

《现代电路理论》

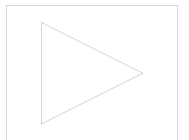
课件下载:

FTP:// 202.117.18.174

User: MCT, PW: mct

**西安交通大学
电子物理与器件研究所**

-
- 基本概念复习与回顾
 - 线性电路时域分析
 - 线性电路频域分析 (☆)
 - 运算放大器
 - 无源滤波器
 - 有源滤波器
 - 开关电容网络
 - 非线性电路分析
 - Matlab应用



● 时域分析的难点

高阶动态电路的时域分析中，遇到两个主要难点：

- ✓ 选择一个合适的变量建立描述电路的微分方程
- ✓ 确定求解该方程所需要的初始条件



避开两个难点：变换

● 变换在电路分析中的应用

变换：Fourier变换、拉普拉斯变换…

- ✓ 对正弦稳态电路，采用相量法把求解线性常系数微分方程的特解问题变换成求解复数方程的问题。
- ✓ 在对周期性非正弦稳态电路分析中，将非正弦周期电量分解为傅里叶级数，即变换成各个频率的正弦量的叠加，从而把问题变换成分析多频的正弦稳态电路问题。
- ✓ 对前面提到的高阶电路，利用数学中的拉氏变换将时域问题变换成为 s 复频域问题，从而避开前面提到两个难点。（电路的频域分析）

● 拉普拉氏变换的定义

函数的拉普拉氏变换定义为：

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (3.1)$$

上式中的积分运算完成后，结果就是 s 的函数。在实际应用中， t 代表时间，由于积分式中的指数必须是无量纲的，所以 s 必须具有时间的倒数的量纲，即频率(复频率)。

电路分析中，利用拉氏变换将电路问题从时域变换到频域，若得到了未知函数的频域表达式，通过反变换可回到时域表达式。

具体表现为：利用拉氏变换将时域的微积分方程转化为频域的代数方程，通过处理代数方程使未知量的求解过程得到简化。

数学变换的特点：建立一种新的域，简化数学运算。在找到了新域中的未知数后，再反变换到原来的域。

关于拉氏变换的一些说明

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (3.1)$$

✓ 积分是否有界，或者说是否存在拉氏变换？

从数学的角度看式(3.1)可知，一个函数 $f(t)$ 存在拉氏变换的条件是其积分应为有限值。对所有 t 只要满足条件

$$|f(t)| \leq Ke^{Mt}$$

式中， K 和 M 为两个正的有限常数，则 $f(t)$ 的拉氏变换式 $F(s)$ 总存在，因为总可以找到一个合适的 s 值，使式(3.1)中的积分为有限值。

在工程分析中有意义的初等函数都存在拉氏变换，在线性电路分析中，使用存在拉氏变换的电源激励系统，不存在拉氏变换的激励函数如 t^t 或 e^{t^2} 在电路分析中没有意义。

✓ 积分下限为零

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (3.1)$$

拉氏变换忽略了 $t < 0$ 时的 $f(t)$ ，或者说 $F(s)$ 仅由 $t > 0$ 时的 $f(t)$ 的特性决定。式(3.1)的拉氏变换常被称为单边拉氏变换。

✓ 当 $f(t)$ 在原点不连续时，积分下限问题

考虑到 $t=0$ 时刻 $f(t)$ 中可能含有冲激函数 $\delta(t)$ ，选 0_- 为积分下限。

● 阶跃函数与冲激函数

实际中可能会遇到在 origin 不连续或有跳变的函数，如暂态特性，开关的动作会使电流或电压产生突变，如果引入阶跃或冲激函数，就可以用数学的方法表达这种不连续性。

✓ 阶跃函数

阶跃函数如图3-1所示，当 $t < 0$ 时其值为零，其符号为 $Ku(t)$ 。数学定义为：

$$\begin{aligned} Ku(t) &= 0, & t < 0 \\ Ku(t) &= K, & t > 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

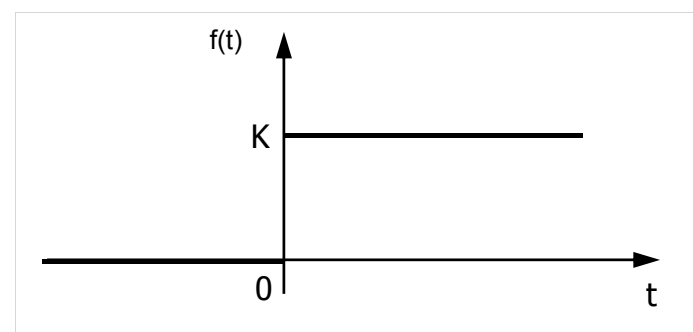


图3-1 阶跃函数

$$\begin{aligned} Ku(t) &= 0, & t < 0 \\ Ku(t) &= K, & t > 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

若 $K=1$ ，则式(3.2)定义的函数就成为单位阶跃函数。

阶跃函数在 $t=0$ 时无定义，当需要定义 0_- 与 0_+ 之间的过渡过程时，

一般假设函数是线性的，并且

有： $Ku(t) = 0.5K$ 。从 0_- 到 0_+ 的

线性变换过程如图3-2所示。

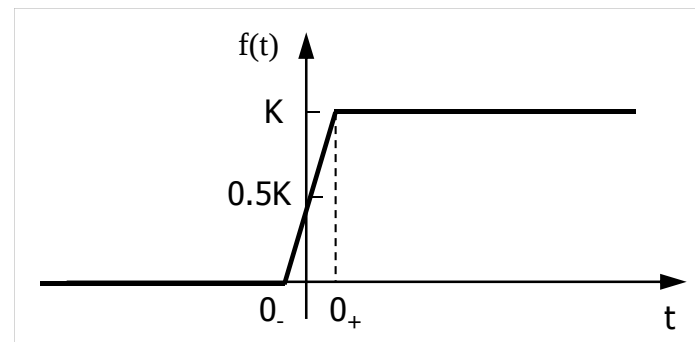


图3-2 阶跃函数的线性近似

不连续点也可能出现在 t 不等于零处，在 $t=a$ 处出现的阶跃函数表示为 $Ku(t-a)$ ，即：

$$\begin{aligned} Ku(t-a) &= 0, & t < a \\ Ku(t-a) &= K, & t > a \end{aligned} \quad (3.3)$$

若 $a > 0$ ，阶跃出现在原点的右侧，否则出现在左侧。式(3.3)的函数如图3-3所示。

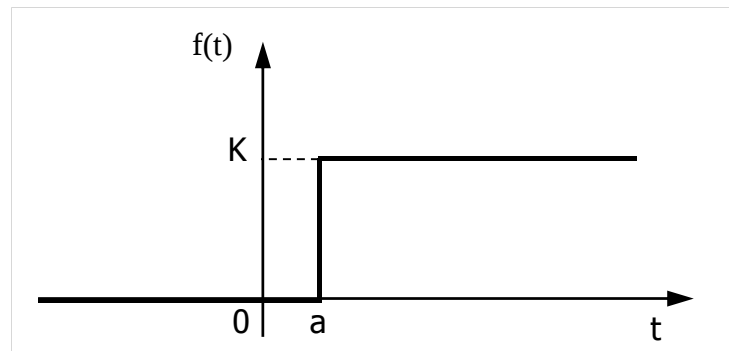


图3-3 在 a 处出现的阶跃函数($a > 0$)

当 $t < a$ 时，阶跃函数的值为 K ，这种函数表示为 $Ku(t-a)$ ，因此：

$$\begin{aligned} Ku(a-t) &= K, & t < a \\ Ku(a-t) &= 0, & t > a \end{aligned} \quad (3.4)$$

当 $a < 0$ 时，间断点出现在原点的左侧。式(3.4)的函数如图3-4所示。

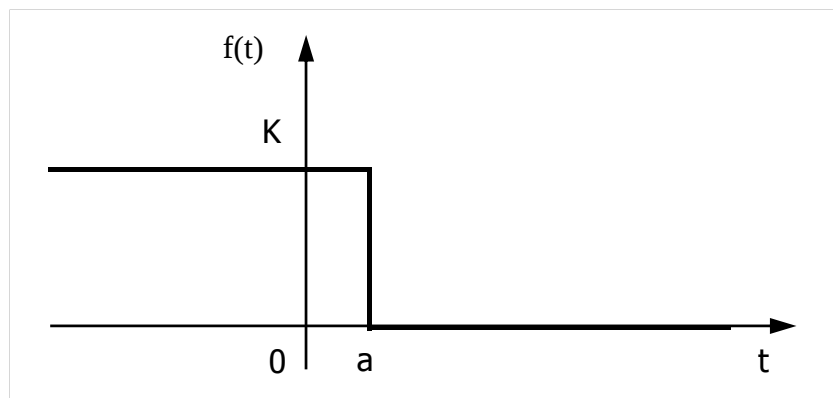


图3-4 阶跃函数 $Ku(a-t)$ ($a > 0$)

阶跃函数的应用

利用阶跃函数可以写出在整个正半轴上有定义、且连续有界的函数的数学表达式。如电路分析中非常有用的有限宽度脉冲，可以用两个阶跃函数来表示。

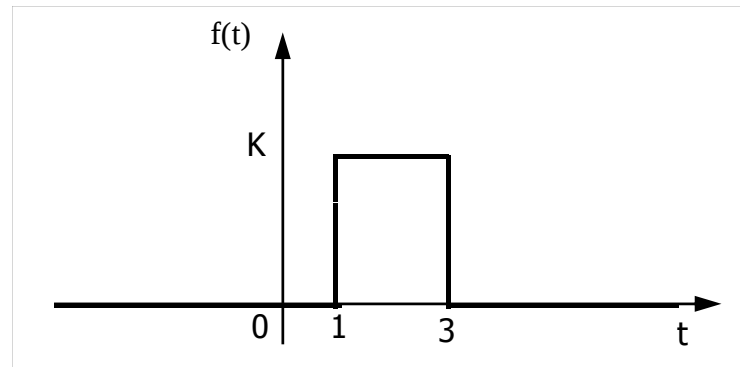
$$f(t) = K[u(t-1) - u(t-3)] \quad (3.5)$$

上式在 $1 < t < 3$ 时，其值为 K ，在其他处其值为零。

因此， $f(t)$ 代表一个高度为 K ，从 $t=1$ 处开始，在 $t=3$ 时结束的有限脉冲。

$$f(t) = K[u(t-1) - u(t-3)]$$

对上述用阶跃函数定义的脉冲, 可以将函数 $u(t-1)$ 看做在 $t=1$ 时常数值 K 的开关闭合, 而阶跃函数 $-u(t-3)$ 可以看做在 $t=3$ 时常数值 K 的开关打开。



✓ 冲激函数

当函数存在有界间断点时，如图3-5(a)所示，函数的导数在间断点处没有定义，可以用冲激函数的概念定义间断点的导数，并因此定义了导数的拉氏变换。

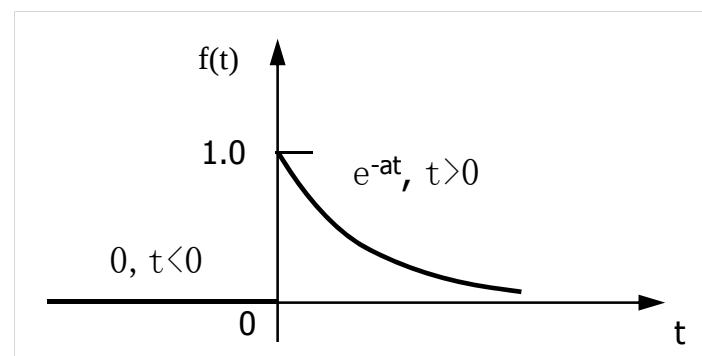


图3-5(a) $f(t)$ 在原点不连续

冲激函数为连续区间内为零，具有无穷间断点的信号。自然界中并不存在，但一些电路信号与这种定义非常接近，其数学模型非常有用，如电路分析中开关操作或电路中加入冲激函数会出现冲激电压或电流。

为了定义函数在间断点的斜率，先假设函数通过间断点时是线性变化的，如图3-5(b)所示。可以看出，当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时，在原点处出现了突变间断点，对函数取微分后，在 $-\varepsilon$ 与 $+\varepsilon$ 之间的斜率为常数 $1/2\varepsilon$ ， $t > \varepsilon$ 时斜率为 $-ae^{-a(t-\varepsilon)}$ ，用曲线表示如图3-6所示。

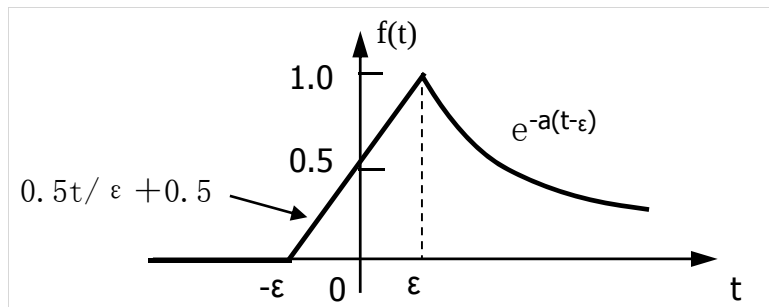


图3-5(b) 图3-5(a)中间断点的放大图，
假设 $\pm \varepsilon$ 间为线性变化

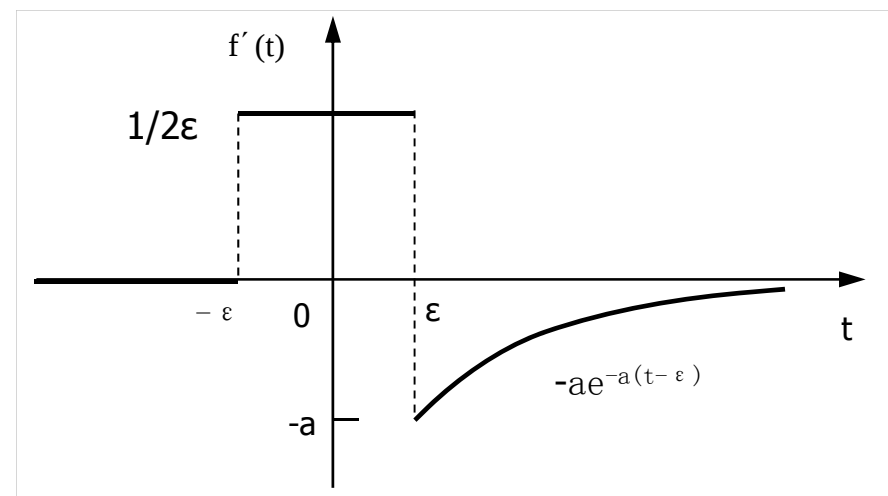
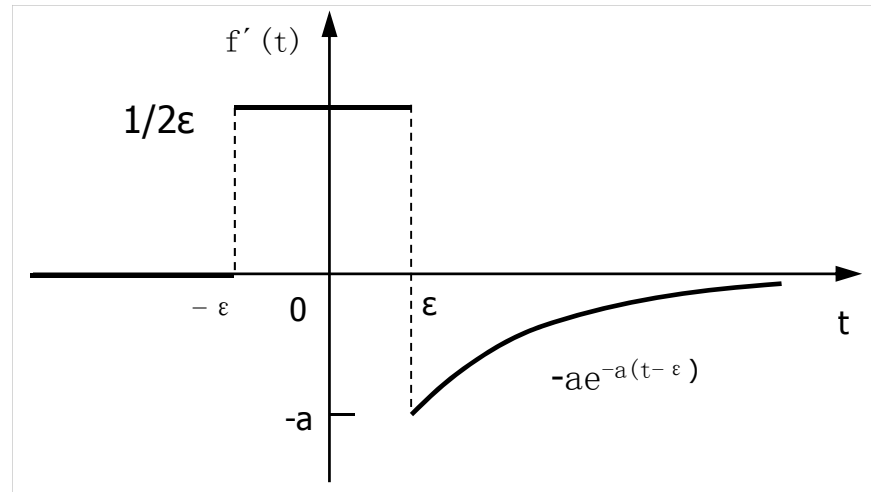


图3-6 图3-5(b)函数的导数



- 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 在 $-\epsilon$ 与 $+\epsilon$ 之间, $f'(t)$ 的值趋于无穷大同时这个大值的持续时间也趋于零。
- 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 在 $-\epsilon$ 与 $+\epsilon$ 之间, $f'(t)$ 下的面积保持常数, 在此面积为 1。
- 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 在 $-\epsilon$ 与 $+\epsilon$ 之间的函数趋近于单位冲激函数, 用 $\delta(t)$ 表示。

因此，当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时，函数 $f(t)$ 的导数在原点处趋于单位冲激函数，数学上表示为：

$$f'(0) = \delta(t), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

若冲激函数曲线下的面积不等于1，则冲激函数表示为 $K \delta(t)$ ，其中 K 为面积，代表冲激函数的强度。

冲激函数是由可变参数函数中的参数趋于零时形成的，当参数趋近于零时，可变参数函数表现出以下三大特性：

- 幅值趋于无穷大。
- 函数的持续时间趋于零。
- 当参数变换时，函数下的面积为常数。

另一种具有上述特性的可变参数指数函数：

$$f(t) = \frac{K}{2\varepsilon} e^{-|t|/\varepsilon} \quad (3.7)$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时，函数在原点变为无穷大，同时在无穷短时间内，函数衰减至零。图3-7表明了 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时 $f(t)$ 的特点，可以证明函数下面的面积与 ε 无关，且为常数 K 。

因此，当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时
 $f(t) \rightarrow K \delta(t)$ ，即产生的
是冲激函数。

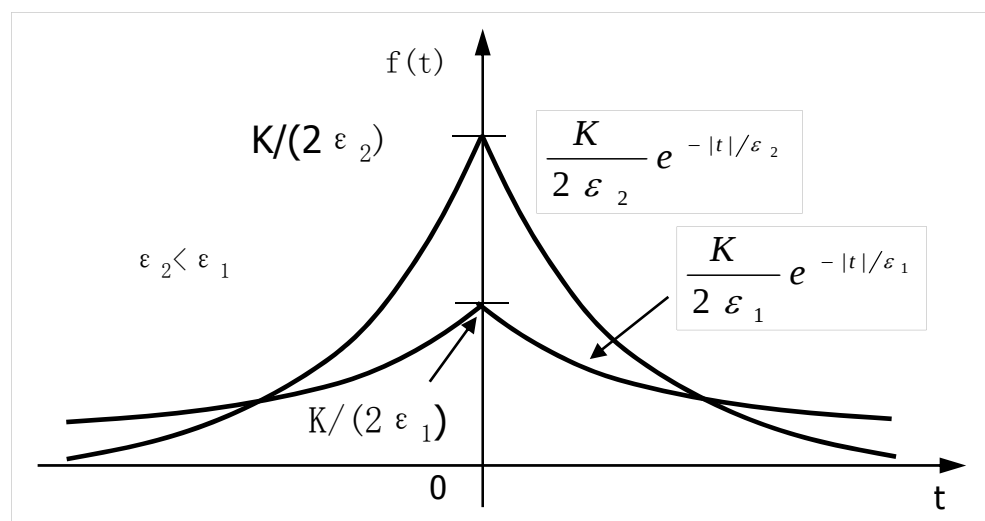


图3-7 用于生成冲激函数的变参数函数

冲激函数在数学中定义为：

$$\int_{-\infty}^{\infty} K \delta(t) dt = K \quad (3.8)$$

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0 \quad (3.9)$$

式(3.8)说明了冲激函数下的面积为常数，该面积代表了冲激强度，

式(3.9)说明在 $t \neq 0$ 的任何时候，冲激函数值均为零，在 $t = a$ 处出现的冲激表示为 $K \delta(t - a)$ 。

冲激函数的图形表示为一箭头，其强度用靠近箭头的数值给出，图3-8给出了冲激函数 $K \delta(t)$ 和 $K \delta(t - a)$ 。

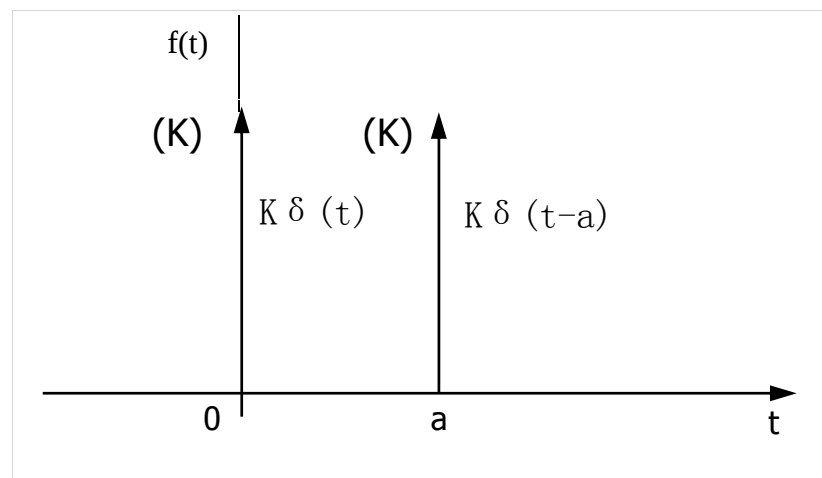


图3-8 冲激函数 $K \delta(t)$ 和 $K \delta(t - a)$ 的图形表示

冲激函数的筛选特性：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a) \quad (3.10)$$

上式表明冲激函数筛选掉了 $t=a$ 以外所有的 $f(t)$ 的值。式(3.10)的积分结果推导如下：

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(t)\delta(t-a)dt$$

由于 $f(t)$ 在 a 处连续，当 $t \rightarrow a$ 时，其取值为 $f(a)$ ，因此：

$$I = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(t)\delta(t-a)dt = f(a) \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \delta(t-a)dt = f(a) \quad (3.11)$$

冲激函数的微分及高阶微分的拉氏变换：

图3-9(a)说明了当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时冲激函数的过程。图3-9(b)表示了冲激函数微分生成的函数，也就是当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时冲激函数的微分 $\delta'(t)$ 。

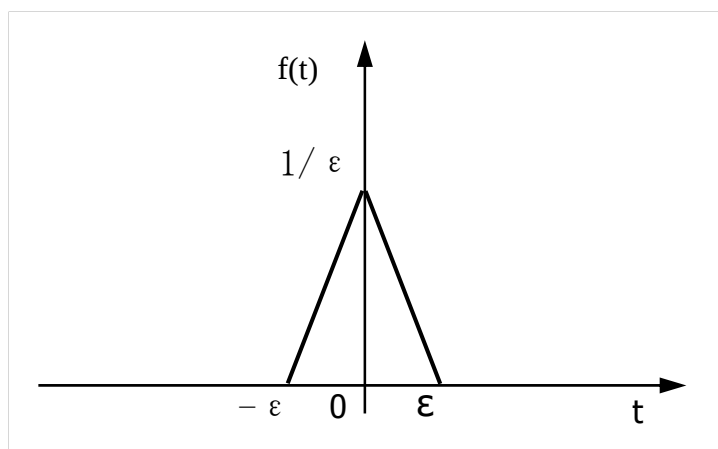


图3-9(a) 用于定义一阶微分的
冲激模型函数

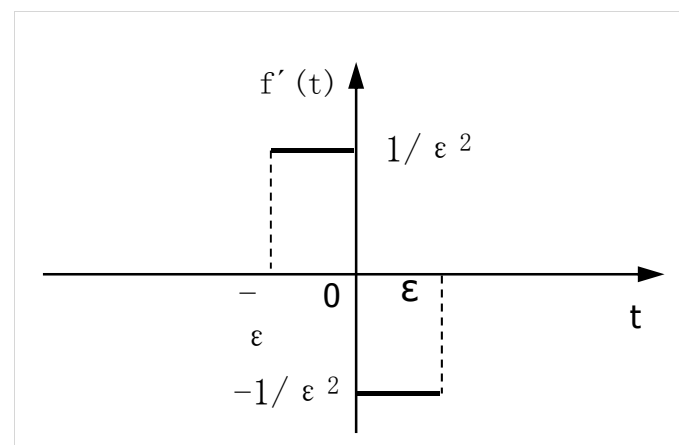
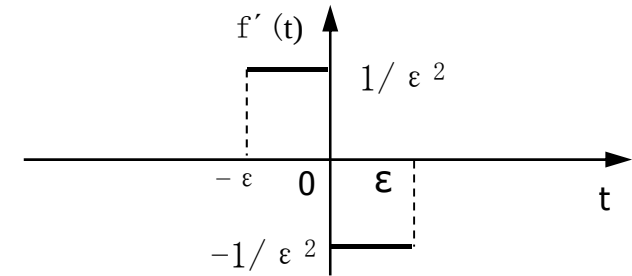


图3-9(b) 冲激模型函数的一阶导数，
当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时为 $\delta'(t)$

$\delta'(t)$ 的拉氏变换求解如下：

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}\{\delta'(t)\} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\varepsilon}^{0^-} \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-st} dt + \int_{0^+}^{\varepsilon} \left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\right) e^{-st} dt \right] \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{s\varepsilon} + e^{-s\varepsilon} - 2}{s\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{se^{s\varepsilon} - se^{-s\varepsilon}}{2s\varepsilon} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{s^2 e^{s\varepsilon} + s^2 e^{-s\varepsilon}}{2s} \\
 &= s
 \end{aligned}$$



(3.13)

与一阶微分的生成方法一样，也可生成高阶微分，并确定其拉氏变换。对冲激函数的 n 阶微分，其拉氏变换为 s^n ，即：

$$\mathcal{L}\{\delta^{(n)}(t)\} = s^n \tag{3.14}$$

冲激函数可以看做阶跃函数的导数，即：

$$\delta(t) = \frac{du}{dt} \quad (3.15)$$

上式的图形解释如图3-10所示。当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时，图3-10(a)中的函数趋近于阶跃函数。图3-10(b)中的函数在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时趋于单位冲激函数。

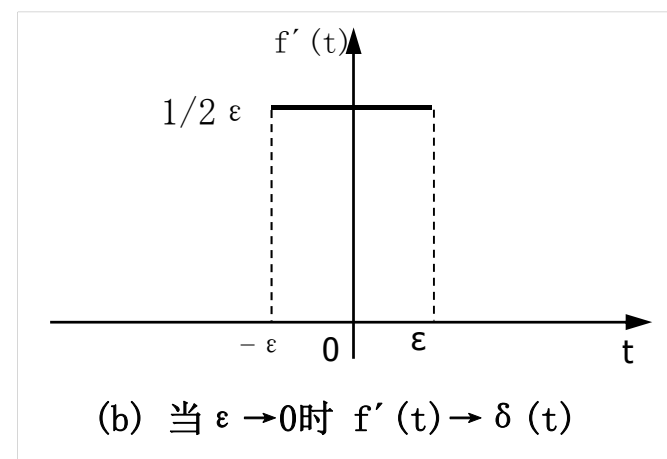
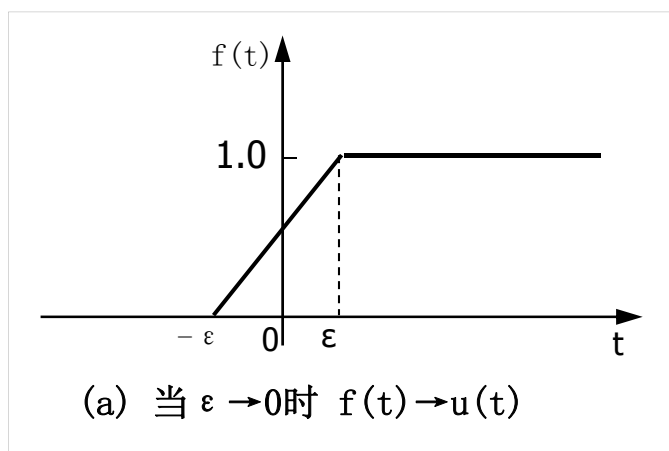


图3-10 阶跃函数的导数：冲激函数

引入冲击函数的目的：

求函数的拉氏变换时将不连续的原点包含到积分限中。

● 函数变换

函数变换是典型时域函数的拉氏变换，通过对函数进行拉氏变换，即可得到函数变换对。

✓ 冲激函数的拉氏变换

冲激函数的拉氏变换为1，即：

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0_-}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (3.16)$$

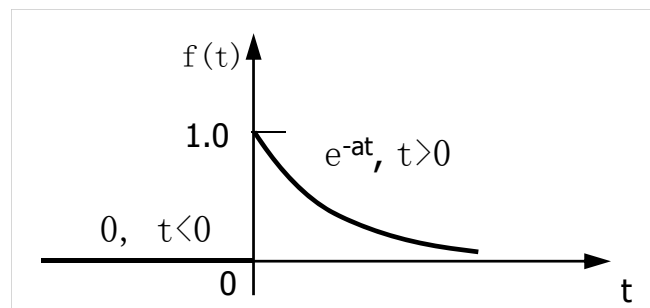
✓ 单位阶跃函数的拉氏变换

对前面图3-10(a)所示单位阶跃函数，其拉氏变换为：

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_{0_-}^{\infty} u(t)e^{-st} dt = \int_{0_+}^{\infty} 1e^{-st} dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{0_+}^{\infty} = \frac{1}{s} \quad (3.17)$$

✓ 衰减指数函数的拉氏变换

衰减指数函数 e^{-at} ($t>0$)的拉氏变换为：



$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \int_{0_+}^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_{0_+}^{\infty} e^{-(a+s)t} dt = \frac{1}{s+a} \quad (3.18)$$

✓ 正弦函数的拉氏变换

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \int_{0_-}^{\infty} (\sin \omega t) e^{-st} dt = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (3.19)$$

$$\int_{0_-}^{\infty} (\sin \omega t) e^{-st} dt = \int_{0_-}^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right) e^{-st} dt$$

✓ 电路分析中的一些拉氏变换对(表3-1)



表3-1 拉氏变换对

函数类型	函数表达式 $f(t)$ ($t > 0$)	拉氏变换结果 $F(s)$
冲激函数	$\delta(t)$	1
阶跃函数	$u(t)$	$1/s$
斜坡函数	t	$1/s^2$
指数函数	e^{-at}	$1/(s + a)$
正弦函数	$\sin \omega t$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$
余弦函数	$\cos \omega t$	$s / (s^2 + \omega^2)$
衰减斜坡函数	te^{-at}	$1/(s + a)^2$
衰减正弦函数	$e^{-at}\sin \omega t$	$\omega / ((s + a)^2 + \omega^2)$
衰减余弦函数	$e^{-at}\cos \omega t$	$(s + a) / ((s + a)^2 + \omega^2)$

● 算子变换

算子变换说明如何将 $f(t)$ 或 $F(s)$ 的数学算子转化为其对应域的函数。

重要的初等变换包括：

1) 乘以常数

2) 加减

3) 微分

4) 积分

5) 时域平移

6) 频域平移

7) 尺度变换



表3-2 算子变换简表

算 子	函数 $f(t)$	$F(s)$
乘以常数	$Kf(t)$	$KF(s)$
加 减	$f_1(t) + f_2(t) - f_3(t) + \dots$	$F_1(s) + F_2(s) - F_3(s) + \dots$
一阶微分(时域)	$df(t)/dt$	$sF(s) - f(0_-)$
二阶微分(时域)	$d^2f(t)/dt^2$	$s^2F(s) - sf(0_-) - df(0_-)/dt$
n阶微分(时域)	$d^n f(t)/dt^n$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0_-) - s^{n-2}df(0_-)/dt - s^{n-3}d^2f(0_-)/dt^2 - \dots - d^{n-1}f(0_-)/dt^{n-1}$
时域积分	$\int_0^t f(x) dx$	$F(s)/s$
时移	$f(t-a)u(t-a), a>0$	$e^{-as}F(s)$
频移	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
尺度变换	$f(at), a>0$	$1/aF(s/a)$
一阶微分(s域)	$tf(t)$	$-dF(s)/ds$
n阶微分(s域)	$t^n f(t)$	$(-1)^n d^n F(s)/ds^n$
s域积分	$f(t)/t$	$\int_s^\infty F(u) du$

● 拉氏变换的应用

用拉氏变换求解表示集总参数电路特性的普通微积分方程。对图3-11所示电路，假设在开关打开时，电路中没有初始储能，求当 $t \geq 0$ 时电路的时域响应。

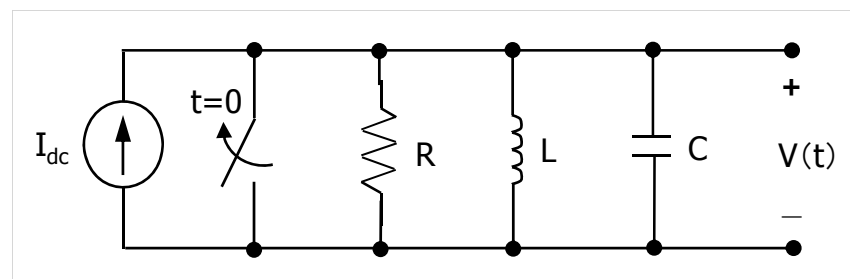


图3-11 并联RLC电路

列写节点电压方程得到 $v(t)$ 满足的微积分方程如下：

$$\frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v(x) dx + C \frac{dv(t)}{dt} = I_{dc} u(t) \quad (3.20)$$

$$\frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v(x) dx + C \frac{dv(t)}{dt} = I_{dc} u(t) \quad (3.20)$$

对上式直接进行拉氏变换，将其转化为s域的方程的：

$$\frac{V(s)}{R} + \frac{1}{L} \frac{V(s)}{s} + C[sV(s) - v(0_-)] = I_{dc} \frac{1}{s} \quad (3.21)$$



方程(3.21)中只有V(s)为未知量，假设电路参数R, L, C以及电源电流已知，因初始储能为零，所以电容的初始电压v(0₋)为零，问题简化为求解代数方程，其解为：

$$V(s) = \frac{I_{dc}/C}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)} \quad (3.22)$$

$$V(s) = \frac{I_{dc}/C}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)} \quad (3.22)$$

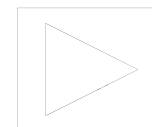
通过对 $V(s)$ 进行拉氏反变换即可求得 $v(t)$ 为：

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\} \quad (3.23)$$

求解微分方程的问题转化为求解

代数方程，进而求拉氏反变换。

问题：如何简单求拉氏反变换？



$$V(s) = \frac{I_{dc}/C}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)} \quad (3.22)$$

式(3.22) 中 $V(s)$ 表达式为 s 的有理函数即为两个 s 多项式之比，在多项式中不会出现 s 的非整数次方。如果能求出 s 的有理函数的反变换，就可求出电流和电压的时域表达式。

需要求反变换的 s 函数的一般形式为：

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0} \quad (3.24)$$

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0} \quad (3.24)$$

上式中系数a和b是实常数，指数m和n为正整数。若 $m > n$ ，则 $N(s)/D(s)$ 为有理真分式，若 $m \leq n$ ，则称为有理假分式。

上述s函数的拉氏反变换可用部分分式展开法求得，有以下两种方法：

- 部分分式展开：有理真分式
- 部分分式展开：假分式

● 部分分式展开：有理真分式

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

对每个 $D(s)$ 的根，有理真分式可以展开为部分分式之和。在进行部分分式展开之前，应对 $D(s)$ 进行因式分解，对每个 $D(s)$ 的不等根，部分分式之和中就会出现一项，对 $D(s)$ 的 n 阶重根，展开式中就会含有 n 项。

例如对真分式：

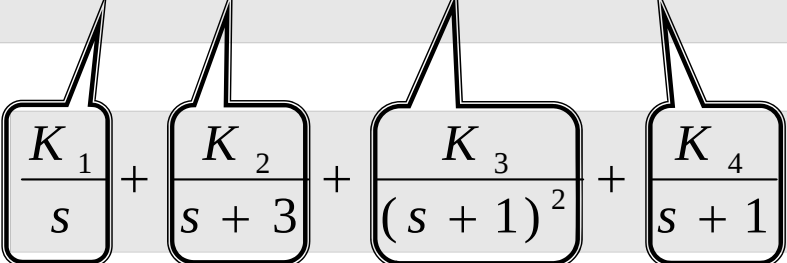
$$\frac{s+6}{s(s+3)(s+1)^2}$$

分母有4个根：两个独立根 $s=0$ ， $s=-3$ ，一个二阶重根 $s=-1$

其展开式的形式为：

$$\frac{s+6}{s(s+3)(s+1)} \equiv \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+3} + \frac{K_3}{(s+1)^2} + \frac{K_4}{s+1} \quad (3.25)$$

部分分式法的关键就是找到展开式中每一项所对应的时域函数 $f(t)$ ，
从而利用拉氏变换对表3-1，就可简单地得到反变换：

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+6}{s(s+3)(s+1)}\right\} = (K_1 + K_2 e^{-3t} + K_3 t e^{-t} + K_4 e^{-t})u(t) \quad (3.26)$$


这样一来只剩下确定部分分式展开式中的系数($K_1, K_2, K_3, K_4 \dots$)。针对 $D(s)$ 所具有的根的特点，有下面四种可能的情况。

- 部分分式展开式： $D(s)$ 具有独立的实根
- 部分分式展开式： $D(s)$ 具有不等的复根
- 部分分式展开式： $D(s)$ 具有实重根
- 部分分式展开式： $D(s)$ 具有多重复数根

✓ 部分分式展开式: $D(s)$ 具有独立的实根

展开式中的系数 K 的求解步骤:

- 1) 在方程两边同乘一个待求 K 值所对应的分母因式
- 2) 令 s 等于所乘因式的根, 计算方程两边的值, 右边为待求的 K , 左边为其值
- 3) 验算计算结果: 选择几个 s 值, 方程两边应相等

例如：

$$F(s) = \frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)} \equiv \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+8} + \frac{K_3}{s+6} \quad (3.27)$$

求 K_1 ：两边同乘 s ，计算 $s=0$ 时方程两边的值

$$\left. \frac{96(s+5)(s+12)}{(s+8)(s+6)} \right|_{s=0} \equiv \left. \left(K_1 + \frac{K_2 s}{s+8} + \frac{K_3 s}{s+6} \right) \right|_{s=0} \Rightarrow K_1 = 120$$

求 K_2 ：两边同乘 $s+8$ ，计算 $s=-8$ 时方程两边的值

$$\left. \frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+6)} \right|_{s=-8} \equiv K_2 = -72$$

求 K_3 ：两边同乘 $s+6$ ，计算 $s=-6$ 时方程两边的值

$$\left. \frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)} \right|_{s=-6} \equiv K_3 = 48$$

$$F(s) = \frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)} \equiv \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+8} + \frac{K_3}{s+6} \quad (3.27)$$

将所求K值代入式(3.27)得：

$$F(s) = \frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)} \equiv \frac{120}{s} + \frac{48}{s+6} - \frac{72}{s+8} \quad (3.28)$$

验算：

s 为任何值时上式两边都应相等。如选 $s=-5$ 和 $s=-12$ 时，左边=0，右边=0。

从而，式(3.28)的拉氏反变换为：

$$1/s \Leftrightarrow u(t)$$

$$1/(s+a) \Leftrightarrow e^{-at}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)} \right\} = (120 + 48e^{-6t} - 72e^{-8t})u(t)$$

✓ 部分分式展开式: $D(s)$ 具有不等的复根

展开式中的系数 K 的求解和独立实根时的求解方法相同。

例如对:

$$F(s) = \frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)} \equiv \frac{K_1}{s+6} + \frac{K_2}{s+3-j4} + \frac{K_3}{s+3+j4} \quad (3.29)$$

其系数为:

$$\begin{aligned} K_1 &= \left. \frac{100(s+3)}{(s^2+6s+25)} \right|_{s=-6} = -12 \\ K_2 &= \left. \frac{100(s+3)}{(s+6)(s+3+j4)} \right|_{s=-3+j4} = 6 - j8 = 10 e^{-j53.13^\circ} \\ K_3 &= \left. \frac{100(s+3)}{(s+6)(s+3-j4)} \right|_{s=-3-j4} = 6 + j8 = 10 e^{j53.13^\circ} \end{aligned}$$

从而，式(3.29)的拉氏反变换为：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{12}{s+6} + \frac{10e^{-j53.13^\circ}}{s+3-j4} + \frac{10e^{j53.13^\circ}}{s+3+j4}\right\} \quad (3.30) \\ &= (-12e^{-6t} + 10e^{-j53.13^\circ}e^{-(3-j4)t} + 10e^{j53.13^\circ}e^{-(3+j4)t})u(t)\end{aligned}$$

注意到 K_2 ， K_3 为共轭复数以及式(3.30)中复数的成对出现， K_2 的计算可以简化为只计算一个，同时将式(3.30)中的虚数相加并消掉得：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)}\right\} &= (-12e^{-6t} + 10e^{-j53.13^\circ}e^{-(3-j4)t} + 10e^{j53.13^\circ}e^{-(3+j4)t})u(t) \quad (3.31) \\ &= [-12e^{-6t} + 20e^{-3t}\cos(4t - 53.13^\circ)]u(t)\end{aligned}$$

考虑到 $D(s)$ 含共轭复根的情况经常出现在集总参数线性电路分析中，对此类计算通过一个新的变换来进行。

展开式中含有共轭复数的项可写为：

$$\frac{K}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K^*}{s + \alpha + j\beta} \quad (3.32)$$

其中系数一般为复数，极数形式为：

$$\begin{aligned} K &= |K| e^{j\theta} = |K| \angle \theta^\circ \\ K^* &= |K| e^{-j\theta} = |K| \angle -\theta^\circ \end{aligned} \quad (3.33)$$

式(3.32)的拉氏反变换总具有如下的形式：

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K^*}{s + \alpha + j\beta} \right\} = 2|K|e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta)u(t) \quad (3.34)$$

注意：

系数K与分母项 $s + \alpha - j\beta$ 对应，系数 K^* 与分母项 $s + \alpha + j\beta$ 对应。

✓ 部分分式展开式: $D(s)$ 具有实重根

系数确定方法:

为求与 r 阶重根相对应项的系数, 将方程两边同乘以重根多项式的 r 次方, 再令 s 等于重根, 计算方程两边的值得到一个系数。剩下的 $r-1$ 个系数, 通过对方程两边求导 $r-1$ 次, 并在每次微分后计算重根处方程两边的值, 得到相应的系数。

例如下式即具有实重根:

$$F(s) = \frac{100(s+25)}{s(s+5)^3} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+5)^3} + \frac{K_3}{(s+5)^2} + \frac{K_4}{(s+5)} \quad (3.35)$$

其系数求解如下：

$$F(s) = \frac{100(s+25)}{s(s+5)^3} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+5)^3} + \frac{K_3}{(s+5)^2} + \frac{K_4}{(s+5)} \quad (3.35)$$

$$K_1 = \left. \frac{100(s+25)}{(s+5)^3} \right|_{s=0} = 20$$

$$\left. \frac{100(s+25)}{s} \right|_{s=-5} = \left[\frac{K_1(s+5)^3}{s} + K_2 + K_3(s+5) + K_4(s+5)^2 \right] \Big|_{s=-5} \Rightarrow K_2 = -400$$

$$\left. \frac{d}{ds} \left[\frac{100(s+25)}{s} \right] \right|_{s=-5} = \left. \frac{d}{ds} \left[\frac{K_1(s+5)^3}{s} + K_2 + K_3(s+5) + K_4(s+5)^2 \right] \right|_{s=-5} \Rightarrow K_3 = -100$$

$$\left. \frac{d}{ds} \left[\frac{100(-25)}{s^2} \right] \right|_{s=-5} = \left. \frac{d}{ds} \left[\frac{K_1(s+5)^2(2s-5)}{s^2} + 0 + K_3 + 2K_4(s+5) \right] \right|_{s=-5} \Rightarrow K_4 = -20$$

(3.36)

从而，式(3.35)的拉氏反变换为：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{100(s+25)}{s(s+5)^3} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{20}{s} - \frac{400}{(s+5)^3} - \frac{100}{(s+5)^2} - \frac{20}{(s+5)} \right\} \\ &= (20 - 200t^2e^{-5t} - 100te^{-5t} - 20e^{-5t})u(t) \end{aligned} \quad (3.37)$$

✓ 部分分式展开式: $D(s)$ 具有多重复数根

系数确定方法:

与求具有重实根的处理方法相同, 仅是运算中含有复数, 考虑到复数根总是以共轭形式出现, 且对应的系数也为共轭复数对, 只需计算 K 的一半。

例如下面部分分式展开式即具有多重复数根:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{768}{(s^2 + 6s + 25)^2} = \frac{768}{(s+3-j4)^2(s+3+j4)^2} \\ &= \frac{K_1}{(s+3-j4)^2} + \frac{K_2}{(s+3-j4)} + \frac{K_1^*}{(s+3+j4)^2} + \frac{K_2^*}{(s+3+j4)} \end{aligned} \quad (3.38)$$

其系数求解如下：

$$\begin{aligned} K_1 &= \left. \frac{768}{(s+3+j4)^2} \right|_{s=-3+j4} = -12 \\ K_2 &= \frac{d}{ds} \left[\frac{768}{(s+3+j4)^2} \right] \bigg|_{s=-3+j4} = -j3 = 3\angle -90^\circ \\ K_1^* &= -12 \quad K_2^* = j3 = 3\angle 90^\circ \end{aligned} \quad (3.39)$$

从而，式(3.38)的展开式为：

$$F(s) = \left[\frac{-12}{(s+3-j4)^2} + \frac{-12}{(s+3+j4)^2} \right] + \left[\frac{3\angle -90^\circ}{(s+3-j4)} + \frac{3\angle 90^\circ}{(s+3+j4)} \right] \quad (3.40)$$

相应的拉氏反变换为：

$$f(t) = [-24te^{-3t} \cos 4t + 6e^{-3t} \cos(4t - 90^\circ)]u(t) \quad (3.41)$$

✓ 常用的四个有用的变换对

在大多数电路分析中，重根的阶数很少会大于2，用表3-3所示的四个变换对就可以求出分式的拉氏反变换。

表3-3 四个有用的拉氏变换

序号	根的形式	$F(s)$	$F(t)$
1	单实根	$\frac{K}{s + a}$	$Ke^{-at}u(t)$
2	重实根	$\frac{K}{(s + a)^2}$	$Kte^{-at}u(t)$
3	单复根	$\frac{K}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K^*}{s + \alpha + j\beta}$	$2 K e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta)u(t)$
4	重复根	$\frac{K}{(s + \alpha - j\beta)^2} + \frac{K^*}{(s + \alpha + j\beta)^2}$	$2t K e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta)u(t)$

● 部分分式展开：假分式

对假分式，可将其展开为一个多项式与有理真分式之和。多项式可以反变换为冲激函数和高阶冲激偶，而真分式的反变换可采用前面的方法。

例如：

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s^4 + 13s^3 + 66s^2 + 200s + 300}{s^2 + 9s + 20} \\ &= s^2 + 4s + 10 + \frac{30s + 100}{s^2 + 9s + 20} \\ &= s^2 + 4s + 10 - \frac{20}{s + 4} + \frac{50}{s + 5} \end{aligned} \quad (3.42)$$

从而，其拉氏反变换为：

$$f(t) = \frac{d^2 \delta(t)}{dt^2} + 4 \frac{d\delta(t)}{dt} + 10\delta(t) - (20e^{-4t} - 50e^{-5t})u(t) \quad (3.43)$$

● $F(s)$ 的零点和极值

前面的(3.24)也可表示为两个多项式因式分解的比, 即:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0} \\ &= \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_n)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} \end{aligned} \quad (3.44)$$

其中 K 为常数 a_n/b_m 。

极点: 分母多项式的根 $-p_1, -p_2, -p_3, \cdots, -p_m$ 称为 $F(s)$ 的极点, 当 s 为这些值时, 函数 $F(s)$ 趋于无穷大。

零点: 分子多项式的根 $-z_1, -z_2, -z_3, \cdots, -z_n$ 称为 $F(s)$ 的零点, 这些值使函数 $F(s)$ 的值为零。

零点和极点的复平面表示

可以将 $F(s)$ 的零点和极点看做 s 平面上，考虑到多项式的根可能为复数，在复平面中用横轴表示 s 的实部的值，纵轴表示 s 的虚部的值。

例如，对下面的函数 $F(s)$ ：

$$F(s) = \frac{10(s+5)(s+3-j4)(s+3+j4)}{s(s+10)(s+6-j8)(s+6+j8)} \quad (3.46)$$

其极点为 $0, -10, -6+j8, -6-j8$ 。零点为 $-5, -3+j4, -3-j4$ 。有限 s 平面内的零点和极点图如图3-12所示，图中 $(\times)$ 代表极点， $(\circ)$ 代表零点。

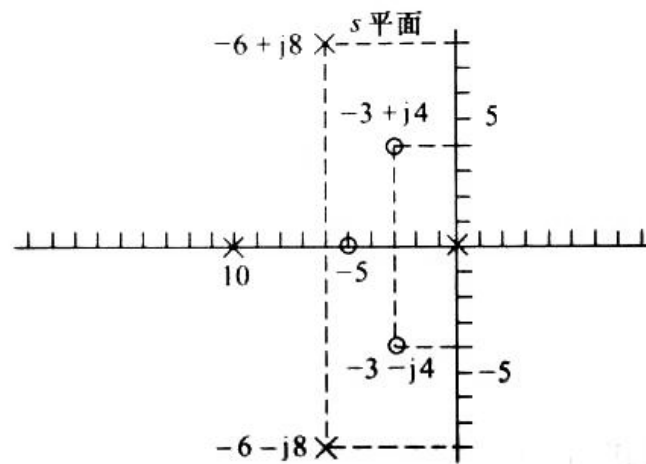


图3-12 s 平面上的零极点图

● 初值和终值定理

初值和终值定理可以根据 $F(s)$ 确定当 $t=0$ 和 ∞ 时 $f(t)$ 的值，从而在求 $F(s)$ 的反变换之前，可利用初值和终值定理来验证拉氏变换是否与电路的已知特性一致。

✓ 初值定理：

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (3.47)$$

✓ 终值定理：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (3.48)$$

若 $f(t)$ 不包含冲激函数时，式(3.47)必须加限制条件，即只有 $F(s)$ 的极点置于 s 平面的左半面(原点处的一阶极点除外)时，终值定理才成立。

✓ 初值和终值定理的应用

对前面的部分分式展开式(3.31):

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)}\right\} = [-12e^{-6t} + 20e^{-3t} \cos(4t - 53.13^\circ)]u(t)$$

根据初值定理得:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{100s^2[1+(3/s)]}{s^3[1+(6/s)][1+(6/s)+(25/s^2)]} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0_+} \{[-12e^{-6t} + 20e^{-3t} \cos(4t - 53.13^\circ)]u(t)\} = [-12 + 20 \cos(-53.13^\circ)] = -12 + 12 = 0$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)}\right\} = [-12e^{-6t} + 20e^{-3t} \cos(4t - 53.13^\circ)]u(t)$$

由终值定理得：

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{100s(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \{[-12e^{-6t} + 20e^{-3t} \cos(4t - 53.13^\circ)]u(t)\} = 0$$

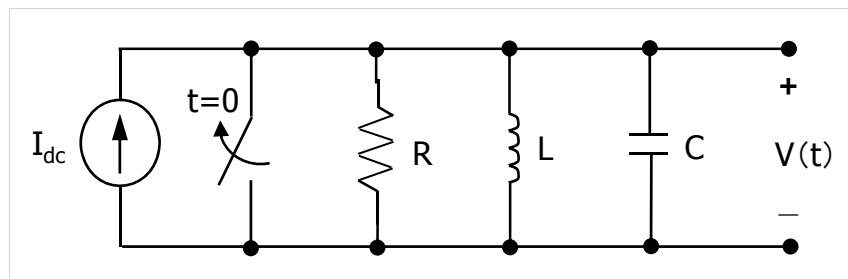
这里已知反变换所得的时域表达式，应用初值和终值定理是验证其正确性，其实际意义是在求反变换之前，验证s域表达式的正确性。

例：

应用初值和终值定理考察前面求并联RLC电路的s域表达式(3.22)

$$V(s) = \frac{I_{dc} / C}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}$$

虽然电路参数确定之前无法算出 $v(t)$ ，但可用定理通过 $V(s)$ 验证 $v(0_+)$ 和 $v(\infty)$ 的正确与否。根据题意求得 $V(s)$ ，进而求得 $v(0_+) = 0$ 。在直流电源作用下，理想电感相当于短路，因此， $v(\infty)$ 必为零。



因 R, L, C 为正的常数，所以 $V(s)$ 的极点必然位于 s 平面的左半面，这样 $sV(s)$ 的极点也位于 s 平面的左半面。

考察：

$$V(s) = \frac{I_{dc}/C}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}$$

根据初值定理得：

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sV(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{sI_{dc}/C}{s^2(1 + (1/RC)s + (1/LC)s^2)} = 0$$

根据终值定理得：

$$\lim_{s \rightarrow 0} sV(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sI_{dc}/C}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)} = 0$$

可见，由所得的 $V(s)$ 表达式正确地求出了 $v(t)$ 的初值和终值。

拉氏变换作为电路分析的一个有效工具, 具有如下特点:

- 1) 将线性常系数微分方程转化为容易处理的线性多项式方程
- 2) 将电流和电压变量的初始值自动引入多项式方程中, 使得在变换处理过程中, 初始条件成为变换的一部分。

前面曾利用拉氏变换将时域微积分方程转化为 s 域的线性多项式方程, 实际使用拉氏变换求解电路中, 可跳过列写时域微积分方程, 而直接对电路写出 s 域方程。求出 s 域响应后, 应用部分分式法, 反变换到时域响应。



● s域中的电路元件

s域等效电路的建立：首先写出关于输出端电压和电流的时域方程。然后对方程进行拉氏变换,产生一个s域电压和电流的代数方程式。对照s域和时域的方程式，可以建立s域的等效电路。

✓ s域中的电阻

$$v=Ri \quad V=RI \quad (3.49)$$

其中 $V=V(s)=\mathcal{L}\{v\}$ $I=I(s)=\mathcal{L}\{i\}$ 为拉氏变换结果。

由于R为常数，在s域中其等效电路仍然是一个 $R\Omega$ 的电阻，s域中的电压和电流分别为 $V(\text{伏} \cdot \text{秒})$ 和 $I(\text{安} \cdot \text{秒})$ 。

时域和频域(s域)的电路如图3-13所示, 注意
从时域转到频域, 电阻元件不变。

✓ s域中的电感

对图3-14所示初始电流为 I_0 安的电感, 两端电压和电流的时域方程为:

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (3.50)$$

其拉氏变换为:

$$V=V(s)=L[sI-i(0_-)]=sLI-LI_0 \quad (3.51)$$

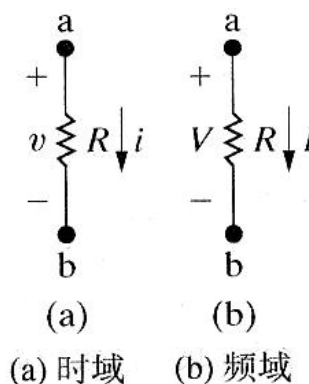


图3-13 时域和频域
的电阻元件

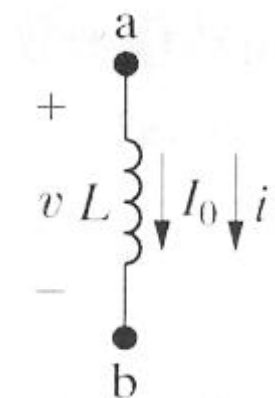


图3-14 时域中初始
电流为 I_0 的电感L

$$V = V(s) = L[sI - i(0_-)] = sLI - LI_0 \quad (3.51)$$

第一种满足式(3.51)的等效电路如图3-15所示，它包含一个 $sL \Omega$ 的阻抗串联一个 LI_0 (伏·秒)的电源。

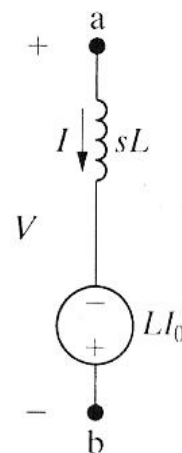


图3-15 具有初始电流 I_0 的电感元件的串联等效电路

第二种等效电路包含一个 $sL \Omega$ 的阻抗和一个 I_0/s (安·秒)的电流源并联，如图3-16所示，这时：

$$I = \frac{V + LI_0}{sL} = \frac{V}{sL} + \frac{I_0}{s} \quad (3.52)$$

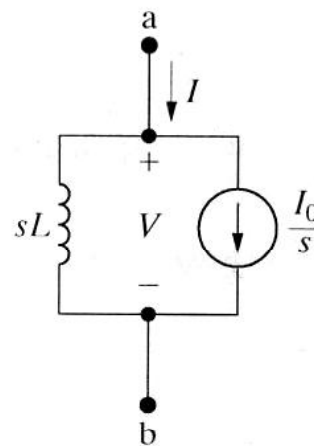


图3-16 具有初始电流 I_0 的电感元件的并联等效电路

若电感的初始贮能为零，即 $i_0=0$ ，则电感的s域等效电路就简化为一个具有 $sL\Omega$ 的电感，如图3-17所示。

✓ s域中的电容

对图3-18所示初始电压为 V_0 伏的电容，其端口电流为：

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (3.53)$$

相应的拉氏变换为：

$$\begin{aligned} I = I(s) &= C[sV - v(0_-)] \\ \text{or } I &= sCV - CV_0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

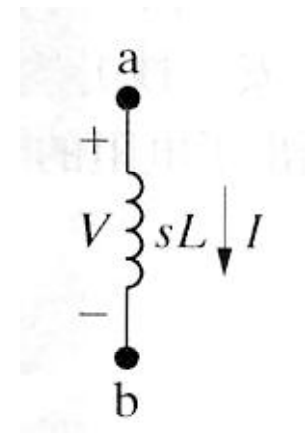


图3-17 无初始贮能的电感的s域电路

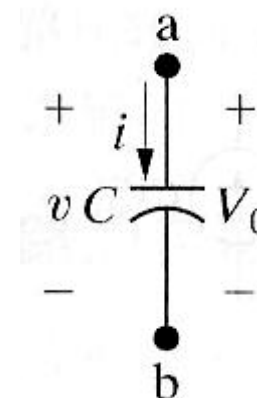


图3-18 初始电压为 V_0 伏的电容

并联等效电路如图3-19所示，一条支路上的导纳为 sC 西门子，另一条支路上的独立电流源为 CV_0 (安·秒)。

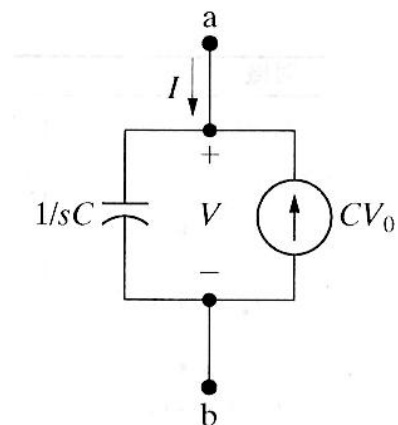


图3-19 初始电压为 V_0 伏的电容的并联等效电路

串联等效电路如图3-20所示，这时有：

$$V = \left(\frac{1}{sC}\right)I + \frac{V_0}{s} \quad (3.55)$$

若电容的初始电压为零，则两个等效电路简化为一个 $1/sC$ 欧姆的阻抗，如图3-21所示。

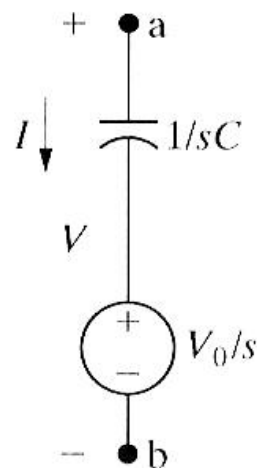


图3-20 具有初始电压 V_0 的电容的串联等效电路

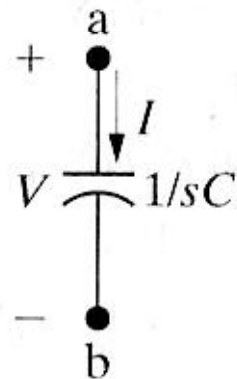


图3-21 初始电压为零时电容的等效电路

● s域中的欧姆定律和基尔霍夫定律

若电感或电容中无初始贮能，则对每个无源元件，其伏安关系满足下面的s域的欧姆定律：

$$V = ZI \quad (3.56)$$

其中Z是元件的s域阻抗，对于电阻： $Z=R\Omega$ ，对于电感： $Z=sL\Omega$ ，对于电容： $Z=1/sC\Omega$ 。

由于时域中的基尔霍夫定律为电流、电压的代数和，根据拉氏变换的线性特性，基尔霍夫定律对s域的电流和电压也适用，s域中基尔霍夫定律的形式为：

$$\begin{aligned} \sum I &= 0 \\ \sum V &= 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

由于无源元件端口电压和电流的关系是由代数方程确定的，基尔霍夫定律始终成立，因此，所有电阻电路的分析方法均可用到s域的分析中。

● s域中的电路分析

✓ RC电路的固有响应

问题：

对图3-22所示RC电路，电容的初始电压为 V_0 ，要求 i 和 v 的时域表达式。

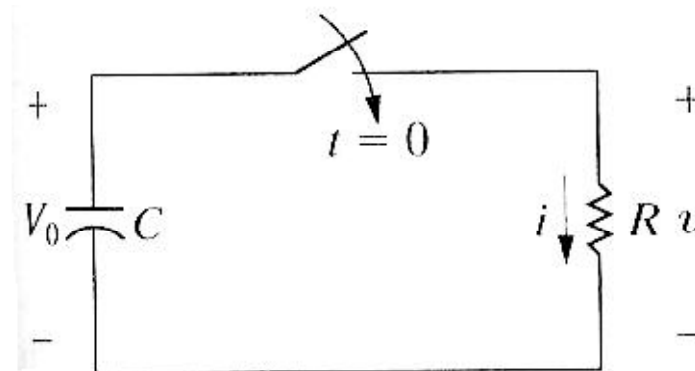


图3-22 电容放电电路

电流*i*的求解:

将原电路转化为*s*域的串联等效电路

如图3-23所示。

对网孔电压取和得:

$$\frac{V_0}{s} = \frac{1}{sC} I + RI \quad (3.58)$$

从上式求*I*可得:

$$I = \frac{CV_0}{RCs + 1} = \frac{V_0/R}{s + (1/RC)} \quad (3.59)$$

上述关于*I*的表达式为真分式, 从而其拉氏反变换为:

$$i = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} u(t) \quad (3.60)$$

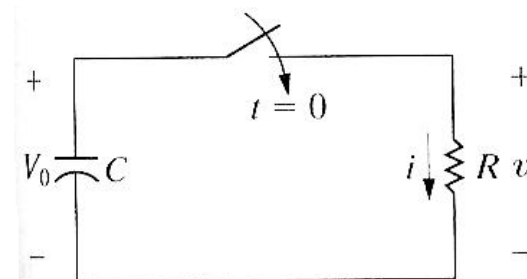


图3-22 电容放电电路

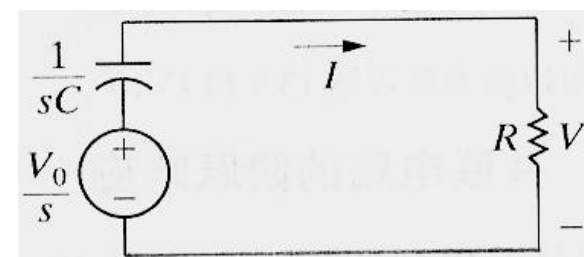


图3-23 图3-22电路的*s*域等效电路

$$\frac{K}{s + a} \longleftrightarrow Ke^{-at}u(t)$$

电压 v 的求解:

$$i = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} u(t)$$

方法I: 直接应用欧姆定律可得:

$$v = Ri = V_0 e^{-t/RC} u(t) \quad (3.61)$$

方法II: 将最初的电路转化为如图3-24所示的并联等效电路, 由节点电压方程可得:

$$\frac{V}{R} + sCV = CV_0 \quad (3.62)$$

从而得:

$$V = \frac{V_0}{s + (1/RC)} \quad (3.63)$$

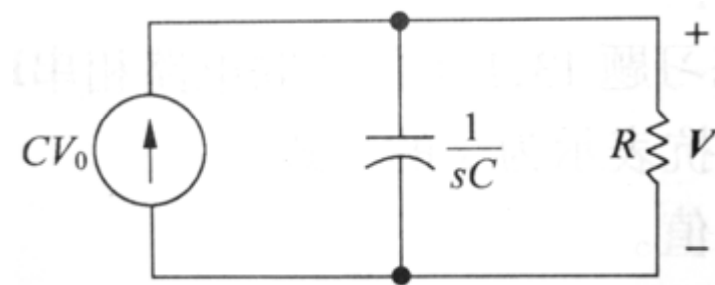


图3-24 图3-22电路的s域
并联等效电路

$$V = \frac{V_0}{s + (1/RC)} \quad (3.63)$$

由拉氏反变换得到与式(3.61)相同的表达式。

$$v = Ri = V_0 e^{-t/RC} u(t)$$

$$\frac{K}{s + a} \iff Ke^{-at}u(t)$$

$$v = V_0 e^{-t/RC} u(t) \quad (3.61)$$

✓ 并联RLC电路的阶跃响应

问题：

对图3-25所示的RLC电路，电路初始贮能为零，求开关打开后 i_L 的表达式。

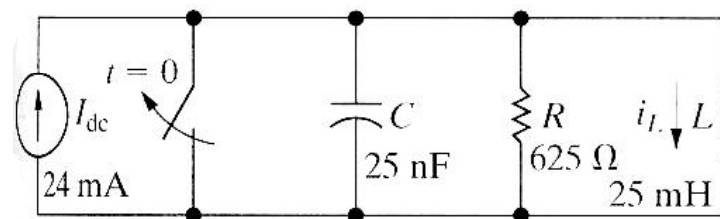


图3-25 并联RLC电路的阶跃响应

s域的等效电路如图3-26所示，将独立电源从时域转换到频域时，只要将其时域函数进行拉氏变换即可得到s域的值，电路中开关打开会产生一个阶跃变化。因此，s域电源为 I_{dc}/s 。

将流出上节点的电流相加可得：

$$sCV + \frac{V}{R} + \frac{V}{sL} = \frac{I_{dc}}{s} \quad (3.64)$$

由上式可得：

$$V = \frac{I_{dc}/C}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)} \quad (3.65)$$

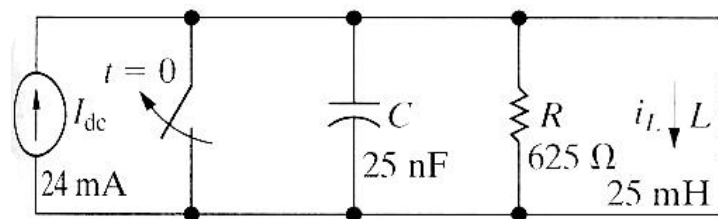


图3-25 并联RLC电路的阶跃响应

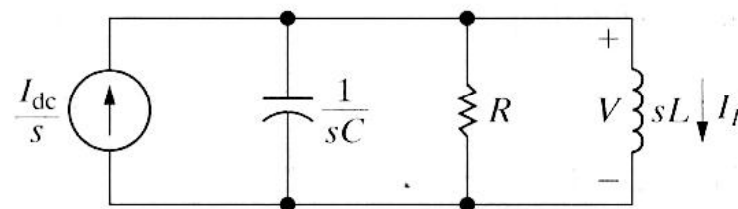


图3-26 图3-25电路的s域等效电路

$$V = \frac{I_{dc} / C}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)} \quad (3.65)$$

从而有：

$$I_L = \frac{V}{sL} = \frac{I_{dc} / LC}{s[s^2 + (1/RC)s + (1/LC)]} \quad (3.66)$$

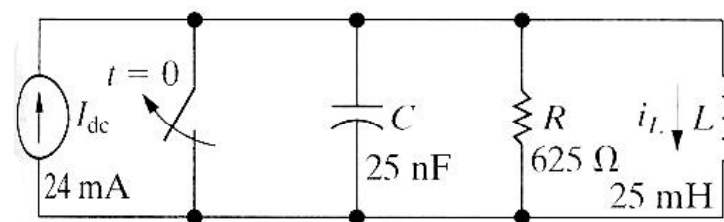
将电路参数R，L，C和 I_{dc} 的值代入式(3.66)得：

$$\begin{aligned} I_L &= \frac{384 \times 10^5}{s[s^2 + 64000s + 16 \times 10^8]} \\ &= \frac{384 \times 10^5}{s(s + 32000 - j24000)(s + 32000 + j24000)} \end{aligned} \quad (3.67)$$

i_L 的s域表达式的验证:

i_L 的所有极点, 除原点处的一阶极点外均在s平面的左半平面, 因此可以应用终值定理。

由电路特性可知, 在开关打开很长时间后, 电感将使电流源短路, 因此, i_L 的终值必然为24mA。



由终值定理有:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sI_L = \frac{384 \times 10^5}{16 \times 10^8} = 24 \text{ mA}$$

因此, s域表达式正确。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

$$I_L = \frac{384 \times 10^5}{s(s + 32000 - j24000)(s + 32000 + j24000)} \quad (3.67)$$

对式(3.67)进行部分分式展开得：

$$\begin{aligned} I_L &= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 32000 - j24000} + \frac{K_2^*}{s + 32000 + j24000} \\ &= \frac{24 \times 10^{-3}}{s} + \frac{20 \times 10^{-3} \angle 126.87^\circ}{s + 32000 - j24000} + \frac{20 \times 10^{-3} \angle -126.87^\circ}{s + 32000 + j24000} \end{aligned} \quad (3.68)$$

对上式进行反变换可得 i_L 为：

$$i_L = [24 + 40e^{-32000t} \cos(24000t + 126.87^\circ)]u(t) \quad mA \quad (3.69)$$

✓ 多网孔电路的阶跃响应

对图3-27所示的多网孔电路，直接在时域中求解需要解联立的微分方程组，用拉氏变换法则可以简化求解。

电路中336V直流电压源突然作用到电路中，初始贮能为零，要求支路电流 i_1 ， i_2 。 s 域的等效电路如图3-28所示。

两个网孔电流方程为：

$$\begin{cases} \frac{336}{s} = (42 + 8.4s)I_1 - 42I_2 \\ 0 = -42I_1 + (90 + 10s)I_2 \end{cases}$$

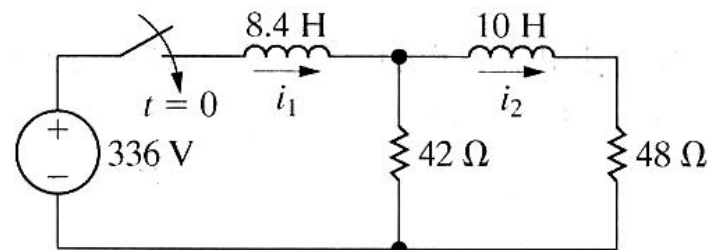


图3-27 多网孔RL电路的阶跃响应

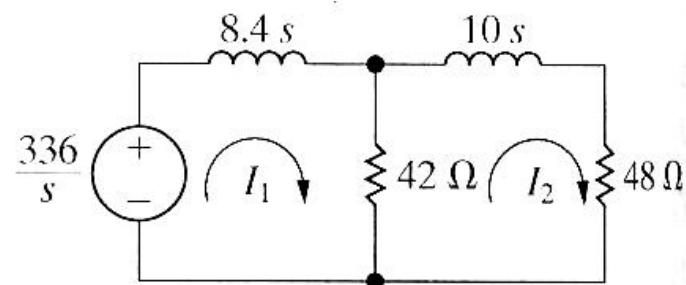


图3-28 图3-27电路的s域等效电路

(3.70)

求解(3.70)的方程得：

$$\begin{cases} \frac{336}{s} = (42 + 8.4s)I_1 - 42I_2 \\ 0 = -42I_1 + (90 + 10s)I_2 \end{cases} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{40(s+9)}{s(s+2)(s+12)} = \frac{15}{s} - \frac{14}{s+2} - \frac{1}{s+12} \\ I_2 &= \frac{168}{s(s+2)(s+12)} = \frac{7}{s} - \frac{8.4}{s+2} + \frac{1.4}{s+12} \end{aligned} \quad (3.71)$$

对上面两式分别进行拉氏反变换得电流 i_1 , i_2 的表达式为：

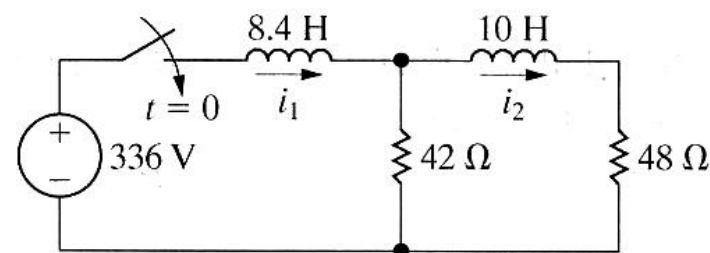
$$\begin{aligned} i_1 &= (15 - 14e^{-2t} - e^{-12t})u(t) \quad A \\ i_2 &= (7 - 8.4e^{-2t} + 1.4e^{-12t})u(t) \quad A \end{aligned} \quad (3.72)$$

结果的验证:

因初始贮能为零, 则 $i_1(0_-)$ 和 $i_2(0_-)$ 必为零。结果与初始值一致。

开关合上较长时间后, 两电感相当于短路, 因此, 两电流的终值为:

$$\begin{aligned} i_1(\infty) &= \frac{336 \times (42 + 48)}{42 \times 48} = 15 \quad \text{A} \\ i_2(\infty) &= \frac{15 \times 42}{42 + 48} = 7 \quad \text{A} \end{aligned}$$



(3.73)

$$\begin{aligned} i_1 &= (15 - 14e^{-2t} - e^{-12t})u(t) \text{ A} \quad \Rightarrow \quad i_1(\infty) = 15 \text{ A} \\ i_2 &= (7 - 8.4e^{-2t} + 1.4e^{-12t})u(t) \text{ A} \quad \Rightarrow \quad i_2(\infty) = 7 \text{ A} \end{aligned}$$

可见, 结果也与终值一致。

✓ s域中戴维南等效电路的应用

对图3-29的电路，开关闭合前电路无储能，求开关闭合后电容的电流。

先建立s域的电路如图3-30所示，
戴维南电压是ab端口的开路电压，开路时 60Ω 电阻两端无电压，所以：

$$V_{Th} = \frac{(480/s)(0.002s)}{20 + 0.002s} = \frac{480}{s + 10^4} \quad (3.74)$$

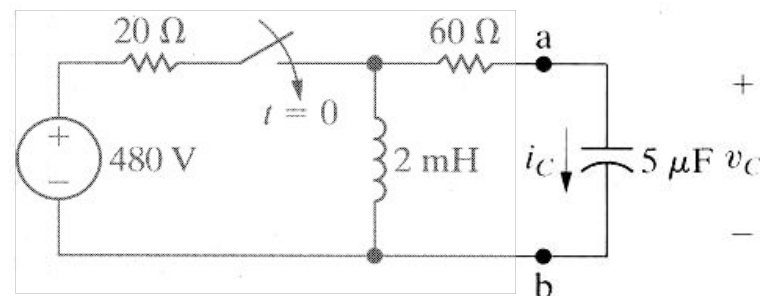


图3-29 戴维南等效电路
在s域中应用的电路

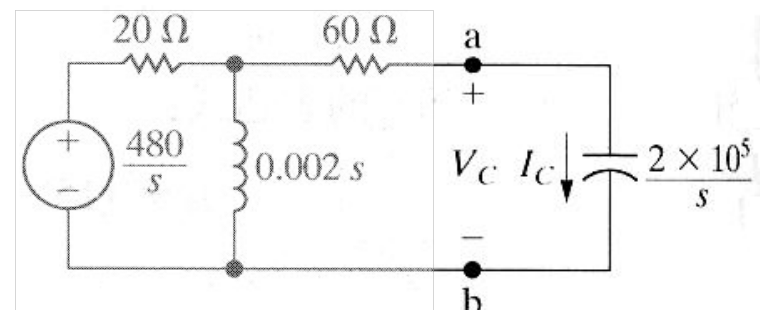
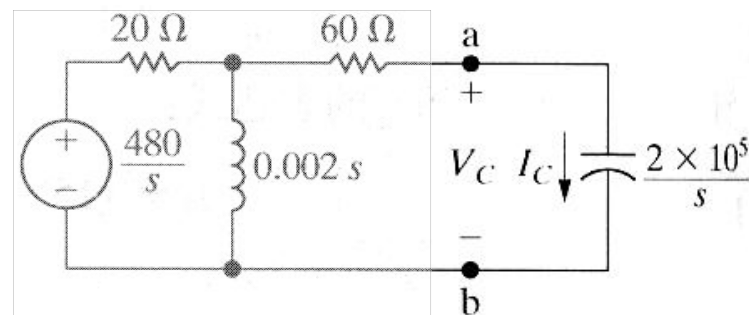


图3-30 图3-29电路的
s域等效电路

从ab端口看，戴维南等效阻抗是60Ω电阻串联上20Ω电阻与2mH电感的并联，其阻抗为：



$$Z_{Th} = 60 + \frac{0.002s(20)}{20 + 0.002s} = \frac{80(s + 7500)}{s + 10^4} \quad (3.75)$$

利用戴维南定理，图3-30的电路简化为如图3-31所示电路，从而电容电流 I_C 等于戴维南电压除以全部串联阻抗，即：

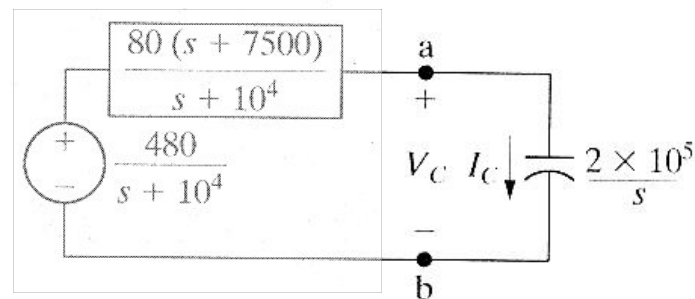


图3-31 图3-30电路的戴维南等效简化电路

$$\begin{aligned} I_c &= \frac{480/(s + 10^4)}{[80(s + 7500)/(s + 10^4)] + [(2 \times 10^5)/s]} \\ &= \frac{6s}{(s + 5000)^2} = \frac{-30000}{(s + 5000)^2} + \frac{6}{(s + 5000)} \end{aligned}$$

(3.76)

式(3.76)的拉氏反变换为:

$$I_c = \frac{-30000}{(s+5000)^2} + \frac{6}{(s+5000)} \quad (3.76)$$

$$i_c = (-30000te^{-5000t} + 6e^{-5000t})u(t) \quad A \quad (3.77)$$

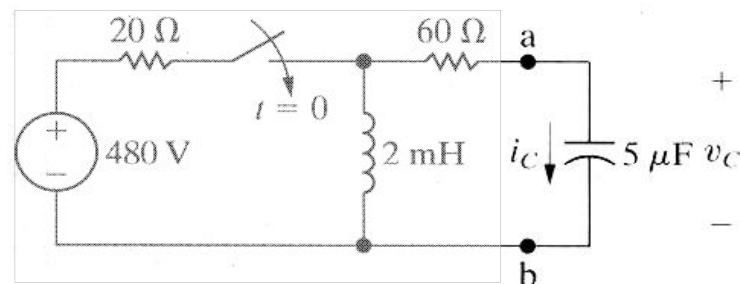
结果验证:

$$1/(s+a) \Leftrightarrow e^{-at}$$

$$1/(s+a)^2 \Leftrightarrow te^{-at}$$

由式(3.77)可得: $i_c(0) = 6 A$

根据原电路, 电感的初始电流和电容的初始电压为零, 相应的电容的初始电流应为 $480/80=6A$, 因此, 与初始值一致。



电容的电流终值为零, 与式(3.77)一致。根据式(3.77), 当 t 大于 $200 \mu s$ 时电流反号, 这是因为开关闭合时电容开始充电。当 $t=\infty$ 时, 电感短路, 电容电压为零。 i_c 符号改变恰好反映了电容充放电的变化。

对于电容两端的电压既可通过时域积分求得，也可避开积分运算，直接在s域求解。

时域积分：

$$i_c = (-30000te^{-5000t} + 6e^{-5000t})u(t) \quad A$$

$$v_c = \frac{1}{C} \int_{0_-}^t i_c(x) dx$$



$$v_c = 2 \times 10^5 \int_{0_-}^t (6 - 30000x)e^{-5000x} dx$$

s域计算 + 拉氏反变换：

$$V_c = \frac{1}{sC} I_c = \frac{12 \times 10^5}{(s + 5000)^2} \Rightarrow v_c = 12 \times 10^5 te^{-5000t} u(t)$$

✓ s域中叠加定理的应用

考虑到所分析的电路都是线性集总参数电路，可以用叠加定理将响应分解为几个部分，每个部分可根据初始条件和单个电源求出。

对图3-32所示电路，假设在两个电源作用到电路这一时刻，电感的初始电流为 ρ A。电容的初始电压为 γ V，待求的响应为电阻 R_2 两端的电压 v_2 。

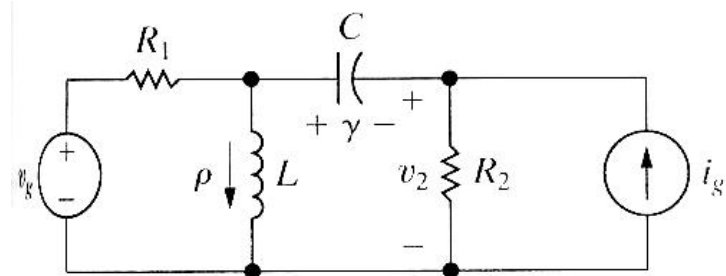


图3-32 s域分析中应用叠加定理的电路

为用节点电压法求 V_2 ，选 L 和 C 的并联等效电路，图3-33为 s 域的等效电路。

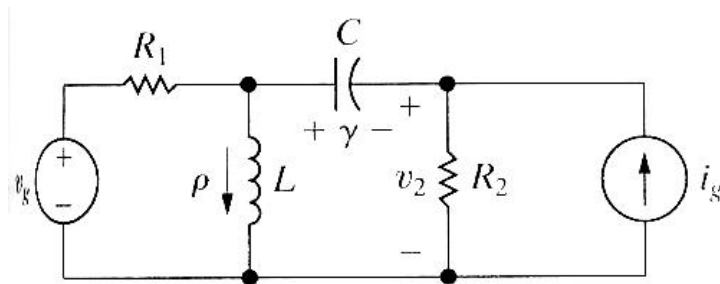


图3-32 s 域分析中应用叠加定理的电路

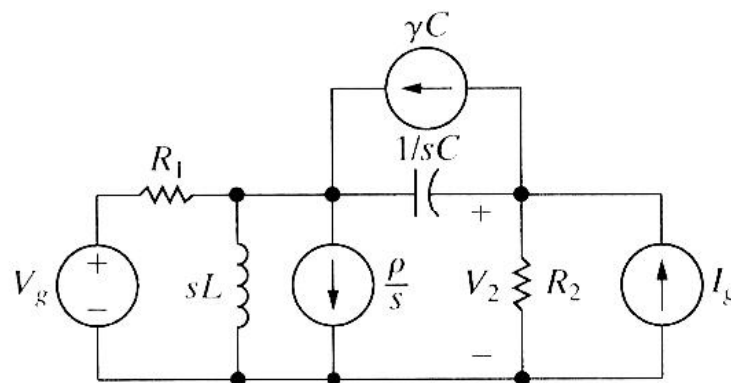


图3-33 图3-32电路的 s 域等效电路

先求 V_g 单独作用，使三个电流源开路，如图3-34所示。 V_1' 和 V_2' 表示 V_g 单独作用时分配到 V_1 和 V_2 的分量。

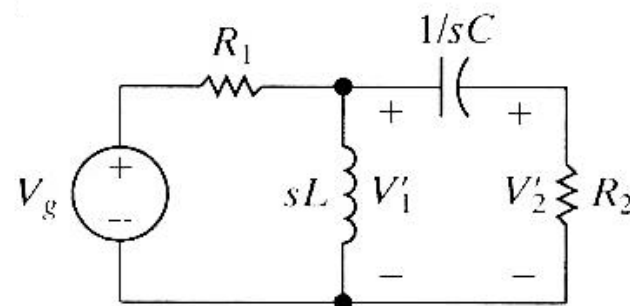


图3-34 图3-33电路中 V_g 单独作用时的电路

节点电压方程为：

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL} + sC \right) V_1' - sC V_2' &= \frac{V_g}{R_1} \\ -sC V_1' + \left(\frac{1}{R_2} + sC \right) V_2' &= 0 \end{aligned} \quad (3.78)$$

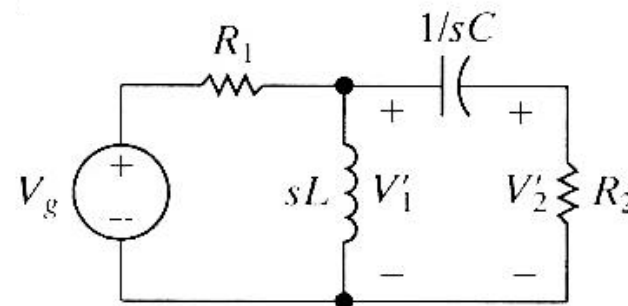


图3-34 图3-33电路中
 V_g 单独作用时的电路

引入以下符号：

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL} + sC \\ Y_{12} &= -sC \\ Y_{22} &= \frac{1}{R_2} + sC \end{aligned} \quad (3.79)$$

代入式(3.78),可得：

$$V_2' = \frac{-Y_{12} / R_1}{Y_{11} Y_{12} - Y_{22}^2} V_g \quad (3.80)$$

当电流源 I_g 单独作用时，电路转化为图3-35所示电路。其中 V_1'' 和 V_2'' 是 I_g 单独作用时， V_1 和 V_2 上产生的分量。

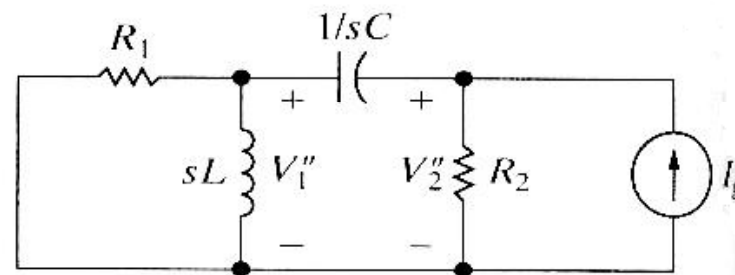


图3-35 图3-33电路中 I_g 单独作用时的电路

利用式(3.79)引入的符号，由节点电压方程得：

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL} + sC \\ Y_{12} &= -sC \\ Y_{22} &= \frac{1}{R_2} + sC \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\begin{cases} Y_{11}V_1'' + Y_{12}V_2'' = 0 \\ Y_{12}V_1'' + Y_{22}V_2'' = I_g \end{cases} \Rightarrow V_2'' = \frac{Y_{11}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2} I_g \quad (3.81)$$

为求得电感的初始贮能所产生的 V_2 的分量 V_2''' ，需求图3-36所示电路，即：

$$\begin{cases} Y_{11}V_1''' + Y_{12}V_2''' = -\rho/s \\ Y_{12}V_1''' + Y_{22}V_2''' = 0 \end{cases} \Rightarrow V_2''' = \frac{Y_{12}/s}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2} \rho \quad (3.82)$$

电容的初始贮能所产生的 V_2 的分量 V_2'''' ，

需求图3-37所示电路。即有：

$$\begin{cases} Y_{11}V_1'''' + Y_{12}V_2'''' = \gamma C \\ Y_{12}V_1'''' + Y_{22}V_2'''' = -\gamma C \end{cases} \Rightarrow V_2'''' = \frac{-(Y_{11} + Y_{12})C}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2} \gamma \quad (3.83)$$

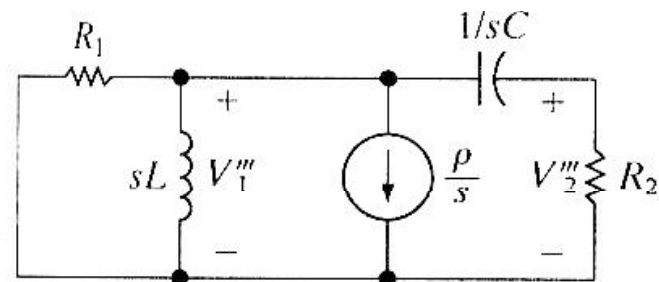


图3-36 图3-33电路中具有初始贮能的电感单独作用时的电路

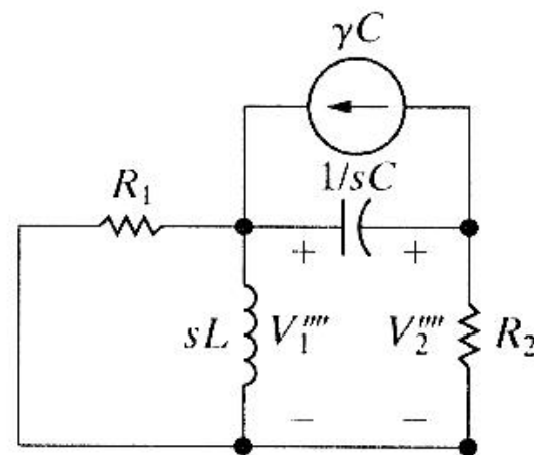


图3-37 图3-33电路中具有初始贮能的电容单独作用时的电路

因此， V_2 的表达式为：

$$\begin{aligned}
 V_2 &= V_2' + V_2'' + V_2''' + V_2'''' \\
 &= \frac{-(Y_{12}/R_1)}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2} V_g + \frac{Y_{11}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2} I_g + \frac{Y_{12}/s}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2} \rho + \frac{-C(Y_{11} + Y_{12})}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2} \gamma
 \end{aligned}
 \tag{3.84}$$

注) 也可对图3-33所示电路直接列出节点电压方程，求解 V_2 如下：

$$\begin{cases}
 Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 = \frac{V_g}{R_1} + \gamma C - \frac{\rho}{s} \\
 Y_{12}V_1 + Y_{22}V_2 = I_g - \gamma C
 \end{cases}
 \tag{3.85}$$

● 转移函数 $H(s)$ (网络函数)

✓ 转移函数的定义

转移函数定义： s 域中输出响应的拉氏变换与输入激励的拉氏变换之比。在求转移函数时，要注意电路的限制条件，即初始条件为零，若电路中存在多个独立电源，那么可以为每个电源求出一个转移函数并用叠加定理求出所有电源作用时的响应。

转移函数为：

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (3.86)$$

其中 $Y(s)$ 是输出信号的拉氏变换， $X(s)$ 是输入信号的拉氏变换。

转移函数与所定义的输出信号有关，例如，对图3-38所示电路，若以电流为响应信号，则：

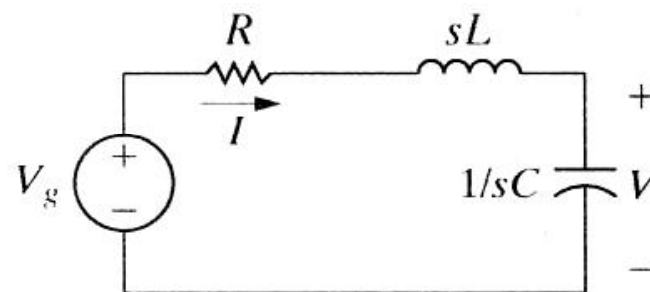


图3-38 RLC串联电路

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{I}{V_g} = \frac{1}{R + sL + 1/sC} = \frac{sC}{s^2LC + RCs + 1} \quad (3.87)$$

若将电容电压定义输出信号，则：

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{V}{V_g} = \frac{1/sC}{R + sL + 1/sC} = \frac{1}{s^2LC + RCs + 1} \quad (3.88)$$

由于电路中可能含有多个电源,感兴趣的输出信号定义也可能会有不同,因此,一个电路可能有多个转移函数。当电路中含有多个电源时,一个转移函数不能表达所有输出信号,必须将与每个电源相关的转移函数结合起来,再用叠加法求出全部响应。

✓ 转移函数 $H(s)$ 的零极点

对线性集总参数电路, $H(s)$ 是 s 的有理式,复极点和复零点总是成对出现。有界电源(电源值在某一有限边界内)的响应也是有界的,那么 $H(s)$ 的极点必须在 s 平面的左半面内。 $H(s)$ 的零点在左右平面内均可。

转移函数 $H(s)$ 的求解例

电压源作用于图3-39所示电路, 响应信号为电容两端电压 v_0 。

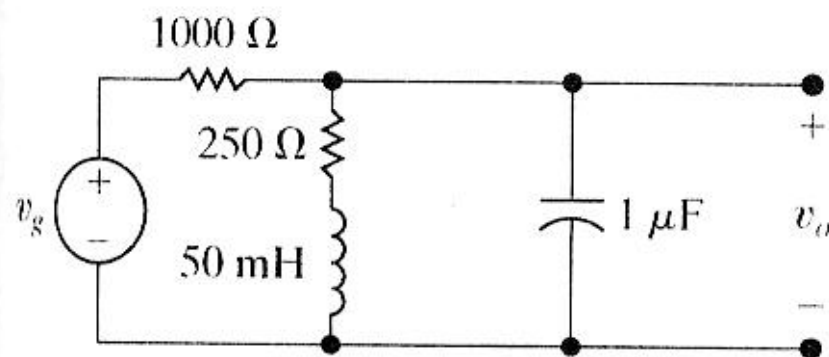


图3-39 求转移函数的电路例

- 计算转移函数的数学表达式。
- 计算转移函数的零极点。

首先建立图3-39所示电路的s域等效电路，如图3-40所示。

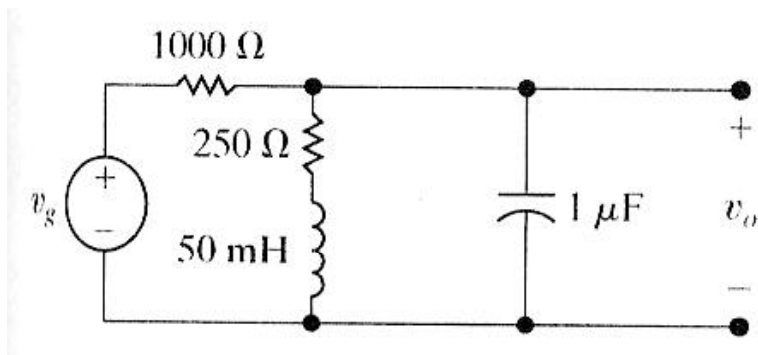


图3-39 求转移函数的电路例

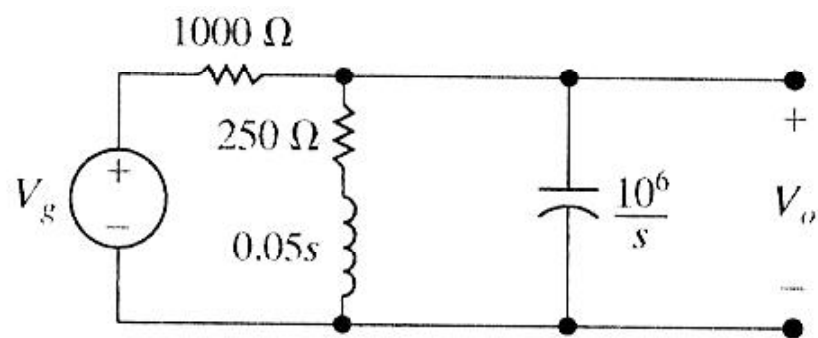


图3-40 图3-39所示电路的s域等效电路

根据定义，转移函数是 V_0 与 V_g 之比，将流出上节点的电流相加得节

点电压方程为：

$$\frac{V_0 - V_g}{1000} + \frac{V_0}{250 + 0.05s} + \frac{V_0 s}{10^6} = 0$$

解上式得：

$$V_0 = \frac{1000(s + 5000)V_g}{s^2 + 6000s + 25 \times 10^6} \quad (3.89)$$

因此，转移函数为：

$$V_0 = \frac{1000 (s + 5000) V_g}{s^2 + 6000 s + 25 \times 10^6} \quad (3.89)$$

$$H(s) = \frac{V_0}{V_g} = \frac{1000(s + 5000)}{s^2 + 6000s + 25 \times 10^6} \quad (3.90)$$

将上式的分母分解得：

$$H(s) = \frac{1000(s + 5000)}{[s + (3000 + j4000)][s + (3000 - j4000)]} = \frac{K(s + z_1)}{(s + p_1)(s + p_2)} \quad (3.91)$$

故， $H(s)$ 的极点为：

$$\begin{aligned} -p_1 &= -3000 - j4000 \\ -p_2 &= -3000 + j4000 \end{aligned}$$

$H(s)$ 的零点为：

$$-z_1 = -5000$$