各个分离点和会合点的方程。需要注意的是,按照该式求出的根并非都是分离点和会合点,只有位于根轨迹上的那些重根才是真正的分离点和会合点。

例4.3 求例4.2中根轨迹的分离点或会合点。

解: 由系统的开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{KB(s)}{A(s)} = \frac{K}{s(s+1)(s+3)}$$

$$\text{得 } A(s)B'(s) - A'(s)B(s) = 3s^2 + 8s + 3 = 0$$

可求出 $s_1 = -0.45, s_2 = -2.22$ 。显然, s_1 位于根轨迹上,所以它是分离点。而 s_2 不在根轨迹上,故舍去。

(7) 根轨迹的出射角与入射角

寻找根轨迹的出射角和入射角的目的在于了解开环复数零、极点附近根轨迹的变化趋势。所谓出射角指根轨迹在复数开环极点(根轨迹起点)处的切线与正实轴的夹角。所谓入射角指根轨迹在复数开环零点(根轨迹终点)处的切线与正

实轴的夹角。

设某一系统的开环零、极点分布如图4.8所示, 设其中起点 $-p_3$ 的出射角为 θ_3 , s_1 为根轨迹上的一点。那么 s_1 应满足相角方程, 即

$$\angle(s_1 + z_1) - \angle(s_1 + p_1) - \angle(s_1 + p_2) - \angle(s_1 + p_3) - \angle(s_1 + p_4) = \pm(2k+1)\pi \quad (4.13)$$

当 $s_1 \rightarrow -p_3$ 时, $\angle(s_1 + p_3) = \theta_3$, 代入 (4.13)

$$\angle(s + z_1) - \angle(s + p_1) - \angle(s + p_2) - \theta_3 - \angle(s + p_4) = \pm(2k+1)\pi$$

可得 $\theta_3 = \pm(2k+1)\pi + \varphi_1 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_4)$

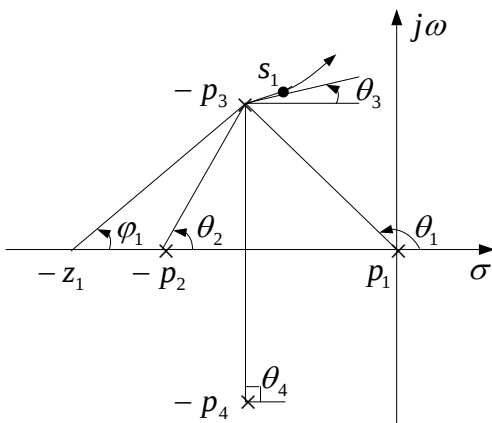


图4.8 根轨迹的出射角和入射角

由此可推出求根轨迹出射角的一般公式:

$$\theta_l = \pm(2k+1)\pi + \sum_{i=1}^m \varphi_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \theta_j \quad (4.14)$$

式中, θ_l 为待求开环复数极点 p_l 的出射角, θ_j 为其它开环极点到 p_l 的矢量相角, φ_i 为开环零点到 p_l 的矢量相角。

同理, 可得计算入射角的公式:

$$\varphi_k = \pm(2k+1)\pi + \sum_{j=1}^n \theta_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \varphi_i \quad (4.15)$$

例4.4 已知系统开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s^2 + s + 1.25}$, 试绘制系统的根轨迹。

解: ① $n = 2, m = 1$, 系统有两条根轨迹, 且有 $n - m = 1$ 条趋于无穷远点。

② 根轨迹的起点为 $-p_1 = -(0.5 + j)$, $-p_2 = -(0.5 - j)$

根轨迹的终点为 $-z_1 = -1$

③ 实轴上的根轨迹是 $(-\infty, -1]$ 区间段。

④ 根轨迹有一条渐近线, 为负实轴。

⑤ 根轨迹的会合点

据公式 (4.12) 得 $s^2 + 2s - 0.25 = 0$, 可求出方程的两个根为 $s_1 = -0.13$,

$s_2 = -1.87$ 。根据前面的分析可知, s_1 不在根轨迹上, 故舍去; s_2 是根轨迹在实轴上的会合点。

⑥根轨迹的出射角

因为 $\angle(-p_1 + z_1) = \arctg 2 = 63.4^\circ$, $\angle(-p_1 + p_2) = 90^\circ$

所以可求出 $\theta_1 = 180^\circ + 63.4^\circ - 90^\circ = 153.4^\circ$, $\theta_2 = -153.4^\circ$ 。根据上述关键点的分析和计算, 可绘制系统的根轨迹如图4.9所示。

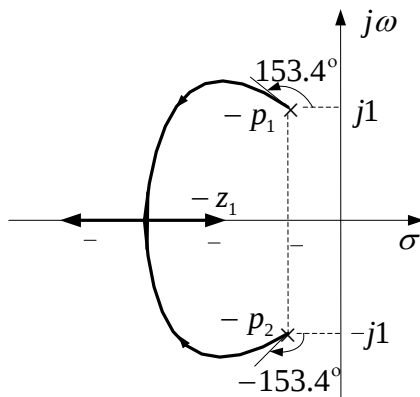


图4.9 例4.4系统的根轨迹

(8) 根轨迹与虚轴的交点

当根轨迹增益 K 增加时, 根轨迹有可能与虚轴相交, 说明系统这时有纯虚根存在, 系统处于等幅振荡状态。 K 继续增加时, 根轨迹就穿过虚轴进入右半 s 平面, 系统处于不稳定状态。所以, 根轨迹与虚轴的交点是系统稳定与不稳定的分界, 有必要确定这一交点及相应的根轨迹增益 K 的值。

有两种方法可以求解这两个值。第一, 根据劳斯判据求临界稳定时的 K 值及根轨迹与虚轴交点的 ω 值; 第二, 将 $s = j\omega$ 直接代入闭环特征方程, 令其实部和虚部分别为零, 从而求出相应的 K 和 ω 。

例4.5 试确定例4.2中根轨迹与虚轴的交点。

解: 由系统的开环传递函数可知, 系统闭环特征方程为

$$s^3 + 4s^2 + 3s + K = 0$$

① 根据劳斯判据, 特征方程的劳斯表为

s^3	1	3
s^2	4	K
s^1	$\frac{12-K}{4}$	0
s^0	K	

由劳斯表可知, 当 $K = 12$ 时, s^1 行的所有元素均为零。按 s^2 行元素组成辅助方程:

$$4s^2 + K = 0$$

当 $K = 12$ 时, 解得 $s_{1,2} = \pm j\sqrt{3}$ 。

即图4.5所示的系统根轨迹中两条穿越虚轴的根轨迹分支与虚轴的交点为

$\pm j\sqrt{3}$ ，对应的 K 值为12。

② 将 $s = j\omega$ 代入特征方程：

$$(j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + 3(j\omega) + K = 0$$

合并整理，有

$$(-4\omega^2 + K) - j(\omega^3 - 3\omega) = 0$$

$$-4\omega^2 + K = 0 \text{ 且 } \omega^3 - 3\omega = 0$$

得 $\omega = \pm\sqrt{3}$ ， $K = 12$ 。

(9) 根轨迹的平衡性

设 n 阶系统的闭环特征方程可表示为

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^n (s + p_j) + K \prod_{i=1}^m (s + z_i) &= s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \Lambda + a_{n-1} s + a_n \\ &= \prod_{j=1}^n (s + p_{cj}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

式中， $-p_j$ ， $-z_i$ 为开环极点与零点， $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为展开式系数， $-p_{cj}$ 为闭环特征根。根据代数方程与系数的关系，可以写出 s^{n-1} 次高项的系数为

$$-\sum_{j=1}^n p_{cj} = a_1$$

若满足条件 $n - m \geq 2$ ，有 $a_1 = -\sum_{j=1}^n p_j$ ，即

$$a_1 = -\sum_{j=1}^n p_{cj} = -\sum_{j=1}^n p_j$$

则

$$\sum_{j=1}^n p_{cj} = \sum_{j=1}^n p_j \quad (4.17)$$

上式说明当 $n - m \geq 2$ 时，系统开环极点之和等于闭环极点之和。对于一个给定的系统来说，开环极点之和是一个常数，那么当根轨迹增益变化时，虽然每个闭环极点都会随之变化，但它们之和却恒等于开环极点之和。所以在平面上，如果有一些闭环极点往左移动，则必有另外一些闭环极点向右移动，以保持 (4.17) 式成立。这一性质可用来估计根轨迹分支的变化趋势。

同理，讨论上述系统闭环特征方程的常数项，可得

$$\prod_{j=1}^n (-p_{cj}) = \prod_{j=1}^n (-p_j) + K \prod_{i=1}^m (-z_i) \quad (4.18)$$

以上九条便是绘制根轨迹的基本规则。可根据不同的情况和要求，全部或部分采用上述规则来绘制根轨迹的大致形状。

例 4.6 已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3.5)(s+3+j2)(s+3-j2)}$$

试绘制系统的闭环根轨迹

图。

解 ① $n = 5, m = 0$, 系统有五条根轨迹, 且五条均趋于无穷远点。

② 根轨迹的渐进线

$$-\sigma_A = \frac{-1-3.5-3-j2-3+j2}{5} = -2.1$$

$$\theta = \frac{\pm(2k+1)\pi}{5} = \pm 36^\circ, \pm 108^\circ, 180^\circ$$

③ 根轨迹的分离点

$$A(s) = s(s+1)(s+3.5)(s+3+j2)(s+3-j2)$$

$$B(s) = 1$$

令 $A(s)B'(s) - A'(s)B(s) = 0$

解得 $s \approx -0.4$

④ 根轨迹与虚轴的交点

将 $s = j\omega$ 代入系统的闭环特征方程, 并令其实部和虚部分别为零, 得

$$10.5\omega^4 - 7905\omega^3 + K = 0$$

$$\omega^5 - 43.5\omega^3 + 45.5\omega = 0$$

解得 $K = 75, \omega = 1.0$

根轨迹如图4.10所示。

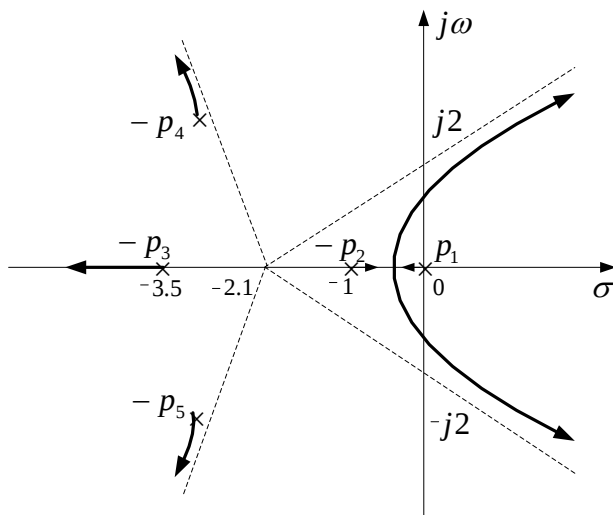


图4.10 例4.6系统根轨迹

4.3 特殊根轨迹

前面介绍的根轨迹是在考察根轨迹增益变化时得到的闭环特征根移动轨迹。你可能又想到了：除根轨迹增益变化外，有时还需要考虑其他参数变化的闭环特征根移动情况呀。事实上，控制系统除了根轨迹增益变化时的根轨迹之外，还有一些特殊条件下的根轨迹形式。如系统的参数根轨迹、正反馈系统根轨迹和滞后系统根轨迹等。通常我们称根轨迹增益变化时得到的是常规根轨迹，而其它形式

下的根轨迹称为广义根轨迹。

4.3.1 参数根轨迹

有时除了根轨迹增益外，我们需要了解其它一些参数如反馈系数、时间常数等对系统性能的影响，这时就需要绘制增益一定而其它某个参数变化时的根轨迹，称为参数根轨迹。绘制参数根轨迹首先必须完成以下变换。

我们知道系统的闭环特征方程可写成

$$KB(s) + A(s) = 0$$

即

$$\frac{KB(s)}{A(s)} = -1 \quad (4.19)$$

需要绘制以 K^* 为可变参数时的根轨迹时，可用方程 (4.19) 中不含 K^* 的各项来除该方程，得到等效变换

$$\frac{K^* B^*(s)}{A^*(s)} = -1 \quad (4.20)$$

然后再按照前述根轨迹绘制规则来绘制参数变化时的根轨迹图。

例4.7 设系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{20}{(s+4)(s+K^*)}$ ，试绘制

$K^* = 0 \rightarrow \infty$ 变化时系统的根轨迹。

解：系统的特征方程为

$$s^2 + 4s + K^*s + 4K^* + 20 = s^2 + 4s + 20 + K^*(s+4) = 0$$

做等效变换，得等效开环传递函数为

$$G^*(s)H^*(s) = \frac{K^*(s+4)}{s^2 + 4s + 20} = \frac{K^*(s+4)}{(s+2+j4)(s+2-j4)}$$

① $n=2$ ， $m=1$ ，有两条根轨迹，且一条趋于无穷远点。

② 实轴上的根轨迹是 $(-\infty, -4]$ 区间段。

③ 根轨迹的分离点

$$A^*(s) = (s+2+j4)(s+2-j4)$$

$$B^*(s) = s+4$$

代入公式 (4.12)，得 $s_1 = -8.47$ ， $s_2 = 0.47$ （舍去）

④ 根轨迹的出射角

$$\theta_{11} = 180^\circ + \arctan 2 - 90^\circ = 135^\circ$$

$$\theta_{12} = -135^\circ$$

根轨迹如图4.11所示。

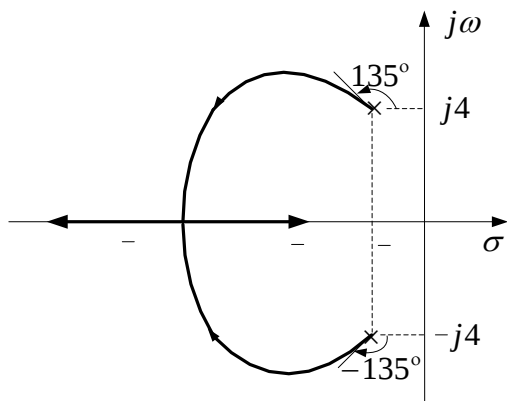


图4.11 例4.7系统的根轨迹

4.3.2 正反馈系统根轨迹

在对复杂系统进行控制时,由于某种性能指标的要求,系统中可能包含正反馈内回路。即内回路输出反馈到输入端后,与内回路的输入相加。如图4.12所示。这时可以绘制正反馈系统的根轨迹,来分析内回路的零、极点分布对整个系统性能的影响。

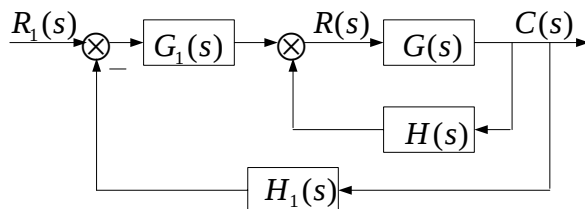


图4.12 具有正反馈内回路的控制系统

正反馈系统的闭环特征方程为

$$1 - G(s)H(s) = 0$$

即

$$G(s)H(s) = 1 \quad (4.21)$$

幅值方程与负反馈系统一致,而相角方程为

$$\sum_{i=1}^m \angle(s + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s + p_j) = \pm 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.22)$$

可见,相角条件不是常规的 $\pi + 2k\pi$,而是 $0 + 2k\pi$,所以正反馈系统的根轨迹又被称为零度根轨迹。

在绘制零度根轨迹时,因为相角方程的不同,在绘制规则上有以下几点区别于负反馈系统:

(1) 实轴上的根轨迹

为那些其右侧的开环零、极点数之和为偶数的区间段。

(2) 根轨迹渐近线与实轴的夹角为

$$\theta = \frac{\pm 2k\pi}{n - m} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.23)$$

(3) 根轨迹出射角和入射角

$$\theta_l = \pm 2k\pi + \sum_{i=1}^m \varphi_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \theta_j \quad (4.24)$$

$$\theta_k = \pm 2k\pi + \sum_{j=1}^n \theta_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \varphi_i \quad (4.25)$$

例4.8 若一反馈控制系统的内回路框图如图4.13所示，试绘制它的根轨迹。

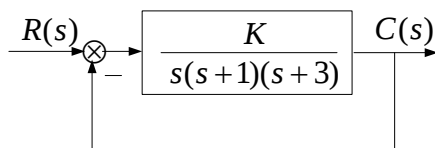


图4.13 正反馈控制系统框图

解 因为其内回路为正反馈回路，所以要绘制正反馈系统的根轨迹。

① $n=3$ ， $m=0$ ，所以系统有三条根轨迹。起点为 $p_1=0$ ， $-p_2=-1$ ， $-p_3=-3$ ；终点为无穷远点。

② 实轴上的根轨迹为 $[-3, -1]$ 和 $[0, \infty]$ 区间段。

③ 根轨迹的渐近线

渐近线与实轴的夹角

$$\theta = \frac{\pm 2k\pi}{3} = 0^\circ, \pm 120^\circ$$

渐近线与实轴的交点

$$-\sigma_A = \frac{0-1-3-0}{3} = -\frac{4}{3}$$

④ 根轨迹的分离点

同例4.3可求得： $s_1 = -0.45$ ， $s_2 = -2.22$ 。考虑实轴上的根轨迹区间段，所以舍去 s_1 点，分离点为 s_2 点。

⑤ 根轨迹与虚轴的交点

系统的闭环特征方程为

$$s^3 + 4s^2 + 3s - K = 0$$

将 $s = j\omega$ 代入上式得

$$-(4\omega^2 + K) - j(\omega^3 - 3\omega) = 0$$

解得 $\omega = \pm\sqrt{3}$ ， $K = -12$ （无意义）

所以，根轨迹与虚轴无交点。系统完整的根轨迹如图4.14所示

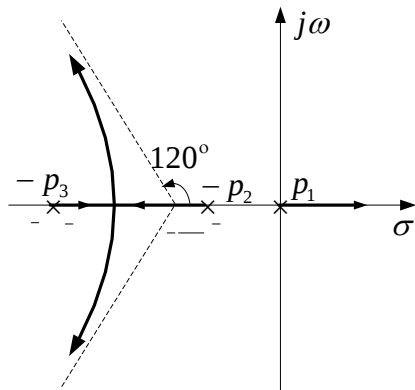


图4.14 例4.8正反馈系统根轨迹

4.3.3 具有纯滞后环节系统的根轨迹

系统具有纯滞后环节时, 因为纯滞后环节的传递函数为 $e^{-\tau s}$, 使得系统闭环特征方程不再是一个单纯的代数方程, 而相应的根轨迹也具有区别于其它系统的明显特征。

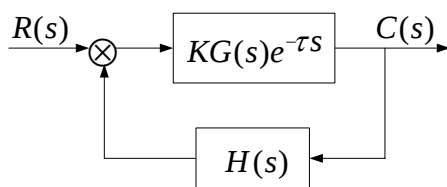


图4.15 具有纯滞后系统框图

设具有纯滞后环节的系统如图4.15所示, 其闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)e^{-\tau s}}{1 + KG(s)H(s)e^{-\tau s}}$$

闭环特征方程为

$$1 + KG(s)H(s)e^{-\tau s} = 0 \quad (4.26)$$

令 $s = \sigma + j\omega$ 可得相应的幅值方程和相角方程分别为

$$\left| \frac{K \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} \right| e^{-\tau\omega} \quad (4.27)$$

$$\sum_{i=1}^m \angle(s + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s + p_j) - \tau\omega = \pm(2k+1)\pi, k=0,1,2,\dots \quad (4.28)$$

与 (4.3) 和 (4.4) 的幅值方程与相角方程相比, 分别多了 $e^{-\tau\omega}$ 和 $-\tau\omega$ 项。显然当 $\tau=0$ 时, (4.27) 和 (4.28) 可分别化为 (4.3) 和 (4.4) 式。当 $\tau \neq 0$ 时, s 的实部和虚部将分别影响根轨迹的幅值条件和相角条件, 使系统的根轨迹具有以下的特点。

(1) 根轨迹的起点和终点

由(4.27)知,当 $K=0$ 时,除了开环极点 $-p_j$ 外, $s=-\infty$ 也是根轨迹的起点。当 $K=\infty$ 时,除了开环零点 $-z_i$ 外, $s=\infty$ 也是根轨迹的终点。

(2) 根轨迹的分支数与对称性

因为 $e^{-\tau s}$ 可用下列无穷级数表示

$$e^{-\tau s} = 1 - \tau s + \frac{1}{2!}(\tau s)^2 - \frac{1}{3!}(\tau s)^3 + \Lambda$$

所以相应的系统根轨迹有无穷多条。

同常规参数根轨迹一样,含有纯滞后环节的系统其闭环特征方程的系数为实数,因此其闭环特征根为实数或共轭复数,根轨迹对称于平面的实轴。

(3) 根轨迹的根轨迹

因为实轴上的特征根虚部为零,所以含有纯滞后环节系统在实轴上的根轨迹与根轨迹增益 K 变化时在实轴上的根轨迹分布一样。

(4) 根轨迹的渐近线

由于纯滞后环节的存在,系统根轨迹的渐近线出现在 $K=0$ 和 $K=\infty$ 处。

①当 $K=0$ 时,部分根轨迹分支起始于 $s=-\infty$ 处。由于所有开环极点和零点到 $s=-\infty$ 点的相角均为 180° ,因此由相角方程(4.28)得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \angle(s-z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s-p_j) - \tau\omega \\ = -(n-m)\pi - \tau\omega = \pm(2k+1)\pi \quad k=0,1,2,\Lambda \\ \text{当 } n-m \text{ 为奇数时:} \quad \omega = \pm\left(\frac{2k}{\tau}\right)\pi \quad k=0,1,2,\Lambda \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\text{当 } n-m \text{ 为偶数时:} \quad \omega = \pm\left(\frac{2K+1}{\tau}\right)\pi \quad k=0,1,2,\Lambda \quad (4.30)$$

式中, n 为开环有限极点数, m 为开环有限零点。

② $K=\infty$ 时,部分根轨迹分支终止于无穷远处。因而,从所有的开环极点和开环零点到 $s=\infty$ 的矢量相角均为 0° ,则由相角方程

$$0 - \tau\omega = \pm(2k+1)\pi$$

即

$$\omega = \frac{\pm(2k+1)\pi}{\tau} \quad k=0,1,2,\Lambda \quad (4.31)$$

上述表明,包含纯滞后环节系统的根轨迹渐近线不论是起始部分,还是终止部分均为平行于实轴的直线,不同之处在于渐近线与虚轴的交点 ω 。

(5) 根轨迹的分离点与会合点

根轨迹分离点和会合点由下式确定:

$$\frac{d[G(s)H(s)e^{-\tau s}]}{ds} = 0$$

即

$$[A(s)e^{-\tau s}]' B(s) - B'(s)A(s)e^{-\tau s} = 0 \quad (4.32)$$

(6) 根轨迹与虚轴的交点

由于包含纯滞后环节系统的闭环特征方程不是代数方程,所以根轨迹与虚轴的交点不能用常规参数根轨迹的方法来计算。将 $s = j\omega$ 代入相角方程 (4.28) 式, 得:

$$\sum_{i=1}^m \operatorname{arctg} \frac{\omega}{z_i} - \sum_{j=1}^n \operatorname{arctg} \frac{\omega}{p_j} = \pm(2k+1)\pi + \tau\omega \quad (4.33)$$

求解上式, 便可确定不同值时根轨迹与虚轴的交点 ω 。

同理可由幅值方程求根轨迹与虚轴相交时的临界增益 K 。即将 $s = j\omega$ 代入幅值方程 (4.27) 得

$$K = \frac{\prod_{j=1}^n |j\omega + p_j|}{\prod_{i=1}^m |j\omega + z_i|} \quad (4.34)$$

例4.9 图4.15所示系统中, 若 $G(s) = \frac{1}{s}$, $H(s) = 1$, $\tau = 1$, 试绘制系统根轨迹图。

解: 系统的特征方程为 $1 + \frac{Ke^{-s}}{s} = 0$, 根据含有纯滞后环节系统根轨迹的绘制规则, 可知:

(1) 根轨迹的起点和终点

根轨迹的起点为 $s = 0$ 及无穷远点; 根轨迹的终点为无穷远点。

(2) 根轨迹对称于实轴, 且有无穷多条。

(3) 实轴上 $(-\infty, 0)$ 区间段是根轨迹。

(4) 根轨迹的分离点

由式 (4.32) 可以求出 $s = -1$, 因为该点位于根轨迹上, 因而它是实际的根轨迹分离点, 即根轨迹的分离点为 $(-1 + j0)$ 点。

(5) 复平面上的根轨迹

为讨论复平面上根轨迹的走向, 令 $s = \sigma + j\omega$ 并带入特征方程, 得

$$\sigma + j\omega + Ke^{-(\sigma + j\omega)} = 0$$

即

$$\sigma + j\omega + Ke^{-\sigma}(\cos \omega - j\sin \omega) = 0 \quad (4.35)$$

由此可得

$$\sigma + Ke^{-\sigma} \cos \omega = 0 \quad (4.36)$$

$$\omega - Ke^{-\sigma} \sin \omega = 0 \quad (4.37)$$

当 $\omega \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 时, 由 (4.36) 式和 (4.37) 式消去 K 可得

$$\sigma = -\omega \cot \omega$$

令 ω 接近 $k\pi$, 则有

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \text{当 } \omega > 0 \text{ 时, } \lim_{\omega \rightarrow k\pi+0} \sigma = -\infty \\ & \lim_{\omega \rightarrow k\pi-0} \sigma = +\infty \\ & \lim_{\omega \rightarrow k\pi+0} \sigma = +\infty \\ \textcircled{2} \quad & \text{当 } \omega < 0 \text{ 时, } \lim_{\omega \rightarrow k\pi+0} \sigma = +\infty \\ & \lim_{\omega \rightarrow k\pi-0} \sigma = -\infty \end{aligned}$$

即 $\omega = \pm\pi, \pm2\pi, \Lambda$ 是根轨迹的渐近线。

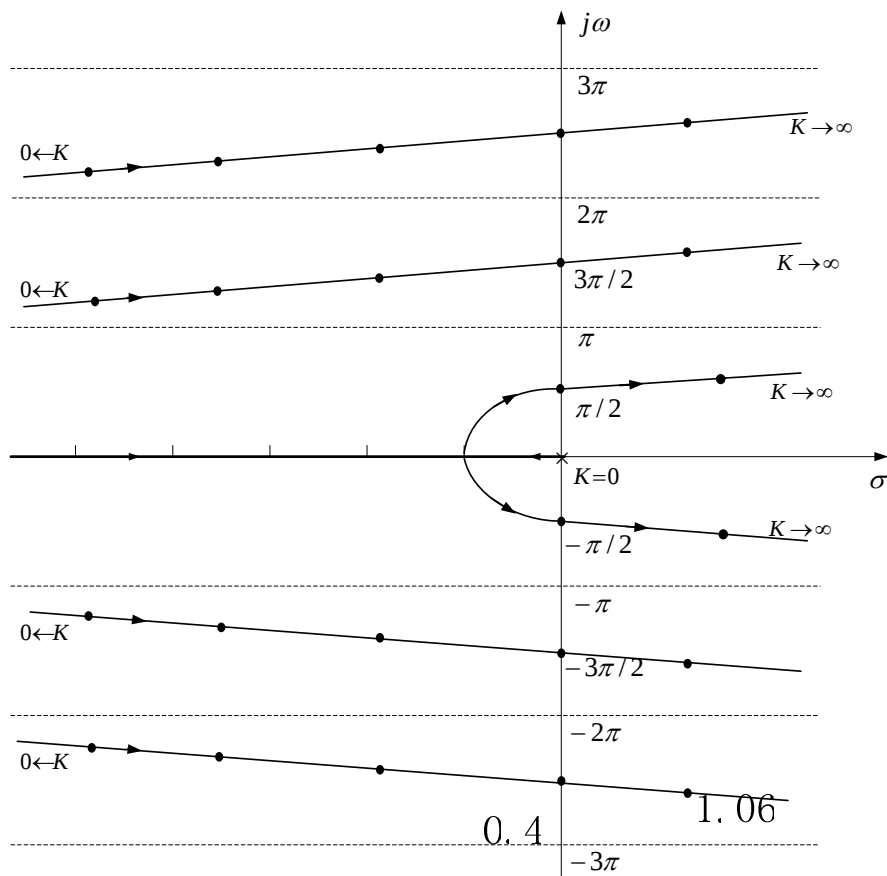


图4.16 具有纯滞后系统的根轨迹

(6) 根轨迹与虚轴的交点

令 (4.36) 中的 $\sigma = 0$ ，则 $\cos \omega = 0$ ，可得根轨迹与虚轴的交点

$$\omega = \frac{\pi}{2} \pm k\pi, k = 0, 1, 2, \Lambda$$

由上述结果可作出相应根轨迹如图4.16所示。最后，由式(4.46)和式(4.37)消去 $\sin \omega$ 和 $\cos \omega$ ，解出 K ，可得 $K = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} e^{\sigma}$ ，利用它在图4.16中将 K 的数值分度。

2.87

1.69

-1

-5

-4

-3

-2

4.4 用根轨迹法分析系统性能

至此，我们已能对系统的根轨迹进行快速的绘制。接下来要做的就是通过它来直观、快捷地分析系统性能，并对有关参数进行定量计算了。

4.4.1 闭环极点的位置与系统性能的关系

由上一章可知，系统单位阶跃响应的一般表达式为

$$C(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \Lambda + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \Lambda + a_{n-1} s + a_n} R(s)$$

$$= \frac{K \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} \times \frac{1}{s} = \frac{A_0}{s} + \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{s + p_j} \quad (4.35)$$

式中， $-z_i$ 为闭环零点， $-p_j$ 为闭环极点。其中待定系数 A_j 求法如下

$$A_j = \frac{\Lambda(s + z_i) \Lambda}{s \Lambda(s + p_j) \Lambda} (s + p_j) \Big|_{s=-p_j}$$

对 (4.35) 进行拉氏变换得系统的输出响应为

$$c(t) = A_0 + \sum_{j=1}^n A_j e^{s_j t} \quad (4.36)$$

可见，输出响应的各项系数由闭环零、极点决定。但由于系数只决定了输出响应的初值，影响相对较弱。而输出响应的形式却完全由闭环极点左右，因此闭环极点是决定系统性能的主要因素。我们知道，当系统所有的闭环极点均位于 s 左半平面时，系统才是稳定的，当极点为负实数时，它离虚轴越远，对应分量 $e^{s_j t}$ 衰减越快，系统的过渡时间就越短，响应越快。

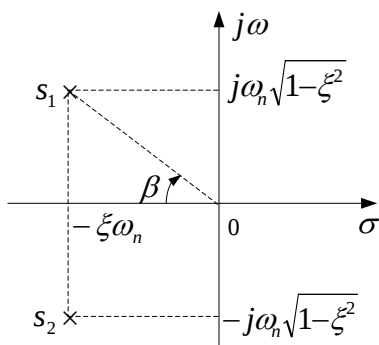


图4.17 共轭复数极点在 s 平面上的分布

对复数极点可做如下分析。设一系统的共轭复数极点分布如图4.17所示。

$s_{1,2} = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ ，则由时域分析法知

$$|s_1| = |s_2| = \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)} = \omega_n$$

$$\cos \beta = \frac{\zeta \omega_n}{\omega_n} = \zeta, \quad \beta = \arccos \zeta$$

复数极点的参数与系统阶跃响应及性能指标之间的关系为

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \beta)$$

$$\sigma \% = e^{-\zeta \pi / \sqrt{1-\zeta^2}} \%$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta \omega_n}$$

可见，闭环极点的位置与系统性能指标之间有以下关系：（1）闭环极点的实部（ $\zeta \omega_n$ ）反映了系统的过渡过程的长短；（2）闭环极点的虚部（ $\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ ）反映了系统振荡频率的快慢；（3）闭环极点与坐标原点的距离即为系统的无阻尼自然振荡角频率；（4）闭环极点与负实轴的夹角 β 决定了系统阻尼比 ζ ，进而影响系统超调量的大小。

当系统有多个闭环极点时，可利用主导极点的概念降低系统的阶次，简化系统分析。系统中的主导极点离虚轴最近，对系统暂态性能的影响最大。若主导极点与虚轴的距离远远小于其它极点与虚轴的距离，且它附近没有闭环零点，这时其它极点对系统性能的影响可忽略不计。

现在，你可以试着近似地分析系统的性能了。

例4.10 已知系统的闭环传递函数为 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{100}{(s+1)(s^2+8s+100)}$ ，试分析

系统的性能指标。

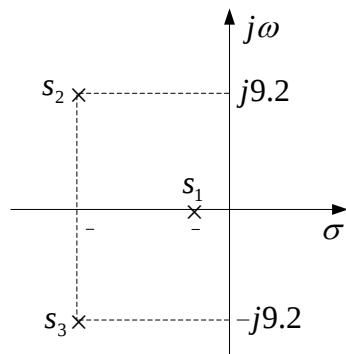


图4.18 例4.10系统极点分布

解：系统有三个闭环极点 $-p_1 = -1$ ， $-p_2 = -4 + j9.2$ ， $-p_3 = -4 - j9.2$ ，如图4.18所示。 $-p_1$ 为主导极点， $-p_2$ 、 $-p_3$ 与虚轴之间的距离是 $-p_1$ 与虚轴距离的四倍，因此可以忽略不计。则系统可以简化为一个一阶系统

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s+1}$$

系统没有超调量， $t_s = 3s$ 。

4.4.2 增加开环零、极点对系统性能的影响

由于开环零、极点的分布直接影响根轨迹的形状和走向，所以增加开环零、极点将使根轨迹的形状和走向发生改变，从而使系统性能也随之发生变化。

(1) 增加开环零点

我们以具体的例子来说明增加开环零点对系统性能的影响。设二阶系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)}$ ，增加开环零点 $-z_1 = -2$ 后的传递函数为

$G_1(s)H_1(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)}$ ，或增加开环零点 $-z_2 = -0.5$ ，这时传递函数为

$G_2(s)H_2(s) = \frac{K(s+0.5)}{s(s+1)}$ ，增加开环零点前后所对应的根轨迹如图4.19所示。

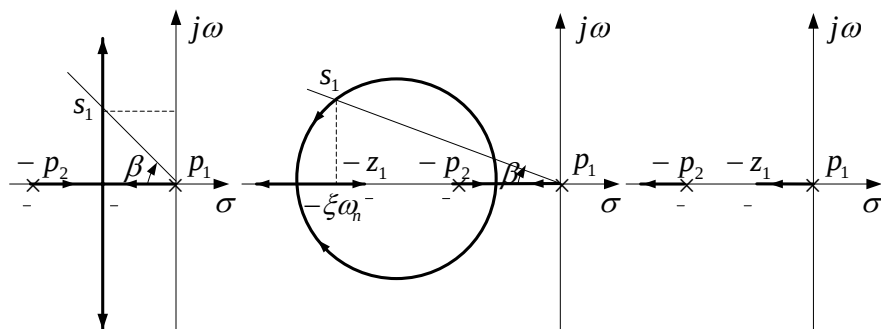


图4.19 增加开环零点前后的对比

由图4.19 (a) 图可见，没有增加开环零点时，系统的根轨迹是距离虚轴0.5单位的虚线，分别沿正负虚轴方向趋向无穷远。不管怎样选择 K 值，闭环极点都过于靠近虚轴，系统稳定性不佳，过渡时间长，快速性不好。且随着 K 值的增加， β 角增大， ζ 减小，超调量增大。当增加开环零点 $-z_1$ 时，根轨迹向左弯曲，最后进入实轴，趋于开环零点和负无穷远点。适当选择 K （图4.19 (b) 所示），可使闭环极点离开虚轴一定的距离，提高系统的快速性，且因 β 角的减小，使得系统超调量有所降低。当增加开环零点 $-z_2$ 时（图4.19 (c) 所示），无论怎样选择 K 值，闭环极点均为两个实数极点，其中主导极点离虚轴的距离总在 $0 \sim 0.5$ 之间，致使系统的过渡时间不可能缩短。

通过对上例的分析可见，选择增加合适的开环零点，可使根轨迹产生向左变化的趋势，从而改善系统的稳定性和快速性。但零点选择不当，则达不到改善系统性能指标的目的。

有时，我们也可以根据系统性能指标的要求，选择适当的开环零点，来满足系统的性能指标。

(2) 增加开环极点

与增加开环零点不同，当在系统的开环传递函数中增加极点时，会使系统的根轨迹向右弯曲，造成系统的稳定性变差。我们以具体的例子来说明系统增加开环极点对系统性能的影响。

设系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)}$ ，增加开环极点 $-p$ ($p > 1$) 后，传递函数为 $G'(s)H'(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+p)}$ ，当 p 增大时，相应的根轨迹族如图4.20所示，

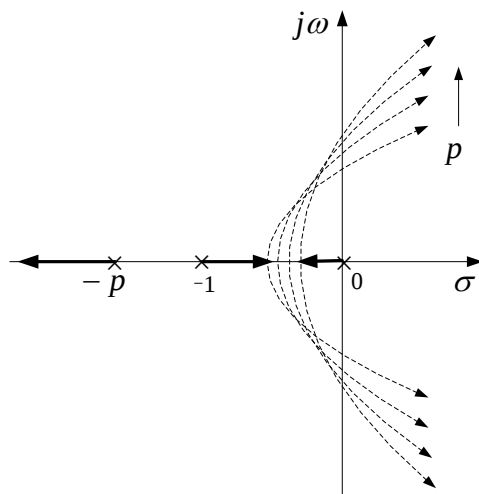


图4.20 增加开环极点后系统的根轨迹

对原系统(如图4.19a)来讲，增加开环极点 $-p$ 后，根轨迹由两条变成三条，根轨迹渐近线也增加到三条，且渐近线与实轴的夹角由 $\pm 90^\circ$ ，变为 $\pm 60^\circ$ 和 180° ，与实轴的交点也由原来的 $-1/2$ ，变为 $-(p+1)/3$ ，并随 p 值的增加越来越远离虚轴。可见，增加开环极点对系统根轨迹有以下影响：

- (1) 改变了根轨迹在实轴上的分布
- (2) 增加了根轨迹的条数，使根轨迹渐近线的条数、方向及与实轴的夹角等随之改变。
- (3) 使根轨迹的走向向右偏移，削弱了系统的稳定性。

通过增加开环零、极点对系统根轨迹影响的分析，你是否能与控制系统时域分析中增加开环零、极点对系统性能的影响相联系？

思考与习题

4.1 思考与总结下述问题。

- (1) 根轨迹的概念、根轨迹分析的意义与作用。
- (2) 在绘制根轨迹时，如何运用幅值条件与相角条件？
- (3) 归纳常规根轨迹与广义根轨迹的区别与应用条件。
- (4) 总结增加开环零、极点对系统根轨迹的影响，归纳系统需要增加开环零、极点的情况。

4.2 已知负反馈控制系统的开环传递函数，试绘制各系统的根轨迹图。

$$(1) G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+4)}$$

$$(2) G(s)H(s) = \frac{K}{(s+2)^2(s+4)}$$

$$(3) G(s)H(s) = \frac{K}{(s+2)^3}$$

4.3 已知负反馈控制系统的开环传递函数为

$$(1) G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{(s+2)(s+4)}$$

$$(2) G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+2)(s+4)}$$

$$(3) G(s)H(s) = \frac{K(s+3)^2}{s(s+2)(s+4)}$$

试绘制各系统的根轨迹图。

4.4 有一个开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(0.5s+1)}$ 的负反馈系统, 试绘制系统的根轨迹。

4.5 已知负反馈控制系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+4)}$, 试证明 $s = -1 + j\sqrt{3}$ 是该系统根轨迹上的一点, 并求出相应的 K 值。

4.6 设负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K(s+6)}{s(s+4)}$, 试证明该系统根轨迹为一圆形, 并指出其圆心和半径。

4.7 有一开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+5)(s+10)}$ 的负反馈控制系统, 试用根轨迹法求使闭环系统主导极点的衰减系数 ζ 等于 0.5 时的 K 值, 并求出此时闭环系统的特征根。

4.8 已知负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(Ts+1)}$, 试绘制 $K = 2$, $T = 0 \rightarrow \infty$ 时的系统根轨迹。

4.9 已知负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K(s+T)}{s^2(s+3)}$, 试求 $K = 1$ 时, 以 T 为参变量的根轨迹。

4.10 试绘制如图 4.21 所示系统以 τ 为参变量的根轨迹。

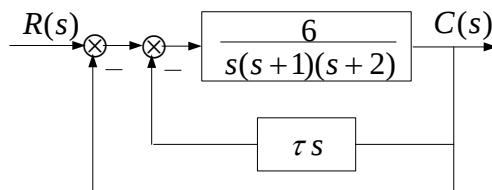


图4.21 题4.9系统结构图

4.11 已知正反馈系统开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+4)^2}$ ，试绘制系统的根轨迹。

4.12 已知系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{s^2(s+3)(s+4)}$ ，试绘制系统的正、负反馈两种根轨迹。