

第1讲 场论基础

场论是电磁场分析的基础。在本讲中，简要地介绍了 ∇ 算子、并矢的定义、性质和运算规则，概括性地给出了积分变换的统一形式，最后，讨论了电磁场理论中常用的矢径的性质，为今后的理论分析奠定基础。

一、 ∇ 算子

∇ 算子与微分形式的 Maxwell 方程密切相关。在曲线坐标中， ∇ 算子定义为

$$\nabla = \hat{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial v_1} + \hat{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial v_2} + \hat{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial v_3} \quad (1-1)$$

其中， $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ 分别是坐标轴 v_1, v_2, v_3 的单位矢。 h_1, h_2, h_3 为坐标系的拉梅系数，在几种常用坐标系中， h_1, h_2, h_3 的值如表 1-1 所示。

表 1-1

	h_1	h_2	h_3
直角坐标系	1	1	1
圆柱坐标系	1	r	1
球坐标系	1	r	$r \sin \theta$

函数 f 的梯度、矢量函数 $\vec{f} = f_1 \hat{e}_1 + f_2 \hat{e}_2 + f_3 \hat{e}_3$ 的散度和旋度定义如下：

$$\nabla f = \hat{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial v_1} + \hat{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial v_2} + \hat{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial v_3} \quad (1-2)$$

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial v_1} (h_2 h_3 f_1) + \frac{\partial}{\partial v_2} (h_1 h_3 f_2) + \frac{\partial}{\partial v_3} (h_1 h_2 f_3) \right] \quad (1-3)$$

$$\nabla \times \vec{f} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{e}_1 & h_2 \hat{e}_2 & h_3 \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial v_1} & \frac{\partial}{\partial v_2} & \frac{\partial}{\partial v_3} \\ h_1 f_1 & h_2 f_2 & h_3 f_3 \end{vmatrix} \quad (1-4)$$

[讨论] 可以看出， ∇ 算子具有算子和矢量双重性。梯度 ∇f 可以看成是矢量算子 ∇ 与函数 f 的乘积。在直角坐标系，散度 $\nabla \cdot \vec{f}$ 和旋度 $\nabla \times \vec{f}$ 可看成矢量算子 ∇ 与矢量函数 $\vec{f}$ 的点乘和叉乘。但在其他坐标系则不然。

下面给出一些 ∇ 算子常用运算公式及其推导过程。

$$\nabla(jf) = \nabla(jf_c) + \nabla(j_c f) = (\nabla j)f + j(\nabla f) \quad (1-5)$$

$$\nabla \cdot (jf) = \nabla \cdot (jf_c) + \nabla \cdot (j_c f) = (\nabla j) \cdot \vec{f} + j(\nabla \cdot \vec{f}) \quad (1-6)$$

$$\nabla \times (jf) = \nabla \times (jf_c) + \nabla \times (j_c f) = (\nabla j) \times \vec{f} + j(\nabla \times \vec{f}) \quad (1-7)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) &= \nabla \cdot (\vec{f} \times \vec{g}_c) + \nabla \cdot (\vec{f}_c \times \vec{g}) \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \\ \nabla \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) &= (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{g} - \vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{g}) \end{aligned} \quad (1-8)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\vec{f} \times \vec{g}) &= \nabla \times (\vec{f} \times \vec{g}_c) + \nabla \times (\vec{f}_c \times \vec{g}) \\ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{c} = (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b} - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ \nabla \times (\vec{f} \times \vec{g}_c) &= (\vec{g} \cdot \nabla)\vec{f} - \vec{g}(\nabla \cdot \vec{f}) \end{aligned}$$

所以

$$\nabla \times (\dot{\mathbf{f}}_c \times \dot{\mathbf{g}}) = \dot{\mathbf{f}}(\nabla \cdot \dot{\mathbf{g}}) - (\dot{\mathbf{f}} \cdot \nabla) \dot{\mathbf{g}} + (\dot{\mathbf{g}} \cdot \nabla) \dot{\mathbf{f}} - \dot{\mathbf{g}}(\nabla \cdot \dot{\mathbf{f}}) \quad (1-9)$$

利用

$$\nabla(\dot{\mathbf{f}} \cdot \dot{\mathbf{g}}) = \nabla(\dot{\mathbf{f}} \cdot \dot{\mathbf{g}}_c) + \nabla(\dot{\mathbf{f}}_c \cdot \dot{\mathbf{g}})$$

得

$$\mathbf{a} \times (\dot{\mathbf{b}} \times \dot{\mathbf{c}}) = \dot{\mathbf{b}}(\dot{\mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{c}}) - \dot{\mathbf{c}}(\dot{\mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{b}})$$

$$\nabla(\dot{\mathbf{f}} \cdot \dot{\mathbf{g}}_c) = \dot{\mathbf{g}} \times (\nabla \times \dot{\mathbf{f}}) + (\dot{\mathbf{g}} \cdot \nabla) \dot{\mathbf{f}}$$

所以

$$\nabla(\dot{\mathbf{f}} \cdot \dot{\mathbf{g}}) = \dot{\mathbf{f}} \times (\nabla \times \dot{\mathbf{g}}) + \dot{\mathbf{g}} \times (\nabla \times \dot{\mathbf{f}}) + (\dot{\mathbf{f}} \cdot \nabla) \dot{\mathbf{g}} + (\dot{\mathbf{g}} \cdot \nabla) \dot{\mathbf{f}} \quad (1-10)$$

在上述推导中，下标 c 表示进行 ∇ 算子运算时保持常量。总结出 ∇ 算子的运算原则：

- (1) 利用矢量公式；
- (2) ∇ 算子始终在作用函数的左边，非作用函数的右边。

二、并矢（二阶张量）

定义

$\overline{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{f}} \dot{\mathbf{g}}$ 称为并矢，也称为二阶张量。

$$\text{设 } \dot{\mathbf{f}} = f_x \hat{\mathbf{x}} + f_y \hat{\mathbf{y}} + f_z \hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{g}} = g_x \hat{\mathbf{x}} + g_y \hat{\mathbf{y}} + g_z \hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} g_x & g_y & g_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{f}} \dot{\mathbf{g}} &= f_x g_x \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} + f_x g_y \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{y}} + f_x g_z \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{z}} \\ &\quad + f_y g_x \hat{\mathbf{y}} \hat{\mathbf{x}} + f_y g_y \hat{\mathbf{y}} \hat{\mathbf{y}} + f_y g_z \hat{\mathbf{y}} \hat{\mathbf{z}} \\ &\quad + f_z g_x \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{x}} + f_z g_y \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{y}} + f_z g_z \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}} \\ &= \dot{\mathbf{A}}'_x \hat{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{A}}'_y \hat{\mathbf{y}} + \dot{\mathbf{A}}'_z \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{A}}_x + \hat{\mathbf{y}} \dot{\mathbf{A}}_y + \hat{\mathbf{z}} \dot{\mathbf{A}}_z \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_x & g_y & g_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x g_x & f_x g_y & f_x g_z \\ f_y g_x & f_y g_y & f_y g_z \\ f_z g_x & f_z g_y & f_z g_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

式中， $\dot{\mathbf{A}}'_x = \dot{\mathbf{f}} g_x$ ， $\dot{\mathbf{A}}'_y = \dot{\mathbf{f}} g_y$ ， $\dot{\mathbf{A}}'_z = \dot{\mathbf{f}} g_z$ ， $\dot{\mathbf{A}}_x = f_x \dot{\mathbf{g}}$ ， $\dot{\mathbf{A}}_y = f_y \dot{\mathbf{g}}$ ， $\dot{\mathbf{A}}_z = f_z \dot{\mathbf{g}}$ 。

所以，并矢既可以用矢量表示也可用三阶矩阵表示，但并不是任意三阶矩阵都表示并矢。因为并矢只有 6 个独立量，而三阶矩阵有 9 个独立量。

$\overline{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}}$ 称为单位张量，对应于单位矩阵。

$$\overline{\mathbf{I}} \cdot \dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}} \quad (1-11)$$

并矢运算规则

1. 点乘 $(\dot{\mathbf{a}} \dot{\mathbf{b}}) \cdot (\dot{\mathbf{c}} \dot{\mathbf{d}}) = \dot{\mathbf{a}} (\dot{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{c}}) \dot{\mathbf{d}} \quad (1-12)$

2. 叉乘 $(\dot{\mathbf{a}} \dot{\mathbf{b}}) \times (\dot{\mathbf{c}} \dot{\mathbf{d}}) = \dot{\mathbf{a}} (\dot{\mathbf{b}} \times \dot{\mathbf{c}}) \dot{\mathbf{d}} \quad (1-13)$

3. 双重点乘 $(\dot{\mathbf{a}} \dot{\mathbf{b}}) : (\dot{\mathbf{c}} \dot{\mathbf{d}}) = (\dot{\mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{c}}) (\dot{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{d}}) \quad (1-14)$

4. 双重叉乘 $(\dot{\mathbf{a}} \dot{\mathbf{b}}) \times (\dot{\mathbf{c}} \dot{\mathbf{d}}) = (\dot{\mathbf{a}} \times \dot{\mathbf{c}}) (\dot{\mathbf{b}} \times \dot{\mathbf{d}}) \quad (1-15)$

注意一般情况下， $\overline{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{a}} \neq \dot{\mathbf{a}} \cdot \overline{\mathbf{A}}$ 。如果 $\overline{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}} \cdot \overline{\mathbf{A}}$ ，则称 $\overline{\mathbf{A}}$ 对称。

I 微分运算规则

梯度

$$\nabla f = (\nabla f_x)\hat{x} + (\nabla f_y)\hat{y} + (\nabla f_z)\hat{z}$$

散度

$$\nabla \cdot \vec{A} = (\nabla \cdot \vec{A}'_x)\hat{x} + (\nabla \cdot \vec{A}'_y)\hat{y} + (\nabla \cdot \vec{A}'_z)\hat{z} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

旋度

$$\nabla \times \vec{A} = (\nabla \times \vec{A}'_x)\hat{x} + (\nabla \times \vec{A}'_y)\hat{y} + (\nabla \times \vec{A}'_z)\hat{z} = \hat{x}(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}) + \hat{y}(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}) + \hat{z}(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})$$

$$\nabla j = \nabla \cdot (j\vec{I}) \quad (1-16)$$

$$\nabla(\vec{f} \cdot \vec{g}) = \nabla \vec{f} \cdot \vec{g} + \nabla \vec{g} \cdot \vec{f} \quad (1-17)$$

$$\nabla \cdot (\vec{f}\vec{g}) = (\nabla \cdot \vec{f})\vec{g} + (\vec{f} \cdot \nabla)\vec{g} \quad (1-18)$$

可见，在张量空间梯度和散度可以互相转换，引入二阶张量可以简化一些矢量公式。

三、积分变换

1、三维变换

$$\int_v dv \nabla \Leftrightarrow \oint_s d\vec{s}$$

其中， s 表示包围体积 v 的闭合曲面， $d\vec{s} = ds\hat{n}$ ， $\hat{n}$ 为曲面 s 的单位外法向矢。例如，

$$\int_v dv \nabla \cdot \vec{f} = \oint_s d\vec{s} \cdot \vec{f} \quad (1-19)$$

$$\int_v dv \nabla \cdot \vec{A} = \oint_s d\vec{s} \cdot \vec{A} \quad (1-20)$$

$$\int_v dv \nabla \times \vec{f} = \oint_s d\vec{s} \times \vec{f} \quad (1-21)$$

$$\int_v dv \nabla \times \vec{A} = \oint_s d\vec{s} \times \vec{A} \quad (1-22)$$

$$\int_v dv \nabla j = \oint_s d\vec{s} j \quad (1-23)$$

$$\int_v dv \nabla \vec{f} = \oint_s d\vec{s} \vec{f} \quad (1-24)$$

2、二维变换

$$\oint_s d\vec{s} \cdot \nabla \times \vec{f} = \oint_l d\vec{l} \cdot \vec{f} \quad (1-25)$$

$$\oint_s d\vec{s} \times \nabla j = \oint_l d\vec{l} j \quad (1-26)$$

$$\oint_s d\vec{s} \nabla \cdot \vec{f} = \oint_l d\vec{l} \hat{n} \cdot \vec{f} \quad (1-27)$$

其中， l 表示包围面积 s 的闭合曲线， $d\vec{l} = dl\hat{t}$ ， $\hat{t}$ 为曲线 l 的单位切向矢， $\hat{n}$ 为曲线 l 的单位法向矢。 $\hat{t}$ 方向与面积 s 构成右手螺旋关系。可见，二维变换并不象三维变换具有统一的形式。

四、矢径 $\vec{R}$

在电磁场理论中许多问题都涉及矢径 $\vec{R}$ 及其函数。因此，研究矢径 $\vec{R}$ 及其函数的梯度、散度和旋度非常有用。如图 1-1，矢径 $\vec{R}$ 定义为

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = R\hat{R} = (x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z} \quad (1-28)$$

其中， $\hat{\mathbf{R}}$ 表示 $\mathbf{R}$ 方向的单位矢。 $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ 分别表示直角坐标的 x, y, z 轴的单位矢。

$$R = |\mathbf{R}| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \quad (1-29)$$

表示矢径 $\mathbf{R}$ 的模。

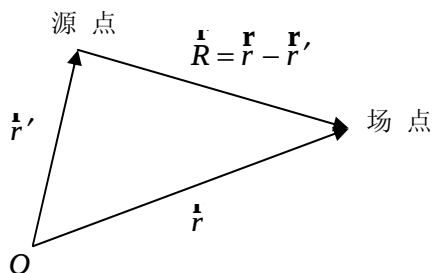


图 1-1 矢径的定义

I 梯度

$$\nabla f(R) = \frac{df}{dR} \hat{\mathbf{R}} = -\nabla' f(R) \quad (1-30)$$

其中， ∇' 表示对源点求梯度。特别有

$$\nabla R = \hat{\mathbf{R}} \quad (1-31)$$

$$\nabla \frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2} \hat{\mathbf{R}} \quad (1-32)$$

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{R}) = \mathbf{a}, \text{ 其中, } \mathbf{a} \text{ 为常矢。} \quad (1-33)$$

[(1-33) 证明] 设 $\mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{x}} + a_y \hat{\mathbf{y}} + a_z \hat{\mathbf{z}}$ (直角坐标)

$$\text{则 } \mathbf{a} \cdot \mathbf{R} = a_x(x-x') + a_y(y-y') + a_z(z-z')$$

$$\text{故 } \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{R}) = a_x \hat{\mathbf{x}} + a_y \hat{\mathbf{y}} + a_z \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{a}$$

值得注意的是，如果设 $\mathbf{a} = a_R \hat{\mathbf{R}} + a_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + a_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$ (球坐标) 则有

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{R} = a_R R$$

于是

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{R}) = a_R \hat{\mathbf{R}} \neq \mathbf{a}$$

问题出在哪里？究其原因： a_R 不是常数！

I 散度

$$\nabla \cdot [f(R) \hat{\mathbf{R}}] = \frac{2}{R} f(R) + \frac{df}{dR} = -\nabla' \cdot [f(R) \hat{\mathbf{R}}] \quad (1-34)$$

特别有

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{R}} = 3 \quad (1-35)$$

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{2}{R} \quad (1-36)$$

$$\nabla \cdot (R \mathbf{a}) = \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a} \quad \mathbf{a} \text{ 为常矢} \quad (1-37)$$

I 旋度

$$\nabla \times (f(R) \hat{\mathbf{R}}) = \mathbf{0} \quad (1-38)$$

特别有

$$\nabla \times \frac{\mathbf{R}}{R} = \mathbf{0} \quad (1-39)$$

$$\nabla \times (R \mathbf{a}) = \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{a} \quad \mathbf{a} \text{ 为常矢} \quad (1-40)$$

I ∇^2 算子

$$\nabla^2 \frac{1}{R} = -4pd(\vec{R}) \quad (1-41)$$

其中, $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$, $d(\vec{R}) = d(x-x')d(y-y')d(z-z')$, 以及 $d(\vec{R})$ 定义为

$$d(\vec{R}) = \begin{cases} \infty & \vec{R} = \vec{0} \\ 0 & \vec{R} \neq \vec{0} \end{cases} \quad (1-42)$$

和

$$\int_v d(\vec{R}) dv = \begin{cases} 1 & \vec{R} = \vec{0} \\ 0 & \vec{R} \neq \vec{0} \end{cases} \quad \text{归一性} \quad (1-43)$$

容易证明,

$$\int_v f(\vec{R}) d(\vec{R}) dv = \begin{cases} f(\vec{0}) & \vec{R} = \vec{0} \in v \\ 0 & \vec{R} = \vec{0} \notin v \end{cases} \quad \text{选择性} \quad (1-44)$$

[(1-41) 证明] 如果 $R = 0$, 则 $\frac{1}{R} \rightarrow \infty$ 。如果 $R \neq 0$, 则在球坐标

$$\nabla^2 \frac{1}{R} = \nabla \cdot \nabla \frac{1}{R} = \nabla \cdot \left(-\frac{1}{R^2} \hat{R} \right) = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [R^2 \sin \theta \cdot (-\frac{1}{R^2})] = 0$$

再验证归一性

$$\int_v \nabla^2 \frac{1}{R} dv = \int_v \nabla \cdot \left(-\frac{1}{R^2} \hat{R} \right) dv = -\oint_s \frac{\hat{R} \cdot \hat{s}}{R^2} ds$$

因为 $d\Omega = \frac{\hat{R} \cdot \hat{s}}{R^2}$ 为立体角微分, 并且

$$\oint_s d\Omega = \begin{cases} 4\pi & \vec{R} = \vec{0} \in v \\ 0 & \vec{R} = \vec{0} \notin v \end{cases}$$

于是,

$$\int_v \nabla^2 \frac{1}{R} dv = \begin{cases} -4\pi & \vec{R} = \vec{0} \in v \\ 0 & \vec{R} = \vec{0} \notin v \end{cases}$$

故

$$\int_v \nabla^2 \frac{1}{R} dv = -4\pi d(\vec{R})$$

[讨论] 根据 (1-41), 有

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{4\pi e R} \right) = -d(\vec{R}) / e$$

而静电场电位满足 $\nabla^2 j = -r / e$ 。可知 $\frac{1}{4\pi e R}$ 就是单位点电荷产生的位, 即静电场的 Green 函数。

[例 1-1] 在稳态场条件 $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ 下, 利用毕奥-沙伐定理

$$\vec{B} = \frac{m}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} dv'$$

证明均匀空间中 $\nabla \times \vec{B} = m\vec{J}$ 。

证: 根据 (1-32), 有

$$\vec{B} = -\frac{m}{4\pi} \int_v \vec{J}(\vec{r}') \times \nabla \frac{1}{R} dv'$$

而

$$\nabla \times \left[\frac{1}{R} \vec{J}(\vec{r}') \right] = \left(\nabla \frac{1}{R} \right) \times \vec{J}(\vec{r}') - \frac{1}{R} \nabla \times \vec{J}(\vec{r}') = \left(\nabla \frac{1}{R} \right) \times \vec{J}(\vec{r}') \quad (\nabla \times \vec{J}(\vec{r}') = 0)$$

故

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

其中
$$\mathbf{A} = \frac{m}{4\pi} \int_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dv'$$

于是
$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{m}{4\pi} \int_v \nabla \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dv' = \frac{m}{4\pi} \int_v (\nabla \frac{1}{R}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' = -\frac{m}{4\pi} \int_v (\nabla' \frac{1}{R}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' \\ &= -\frac{m}{4\pi} \int_v [\nabla' \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} - \frac{1}{R} \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')] dv' = -\frac{m}{4\pi} \oint_s \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{s} \end{aligned}$$

上面的推导中已用到 $\nabla \frac{1}{R} = -\nabla' \frac{1}{R}$, $\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$ 。由于电流 $\mathbf{J}$ 被限定在 v 内, 所以在 s 面上不存在法向电流, 即 $\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{s} = 0$ 。于是, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 。

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} &= \frac{m}{4\pi} \nabla^2 \int_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dv' = \frac{m}{4\pi} \int_v (\nabla^2 \frac{1}{R}) \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' \\ &= -m \int_v d(R) \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' = -m \mathbf{J}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

故
$$\nabla \times \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{A} = m \mathbf{J}$$

习题 1

1-1 证明修正矢量 Green 定理

$$\begin{aligned} &\int_v [\mathbf{B} \cdot \nabla \times (\mathbf{J} \nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot \nabla \times (\mathbf{J} \nabla \times \mathbf{B})] dv \\ &= \oint_s [\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})] \cdot d\mathbf{s} \end{aligned}$$

1-2 证明

$$\nabla(f \cdot \mathbf{g}) = \nabla f \cdot \mathbf{g} + \nabla \mathbf{g} \cdot \mathbf{f}$$

第 2 讲 Maxwell 方程

在经典、宏观的范围内，Maxwell 方程是反映电磁场运动规律的基本定理，也是研究一切电磁问题的出发点和基础。

2.1 Maxwell 方程的积分和微分形式

Maxwell 方程的积分形式

$$\left\{ \begin{array}{ll} \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \frac{\partial}{\partial t} \int_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} & \text{安培环路定理} \\ \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} & \text{法拉第定律} \\ \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 & \text{磁通连续性原理} \\ \int_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_v r dv & \text{高斯定理} \end{array} \right. \quad (2-1)$$

以及电流连续性方程

$$\oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial Q}{\partial t} \quad (2-2)$$

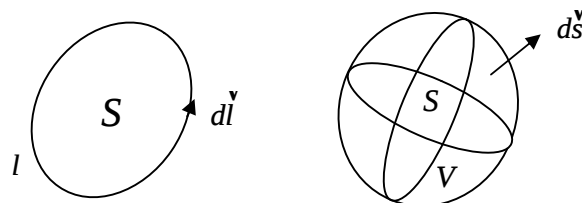


图 2-1 体积分、面积分和线积分示意图

对于连续媒质空间，利用积分变换，从 Maxwell 方程的积分形式可以得到其微分形式：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = r \end{array} \right. \quad (2-3)$$

以及

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial r}{\partial t} \quad (2-4)$$

从微分形式通过积分变换还可以得到 Maxwell 方程积分形式的另一种表示形式：

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_s d\mathbf{s} \times \mathbf{H} = \int_v \mathbf{J} dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_v \mathbf{D} dv \\ \oint_s d\mathbf{s} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_v \mathbf{B} dv \end{array} \right. \quad (2-5)$$

I Maxwell 方程的实践性

Maxwell 方程来源于实践，主要是几个实验定律：库仑定律、安培定律、毕奥—沙伐定律、法拉第定律。但 Maxwell 方程又高于实践，它是在实验的基础上溶入科学家智慧的结晶。比如，库仑定律 $\mathbf{F} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon R^2} \hat{\mathbf{R}}$ ，在实验中得到 R 的指数幂其实并不是 2，而是 1.3，但库仑分析了实践中可能的误差，并与万有引力定律比较，大胆地猜测为 2，后来发现，这与球面能量守恒有关。

由库仑定律可以导出 Maxwell 方程中的高斯定理，由毕奥—沙伐定律可以导出磁通连续性原理，但是由实验定律并不能直接导出 Maxwell 方程中安培环路定律，而是 $\Delta \times \vec{H} = \vec{J}$ 。但是，由上式可得 $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ ，不满足电流连续性方程，为此，Maxwell 大胆引入了位移电流 $J_d = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ，从而构成了完整自洽的 Maxwell 方程。

I Maxwell 方程的对称性

杨振宁说：对称性决定支配方程。居里（Pierre Curie）说：不对称性创造世界。

Maxwell 方程充分显示了电与磁的对称性，但发现这一对称性却是从不对称性开始的。历史上磁学发展最早，早在 16 世纪吉尔伯特就著有《论磁学》，1820 年丹麦学者奥斯特（Oersted）首先发现电流可以产生磁，并创造了 Electromagnetics 一词。法拉第（Faraday）在 1821-1831 十年间根据对称性原理，猜测磁铁可以产生电流，但多次失败。1831 年 8 月 29 日他发现磁铁在线圈内移动时产生了电流，于是领悟到变化的磁场产生电场。Maxwell 根据对称性，从法拉第定律猜测到电场变化也可以产生磁场。

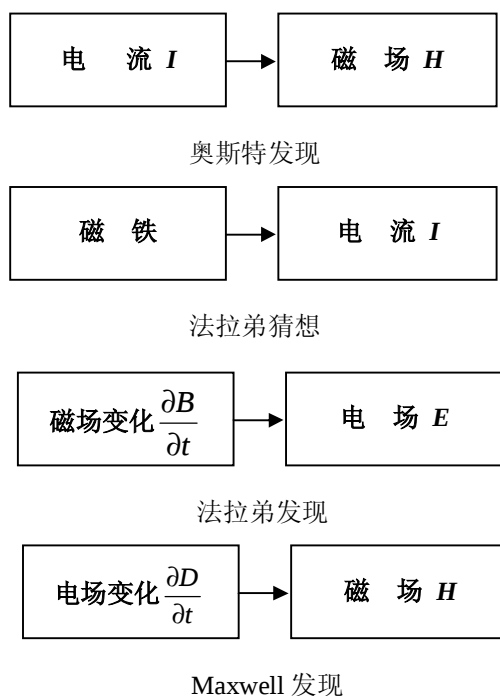


图 2-2 对称性发现过程

I Maxwell 方程的哲学性

1. 深刻揭示了电与磁的相互转化，相互依赖，相互对立，共存在电磁波中，正是由于电不断转化成磁，而磁又断转化为电，才会发生能量交换和储存，因此，电磁波是一对立统一的整体。

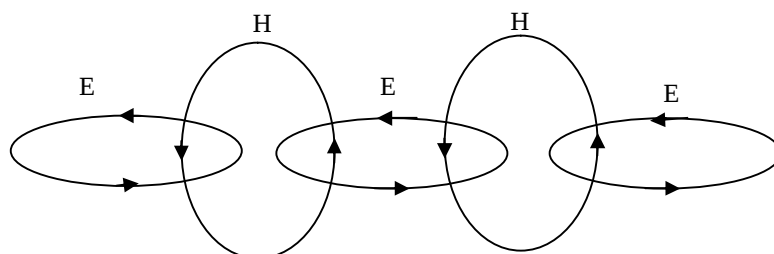


图 2-3 电磁场相互绞链相互转换

2. 深刻揭示了电磁场的任意一个地点变化会转化成时间变化，反过来，时间变化也会转化成地点变化。正是这种地点和时间的相互转化构成了波动的外在形式，通俗地说，也即一个地点出现的事物，经过一段时间后又在另一地点出现。

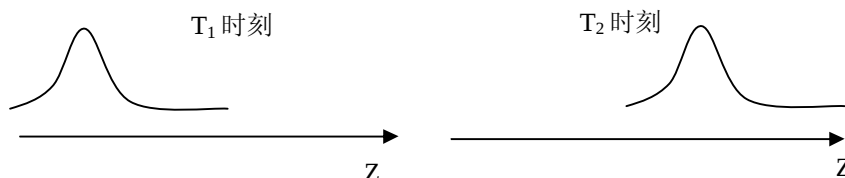


图 2-4 电磁波

I Maxwell 方程的独立性

Maxwell 方程中四个方程并不是完全独立的。独立的方程有

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial r}{\partial t} \end{cases} \quad (2-6)$$

由上式中第一式，可得 $\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{D} = 0$ 。代入第三式，得 $\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{D}$ ，即 $\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{D} - r) = 0$ ，即 $\nabla \cdot \vec{D} - r = \text{const}$ 。由于在静态场时(如 $t=0$ 时为静态场) $\nabla \cdot \vec{D} = r$ 故对时变场也有 $\nabla \cdot \vec{D} = r$ 。

同理由第二式可得 $\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{B} = 0$ ，由于静态场时 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 故对时变场也有 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 。

独立方程还可以有其他形式，如

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = r \end{cases} \quad (2-7)$$

也构成独立方程，它可以导出 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ，和 $\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial r}{\partial t}$ 。

应当注意，上述独立性是利用了静态方程。

2.2 媒质界面上的场方程---边界条件

在媒质界面上，由于媒质的性质有突变(ϵ, μ 有奇异性)，Maxwell 方程的微分形式不再成立。但积分形式仍然成立。从积分形式可以导出媒质界面上的场方程即边界条件。

$$\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s \quad (2-8a)$$

$$\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (2-8b)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (2-8c)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = r_s \quad (2-8d)$$

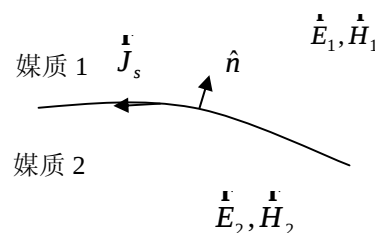


图 2-5 两种媒质的交界面

[证明 1] 如图 2-6 所示，跨媒质界面两侧作一小扁盒状的体积， $h \rightarrow 0$ 。应用积分形式的 Maxwell 方程 (2-5a)，有

$$(\hat{n} \times \vec{H}_1 - \hat{n} \times \vec{H}_2)S + \vec{K}h = \vec{J}Sh + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} Sh$$

式中, $\oint_K \hat{n} \times \dot{\mathbf{H}}$ 关于小盒侧面的线积分。当 $h \rightarrow 0$

时, $\frac{\partial \dot{\mathbf{D}}}{\partial t} Sh \rightarrow 0$, 则有

$$\hat{n} \times (\dot{\mathbf{H}}_1 - \dot{\mathbf{H}}_2) = \dot{\mathbf{J}}_s$$

其中, $\dot{\mathbf{J}}_s = \lim_{h \rightarrow 0} Jh$ 为面电流密度。

同理, 应用电流连续性方程, 有

$$\hat{n} \cdot (\dot{\mathbf{J}}_1 - \dot{\mathbf{J}}_2)S + h \oint_l \dot{\mathbf{J}} \cdot \hat{n}' dl = -\frac{\partial Q}{\partial t}$$

式中, $\hat{n}'$ 为 S 的周界 l 的外法向单位矢。当 $h \rightarrow 0$ 时, 有

$$\hat{n} \cdot (\dot{\mathbf{J}}_1 - \dot{\mathbf{J}}_2) = -\nabla_s \cdot \dot{\mathbf{J}}_s - \frac{\partial r_s}{\partial t}$$

式中, $\nabla_s \cdot \dot{\mathbf{J}}_s = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ S \rightarrow 0}} \frac{h \oint_l \dot{\mathbf{J}} \cdot \hat{n}' dl}{S} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_l \dot{\mathbf{J}}_s \cdot \hat{n}' dl}{S}$ 为面散度, r_s 为面电荷密度。

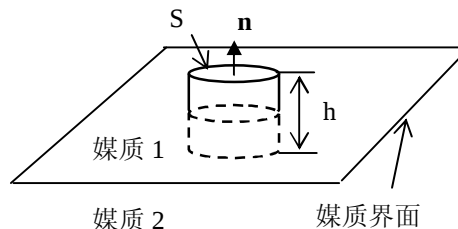


图 2-7 边界条件的推导

2.3 频域电磁场

对于时谐场 (场量随时间作简谐变化), 可采用复函数, 取时谐因子 $e^{j\omega t}$, 则上述时域中只须将 $\frac{\partial}{\partial t}$ 变为 $j\omega$ 即可。注意, 如果时谐因子取为 $e^{-j\omega t}$, 则 $\frac{\partial}{\partial t}$ 变为 $-j\omega$ 。因此, 在研究频域电磁场时, 一定要事先规定好时谐因子。由于任何时变场都可以应用 Fourier 变换展开为时谐场分量的叠加, 所以, 研究时谐场具有普遍意义。

习题 2

2. 1 讨论 Maxwell 方程中四个边界条件的独立性。
2. 2 验证 $\dot{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{z}} E_0 \exp\{-jkz\}$ 是否为可能存在的电磁场。
2. 3 证明边界条件: $\hat{n} \times (\dot{\mathbf{E}}_1 - \dot{\mathbf{E}}_2) = 0$ 和 $\hat{n} \cdot (\dot{\mathbf{D}}_1 - \dot{\mathbf{D}}_2) = r_s$ 。

◆◆◆

第3讲 媒质本构关系

一、真空中的 Maxwell 方程

直接由实验定律获得的 Maxwell 方程实际为

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{B} = m_0 \mathbf{J} + m_0 e_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{r}{e_0} \end{cases} \quad (3-1)$$

式中, $e_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m, $m_0 = 4\pi \times 10^{-7} = 1.2566 \times 10^{-6}$ H/m 分别称为真空中的介电常数和磁导率。如果令

$$\begin{cases} \mathbf{D} = e_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = m_0 \mathbf{H} \end{cases} \quad (3-2)$$

则 (3-1) 变为

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = r \end{cases} \quad (3-3)$$

二、媒质中的 Maxwell 方程

媒质中电磁场依然满足 Maxwell 方程 (3-1), 只是当媒质放在电磁场中后, 会发生导电、极化和磁化现象。导电产生传导电流。极化产生束缚电荷。交变极化产生极化电流。磁化产生磁化分子电流。这些电荷和电流又反作用于电磁场, 所以, 媒质中如果没有其他的源, (3-1) 中的电流 $\mathbf{J}$ 和电荷 r 应为

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_m \quad (3-4)$$

$$r = r_f + r_p \quad (3-5)$$

式中, $\mathbf{J}_f$ 、 $\mathbf{J}_p$ 和 $\mathbf{J}_m$ 分别表示自由电流密度、极化电流密度和磁化电流密度, r_f 和 r_p 分别表示自由电荷和束缚电荷。自由电流为自由电荷运动所造成的电流, 包括空间电荷流和传导电流 $\mathbf{J}_c$ 。

r_p 、 $\mathbf{J}_c$ 、 $\mathbf{J}_p$ 和 $\mathbf{J}_m$ 满足

$$r_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (3-6)$$

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (3-7)$$

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad (3-8)$$

$$\dot{J}_c = s\dot{E} \quad (3-9)$$

式中, s 、 $\dot{P}$ 和 $\dot{M}$ 分别为媒质的导电率、极化强度和磁化强度。在实际中, 自由电荷和自由电流可以直接受实验条件的控制和测定, 而束缚电荷、极化电流和磁化电流则不然。因此, 从 Maxwell 基本方程中消去 r_p 、 $\dot{J}_p$ 和 $\dot{J}_m$ 比较方便。

利用 (3-1)、(3-5) 和 (3-6), 有

$$e_0 \nabla \cdot \dot{E} = r_f + r_p = r_f - \nabla \cdot \dot{P}$$

即

$$\nabla \cdot (e_0 \dot{E} + \dot{P}) = r_f$$

定义电感应强度 (电位移矢量):

$$\dot{D} = e_0 \dot{E} + \dot{P} \quad (3-10)$$

则有

$$\nabla \cdot \dot{D} = r_f \quad (3-11)$$

利用 (3-1)、(3-4)、(3-7) 和 (3-8) 可得

$$\frac{1}{m_0} \nabla \times \dot{B} = \dot{J}_f + \dot{J}_p + \dot{J}_m + e_0 \frac{\partial \dot{E}}{\partial t} = \dot{J}_f + \frac{\partial \dot{P}}{\partial t} + \nabla \times \dot{M} + e_0 \frac{\partial \dot{E}}{\partial t}$$

于是

$$\nabla \times \left(\frac{1}{m_0} \dot{B} - \dot{M} \right) = \dot{J}_f + \frac{\partial \dot{D}}{\partial t} \quad (3-12)$$

定义磁场强度:

$$\dot{H} = \frac{1}{m_0} \dot{B} - \dot{M} \quad (3-13)$$

于是, 方程变为

$$\nabla \times \dot{H} = \dot{J}_f + \frac{\partial \dot{D}}{\partial t} \quad (3-14)$$

这样, 如果略去 r_f 和 $\dot{J}_f$ 的下标 f , 媒质中的 Maxwell 方程与 (3-3) 有相同的形式。

(3-3) 和 (3-1) 都是使用于任何媒质的电磁场方程, 但是, 要注意 (3-3) 中的电流和电荷不包含媒质中的束缚电荷、极化电流和磁化电流, 它们的作用已包含在电感应强度和磁场强度中了。而 (3-1) 中电流和电荷包含了空间和媒质中的所有电流和电荷。

三、本构关系

Maxwell 方程 (3-3) 中独立的方程为两个旋度方程和一个电流连续性方程, 即 7 个标量方程。但是, 电磁场量却有 $\dot{E}$ 、 $\dot{H}$ 、 $\dot{B}$ 、 $\dot{D}$ 、 $\dot{J}$ 和 r 共 16 个标量。因此, 尚需 9 个标量方程才能完全确定电磁场量。通常引入反映媒质电磁特性的 3 个矢量方程:

$$\dot{D} = f_1(\dot{E}, \dot{H}) \quad (3-15)$$

$$\dot{H} = f_2(\dot{E}, \dot{H}) \quad (3-16)$$

$$\dot{J} = f_3(\dot{E}, \dot{H}) \quad (3-17)$$

(3-15) 和 (3-16) 称为广义本构方程, (3-17) 称为广义欧姆定律。这些关系的可以通过实验或微观结构分析得到。对于不同媒质, (3-15) - (3-17) 有着不同的具体形式。

I 各向同性媒质

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{J} = \sigma \vec{E} \end{cases} \quad \begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_0(1 + c_e) \\ \mu &= \mu_0(1 + c_m) \end{aligned} \quad (3-18)$$

即，极化强度 $\vec{P} = \epsilon_0 c_e \vec{E}$ ，磁化强度 $\vec{M} = c_m \vec{H}$ 。 c_e ， c_m 分别称为极化率和磁化率。对于频域（时谐）情况，（3-3）变为

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= j\omega \epsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right) \vec{E} = j\omega \tilde{\epsilon} \vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} &= -j\omega \mu \vec{H} \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \rho / \epsilon \end{aligned}$$

式中， $\tilde{\epsilon} = \epsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)$ 。上式中假设了自由电流只有传导电流。

复媒质的物理实质表示媒质内位移电流与传导电流的矛盾。当 $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} < 1$ 时，媒质为绝缘体，位移电流占优；当 $1 < \frac{\sigma}{\omega \epsilon} < 100$ 时，媒质为半导体；当 $100 < \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$ 时，媒质为导体，传导电流占优。

I 各向异性媒质

各向异性媒质的物理实质是 $\vec{P}$ 和 $\vec{E}$ ， $\vec{M}$ 和 $\vec{H}$ 方向不一致。

$$\vec{D} = \bar{\epsilon} \cdot \vec{E} \quad (3-19)$$

$$\vec{B} = \bar{\mu} \cdot \vec{H} \quad (3-20)$$

下面列出几种常用的各向异性媒质。

（1）晶体

$$\text{旋转坐标使 } \bar{\epsilon} \text{ 对角化, 有 } \bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

如果 $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon$ ， $\bar{\epsilon} = \epsilon \bar{I}$ ，则为各向同性。

如果 $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon$ ，则为单轴各向异性， $\epsilon_z > \epsilon$ 称为正单轴， $\epsilon_z < \epsilon$ 称为负单轴。

如果 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ 都不相等，则为双轴各向异性。

$$\text{（2）等离子体 } \bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon & jd & 0 \\ -jd & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}, \text{ 在无外场时, 等离子体为各向同性。外加电场后, 成为}$$

各向异性，电场方向不同，各向异性不同。

$$\text{（3）铁氧体 } \bar{\mu} = \begin{bmatrix} \mu & jk & 0 \\ -jk & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix}, \text{ 外加磁场是构成各向异性的根源。}$$

I 双各向异性媒质

$$\vec{D} = \bar{\epsilon} \cdot \vec{E} + \chi \cdot \vec{H}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}$$

I 线性媒质

如果算子 L 满足 $L(k_1 m_1 + k_2 m_2) = k_1 L m_1 + k_2 L m_2$ ，则称 L 为线性算子。如果下式满足，则称媒质为线性媒质

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_1 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \epsilon_2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mathbf{L} = L_D \mathbf{E} \quad (3-20)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_1 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mu_2 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \mathbf{L} = L_B \mathbf{H} \quad (3-21)$$

$$\mathbf{J} = \sigma_0 \mathbf{E} + \sigma_1 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma_2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mathbf{L} = L_J \mathbf{E} \quad (3-22)$$

四、应用—波动方程

考虑均匀、非时变、各向同性媒质。对 (3-3) 中两个旋度方程取旋度，有

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} + e \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \mathbf{J} - me \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (3-23)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -m \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = -m \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - me \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (3-24)$$

(3-23) 和 (3-24) 是磁场和电场的矢量波动方程。利用双旋度公式 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ ，有

$$\nabla^2 \mathbf{H} - me \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \mathbf{J} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H})$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - me \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = m \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})$$

代入散度方程，得

$$\nabla^2 \mathbf{H} - me \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \mathbf{J} \quad (3-25)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - me \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = m \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nabla(r/e) \quad (3-26)$$

对于 $\mathbf{J} = 0, r = 0$ 的无源区域，

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + me \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (3-27)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + me \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - me \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (3-28)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - me \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

可见，无源区域中电场和磁场的波动方程形式相同。

$$\begin{aligned} \text{对于时谐情况（频域）} \quad \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \quad (3-29)$$

式中， $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon = \frac{2p}{l}$ 。

[讨论]

I 波动性

以一维情况为例。波动算子为

$$L = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - me \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)$$

式中, $v = 1/\sqrt{me}$ 。波动方程的形式解为 $u(z, t) = Af(z - vt) + Bg(z + vt)$, 即, $Lu \equiv 0$ 。其中, f, g 为任意可导函数, A, B 为任意常数。根据 z 或 x 保持常数, 即 $z \pm vt = \text{const}$. 则两边关于 t 求导, 可得 $\frac{dz}{dt} = mv$, 所以 v 为媒质中的电磁波速度即光速。

I 波动方程把双旋度、双变量 ($\dot{\mathbf{E}}$ 和 $\dot{\mathbf{H}}$) 方程变为单变量 ($\dot{\mathbf{E}}$ 或 $\dot{\mathbf{H}}$) 方程, 但代价是提高了导数阶数。

I 无源区的波动方程, 说明电磁波可离开源独立存在。

I 方程 (3-27) 为无源区域的波动方程, 但方程 (3-28) 代表

$$\begin{aligned} -\nabla \times \dot{\mathbf{J}} + \nabla(\nabla \cdot \dot{\mathbf{H}}) &= 0 \\ m \frac{\partial \dot{\mathbf{J}}}{\partial t} + \nabla(\nabla \cdot \dot{\mathbf{E}}) &= 0 \end{aligned}$$

不一定是无源区域方程。

I $\dot{\mathbf{E}}$ 与 $\dot{\mathbf{H}}$ 的无源区方程相同, 但不能代表 $\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{H}}$ 。微分方程包含一大类解, 给出了解的可能性, 而初始条件和边界条件决定解的现实性。

习题 3

3.1 已知铁氧体磁导率张量 $\bar{\mathbf{m}}$ 为 $\bar{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} m & jk & 0 \\ -jk & m & 0 \\ 0 & 0 & m_z \end{bmatrix}$, 其中 m, k, m_z 是正实数, 试采用坐标变换得 $\bar{\mathbf{m}}$

对角化, 求坐标变换矩阵和对角矩阵。

3.2 对于良导体, 无源区域的 Maxwell 方程为

$$\begin{cases} \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = s \dot{\mathbf{E}} \\ \nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -jm\omega \dot{\mathbf{H}} \\ \nabla \cdot \dot{\mathbf{H}} = 0 \\ \nabla \cdot \dot{\mathbf{E}} = 0 \end{cases}$$

试导出波动方程, 并给出波传播的速度 $\dot{\mathbf{v}}$ 和波阻抗 $\dot{\mathbf{h}}$ 的表达式。

第4讲 电磁能量

我们说电磁场是作为一种物质形式存在的。衡量物质存在的一个标志是动量和能量，那么如何确定电磁场的动能量呢？通常我们对一种新的能量或动量形态的认识，总是通过它们与其他物质的相互作用来达到。本讲所讨论的就是通过电磁场与电荷系统的相互作用来认识电磁场的动量和能量的。

4.1 Lorentz 力

电磁场与带电物质之间有着密切的联系。Maxwell 方程反映了电荷和电流（运动的电荷）激发电磁场以及电磁场内部的运动规律，但是，却不能反映电磁场如何反作用于电荷系统。

Coulomb 定律和 Ampere 定律反映了一定条件下场对电荷系统的作用。

Coulomb 定律：静止的电荷 q 受到静电场的作用力

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Ampere 定律：恒定电流元 $\vec{J}d\vec{v}$ 受到磁场作用力

$$d\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B}d\vec{v}$$

若电荷为连续分布，其密度为 r ，则电荷系统单位体积所受的力密度为

$$\vec{f} = r\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \quad (4-1)$$

Lorentz 把上述结果推广为普遍情况下场对电荷系统的作用力，因此上式称为 Lorentz 力密度公式。

把上式用于速度为 $\vec{v}$ ，电荷为 q 的带电粒子，则粒子所受的电磁场作用力为

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

上式称为 Lorentz 力公式。

Lorentz 假设这一公式适合任意运动的带电粒子。近代物理学的实践证明了这一假说是正确的。

4.2 电荷系统的动量和能量

根据作用力等于动量的时间变化率，有

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{G}_p}{dt} \quad (4-2)$$

式中 $\vec{G}_p = m\vec{v}$ 为带电粒子的动量，由(4-1)和(4-2)，有

$$\frac{d\vec{G}_p}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (4-3)$$

另一方面，带电粒子的动能

$$W_p = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v}$$

于是有

$$\frac{dW_p}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{G}_p}{dt} = \vec{v} \cdot (q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}) = q\vec{E} \cdot \vec{v} \quad (4-4)$$

对于电荷密度为 r ，电流密度为 $\vec{J}_r = r\vec{v}$ 的连续分布电荷系统，式(4-3)和(4-4)变为

$$\frac{d\vec{g}_p}{dt} = r\vec{E} + \vec{J}_r \times \vec{B} \quad (4-5)$$

$$\frac{dw_r}{dt} = \vec{J}_r \cdot \vec{E} \quad (4-6)$$

式中, $\dot{\mathbf{g}}_p, w_p$ 分别为动量密度和能量, 即单位体积中的动量和能量。

从(4-5)和(4-6)可以看出, 若 $\frac{d\dot{\mathbf{g}}_p}{dt} > 0$, $\frac{dw_p}{dt} > 0$, 则表明电荷系统得到了动量和能量, 而这些动量和能量只能来自电磁场, 所以根据动量守恒定律和能量守恒定律, 我们可以得到结论: 电磁场具有动量和能量。

4.3 时域 Poynting 定理

利用矢量恒等式 $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b}$, 有

$$\nabla \cdot (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}) = \dot{\mathbf{H}} \cdot \nabla \times \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}} \cdot \nabla \times \dot{\mathbf{H}}$$

将 Maxwell 旋度方程代入, 可得

$$\nabla \cdot (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}) = -\dot{\mathbf{H}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{B}}}{\partial t} - \dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{J}} - \dot{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{D}}}{\partial t}$$

设媒质非色散, $\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$, 则

$$\nabla \cdot (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}) = -\dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{J}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \dot{\mathbf{H}} \cdot \dot{\mathbf{B}} + \frac{\partial}{\partial t} \dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{D}} \right) \quad (4-7)$$

令 $\dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}$, $w_e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{D}}$, $w_m = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{H}} \cdot \dot{\mathbf{B}}$, $w_f = w_e + w_m$, $\dot{\mathbf{J}} = \dot{\mathbf{J}}_r + \dot{\mathbf{J}}_s$

其中, w_e 和 w_m 分别为电场能量密度和磁场能量密度, $\dot{\mathbf{J}}_s = s \dot{\mathbf{E}}$ 为导电媒质中的传导电流, $\dot{\mathbf{J}}_r$ 为外部电流源。

考虑到(4-6), 得

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{S}} = -\frac{\partial}{\partial t} (w_p + w_f) - s \dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}} \quad (4-8)$$

上式的积分形式为

$$-\oint_s \dot{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \frac{\partial}{\partial t} \int_v (w_p + w_f) dv + \int_v s |\dot{\mathbf{E}}|^2 dv \quad (4-9)$$

式中, w_p 为连续分布电荷系统的能量密度, w_f 为电磁场的能量密度, $\dot{\mathbf{S}}$ 为电磁场的能流密度矢量 (功率密度矢量), 称为 Poynting 矢量。 $s |\dot{\mathbf{E}}|^2$ 为欧姆损耗功率密度。

式(4-9)表明, 从闭合面 s 流入的功率等于 s 所包围的体积 v 内总能量 (电荷系统的能量和电磁场能量之和) 在单位时间内的增加量与 v 中的损耗功率之和。如果 s 面为理想导体面, 则(4-9)左边的面积分为 0, 则 v 中的损耗功率等于总能量的减小率; 如果 $s = 0$, 则电磁场能量与电荷系统能量相互转换; 如果 $w_p = 0$, 则电场能量与磁场能量相互转换, 即谐振。

苏联学者曾提出一个佯谬: 对于静电场 $\dot{\mathbf{E}}$ 和静磁场 $\dot{\mathbf{H}}$ 共存的空间, 并不存在电磁波, 但 Poynting 矢量存在 $\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}} \neq 0$, (4-9)不成立 (因为 $s = 0$, 右边=0)。难道说 Poynting 定理不适合静场? 问题出在哪里呢?

4.4 频域 Poynting 定理

采用与上节类似的方法, 可以得到

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^* \right) = -\frac{1}{2} \dot{\mathbf{J}}^* \cdot \dot{\mathbf{E}} - j2w \left(\frac{1}{4} \dot{\mathbf{H}}^* \cdot \dot{\mathbf{B}} - \frac{1}{4} \dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{D}}^* \right) \quad (4-10)$$

令
$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*, \quad \mathbf{w}_m = \frac{1}{4} \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{w}_e = \frac{1}{4} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*$$

得频域 Poynting 定理

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -\frac{1}{2} \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} - j2\omega(\mathbf{w}_m - \mathbf{w}_e) \quad (4-11)$$

与时域比较，一个周期内的时间平均值为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}} &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S} dt = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right\} = \text{Re} \{ \mathbf{S} \} \\ \bar{\mathbf{w}}_m &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{w}_m dt = \text{Re} \left\{ \frac{1}{4} \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{B} \right\} = \text{Re} \{ \mathbf{w}_m \} \\ \bar{\mathbf{w}}_e &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{w}_e dt = \text{Re} \left\{ \frac{1}{4} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* \right\} = \text{Re} \{ \mathbf{w}_e \} \end{aligned}$$

I 各向同性媒质的无耗条件

设 $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$, $\mu = \mu' - j\mu''$, 则耗能为

$$-\text{Re} \oint_s \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right) \cdot \hat{n} ds = \iiint_v \frac{1}{2} s E^2 dv + 2\omega \iiint_v \left(\frac{1}{4} \epsilon'' E^2 + \frac{1}{4} \mu'' H^2 \right) dv \quad (4-12)$$

储能为

$$-\text{Im} \oint_s \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right) \cdot \hat{n} ds = 2\omega \iiint_v \left(\frac{1}{4} \mu' H^2 - \frac{1}{4} \epsilon' E^2 \right) dv \quad (4-13)$$

上式表明，进入封闭面 s 内的实功率（Poynting 矢量的时间平均值）等于 s 面所包围的体积内由传导电流引起的热损耗与媒质中极化阻尼和磁化阻尼引起的损耗功率之和。（4-13）表明进入封闭面 s 内的虚功率与 s 面所包围的体积内磁场储能与电场储能时间平均值之差成正比。

媒质无耗时，耗能为零，所以媒质的无耗条件为

$$s = 0, \quad \epsilon'' = 0, \quad \mu'' = 0 \quad (4-14)$$

即

$$\begin{aligned} s = s^* = 0, \quad \epsilon = \epsilon^*, \quad \mu = \mu^* \\ \text{Im}(\mathbf{w}_m) = 0, \quad \text{Im}(\mathbf{w}_e) = 0 \end{aligned} \quad (4-15)$$

I 各向异性媒质的无耗条件

设
$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{e} \mathbf{E} + \mathbf{x} \mathbf{H} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{z} \mathbf{E} + \mathbf{m} \mathbf{H} \end{aligned} \quad (4-16)$$

不失一般性，考虑无源区域， $\mathbf{J} = 0$ ，将上式代入（4-10）并取实部得

$$\begin{aligned} \text{Re}(\nabla \cdot \mathbf{S}) &= \frac{1}{2} \text{Re}[j\omega(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*)] \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}[j\omega(\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}^* \mathbf{E}^* + \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}^* \mathbf{H}^* - \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{z}^* \mathbf{E} - \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{m}^* \mathbf{H})] \\ &= \frac{1}{2} j\omega[\mathbf{E}^* \cdot (\mathbf{e} - \mathbf{e}^*) \mathbf{E}^* + \mathbf{H}^* \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{z}^*) \mathbf{E} \\ &\quad - \mathbf{E}^* \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{x}^*) \mathbf{H} - \mathbf{H}^* \cdot (\mathbf{m} - \mathbf{m}^*) \mathbf{H}] \end{aligned}$$

对于无耗媒质， $\text{Re}(\nabla \cdot \mathbf{S}) = 0$ ，所以，无耗条件为

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^*, \quad \mathbf{m} = \mathbf{m}^*, \quad \mathbf{x} = \mathbf{z}^*$$

I Poynting 定理的电路解释

考虑图 4-1 所示的 RLC 串联电路。

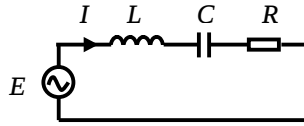


图 4-1 RLC 串联电路

流入电路的复功率为

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{2} I^* I Z = \frac{1}{2} I^* I \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega c} \right) \\
 &= \frac{1}{2} I^* I R + j2\omega \left(\frac{1}{4} I^* I L - \frac{I^* I}{4\omega^2 c^2} c \right) \\
 &= \frac{1}{2} I^2 R + j2\omega \left(\frac{1}{4} I^2 L - \frac{1}{4} v_c^2 c \right) \\
 &= P_L + j2\omega (\psi_m - \psi_e)
 \end{aligned}$$

I 场的互能量

电磁场的能量和能流不是场的线性函数，所以不满足叠加原理。例如，假设在各向同性非色散媒质中，同时存在两个电场 $\vec{E}_1$ 和 $\vec{E}_2$ ，于是，合成的电场能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2} e (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = \frac{1}{2} e E_1^2 + \frac{1}{2} e E_2^2 + e \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$$

上式的前两项为两个电场系统的自能量密度，交叉项则代表互能量密度。

习题 4

4-1 试推导频域 Poynting 定理。

4-2 相同频率 ω 的两个点电荷源，置于相同的各向同性的线性媒质中，电源 1 在空间产生的电场为 $\vec{E}_1, \vec{H}_1$ ；而电源 2 产生的 $\vec{E}_2, \vec{H}_2$ ，试证明 $\nabla \cdot (\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1) = 0$

4-3 无限均匀导电媒质中放一电量为 Q 的点电荷，试求这电荷随时间的变化规律，并写出空间中任一点的磁场强度和能密度。

第 5 讲 电磁动量与张力

一、动量流张量

首先对 $\dot{\mathbf{D}} \times \dot{\mathbf{B}}$ 关于时间 t 求导数

$$\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\mathbf{D}} \times \dot{\mathbf{B}}) = \frac{\partial \dot{\mathbf{D}}}{\partial t} \times \dot{\mathbf{B}} + \dot{\mathbf{D}} \times \frac{\partial \dot{\mathbf{B}}}{\partial t} \quad (5-1)$$

将 Maxwell 旋度方程

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{D}}}{\partial t}, \quad \nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \dot{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

以及本构关系 $\dot{\mathbf{D}} = e\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{B}} = m\dot{\mathbf{H}}$ 代入, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\dot{\mathbf{D}} \times \dot{\mathbf{B}}) &= (\nabla \times \dot{\mathbf{H}}) \times \dot{\mathbf{B}} - \dot{\mathbf{J}} \times \dot{\mathbf{B}} - \dot{\mathbf{D}} \times (\nabla \times \dot{\mathbf{E}}) \\ &= -m\dot{\mathbf{H}} \times (\nabla \times \dot{\mathbf{H}}) - \dot{\mathbf{J}} \times \dot{\mathbf{B}} - e\dot{\mathbf{E}} \times (\nabla \times \dot{\mathbf{E}}) \end{aligned}$$

利用矢量公式 $\dot{\mathbf{a}} \times (\nabla \times \dot{\mathbf{a}}) = \frac{1}{2} \nabla(\dot{\mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{a}}) - (\dot{\mathbf{a}} \cdot \nabla)\dot{\mathbf{a}}$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad \frac{\partial}{\partial t}(\dot{\mathbf{D}} \times \dot{\mathbf{B}}) + \dot{\mathbf{J}} \times \dot{\mathbf{B}} &= -\frac{1}{2} [m \nabla(\dot{\mathbf{H}} \cdot \dot{\mathbf{H}}) + e \nabla(\dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}})] \\ &\quad + m(\dot{\mathbf{H}} \cdot \nabla)\dot{\mathbf{H}} + e(\dot{\mathbf{E}} \cdot \nabla)\dot{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (5-2)$$

利用张量公式 $\nabla j = \nabla \cdot (j \bar{\mathbf{I}})$, $\nabla \cdot (\dot{\mathbf{f}} \dot{\mathbf{g}}) = (\nabla \cdot \dot{\mathbf{f}})\dot{\mathbf{g}} + (\dot{\mathbf{f}} \cdot \nabla)\dot{\mathbf{g}}$, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\dot{\mathbf{D}} \times \dot{\mathbf{B}}) + \dot{\mathbf{J}} \times \dot{\mathbf{B}} &= -\nabla \cdot \left[\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{B}} \cdot \dot{\mathbf{H}} + \dot{\mathbf{D}} \cdot \dot{\mathbf{E}}) \bar{\mathbf{I}} - \dot{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{D}} \dot{\mathbf{E}} \right] \\ &\quad - (\nabla \cdot \dot{\mathbf{B}})\dot{\mathbf{H}} - (\nabla \cdot \dot{\mathbf{D}})\dot{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (5-3)$$

代入 Maxwell 散度方程 $\nabla \cdot \dot{\mathbf{D}} = \dot{\rho}$, $\nabla \cdot \dot{\mathbf{B}} = 0$, 则 (5-3) 变为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\mathbf{D}} \times \dot{\mathbf{B}}) + \dot{\mathbf{J}} \times \dot{\mathbf{B}} + \dot{\rho} \dot{\mathbf{E}} = -\nabla \cdot \left[\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{B}} \cdot \dot{\mathbf{H}} + \dot{\mathbf{D}} \cdot \dot{\mathbf{E}}) \bar{\mathbf{I}} - \dot{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{D}} \dot{\mathbf{E}} \right] \quad (5-4)$$

令

$$\dot{\mathbf{g}}_f = \dot{\mathbf{D}} \times \dot{\mathbf{B}} = me\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}} = me\dot{\mathbf{S}} \quad (5-5)$$

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{B}} \cdot \dot{\mathbf{H}} + \dot{\mathbf{D}} \cdot \dot{\mathbf{E}}) \bar{\mathbf{I}} - \dot{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{D}} \dot{\mathbf{E}} \quad (5-6)$$

结合电荷系统的动量守恒方程 $\frac{\partial \dot{\mathbf{g}}_p}{\partial t} = \dot{\mathbf{J}} \times \dot{\mathbf{B}} + \dot{\rho} \dot{\mathbf{E}}$

$$\text{最后得} \quad \frac{\partial}{\partial t}(\dot{\mathbf{g}}_f + \dot{\mathbf{g}}_p) = -\nabla \cdot \bar{\Phi} \quad (5-7)$$

对比 Poynting 定理

$$\frac{\partial}{\partial t}(w_f + w_p) = -\nabla \cdot \dot{\mathbf{S}}$$

可以看出 (5-7) 中各项的物理意义。因为 $\dot{\mathbf{g}}_p$ 为电荷系统的动量密度, 所以 $\dot{\mathbf{g}}_f$ 可定义为电磁场的动量密度。而 $\bar{\Phi}$ 代表动量流密度, 称为电磁场动量流密度张量。

对 (5-7) 两边关于体积 v 积分, 并利用积分变换公式

$$\int_v dv \nabla \cdot \bar{\mathbf{A}} = \oint_s d\mathbf{s} \cdot \bar{\mathbf{A}}$$

得

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{g}_f + \mathbf{g}_p) dv = - \oint_S d\mathbf{s} \cdot \mathbf{\bar{\Phi}} \quad (5-8)$$

上式告诉我们，单位时间内通过闭合曲面 S 流入体积 V 的总动量等于体积 V 内电磁场与电荷系统总动量的时间变化率。

[例 5-1] 计算自由空间中均匀平面电磁波的能量流密度和动量流密度。

解：对于自由空间中的均匀平面电磁波，电场 $\mathbf{\bar{E}}$ 、磁场 $\mathbf{\bar{H}}$ 和 Poynting 矢量 $\mathbf{\bar{S}}$ 互相垂直。不妨设 $\mathbf{\bar{E}} = E\hat{x}$, $\mathbf{\bar{H}} = H\hat{y}$, $H = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E$ ，于是

$$\mathbf{\bar{S}} = \mathbf{\bar{E}} \times \mathbf{\bar{H}} = EH\hat{z} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2 \hat{z} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) \hat{z} = c w_f \hat{z} \quad (5-9)$$

式中， c 表示光速， w_f 表示电磁场能量密度。电磁场动量密度张量为

$$\mathbf{\bar{\Phi}} = -\epsilon_0 E^2 \hat{x}\hat{x} - \mu_0 H^2 \hat{y}\hat{y} + w_f \mathbf{\bar{I}} = w_f (-\hat{x}\hat{x} - \hat{y}\hat{y} + \mathbf{\bar{I}}) = w_f \hat{z}\hat{z} \quad (5-10)$$

根据 (5-9) $w_f \hat{z} = \mathbf{\bar{S}} / c$ ，以及 $\mathbf{\bar{g}}_f = \epsilon_0 \mathbf{\bar{S}} = \mathbf{\bar{S}} / c^2$ ，可得

$$\mathbf{\bar{\Phi}} = c \mathbf{\bar{g}}_f \hat{z} \quad (5-11)$$

(5-9) 和 (5-11) 表明，自由空间中的均匀平面电磁波携带能量和动量以光速传播形成电磁场能量流和动量流。

二、电磁场张力张量

令

$$\mathbf{\bar{T}} = -\mathbf{\bar{\Phi}} = \mathbf{\bar{B}}\mathbf{\bar{H}} + \mathbf{\bar{D}}\mathbf{\bar{E}} - \frac{1}{2}(\mathbf{\bar{B}} \cdot \mathbf{\bar{H}} + \mathbf{\bar{D}} \cdot \mathbf{\bar{E}})\mathbf{\bar{I}} \quad (5-12)$$

则 (5-7) 和 (5-8) 变为

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} (\mathbf{\bar{g}}_f + \mathbf{\bar{g}}_p) = \nabla \cdot \mathbf{\bar{T}} \quad (5-13)$$

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{\bar{g}}_f + \mathbf{\bar{g}}_p) dv = \int_V \nabla \cdot \mathbf{\bar{T}} dv = \oint_S d\mathbf{s} \cdot \mathbf{\bar{T}} \quad (5-14)$$

对比经典力学动量守恒定律 $\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{F}$ ，可见， $\int_V \nabla \cdot \mathbf{\bar{T}} dv = \oint_S d\mathbf{s} \cdot \mathbf{\bar{T}}$ 就是作用在体积 V 上的力，它也可

以等效地看成作用在包围体积 V 的闭合曲面 S 上的张力。由于 $\mathbf{\bar{T}}$ 只包含电磁场，所以这些力是由电磁场施加的。 $\nabla \cdot \mathbf{\bar{T}}$ 为电磁场体积力密度， $\mathbf{\bar{T}}$ 为作用在单位面积上的电磁场张力张量，显然 $\mathbf{\bar{T}}$ 为对称张量。(5-13) 和 (5-14) 称为电磁场动量守恒定理。

在电磁场张力张量 $\mathbf{\bar{T}}$ 的表示式 (5-12) 中，电场 $\mathbf{\bar{E}}$ 和磁场 $\mathbf{\bar{H}}$ 之间彼此是独立的，可以表示为两部分之和

$$\mathbf{\bar{T}} = \mathbf{\bar{T}}_e + \mathbf{\bar{T}}_m \quad (5-15)$$

式中，

$$\mathbf{\bar{T}}_e = \mathbf{\bar{D}}\mathbf{\bar{E}} - \frac{1}{2}(\mathbf{\bar{D}} \cdot \mathbf{\bar{E}})\mathbf{\bar{I}} \quad (5-16)$$

$$\mathbf{\bar{T}}_m = \mathbf{\bar{B}}\mathbf{\bar{H}} - \frac{1}{2}(\mathbf{\bar{B}} \cdot \mathbf{\bar{H}})\mathbf{\bar{I}} \quad (5-17)$$

分别称为电场和磁场张力张量。

为了便于分析又不失一般性，令 $\vec{E} = E\hat{n}$ ，则

$$\vec{T}_e = eE^2\hat{n}\hat{n} - \frac{1}{2}eE^2\vec{I} = \frac{1}{2}eE^2(\hat{n}\hat{n} - \hat{y}\hat{y} - \hat{z}\hat{z}) \quad (5-18)$$

于是作用在表面 s 单位面积上的电场张力为

$$\vec{F}_e = \hat{n} \cdot \vec{T}_e = \frac{1}{2}eE^2(n_x\hat{x} - n_y\hat{y} - n_z\hat{z}) \quad (5-19)$$

式中， $\hat{n} = n_x\hat{x} + n_y\hat{y} + n_z\hat{z}$ 为表面 s 的外单位法向矢。

情况 a: $\hat{n}$ 在 x - y 平面内， $n_z = 0$, $n_x = \cos q$, $n_y = \sin q$ ，其中 q 为 $\vec{E}$ 与 $\hat{n}$ 之间的夹角，则

$$\vec{F}_e = \frac{1}{2}eE^2(\cos q\hat{x} - \sin q\hat{y}) \quad (5-20)$$

情况 b: $\vec{E}$ 与 $\hat{n}$ 平行，即 $\hat{n} = n_x\hat{x}$, $|n_x| = 1$, $n_y = n_z = 0$ ，则

$$\vec{F}_e = \frac{1}{2}eE^2\hat{n} \quad (5-21)$$

所以，电场表面张力与 $\hat{n}$ 同向，它是对表面 s 向外的拉力。

情况 c: $\vec{E}$ 与 $\hat{n}$ 垂直，不妨设 $\hat{n} = n_y\hat{y}$, $|n_y| = 1$, $n_x = n_z = 0$ ，则

$$\vec{F}_e = -\frac{1}{2}eE^2\hat{n} \quad (5-22)$$

此时，电场表面张力与 $\hat{n}$ 反向，它是对表面 s 向内的压力。以上情况的受力示意图如图 5-1 所示。

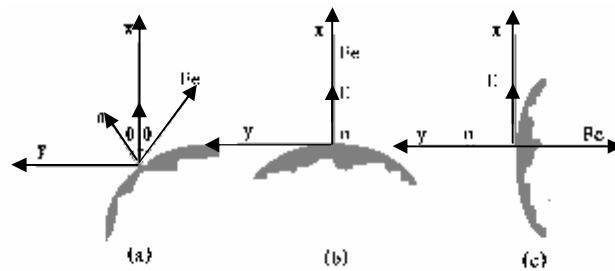


图 5-1 电场表面张力

(a) $\hat{n}$ 在 x - y 平面内 (b) $\vec{E}$ 与 $\hat{n}$ 平行 (拉力) (c) $\vec{E}$ 与 $\hat{n}$ 垂直 (压力)

由于磁场张力张量与电场张力张量形式相同，只要把 $\bar{\bar{T}}_e$ 中的 $\vec{E}$ 换成 $\vec{H}$ 以及 e 换成 m 便可得到 $\bar{\bar{T}}_m$ 的表示式，所以上述有关电场表面张力的结论完全适合于磁场表面张力。根据这些结论，我们很容易分析任一表面所受的电磁场力。例如，对于理想导电空腔腔壁，电场 $\vec{E}$ 垂直于腔壁，电场力为拉力，磁场 $\vec{H}$ 平行于腔壁，磁场力为压力。再如一均匀平面波垂直入射到无限大理想导体时，导体表面上电场等于零，只存在切向磁场，因此，导体受到平面波的压力，既辐射压力。

三、合成场的张力张量

设有两个电磁场系统，其场量分别为 $\vec{E}_1, \vec{H}_1$ 和 $\vec{E}_2, \vec{H}_2$ 。当两个场系统叠加时，其合成场的场矢量为

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \\ \vec{H} &= \vec{H}_1 + \vec{H}_2\end{aligned}$$

则合成场的张力张量为

$$\bar{\bar{T}} = \bar{\bar{T}}_{11} + \bar{\bar{T}}_{22} + \bar{\bar{T}}_{12} + \bar{\bar{T}}_{21} \quad (5-23)$$

其中，

$$\bar{\bar{T}}_{ij} = \vec{B}_i \vec{H}_j + \vec{D}_i \vec{E}_j - \frac{1}{2}(\vec{B}_i \cdot \vec{H}_j + \vec{D}_i \cdot \vec{E}_j)\vec{I}, \quad i, j = 1, 2$$

$\bar{\bar{T}}_{11}$ 和 $\bar{\bar{T}}_{22}$ 分别表示场系统 $\vec{E}_1, \vec{H}_1$ 和 $\vec{E}_2, \vec{H}_2$ 的张力张量， $\bar{\bar{T}}_{12}$ 和 $\bar{\bar{T}}_{21}$ 表示两个场系统相互作用的张力张量。由于场的张力为 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 的二次项，所以在合成场的张力张量表达式中出现了场的交叉乘积项。

应用 $\bar{\bar{T}}_{12}$ 和 $\bar{\bar{T}}_{21}$ 可以计算两个电磁场系统间的相互作用力。例如，对于两个静电场系统 $\vec{E}_1$ 和 $\vec{E}_2$

$$\bar{\bar{T}}_{12} + \bar{\bar{T}}_{21} = e[\vec{E}_1 \vec{E}_2 + \vec{E}_2 \vec{E}_1 - (\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2)\vec{I}] \quad (5-24)$$

于是，两个静电场系统在闭合面 s 上的相互作用力为

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \oint_s (\bar{\bar{T}}_{12} + \bar{\bar{T}}_{21}) \cdot d\vec{s} = e \oint_s [\vec{E}_1 (\vec{E}_2 \cdot \hat{n}) + \vec{E}_2 (\vec{E}_1 \cdot \hat{n}) - (\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2) \hat{n}] ds \\ &= e \oint_s [\vec{E}_2 (\vec{E}_1 \cdot \hat{n}) - \vec{E}_2 \times (\hat{n} \times \vec{E}_1)] ds\end{aligned} \quad (5-25)$$

【例 5-2】 利用两个静电场系统的相互作用力公式（5-25）计算均匀电场中点电荷所受的力。

解：在球坐标系中，点电荷 q 产生的电场 $\vec{E}_1$ 为

$$\vec{E}_1 = \frac{q\hat{r}}{4\pi\epsilon r^2}$$

设点电荷 q 位于均匀电场 $\vec{E}_2$ 中，由（5-25）可得两个静电场系统在闭合面 s 上的相互作用力。为了计算电场 $\vec{E}_2$ 对点电荷 q 的作用力，取（5-25）中积分曲面 s 为包围点电荷 q 的球面且点电荷 q 位于球心，则

$$\vec{F} = e \oint_s [\vec{E}_2 (\vec{E}_1 \cdot \hat{r}) - \vec{E}_2 \times (\hat{r} \times \vec{E}_1)] ds = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \oint_s \vec{E}_2 ds$$

令球面的半径 r 趋于零，则 $\vec{F} = \frac{q\vec{E}_2}{4\pi\epsilon r^2} \oint_s ds = q\vec{E}_2$

所得结果与洛仑兹力公式的结果相同。

习题 5

- 5-1 证明:在自由空间 (m_0, e_0) 的电磁场中, 垂直于任意表面的电磁场力密度(单位面积上电磁场力的法向分量)为

$$F_n = \frac{1}{2} [e_0 (\mathbf{E} \cdot \hat{n})^2 + m_0 (\mathbf{H} \cdot \hat{n})^2 - e_0 (\mathbf{E} \times \hat{n})^2 - m_0 (\mathbf{H} \times \hat{n})^2]$$

- 5-2 试导出频域情况下电磁场动量守恒定理。

第 6 讲 辅助位函数

引入位函数可以简化电磁计算。

一、矢位与标位

考虑 Maxwell 方程

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\nabla \vec{D}}{\nabla t} \quad (6-1a)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\nabla \vec{B}}{\nabla t} \quad (6-1b)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6-1c)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = r \quad (6-1d)$$

以及本构关系

$$\vec{D} = e\vec{E} \quad (6-2a)$$

$$\vec{B} = m\vec{H} \quad (6-2b)$$

根据(6-1c)以及矢量公式 $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \equiv 0$ ，引入磁矢位 $\vec{A}$ ，满足

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (6-3)$$

代入(6-1b)得

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\nabla \vec{A}}{\nabla t} \right) = 0 \quad (6-4)$$

再根据矢量公式 $\nabla \times (\nabla j) = 0$ ，引入电标位 j ，满足

$$\vec{E} = -\nabla j - \frac{\nabla \vec{A}}{\nabla t} \quad (6-5)$$

可见，引入 $\vec{A}$ 和 j 后，使求解 $\vec{E}$ 、 $\vec{H}$ 六个分量变成求解 $\vec{A}$ 和 j 四个分量，因而简化了计算。

我们已应用了 Maxwell 方程中的两个方程(6-1b)和(6-1c)。为了导出 $\vec{A}$ 和 j 满足的方程，将(6-3)和(6-5)代入剩余的两个方程(6-1a)和(6-1d)。

对于均匀各向同性媒质，有

$$\begin{cases} \nabla \times \nabla \times \vec{A} = m\vec{J} + me(-\nabla \frac{j}{\nabla t} - \frac{\nabla^2 \vec{A}}{\nabla t^2}) \\ \nabla \cdot (\nabla j + \frac{\nabla \vec{A}}{\nabla t}) = -\frac{r}{e} \end{cases}$$

应用 $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ ，上式整理后得

$$\begin{cases} (\nabla^2 - me \frac{\nabla^2}{\nabla t^2}) \vec{A} = -m\vec{J} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A} + me \frac{j}{\nabla t}) \\ (\nabla^2 - me \frac{\nabla^2}{\nabla t^2}) j = -\frac{r}{e} - \frac{\nabla}{\nabla t} (\nabla \cdot \vec{A} + me \frac{j}{\nabla t}) \end{cases} \quad (6-6)$$

比较电场 $\vec{E}$ 和磁场 $\vec{H}$ 满足的波动方程:

$$\begin{cases} (\nabla^2 - me \frac{1}{t^2}) \vec{H} = -\nabla \times \vec{J} \\ (\nabla^2 - me \frac{1}{t^2}) \vec{E} = m \frac{\vec{J}}{t} + \nabla(\frac{r}{e}) \end{cases} \quad (6-7)$$

可以看出:

$\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 的波动方程中含有场源的复杂微分项, 这给方程的求解带来了相当大的困难。

而 $\vec{A}$ 和 j 的波动方程中场源是直接出现在方程中的, 不包含任何运算, 因而使方程求解相对简单。这是引入位函数 $\vec{A}$ 和 j 的又一个主要原因。

遗憾的是, (6-6) 中的两个方程是互相耦合的, 即 j 出现在 $\vec{A}$ 的方程中, 而 $\vec{A}$ 又出现在 j 的方程中。为了解决这个问题, 我们先研究位函数 $\vec{A}$ 和 j 的唯一确定问题。

根据矢量 Helmholtz 定理: 一个在远区趋于零的矢量函数由它的旋度和散度完全确定。式(6-3)仅给定了 $\vec{A}$ 的旋度, 所以不足以完全确定 $\vec{A}$, 还需要引入 $\vec{A}$ 的散度。

事实上, 如果设

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla y \quad (6-8)$$

则

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A}$$

如果设

$$j' = j - \frac{1}{t} y \quad (6-9)$$

则

$$\vec{E} = -(\nabla j' + \frac{1}{t} \vec{A}') = -\nabla j + \frac{1}{t} \nabla y - \frac{1}{t} \vec{A} - \frac{1}{t} \nabla y = -(\nabla j + \frac{1}{t} \vec{A})$$

也就是说, 位函数在(6-8)和(6-9)变换下, 电磁场量 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 保持不变。这种不变性称为规范不变性。

因此, 仅由(6-3)和(6-5)定义的 $\vec{A}$ 和 j 在一定范围内是任意的。这就为 $\nabla \cdot \vec{A}$ 的定义提供了自由空间。

定义 $\nabla \cdot \vec{A}$ 的条件称为规范条件。

常用的规范有两种。

I Lorentz 规范

如果我们令

$$\nabla \cdot \vec{A} + me \frac{j}{t} = 0 \quad (6-10)$$

则(6-6)可简化为非耦合形式

$$\begin{cases} (\nabla^2 - me \frac{1}{t^2}) \vec{A} = -m \vec{J} \\ (\nabla^2 - me \frac{1}{t^2}) j = -\frac{r}{e} \end{cases} \quad (6-11)$$

(6-10)称为 Lorentz 规范条件。在 Lorentz 规范下, 矢位 $\vec{A}$ 直接由电流源 $\vec{J}$ 产生, 而标位 j 直接由电荷 r 产生。

对于角频率为 ω 的时谐场, 矢位 $\vec{A}$ 和标位 j 满足

$$\begin{cases} (\nabla^2 + k^2) \vec{A} = -m \vec{J} \\ (\nabla^2 + k^2) j = -\frac{r}{e} \end{cases} \quad (6-12)$$

式中, $k^2 = \omega^2 me$ 。

Lorentz 规范可写为

$$\nabla \cdot \vec{A} + j\omega me j = 0 \quad (6-13)$$

于是, 电磁场量的表达式为

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -j\omega [\vec{A} + \frac{1}{k^2} \nabla(\nabla \cdot \vec{A})] \end{cases} \quad (6-14)$$

上式直接表明, 在 Lorentz 规范下, 只需求出 $\vec{A}$, 就可单独由 $\vec{A}$ 求出场量 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$, 而无需求标位 j , 也就是说, 并不需要知道电荷分布。

如何从物理概念上解释这一结论呢? 事实上, 从下面的证明可以看出, 由 Lorentz 规范可以直接导出电流连续性方程。

对 Lorentz 规范(6-10)两边作 ∇^2 运算, 并注意到 $\nabla^2(\nabla \cdot \vec{A}) = \nabla \cdot (\nabla^2 \vec{A})$ 可得

$$\nabla \cdot (\nabla^2 \vec{A}) + me \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 j = 0$$

将 $\vec{A}$ 和 j 的波动方程(6-11)代入上式, 得

$$me \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \cdot \vec{A} + me \frac{\partial j}{\partial t}) = m(\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial r}{\partial t}) \quad (6-15)$$

再将 Lorentz 规范代入上式左边, 便得到电流连续性方程

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial r}{\partial t} = 0$$

根据电流连续性方程, 电荷与电流并不是彼此无关的, 电荷密度可用电流密度来表示。而在 Lorentz 规范下, 矢位 $\vec{A}$ 只与 $\vec{J}$ 有关, 与 j 无关。所以, 单独由 $\vec{A}$ 求出 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 也就不足为奇了。

I Coulomb 规范

令

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (6-16)$$

则(6-6)变为

$$\begin{cases} (\nabla^2 - me \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \vec{A} = -m \vec{J} + me \nabla \frac{\partial j}{\partial t} \\ \nabla^2 j = -\frac{r}{e} \end{cases} \quad (6-17)$$

(6-16)称为 Coulomb 规范。虽然在 Coulomb 规范下, 矢位和标位满足的方程不像 Lorentz 规范下矢位和标位满足的方程那样简洁、对称, 但标位满足的方程与静电场的电位方程形式相同。容易证明,

$$j(\vec{r}, t) = \int_v \frac{r(\vec{r}', t)}{4\pi e |\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (6-18)$$

下面我们证明，在 Coulomb 规范下，矢位 $\vec{A}$ 只由电流的无散部分决定。

[引理] (Helmholtz 定理) 任意矢量 $\vec{f}$ 可分解为无旋部分和无散部分之和

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = \nabla \times \nabla \times \int_v \frac{\vec{f}(\vec{r}', t)}{4pR} dv' - \nabla \nabla \cdot \int_v \frac{\vec{f}(\vec{r}', t)}{4pR} dv' \quad (6-19)$$

证：根据 $\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4pd(\vec{r} - \vec{r}')$ 以及 d 函数的选择性，任意矢量 $\vec{f}(\vec{r}, t)$ 可表示为

$$\begin{aligned} \vec{f}(\vec{r}, t) &= \int_v \vec{f}(\vec{r}', t) d(\vec{r} - \vec{r}') dv' = - \int_v \frac{\vec{f}(\vec{r}', t)}{4p} \nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \\ &= - \nabla^2 \int_v \frac{\vec{f}(\vec{r}', t)}{4p|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \end{aligned}$$

再利用 $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ ，便得证(6-19)。

设电流源 $\vec{J} = \vec{J}_l + \vec{J}_t$ ，其中 $\vec{J}_l, \vec{J}_t$ 分别表示 $\vec{J}$ 的无旋部分和无散部分，即

$$\vec{J}_l = - \nabla \nabla \cdot \int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{4p|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (6-20)$$

$$\vec{J}_t = \nabla \times \nabla \times \int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{4p|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (6-21)$$

【定理】在 Coulomb 规范下

$$\vec{J}_l = e \nabla \frac{\varrho_j}{\varrho_t} \quad (6-22)$$

证：根据矢量恒等式

$$\nabla \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \vec{J}(\vec{r}', t) \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}', t)$$

因为 $\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}', t) = 0$ ，以及

$$\begin{aligned} \vec{J}(\vec{r}', t) \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= - \vec{J}(\vec{r}', t) \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= - \nabla' \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}', t) \end{aligned}$$

所以，由(6-20)

$$\begin{aligned} \vec{J}_l &= \nabla \int_v \nabla' \cdot \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{4p|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dv' - \nabla \int_v \frac{\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}', t)}{4p|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \\ &= \nabla \oint_s \frac{\vec{J}(\vec{r}', t) \cdot \hat{n}}{4p|\vec{r} - \vec{r}'|} ds + \nabla \frac{\varrho_j}{\varrho_t} \int_v \frac{r(\vec{r}', t)}{4p|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \end{aligned}$$

上式推导中已利用了电流连续性方程。因为场源 $\vec{J}$ 和 r 分布在有限空间内，而体积 v 为均匀无界空间，所以上式右边第一项面积为零。再将 Coulomb 规范下标位的表达式(6-18)代入上式右边第二项，便证明了(6-22)。

将 $\vec{J} = \vec{J}_l + \vec{J}_t$ 和(6-22)代入(6-17)的第一式，得到

$$(\nabla^2 - me \frac{\varrho_j^2}{\varrho_t^2}) \vec{A} = -m \vec{J}_t \quad (6-23)$$

即在 Coulomb 规范下，矢位 $\vec{A}$ 只由电流源的无散部分决定。

引入了规范条件后， $\vec{A}$ 和 $\vec{j}$ 中只有三个量是独立的。换句话说，只需求解 $\vec{A}$ 和 $\vec{j}$ 中三个量便可确定电场 $\vec{E}$ 和磁场 $\vec{H}$ 的六个分量。

二、Hertz 矢量

另一种常用的辅助位函数是 Hertz 矢量。已经知道源电流密度分为无旋分量和无散分量两部分。Hertz 在研究单一点振荡点电荷的辐射问题时，将电流密度的无旋分量等效为极化电流，即

$$\vec{J}_l = \frac{\vec{\nabla} \vec{P}}{\epsilon_0} \quad (6-24)$$

式中 $\vec{P}$ 为等效极化矢量。根据电流连续性方程，可得等效极化电荷密度

$$\rho = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (6-25)$$

引入新的位函数—电 Hertz 矢量 $\vec{\Pi}_e$ ，满足

$$\vec{A}_l = \epsilon_0 \frac{\vec{\nabla} \vec{\Pi}_e}{\epsilon_0} \quad (6-26)$$

则在 Lorentz 规范下，

$$(\nabla^2 - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \vec{\Pi}_e = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad (6-27)$$

代入 Lorentz 规范条件，得

$$\vec{j}_l = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_e \quad (6-28)$$

于是，由 $\vec{J}_l$ 产生的场为

$$\begin{cases} \vec{B}_l = \epsilon_0 \vec{\nabla} \times \frac{\vec{\nabla} \vec{\Pi}_e}{\epsilon_0} \\ \vec{E}_l = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_e - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{\Pi}_e}{\partial t^2} \end{cases} \quad (6-29)$$

对于电流无散分量，可等效为磁化电流的形式，令

$$\vec{J}_t = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (6-30)$$

式中， $\vec{M}$ 称为等效磁化强度矢量。

引入另一个位函数—磁 Hertz 矢量 $\vec{\Pi}_m$ ，满足

$$\vec{A}_t = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{\Pi}_m \quad (6-31)$$

则

$$(\nabla^2 - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \vec{\Pi}_m = -\frac{\vec{M}}{\mu_0} \quad (6-32)$$

根据(6-31)，有 $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_t = 0$ ，所以 Lorentz 条件为 $\vec{j}_t = 0$ ，于是电磁场量表示为

$$\begin{cases} \vec{B}_t = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\Pi}_m \\ \vec{E}_t = -\mu_0 \vec{\nabla} \times \frac{\vec{\nabla} \vec{\Pi}_m}{\epsilon_0} \end{cases} \quad (6-33)$$

一般情况下，源电流为

$$\vec{J} = \frac{\vec{\nabla} \vec{P}}{\epsilon_0} + \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (6-34)$$

于是，根据场的叠加原理，电磁场量表示为

$$\begin{cases} \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \frac{\vec{\Pi}^e}{t}) - me \frac{t^2 \vec{\Pi}_m}{t^2} - m \nabla \times \frac{t \vec{\Pi}_m}{t} \\ \vec{H} = e \nabla \frac{t \vec{\Pi}_e}{t} + \nabla \times \nabla \times \frac{\vec{\Pi}_m}{t} \end{cases} \quad (6-35)$$

习题 6

6-1 试证明在 Coulomb 规范下

$$(\nabla^2 - me \frac{t^2}{t^2}) \vec{A} = -m \vec{J}_t$$

式中，
$$\vec{J}_t = \nabla \times \nabla \times \int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{4p|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

6-2 试导出导电率为 s 的媒质中矢位 $\vec{A}$ 和标位 j 的波动方程。

第 7 讲 无源区域电磁场量的表示

在上一讲中, 我们利用矢位 $\vec{A}$ 和标位 j 或电 Hertz 矢量 $\vec{\Pi}_e$ 和磁 Hertz 矢量 $\vec{\Pi}_m$ 表示了电磁场量 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 。我们已得到结论, 场量 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 可用矢位 $\vec{A}$ 直接确定, 也就是说, 场量的六个分量可用三个标量函数表示。

[定理] 对于无源区域 $\vec{J} = 0$, $r = 0$, 场量 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 只需用两个标量函数就可以确定。

证明: 在频域, 作规范变换

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \nabla y \\ j' = j - j\omega y \end{cases} \quad (7-1)$$

式中, y 为任一标量函数。标位 j 满足齐次波动方程 ($r = 0$)

$$(\nabla^2 + k^2)j = 0$$

在 Lorentz 规范下 $\begin{cases} \nabla \cdot \vec{A}' + j\omega m e j' = 0 \\ \nabla \cdot \vec{A} + j\omega m e j = 0 \end{cases}$, 有

$$(\nabla^2 + k^2)y = 0 \quad (7-2)$$

所以, y 和 j 满足相同的方程。如果我们选取

$$j\omega y = j \quad (7-3)$$

则 $j' = 0$ 。由 Lorentz 规范得 $\nabla \cdot \vec{A}' = 0$ 。

因此, 在 Lorentz 规范下, 无源区域电磁场量可表示为

$$\begin{cases} \vec{E} = -j\omega \vec{A}' \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A}' \\ \nabla \cdot \vec{A}' = 0 \end{cases} \quad (7-4)$$

由此可见, 场量 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 可由 $\vec{A}'$ 的三个分量确定, 但 $\vec{A}'$ 的三个分量又满足 $\nabla \cdot \vec{A}' = 0$, 即 $\vec{A}'$ 只有两个分量是独立的。因此, 只要用 $\vec{A}'$ 的两个独立分量即可表示无源区域中电磁场量。

在 Coulomb 规范下我们可以得到相同的结论。

显然, 用来表示无源区域电磁场量的两个独立标量函数可以采用不同的形式, 可以是矢位 $\vec{A}$ 的两个分量, 也可以是电 Hertz 矢量的一个分量和磁 Hertz 矢量的一个分量, 在柱坐标系中, 还可以是纵向电场分量和纵向磁场分量。下面讨论在柱坐标系和球坐标系中如何用两个标量函数来表示无源区域的电磁场量。

一、柱坐标系中无源区域电磁场量的表示

采用 Hertz 矢量。对于电 Hertz 矢量, 取 $\vec{\Pi}_e = \Pi_e \hat{z}$, 在 Lorentz 规范下满足

$$(\nabla^2 - m e \frac{\epsilon^2}{t^2})\Pi_e = 0 \quad (7-5)$$

由 $\vec{\Pi}_e$ 产生的电磁场为

$$\begin{cases} \vec{E} = \nabla \times \nabla \times \vec{\Pi}_e = \nabla \nabla \cdot (\Pi_e \hat{z}) - m e \frac{\epsilon^2}{t^2} (\Pi_e \hat{z}) \\ \vec{H} = e \nabla \times \frac{\epsilon}{t} (\Pi_e \hat{z}) \end{cases} \quad (7-6)$$

设 $\nabla = \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$ ，其中 ∇_t 表示 ∇ 的横向算子，则由(7-6)得

$$\begin{aligned}\vec{E} &= (\nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}) [(\nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}) \cdot (\vec{\Pi}_e \hat{z})] - me \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{\Pi}_e \hat{z}) \\ &= \nabla_t \frac{\partial \Pi_e}{\partial z} + (\frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial z^2} - me \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial t^2}) \hat{z} \\ \vec{H} &= e(\nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}) \times \frac{\partial (\vec{\Pi}_e \hat{z})}{\partial t} = e \nabla_t \times (\frac{\partial \Pi_e}{\partial t} \hat{z})\end{aligned}$$

即

$$\begin{cases} \vec{E}_t = \nabla_t \frac{\partial \Pi_e}{\partial z} \\ E_z = \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial z^2} - me \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial t^2} \\ \vec{H}_t = e \nabla_t \times (\frac{\partial \Pi_e}{\partial t} \hat{z}) = e \nabla_t \frac{\partial \Pi_e}{\partial t} \times \hat{z} \\ H_z = 0 \end{cases}$$

(7-7)

可见，在无源区域沿纵向的电 Hertz 矢量产生的场是 TM 波。

对于磁 Hertz 矢量，取 $\vec{\Pi}_m = \Pi_m \hat{z}$ 。在 Lorentz 规范下满足

$$(\nabla^2 - me \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \Pi_m = 0 \quad (7-8)$$

由 $\vec{\Pi}_m$ 产生的电磁场为

$$\begin{cases} \vec{E} = -m \nabla \times \frac{\partial (\Pi_m \hat{z})}{\partial t} \\ \vec{H} = \nabla \times \nabla \times \vec{\Pi}_m = \nabla \nabla \cdot (\Pi_m \hat{z}) - me \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Pi_m \hat{z}) \end{cases} \quad (7-9)$$

即

$$\begin{cases} \vec{E}_t = -m \nabla_t \times (\frac{\partial \Pi_m}{\partial t} \hat{z}) = -m \nabla_t \frac{\partial \Pi_m}{\partial t} \times \hat{z} \\ E_z = 0 \\ \vec{H}_t = \nabla_t \frac{\partial \Pi_m}{\partial z} \\ H_z = \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial z^2} - me \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial t^2} \end{cases} \quad (7-10)$$

因此，在无源区域沿纵向的磁 Hertz 矢量产生的场是 TE 波。

对于沿 z 方向传输的时谐波，与时间 t 和坐标 z 有关的因子为 $e^{j\omega t - gz}$ ，式中 g 为传输常数，则(7-7)和(7-10)变为：

$$\text{TM 波} \quad \begin{cases} \vec{E}_t = -g \nabla_t \Pi_e, \quad E_z = (g^2 + k^2) \Pi_e \\ \vec{H}_t = j\omega e \nabla_t \Pi_e \times \hat{z} = \frac{1}{h_{TM}} \hat{z} \times \vec{E}_t, \quad H_z = 0 \end{cases} \quad (7-11)$$

$$\text{TE 波} \quad \begin{cases} \vec{E}_t = -j\omega m \nabla_t \Pi_m \times \hat{z} = h_{TE} \vec{H}_t \times \hat{z}, \quad E_z = 0 \\ \vec{H}_t = -g \nabla_t \Pi_m, \quad H_z = (g^2 + k^2) \Pi_m = k_c^2 \Pi_m \end{cases} \quad (7-12)$$

式中, $h_{TM} = \frac{g}{j\omega\epsilon}$, $h_{TE} = \frac{j\omega\mu}{g}$ 分别为 TM 波和 TE 波的波阻抗。

二、球坐标系中无源区域电磁场量的表示

在球坐标系 (r, θ, ϕ) 中, 由于三个相互正交的单位坐标矢量 $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ 并不是常矢, 所以, 当选取电 Hertz 矢量 $\vec{\Pi}_e$ 的某一球坐标系中的分量作为表示电磁场量的标量函数时, 在 Lorentz 规范下, 该分量不满足标量波动方程。例如, 选取 $\vec{\Pi}_e = \Pi_e \hat{r}$ 。在 Lorentz 规范下, $\vec{\Pi}_e$ 满足矢量波动方程

$$(\nabla^2 - me \frac{1}{r^2}) \Pi_e \hat{r} = 0 \quad (7-13)$$

由于 $\hat{r}$ 不是常矢, 所以 $\nabla^2(\Pi_e \hat{r}) \neq \hat{r} \nabla^2 \Pi_e$, 而是

$$\begin{aligned} \nabla^2(\Pi_e \hat{r}) &= -\nabla \times \nabla \times (\Pi_e \hat{r}) + \nabla \nabla \cdot (\Pi_e \hat{r}) \\ &= -\nabla \times (\nabla \Pi_e \times \hat{r} + \Pi_e \nabla \times \hat{r}) + \nabla (\nabla \Pi_e \cdot \hat{r} + \Pi_e \nabla \cdot \hat{r}) \end{aligned}$$

利用矢量公式

$$\begin{aligned} \nabla \times (a \times b) &= \nabla \cdot b \cdot a - \nabla \cdot a \cdot b + (\nabla \cdot \nabla) a \cdot b - (\nabla \cdot \nabla) b \cdot a \\ \nabla (a \cdot b) &= a \times \nabla \times b + b \times \nabla \times a + (\nabla \cdot \nabla) a \cdot b + (\nabla \cdot \nabla) b \cdot a \end{aligned}$$

以及 $\nabla \times \hat{r} = 0$, $\nabla \cdot \hat{r} = \frac{2}{r}$, 有

$$\begin{aligned} \nabla^2(\Pi_e \hat{r}) &= \nabla \Pi_e \cdot \nabla \cdot \hat{r} - \nabla \cdot \nabla \Pi_e + (\nabla \cdot \nabla) \Pi_e - (\nabla \Pi_e \cdot \nabla) \hat{r} \\ &\quad - \nabla \Pi_e \times \nabla \times \hat{r} - \nabla \times (\nabla \Pi_e) - (\nabla \cdot \nabla) \Pi_e \\ &\quad - (\nabla \Pi_e \cdot \nabla) \hat{r} - \nabla \Pi_e \cdot \nabla \cdot \hat{r} - \Pi_e \nabla (\nabla \cdot \hat{r}) \\ &= -\nabla^2 \Pi_e - 2(\nabla \Pi_e \cdot \nabla) \hat{r} + \frac{2\Pi_e}{r^2} \hat{r} \end{aligned}$$

将上式代入(7-13), 我们可以看出 Π_e 不满足标量齐次波动方程

$$(\nabla^2 - me \frac{1}{r^2}) \Pi_e = 0 \quad (7-14)$$

这给 Π_e 的计算带来不便。为此, 我们舍去 Lorentz 条件, 于是 $\vec{\Pi}_e$ 并不一定满足矢量波动方程(7-13)。

仍设

$$\vec{H} = e \frac{1}{r} \nabla \times \vec{\Pi}_e \quad (7-15)$$

由 $\nabla \times \vec{H} = e \frac{1}{r} \nabla \times \vec{E}$ 得

$$\vec{E} = \nabla \times \nabla \times \vec{\Pi}_e \quad (7-16)$$

仍选取 $\Pi_e = \Pi_e \hat{r}$, 则由(7-16), 得

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \nabla \times \nabla \times (\Pi_e \hat{r}) \\ &= \nabla \times (\nabla \Pi_e \times \hat{r} + \Pi_e \nabla \times \hat{r}) \\ &= \nabla \times (\nabla \Pi_e \times \hat{r}) \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} \nabla \Pi_e \times \hat{r} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_e}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_e}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Pi_e}{\partial \phi} \hat{\phi} \right) \times \hat{r} \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_e}{\partial \theta} \hat{\phi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Pi_e}{\partial \phi} \hat{\theta} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= \nabla \times (\nabla \Pi_e \times \hat{r}) \\
 &= \frac{1}{r^2 \sin q} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{q} & r\sin q \hat{j} \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{q} & \frac{1}{j} \\ 0 & \frac{1}{\sin q} \frac{\partial \Pi_e}{\partial j} & -\sin q \frac{\partial \Pi_e}{\partial q} \end{vmatrix} \\
 &= -\frac{1}{r^2 \sin q} \left[\frac{1}{q} \left(\sin q \frac{\partial \Pi_e}{\partial q} \right) + \frac{1}{\sin q} \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial j^2} \right] \hat{r} \\
 &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial r \partial q} \hat{q} + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial r \partial j} \hat{j}
 \end{aligned} \tag{7-17}$$

另一方面，由 $\nabla \times \vec{E} = -m \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ 得 $\nabla \times (\vec{E} + me \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial t^2}) = 0$

$$\vec{E} + me \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial t^2} = -\nabla f \tag{7-18}$$

式中， f 为任一标量函数。在球坐标下，取 $\Pi_e = \Pi_e \hat{r}$ 时(7-18)为

$$\vec{E} = -\left(me \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial r} \right) \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial q} \hat{q} - \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial f}{\partial j} \hat{j} \tag{7-19}$$

比较(7-17)，(7-19)可知

$$\begin{aligned}
 f &= -\frac{\partial \Pi_e}{\partial r} \\
 \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin q} \left[\frac{1}{q} \left(\sin q \frac{\partial \Pi_e}{\partial q} \right) + \frac{1}{\sin q} \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial j^2} \right] - me \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial t^2} &= 0
 \end{aligned} \tag{7-20}$$

(7-20) 就是新的规范条件。

在球坐标中标量波动方程为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Pi_e}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin q} \left[\frac{1}{q} \left(\sin q \frac{\partial \Pi_e}{\partial q} \right) + \frac{1}{\sin q} \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial j^2} \right] - me \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial t^2} = 0 \tag{7-22}$$

所以 Π_e 所满足的(7-21)仍然不是标量波动方程(7-22)。

如果我们令

$$\Pi_e = rP \tag{7-23}$$

代入(7-21)，便可发现 P 满足标量波动方程，

$$(\nabla^2 - me \frac{\partial^2}{\partial t^2})P = 0 \tag{7-24}$$

这样以来，利用(7-23)和(7-24)所定义的标量函数 P ，由(7-16)和(7-15)可将球坐标系中无源区域的电磁场量表示为

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \nabla \times \nabla \times \vec{\Pi}_e = \nabla \times \nabla \times (\vec{r}P) \\ &= \nabla[\nabla \cdot (\vec{r}P)] - \nabla \cdot [\nabla(\vec{r}P)]\end{aligned}\quad (7-25)$$

利用矢量恒等式 $\nabla \cdot (f\vec{a}) = \nabla f \cdot \vec{a} + f\nabla \cdot \vec{a}$ ，上式右边第一项变为

$$\begin{aligned}\nabla[\nabla P \cdot \vec{r} + P\nabla \cdot \vec{r}] &= \nabla[r\frac{\nabla P}{r} + 3P] \\ &= 2\nabla P + \nabla \frac{\nabla^2 P}{r^2}(rP)\end{aligned}\quad (7-26)$$

利用张量恒等式 $\nabla(f\vec{a}) = \nabla f\vec{a} + f\nabla\vec{a}$ 和 $\nabla \cdot (\vec{a}\vec{b}) = (\nabla \cdot \vec{a})\vec{b} + \vec{a} \cdot \nabla\vec{b}$ ，(7-25)的第二项变为

$$\begin{aligned}\nabla \cdot [\nabla(\vec{r}P)] &= \nabla \cdot [(\nabla P)\vec{r} + P\nabla\vec{r}] \\ &= (\nabla \cdot \nabla P)\vec{r} + \nabla P \cdot \nabla\vec{r} + \nabla P \cdot \nabla\vec{r} + P\nabla \cdot \nabla\vec{r}\end{aligned}$$

又根据 $\nabla\vec{r} = \vec{I}$ ，则

$$\nabla \cdot [\nabla(\vec{r}P)] = \nabla^2 \vec{r}P + 2\nabla P \quad (7-27)$$

于是，有(7-26)，(7-27)以及(7-24)，得

$$\vec{E} = -me\frac{\nabla^2}{r^2}(\vec{r}P) + \nabla \frac{\nabla^2 P}{r^2}(rP) \quad (7-28)$$

磁场表示式为

$$\begin{aligned}\vec{H} &= e\frac{\nabla}{r^2} \nabla \times \vec{\Pi}_e = e\frac{\nabla}{r^2} \nabla \times (\vec{r}P) \\ &= e\frac{\nabla}{r^2} (\nabla P \times \vec{r})\end{aligned}\quad (7-29)$$

由(7-28)和(7-29)可以看出， $E_r \neq 0$ ， $H_r = 0$ ，即为沿 r 方向的横磁波(TM 波)。

对于球坐标系的磁 Hertz 矢量 $\vec{\Pi}_m$ ，仍设 $\vec{\Pi}_m$ 只有 r 方向分量，即 $\vec{\Pi}_m = \Pi_m \hat{r}$ 。为了在球坐标系中用一个满足标量方程的标量函数来表示电磁场量，与处理电 Hertz 矢量的情形完全一样，也需要对磁 Hertz 矢量做一些修正。设

$$\vec{E} = -m\nabla \times \frac{\nabla \Pi_m}{r^2} \quad (7-30)$$

由 $\nabla \times \vec{E} = -m\frac{\nabla^2 \vec{H}}{r^2}$ 可得

$$\vec{H} = \nabla \times \nabla \times \vec{\Pi}_m \quad (7-31)$$

另一方面，由 $\nabla \times \vec{H} = e\frac{\nabla^2 \vec{E}}{r^2}$ 可得 $\nabla \times (\vec{H} + me\frac{\nabla^2 \vec{\Pi}_m}{r^2}) = 0$

$$\text{即} \quad \vec{H} = -me\frac{\nabla^2 \vec{\Pi}_m}{r^2} - \nabla f' \quad (7-32)$$

式中， f' 为任一标量函数。设 $\vec{\Pi}_m = \Pi_m \hat{r}$ ，类似于电 Hertz 矢量的分析，由(7-31)和(7-32)可得

$$f' = -\frac{\nabla^2 \Pi_m}{r} \quad (7-33)$$

同样选取

$$\Pi_m = rQ \quad (7-34)$$

则标量函数 Q 满足

$$(\nabla^2 - me\frac{\nabla^2}{r^2})Q = 0 \quad (7-35)$$

这样，利用 Q 可以将球坐标系中无源区域的电磁场量表示为

$$\begin{cases} \vec{E} = m \frac{1}{t} (\vec{r} \times \nabla Q) \\ \vec{H} = -me \frac{1}{t^2} (\vec{r} Q) + \nabla \frac{1}{r} (rQ) \end{cases} \quad (7-36)$$

可以看出, $E_r = 0$, $H_r \neq 0$, 所以上式表示的电磁场为球坐标系中沿 r 方向的横电波(TE 波)。

将上面求得的 TM 波和 TE 波相叠加, 即可得到球坐标系中用标量函数 P 和 Q 表示的无源区域的电磁场量表示式

$$\begin{cases} \vec{E} = \nabla \times \nabla \times (\vec{r}P) - m \frac{1}{t} \nabla \times (\vec{r}Q) \\ \quad = -me \frac{1}{t^2} (\vec{r}P) + \nabla \frac{1}{r} (rP) - m \frac{1}{t} (\vec{r} \times \nabla Q) \\ \vec{H} = e \frac{1}{t} \nabla \times (\vec{r}P) + \nabla \times \nabla \times (\vec{r}Q) \\ \quad = e \frac{1}{t} \nabla \times (\vec{r}Q) - me \frac{1}{t^2} (\vec{r}Q) + \nabla \frac{1}{r} (rQ) \end{cases} \quad (7-37)$$

式中, 标量函数 P 和 Q 称为 Debye 位函数, 它们满足标量波动方程(7-24)和(7-35)

习题 7

7-1 试证明: 在 Coulomb 规范下, 无源区域中的电磁场量 $\vec{E}$ 、 $\vec{B}$ 可用两个函数表示。

7-2 试导出在柱坐标系中无源区域的电磁场量 $\vec{E}$ 、 $\vec{H}$ 用纵向分量 E_z 和 H_z 表示的表示式。

第8讲 唯一性定理

电磁场 Maxwell 方程是偏微分方程，描述了电磁场的一般特性。对于具体的有限区域电磁场问题，需加上边界条件和初始条件，才能得到具体问题的特解。这就构成所谓的“初值问题”和“边值问题”。

本讲要解决的问题是在怎样的条件下初值问题和边值问题具有唯一解？

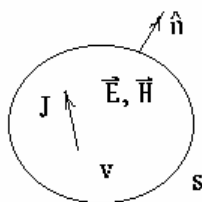


图 8-1 边值问题

8.1 Maxwell 方程的唯一性定理

8.1.1 时域唯一性定理

[定理 8-1] 对于图 8-1 的边值问题，如果区域 V 内的源已知，并且

- 1) $t = 0$ 时 V 内所有场已知（初始条件）；
 - 2) $t \geq 0$ 时包围 V 的闭合曲面 S 上切向电场 $\hat{s} \times \vec{E}$ 或切向磁场 $\hat{s} \times \vec{H}$ 已知（边界条件）；
- 则 $t > 0$ 时 V 内的场唯一确定。

[证] 设 V 中的电流源 $\vec{J}$ 产生两组场 $\vec{E}_1, \vec{H}_1$ 和 $\vec{E}_2, \vec{H}_2$ ，满足

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H}_j = \vec{J} + s \vec{E}_j + e \frac{\partial \vec{E}_j}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E}_j = -m \frac{\partial \vec{H}_j}{\partial t} \end{cases} \quad j = 1, 2 \quad (8-1)$$

考虑差场 $d\vec{E} = \vec{E}_1 - \vec{E}_2$ ， $d\vec{H} = \vec{H}_1 - \vec{H}_2$ ，由于两组解产生于同一组源，故差场满足无源方程

$$\begin{cases} \nabla \times d\vec{H} = s d\vec{E} + e \frac{\partial d\vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \times d\vec{E} = -m \frac{\partial d\vec{H}}{\partial t} \end{cases} \quad (8-2)$$

对差场应用 Poynting 定理

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (m |d\vec{H}|^2 + e |d\vec{E}|^2) dv + \int_V s |d\vec{E}|^2 dv = - \oint_S (d\vec{E} \times d\vec{H}) \cdot \hat{n} ds \quad (8-3)$$

因为 $(d\vec{E} \times d\vec{H}) \cdot \hat{s} = -d\vec{E} \cdot (\hat{s} \times d\vec{H}) = d\vec{H} \cdot (\hat{s} \times d\vec{E})$

所以，只要满足定理 8-1 中 S 面上的边界条件 2)，则

$$\oint_s (d\mathbf{E} \times d\mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = 0$$

于是

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_v (m|d\mathbf{H}|^2 + e|d\mathbf{E}|^2) dv = - \int_s |d\mathbf{E}|^2 dv \leq 0 \quad (8-4)$$

由定理 8-1 中初始条件 1), 有

$$\int_v (m|d\mathbf{H}|^2 + e|d\mathbf{E}|^2) \big|_{t=0} dv = 0$$

故 $t \geq 0$ 时

$$\int_v (m|d\mathbf{H}|^2 + e|d\mathbf{E}|^2) dv \leq 0$$

即

$$m|d\mathbf{H}|^2 + e|d\mathbf{E}|^2 \leq 0$$

另一方面, 由于 $m > 0$, $e > 0$, $|d\mathbf{E}|^2 \geq 0$, $|d\mathbf{H}|^2 \geq 0$, 故

$$m|d\mathbf{H}|^2 + e|d\mathbf{E}|^2 \geq 0$$

最终

$$|d\mathbf{E}| = 0, |d\mathbf{H}| = 0$$

即

$$\dot{\mathbf{E}}_1 = \dot{\mathbf{E}}_2, \quad \dot{\mathbf{H}}_1 = \dot{\mathbf{H}}_2$$

唯一性定理告诉我们, 区域 v 中的电磁场是由 v 中的源、初始时刻的电磁场以及任意时刻边界上的切向电场或切向磁场唯一决定的。

8.1.2 有耗媒质中频域唯一性定理

[定理 8-2] 在频域, 如果有耗媒质区域 v 中的源以及边界 s 上的切向电场或切向磁场已知, 则 v 中的电磁场唯一确定。

证明: 差场满足

$$\begin{cases} \nabla \times d\mathbf{E} = -j\omega m d\mathbf{H} \\ \nabla \times d\mathbf{H} = j\omega e d\mathbf{E} \end{cases} \quad (8-5)$$

其中, $m = m' - jm''$, $e = e' - je''$ 。应用频域 Poynting 定理

$$\oint_s (d\mathbf{E} \times d\mathbf{H}^*) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds + j\omega \int_v (m|d\mathbf{H}|^2 - e^*|d\mathbf{E}|^2) dv = 0$$

边界条件使得

$$\oint_s (d\mathbf{E} \times d\mathbf{H}^*) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = 0$$

于是

$$\int_v (m'|d\mathbf{H}|^2 - e'|d\mathbf{E}|^2) dv = 0 \quad (8-6)$$

$$\int_v (m''|d\mathbf{H}|^2 + e''|d\mathbf{E}|^2) dv = 0 \quad (8-7)$$

对于有耗媒质, $m'' > 0$, $e'' > 0$, 于是, $d\mathbf{E} = 0$, $d\mathbf{H} = 0$ 。

在上面的证明中, 如果媒质无耗即 $m'' = e'' = 0$, 则唯一性定理的证明不能成立。

Harrington 认为“在此情况下要获得唯一性, 须将无耗媒质中的场作为有耗媒质中的耗散趋于 0 时相应场的极限”(参见 R.F. Harrington, 《正弦电磁场》)。但是这种观点是不妥的, 在极限情

况下成立，但在极限点未必成立。

根据上面的推导，当 $e'' = m'' = 0$ 时只有 (8-6) 成立，所以有两种可能：(1) $d\dot{\mathbf{E}} = 0, d\dot{\mathbf{H}} = 0$ ，
(2) $e|d\dot{\mathbf{E}}|^2 = m|d\dot{\mathbf{H}}|^2$

对于满足切向场边界条件的差场而言，无耗媒质区域 v 相当于一个电磁谐振腔（导体空腔、磁体空腔、或部分导体边界和部分磁体边界的空腔）。第 (2) 种情况恰好相当于该谐振腔谐振。所以，在无耗区域 v 处于非谐振状态时，上述唯一性定理仍成立。但对于谐振状态，上述唯一性定理则不成立。为此我们需要寻找无耗区域谐振状态时的唯一性定理。

8.1.3 无耗区域频域唯一性定理

考虑差场的 Foster 定理 (R.E. Collin, 《微波工程基础》)

根据 (8-5)，有

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r} \cdot d\dot{\mathbf{E}}^*}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} = j\omega m \frac{\mathbf{r} \cdot d\dot{\mathbf{H}}^*}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} + jd\dot{\mathbf{H}}^* \frac{\mathbf{r} \cdot (wm)}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} \quad (8-8)$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r} \cdot d\dot{\mathbf{H}}^*}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} = -j\omega e \frac{\mathbf{r} \cdot d\dot{\mathbf{E}}^*}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} - jd\dot{\mathbf{E}}^* \frac{\mathbf{r} \cdot (we)}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} \quad (8-9)$$

由于是无耗区域，故 m, e 均为实数。计及

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot (d\dot{\mathbf{E}} \times \frac{\mathbf{r} \cdot d\dot{\mathbf{H}}^*}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{r} \cdot d\dot{\mathbf{E}}^*}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} \times d\dot{\mathbf{H}}) \\ &= (\nabla \times d\dot{\mathbf{E}}) \cdot \frac{\mathbf{r} \cdot d\dot{\mathbf{H}}^*}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} - d\dot{\mathbf{E}} \cdot \nabla \times \frac{\mathbf{r} \cdot d\dot{\mathbf{H}}^*}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} + (\nabla \times \frac{\mathbf{r} \cdot d\dot{\mathbf{E}}^*}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}) \cdot d\dot{\mathbf{H}} - \frac{\mathbf{r} \cdot d\dot{\mathbf{E}}^*}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} \cdot \nabla \times d\dot{\mathbf{H}} \end{aligned} \quad (8-10)$$

将 (8-5)、(8-8) 和 (8-9) 代入上式，得

$$\nabla \cdot (d\dot{\mathbf{E}} \times \frac{\mathbf{r} \cdot d\dot{\mathbf{H}}^*}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{r} \cdot d\dot{\mathbf{E}}^*}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} \times d\dot{\mathbf{H}}) = j\omega [d\dot{\mathbf{E}} \cdot \frac{\mathbf{r} \cdot (we)}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} + (d\dot{\mathbf{H}} \cdot \frac{\mathbf{r} \cdot (wm)}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}})] \quad (8-11)$$

其积分形式为

$$\oint_s (d\dot{\mathbf{E}} \times \frac{\mathbf{r} \cdot d\dot{\mathbf{H}}^*}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{r} \cdot d\dot{\mathbf{E}}^*}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} \times d\dot{\mathbf{H}}) \cdot \hat{n} ds = j\omega \int_v [d\dot{\mathbf{E}} \cdot \frac{\mathbf{r} \cdot (we)}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} + (d\dot{\mathbf{H}} \cdot \frac{\mathbf{r} \cdot (wm)}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}})] dv \quad (8-12)$$

根据 R.E. Collin, 《微波工程基础》，

$$\begin{aligned} w_e &= \frac{1}{4} |d\dot{\mathbf{E}}|^2 \frac{\mathbf{r} \cdot (we)}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} \geq 0, \quad \text{且} \quad \frac{\mathbf{r} \cdot (we)}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} > 0 \\ w_m &= \frac{1}{4} |d\dot{\mathbf{H}}|^2 \frac{\mathbf{r} \cdot (wm)}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} \geq 0, \quad \text{且} \quad \frac{\mathbf{r} \cdot (wm)}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} > 0 \end{aligned} \quad (8-13)$$

[定理 8-3] 当无耗区域 v 中的源给定后，在边界 s 上只有满足下列条件之一，场才是唯一确定的。

$$(1) \quad \begin{cases} d\dot{\mathbf{E}} = 0 \\ d\dot{\mathbf{H}} = 0 \end{cases} \quad (8-14)$$

$$(2) \quad \begin{cases} d\vec{E} = 0 \\ d\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{E} = 0 \end{cases} \quad (8-15)$$

$$(3) \quad \begin{cases} d\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{H} = 0 \\ d\vec{H} = 0 \end{cases} \quad (8-16)$$

$$(4) \quad \begin{cases} d\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{E} = 0 \\ d\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{H} = 0 \end{cases} \quad (8-17)$$

8.1.4 无限区域的处理

上述唯一性定理的证明只考虑了有限区域。对于无限区域，可处理为一个半径为无限大的球体。假设源分布在有限区域内。于是，对于无限远的球面来说，任何有限区域内的源都可看成是点源。这样，在无限远的球面上场按 $1/r^2$ 衰减为 0（球面波），即在无限远球面上 $\vec{n} \times \vec{E} = 0, \vec{n} \times \vec{H} = 0$ ，所以，无限大区域中的场是由源唯一确定的。

8.2 标量波动方程的唯一性定理

[定理 8-4] 对于波动方程

$$(\nabla^2 + k^2)u = -p \quad (8-18)$$

如果区域 v 中的源 p 给定以及

- (1) 边界 s 上的 u 给定；
（第一类边值问题，或称 Dirichlet 问题）；
- (2) 或边界 s 上的 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 给定；
（第二类边值问题，或称 Neumann 问题）；
- (3) 或边界 s 上一部分的 u 给定，另一部分的 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 给定；
（第三类边值问题，或称混合问题）；

则区域 v 中 u 唯一确定。

[证] 设同一源产生两组解 u_1 和 u_2 均满足 (8-18)。

考虑差值函数 $du = u_1 - u_2$ ，满足

$$(\nabla^2 + k^2)du = 0 \quad (8-19)$$

应用 Green 第一恒等式

$$\int_V (j \nabla^2 f - \nabla j \cdot \nabla f) dv = \oint_S j \nabla f \cdot \hat{n} ds \quad (8-20)$$

上式中令 $j = du$, $f = du$, 则有

$$-\int_V [(kdu)^2 + (\nabla du)^2] dv = \oint_S du \frac{\partial du}{\partial n} ds \quad (8-21)$$

可见, 只要满足定理 8-4 中三个条件中的任何一条, 都有 $du = 0$, 即 $u_1 = u_2$, u 被唯一确定。

唯一性定理在电磁场理论中占有重要的地位, 其重要性在于

- (1) 它告诉我们为了获得电磁场解应需要什么条件;
- (2) 在求解过程中, 不论采用什么方法, 一旦求出一个解, 就可以放心地知道这就是唯一解;
- (3) 以唯一性定理为基础可以导出许多有用的定理和方法。
- (4) 但唯一性条件只是充分条件。

习题 8

8-1 试证明图 8-2 所示的有耗多媒质区域的频域电磁场唯一性定理: 如果

- (1) 区域内的源已知;
- (2) 区域外边界上切向电场或切向磁场已知;
- (3) 区域内媒质交界面上切向电场和切向磁场连续,

则区域内电磁场唯一确定。

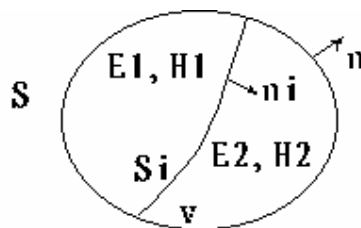


图 8-2 多媒质区域

8-2 试讨论 Poisson 方程 $\nabla^2 j = -r/e$ 解的唯一性问题。

◆◆

第9讲 广义 Maxwell 方程和互易定理

9.1 广义 Maxwell 方程

Maxwell 方程有一个缺陷就是不对称，既不存在磁荷。一些完美主义者认为世界是对称的，所以 Maxwell 方程也应该是对称的。多少年来寻找磁荷的工作从未间断过，但一直未确切地发现。不过在数学形式上，引入磁流和磁荷，使 Maxwell 对称，可以简化分析和计算。

引入假想的磁荷密度 r_m 和磁流密度 $\dot{\mathbf{M}}$ 以后，频域的 Maxwell 方程有如下的对称形式：

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}} = j\omega \dot{\mathbf{D}} + \dot{\mathbf{J}} \quad (9-1)$$

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \dot{\mathbf{B}} - \dot{\mathbf{M}} \quad (9-2)$$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{B}} = r_m \quad (9-3)$$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{D}} = r \quad (9-4)$$

称之为广义 Maxwell 方程。对于电流连续性方程

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{J}} + j\omega r = 0 \quad (9-5)$$

磁流连续性方程为

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{M}} + j\omega r_m = 0 \quad (9-6)$$

广义边界条件为

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\dot{\mathbf{H}}_1 - \dot{\mathbf{H}}_2) = \dot{\mathbf{J}}_s \quad (9-7)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\dot{\mathbf{E}}_1 - \dot{\mathbf{E}}_2) = -\dot{\mathbf{M}}_s \quad (9-8)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\dot{\mathbf{B}}_1 - \dot{\mathbf{B}}_2) = r_{ms} \quad (9-9)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\dot{\mathbf{D}}_1 - \dot{\mathbf{D}}_2) = r_s \quad (9-10)$$

对于理想导体壁（电壁）， $\dot{\mathbf{E}}_2 = 0$ ， $\dot{\mathbf{H}}_2 = 0$ ， $\dot{\mathbf{M}}_s = 0$ ， $r_{ms} = 0$ ，则

$$\hat{\mathbf{n}} \times \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}}_s \quad (9-11)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \dot{\mathbf{E}} = 0 \quad (9-12)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{B}} = 0 \quad (9-13)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{D}} = r_s \quad (9-14)$$

对于理想磁体壁（磁壁）， $\dot{\mathbf{E}}_2 = 0$ ， $\dot{\mathbf{H}}_2 = 0$ ， $\dot{\mathbf{J}}_s = 0$ ， $r_s = 0$ ，则

$$\hat{\mathbf{n}} \times \dot{\mathbf{H}} = 0 \quad (9-15)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \dot{\mathbf{E}} = -\dot{\mathbf{M}}_s \quad (9-16)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{B}} = r_{ms} \quad (9-17)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{D}} = 0 \quad (9-18)$$

9.2 对偶原理

从上述方程中可以看出广义 Maxwell 方程及边界条件存在如下的对称性

$$\vec{E} \leftrightarrow -\vec{H} \quad (9-19)$$

$$\vec{D} \leftrightarrow \vec{B} \quad (9-20)$$

$$\vec{J} \leftrightarrow \vec{M} \quad (9-21)$$

$$r \leftrightarrow r_m \quad (9-22)$$

$$\text{电壁} \leftrightarrow \text{磁壁} \quad (9-23)$$

$$e \leftrightarrow -m \quad (9-24)$$

这种对称性称为对偶原理，也称二重性原理。利用对偶原理可以由一类问题的解，经过对偶变换，得到另一类问题的解。既可以帮助记忆，也可以简化计算。

常用的有如下两类：

(1) 电流源问题与磁流源问题

场源只有电荷和电流时称为电流源问题；场源只有磁荷和磁流时称为磁流源问题。利用对偶关系可以直接从一种问题的场表示式得到另一种问题的场表示式。

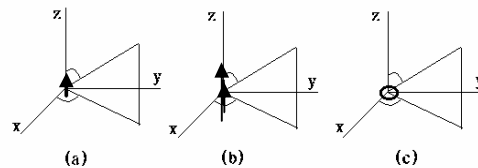


图 9-1 (a) 电流元 (b) 磁流元 (c) 小圆电流环

[例 9-1] 已知自由空间电偶极子（电流元 Il ）（如图 9-1a 所示）在远区产生的辐射为：

$$E_q = \frac{j\omega m_0 Il}{4\pi r} \sin \theta e^{-jkr}$$

$$H_j = \frac{jkIl}{4\pi r} \sin \theta e^{-jkr}$$

根据对偶原理，可得自由空间磁偶极子（磁流元 Kl ）（如图 9-1b 所示）在远区产生的辐射场

$$H_q = \frac{j\omega e Kl}{4\pi r} \sin \theta e^{-jkr}$$

$$E_j = -\frac{jkKl}{4\pi r} \sin \theta e^{-jkr}$$

我们知道小圆环电流（图 9-1c）在远区产生的场为

$$H_q = -\frac{k^2 IS}{4\pi r} \sin qe^{-jkr}$$

$$E_j = \frac{wmkIS}{4\pi r} \sin qe^{-jkr}$$

式中， I, S 分别为环的电流和面积。比较可知小圆环电流可以等效为磁偶极子，其磁流元 $Kl = jwmIS$ 。所以，虽然世上尚未发现真实的磁流和磁荷，但在等效意义上是可以建立磁荷和磁流的。

应当注意的是，应用对偶原理时不仅要求方程具有对偶性，而且要求边界条件也具有对偶性。例如如图 9-2 所示的问题，当电流元变换成磁流元时，电壁也要变换为磁壁。

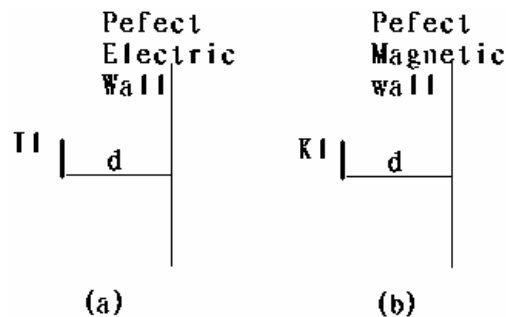


图 9-2 对偶原理的应用

(2) 无源区域中电场表达式与磁场表达式

在无源区域，电场与磁场如果边界条件数学形式相同，则内部场成对偶关系。

[例 9-2] 考虑图 9-3 所示的矩形波导。我们知道电场和磁场均满足相同形式的波动方程。

电场分量 E_y 满足边界条件

$$E_y|_{x=0,a} = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial y}|_{y=0,b} = 0$$

磁场分量 H_x 满足边界条件

$$H_x|_{x=0,a} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial y}|_{y=0,b} = 0$$

电场分量 E_x 满足边界条件

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}|_{x=0,a} = 0 \quad E_x|_{y=0,b} = 0$$

磁场分量 H_y 满足边界条件

$$\left. \frac{\partial H_y}{\partial x} \right|_{x=0,a} = 0 \quad H_y|_{y=0,b} = 0$$

所以 E_x 与 H_y , E_y 与 H_x 成对偶关系。如 TE_{mn} 模

$$E_y = E_{y0} \sin \frac{mp}{a} x \cos \frac{np}{b} y e^{-jhz}$$

则由对偶关系得 $H_x = H_{x0} \sin \frac{mp}{a} x \cos \frac{np}{b} y e^{-jhz}$

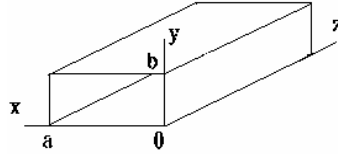


图 9-3 矩形波导

9.3 Lorentz 互易原理

互易原理反映了源与场之间的对称性。

设电流源 $\vec{J}_1$ 产生电磁场 $\vec{E}_1$ 和 $\vec{H}_1$, $\vec{J}_2$ 产生 $\vec{E}_2$ 和 $\vec{H}_2$ 。对于一般媒质, Maxwell 方程为

$$J_1 \text{ 源: } \nabla \times \vec{H}_1 = \vec{J}_1 + j\omega \vec{e} \cdot \vec{E}_1 \quad (9-25)$$

$$\nabla \times \vec{E}_1 = -j\omega \vec{m} \cdot \vec{H}_1 \quad (9-26)$$

$$J_2 \text{ 源: } \nabla \times \vec{H}_2 = \vec{J}_2 + j\omega \vec{e} \cdot \vec{E}_2 \quad (9-27)$$

$$\nabla \times \vec{E}_2 = -j\omega \vec{m} \cdot \vec{H}_2 \quad (9-28)$$

式中, $\vec{e}$, $\vec{m}$ 分别为媒质的张量介电常数和张量磁导率。

根据矢量公式, $\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \nabla \times \vec{a} - \vec{a} \cdot \nabla \times \vec{b}$, 有

$$\nabla \cdot (\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1) = \vec{H}_2 \cdot (\nabla \times \vec{E}_1) - \vec{E}_1 \cdot (\nabla \times \vec{H}_2) - \vec{H}_1 \cdot (\nabla \times \vec{E}_2) + \vec{E}_2 \cdot (\nabla \times \vec{H}_1)$$

将 (9-25), (9-26) 代入, 得

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot (\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1) \\ &= -j\omega \vec{H}_2 \cdot \vec{m} \cdot \vec{H}_1 - \vec{E}_1 \cdot \vec{J}_2 - j\omega \vec{E}_1 \cdot \vec{e} \cdot \vec{E}_2 \\ &+ j\omega \vec{H}_1 \cdot \vec{m} \cdot \vec{H}_2 + \vec{E}_2 \cdot \vec{J}_1 + j\omega \vec{E}_2 \cdot \vec{e} \cdot \vec{E}_1 \end{aligned} \quad (9-29)$$

如果媒质互易, 即 $\vec{e} = \vec{e}^T$, $\vec{m} = \vec{m}^T$, 则

$$\begin{aligned} \vec{H}_2 \cdot \vec{m} \cdot \vec{H}_1 &= (\vec{m} \cdot \vec{H}_1) \cdot \vec{H}_2 = \vec{H}_1 \cdot \vec{m}^T \cdot \vec{H}_2 = \vec{H}_1 \cdot \vec{m} \cdot \vec{H}_2 \\ \vec{E}_2 \cdot \vec{e} \cdot \vec{E}_1 &= \vec{E}_1 \cdot \vec{e} \cdot \vec{E}_2 \end{aligned}$$

代入 (9-29), 可得互易定理的微分形式

$$\nabla \cdot (\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1) = \vec{E}_2 \cdot \vec{J}_1 - \vec{E}_1 \cdot \vec{J}_2 \quad (9-30)$$

其积分形式为

$$\oint_s (\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1) \cdot d\vec{s} = \int_v (\vec{E}_2 \cdot \vec{J}_1 - \vec{E}_1 \cdot \vec{J}_2) dv \quad (9-31)$$

I 如果 V 内无源, 则
$$\oint_s (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

I s 为理想导体表面时, 面 s 上 $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 = 0$, 则

$$\oint_s (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

I 当 $s \rightarrow \infty$ 为无限大球面时, 面 s 上 $\mathbf{E} = -h_0 \mathbf{n} \times \mathbf{H}$, 则

$$\oint_s (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot d\mathbf{r} = -h_0 \oint_s (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1) ds = 0$$

I 当 s 为阻抗边界 Z_m 时, 在 s 上 $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = -\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) Z_m$, 则

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{n} &= (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{H}_2 - (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{H}_1 \\ &= -Z_m \{ [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1)] \cdot \mathbf{H}_2 - [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2)] \cdot \mathbf{H}_1 \} \\ &= Z_m \{ (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1) - (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2) \} = 0 \end{aligned}$$

故
$$\oint_s (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

总之对于上述情况, 有

$$\int_v (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2) dv = 0 \quad (9-32)$$

上式中的积分一般不代表功率, 因为无共轭关系出现, 所以称为反应。定义 $\mathbf{E}_2$ 与 $\mathbf{J}_1$ 的反应为

$$\langle \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 \rangle = \int_v \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 dv \quad (9-33)$$

则互易定理 (9-32) 可写成

$$\langle \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 \rangle = \langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 \rangle \quad (9-34)$$

它反映 $\mathbf{E}_2$ 与 $\mathbf{J}_1$ 的作用等于 $\mathbf{E}_1$ 与 $\mathbf{J}_2$ 的作用。

为了更好地理解互易定理, 考虑电路情况。这时 $dv = ds dl$, 于是

$$\int_v \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dv = \int_v \mathbf{J}_1 ds \cdot \int_l \mathbf{E}_2 dl = I_1 V_2$$

$$\int_v \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{E}_1 dv = I_2 V_1$$

则
$$I_1 V_2 = I_2 V_1$$

这正是电路中的互易定理。如果 $I_1 = I_2 = I$, 则 $V_1 = V_2 = V$, 即端口 1 处的电流源 I 在端口 2 处产生的电压等于把电流源 I 加在端口 2 处时在端口 1 处产生的电压。如图 9-4 所示。



图 9-4 电路互易定理

如果空间中只包含两个单位点源 $\vec{J}_1 = \vec{J}_{10} d(\vec{r} - \vec{r}_1)$ 和 $\vec{J}_2 = \vec{J}_{20} d(\vec{r} - \vec{r}_2)$, 则互易定理变为

$$\vec{J}_{10} \cdot \vec{E}_2(\vec{r}_1) = \vec{J}_{20} \cdot \vec{E}_1(\vec{r}_2)$$

上式表明, 位于 $\vec{r}_1$ 处的点源 $\vec{J}_1$ 在 $\vec{r}_2$ 处产生的电场 $\vec{E}_1(\vec{r}_2)$ 沿 $\vec{J}_2$ 方向的分量等于位于 $\vec{r}_2$ 处的点源 $\vec{J}_2$ 在 $\vec{r}_1$ 处产生的电场 $\vec{E}_2(\vec{r}_1)$ 沿 $\vec{J}_1$ 方向的分量。这个重要的结论通常称为场的互易定理。

[例 9-2] 证明无限靠近理想导体表面的面电流不产生电磁场。

证: 设有一理想导体, 在无限靠近该导体的表面上有面电流 $\vec{J}_s$, 在空间有一任意电流源 $\vec{J}_2$, $\vec{J}_s$ 在空间各处产生的电磁场为 $\vec{E}_1, \vec{H}_1$, $\vec{J}_2$ 在空间各处产生的电磁场为 $\vec{E}_2, \vec{H}_2$, 如图 9-5 所示。根据互易原理, 有

$$\int_v (\vec{J}_s \cdot \vec{E}_2) dv = \int_v (\vec{J}_2 \cdot \vec{E}_1) dv$$

由于在理想导体表面电场只有法向分量, 而 $\vec{J}_s$ 为切向电流, 故 $\vec{J}_s \cdot \vec{E}_2 = 0$ 。于是

$$\int_v \vec{J}_2 \cdot \vec{E}_1 dv = 0$$

又由于 $\vec{J}_2$ 任意, 所以 $\vec{E}_1 = 0$ 。

根据同样的道理, 可以证明无限靠近理想磁体表面的面磁流不产生电磁场。

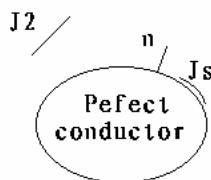


图 9-5 无限靠近理想导体表面的面电流不产生电磁场

[例 9-3] 研究一般弯曲天线的远区辐射特性

解: 考虑无限大空间中一弯曲天线, 如图 9-6 所示。设弯曲天线上的电流为 I_a , 产生的场为 $\vec{E}^a$ 。在远区放置一 $\hat{a}$ 方向极化的电偶极子 $I_0 \vec{l}_r$, 产生的场为 $\vec{E}^b$ 。根据互易定理

$$\int_{l_w} \vec{E}^b \cdot \vec{I}_a dl = \int_{l_r} \vec{E}^a \cdot I_0 \hat{a} dl$$

即
$$\vec{E}^a \cdot \hat{a} I_0 l_r = \int_{l_w} \vec{E}^b \cdot \vec{I}_a dl; \quad \vec{E}^a \cdot \hat{a} = \frac{1}{I_0 l_r} \int_{l_w} \vec{E}^b \cdot \vec{I}_a dl$$

因为 $\vec{E}^b$ 为电偶极子 $I_0 l_r$ 在远区产生的场,

$$\vec{E}^b = -\frac{j\omega I_0 l_r}{4\pi r} \sin\theta e^{-jkr} \hat{a}$$

于是
$$\vec{E}^a \cdot \hat{a} = -\frac{j\omega m}{4\pi} \int_{l_w} \frac{\sin\theta}{r} \hat{a} \cdot \vec{I}_a e^{-jkr} dl$$

由于在远区, 在 l_w 内 $\frac{\sin\theta}{r}$ 近似不变, 所以

$$\vec{E}^a \cdot \hat{a} = -\frac{j\omega m}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r} \int_{l_w} \hat{a} \cdot \vec{I}_a e^{-jkr} dl$$

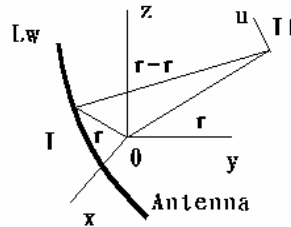


图 9-6 弯曲天线

习题 9

9-1: 证明: 如果源 $\vec{J}_1$ 和 $\vec{J}_2$ 均在体积 v 内, 则互易定理为

$$\oint_s [(\vec{E}_1 \times \vec{H}_2) - (\vec{E}_2 \times \vec{H}_1)] \cdot \hat{n} ds = 0$$

9-2: 证明无限靠近理想磁体表面的面磁流不产生电磁场。

◆◆

第 10 讲 等效原理与感应定理

10.1 等效原理

电磁场问题的解是由方程和边界条件决定的。也就是说，如果保持区域中的源分布、媒质分布以及区域边界上的边界条件不变，则场分布不变。这些便是电磁场等效原理的基础。

唯一性定理告诉我们，只要知道了所规定区域 v 中的源、媒质及包围该区域的闭合曲面 s 上的切向电场或切向磁场则该地区中的场唯一确定。这里并未提及区域 v 外的源和媒质的分布情况。事实上，区域 v 外的源对区域 v 内的场的贡献已包含在曲面 s 上的切向电场或切向磁场中。区域 v 外不同分布的源只要在闭合曲面 s 上产生相同的切向场，在区域 v 内产生的场也相同。

等效的概念是这样表述的：在区域 v 外具有不同源分布和媒质分布，而在区域 v 内源分布和媒质分布相同的一些电磁场问题如果在区域 v 内具有相同的场分布，则对区域 v 内而言这些电磁场问题是等效的。

考虑如图 10-1(a) 所示的场问题。

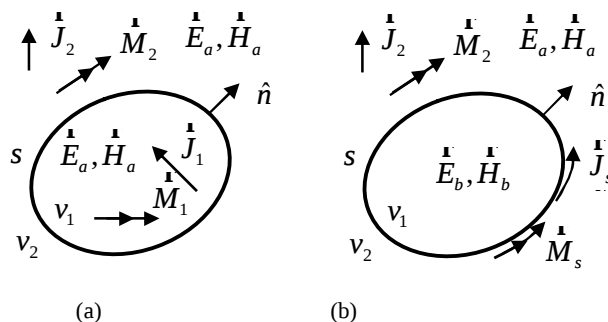


图 10-1 等效原理 (a) 原问题 (b) 等效问题

曲面 s 将区域分成两部分 v_1 和 v_2 。原问题在 s 上满足

$$\begin{cases} \oint_S (\vec{H}_a - \vec{H}_a) \cdot d\vec{l} = 0 \\ \oint_S (\vec{E}_a - \vec{E}_a) \cdot d\vec{l} = 0 \end{cases} \quad (10-1)$$

即在 s 上不存在源。将 (10-1) 写为

$$\begin{cases} \oint_S \vec{n} \times \vec{H}_a = \oint_S \vec{H}_a \\ \oint_S \vec{n} \times \vec{E}_a = \oint_S \vec{E}_a \end{cases} \quad (10-2)$$

虽然在数学上 (10-2) 只是 (10-1) 变化而来的恒等式，似乎很无聊，但反映的物理内含是不同的。(10-1) 表示的是区域 v_1 和 v_2 的交界面边界条件，而 (10-2) 表示的是包围区域 v_1 或 v_2 的闭合曲面的切向场边界条件。

如果人为地令区域 v_1 中场为 $\vec{E}_b$ 、 $\vec{H}_b$ ，而 v_2 中源、媒质和场分布保持不变，如图 10-1(b) 所示。设在曲面 s 上

$$\begin{cases} \hat{n} \times (\vec{H}_a - \vec{H}_b) = \vec{J}_s \\ \hat{n} \times (\vec{E}_a - \vec{E}_b) = -\vec{M}_s \end{cases} \quad (10-3)$$

式中, $\vec{J}_s$ 和 $\vec{M}_s$ 分别表示在曲面 s 上区域 v_1 和 v_2 中的切向磁场和电场的差值。

根据两区域交界面的边界条件可知, $\vec{J}_s$ 和 $\vec{M}_s$ 就是在曲面 s 上的面电流源和面磁流源。所以, 为了支持如图 10-1(b) 所示的场分布, 在 s 面上应人为地加上面电流源 $\vec{J}_s$ 和面磁流源 $\vec{M}_s$:

$$\begin{cases} \vec{J}_s = \hat{n} \times (\vec{H}_a - \vec{H}_b) \\ \vec{M}_s = -\hat{n} \times (\vec{E}_a - \vec{E}_b) \end{cases} \quad (10-4)$$

实际上, $\vec{J}_s$ 和 $\vec{M}_s$ 的作用是, 它们在 v_2 中产生的场恰好抵消了 v_1 中的变化对 v_2 中场的的影响, 使 v_2 中的场保持不变。

如果把 s 面看成包围 v_2 的闭合曲面, 则由 (10-3) 和 (10-4) 得 s 面上的切向场满足

$$\hat{n} \times \vec{H}_a = \vec{J}_s + \hat{n} \times \vec{H}_b = \hat{n} \times \vec{H}_a \quad (10-5)$$

$$\hat{n} \times \vec{E}_a = -\vec{M}_s + \hat{n} \times \vec{E}_b = \hat{n} \times \vec{E}_a \quad (10-6)$$

与 (10-2) 相同。所以对于区域 v_2 来说, 图 10-1(b) 与图 10-1(a) 的问题等效。

注意, 在上述讨论中并未涉及 v_1 中源和媒质分布, 即它们可以随意设定, 这对分析是很有好处的。下面讨论几种常用的特殊情况下的等效原理。

I Love 场等效原理

令图 10-1(b) 中区域 v_1 中的场为零场, 则 s 面上的等效面流为

$$\begin{cases} \vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}_a \\ \vec{M}_s = -\hat{n} \times \vec{E}_a \end{cases} \quad (10-7)$$

情况 1: 设 v_1 中媒质分布与 v_2 中相同, 即 ϵ_2 、 m_2 , 则等效问题就是自由空间中均匀填充 ϵ_2 、 m_2 的源辐射问题。

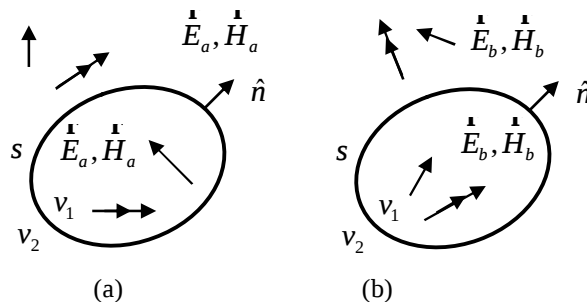
情况 2: 设 v_1 中填充理想导体。注意 s 面即不属于 v_1 也不属于 v_2 , 而是无限靠近两区域。所以这时 $\vec{J}_s$ 和 $\vec{M}_s$ 是无限靠近理想导体。根据互易定理, 这时 $\vec{J}_s$ 是不产生电磁场的。所以这时 s 面上起作用的只有面磁流 $\vec{M}_s$ 。

情况 3: 设 v_1 中填充理想磁体。这时面磁流 $\vec{M}_s$ 不产生场, 起作用的只有面电流 $\vec{J}_s$ 。

情况 2 和 3 也印证了电磁场唯一性定理, 只需切向电场或切向磁场之一就可以唯一确定场。

I 多区域等效原理

下面介绍更一般的等效原理, 多个区域等效于多个原有问题。为方便起见, 不失一般性, 这里只考虑双区域等效原理。



如图 (10-2a)、(10-2b) 分别表示两个电磁场原问题 a 和 b。现在建立一个等效问题，在 s 面之内等效于原问题 a，在 s 面之外等效于原问题 b。

建立方法如下：在 s 面之外规定场、媒质和源分布与 a 问题相同，在 s 面之内规定场、媒质和源分布与 b 问题相同。

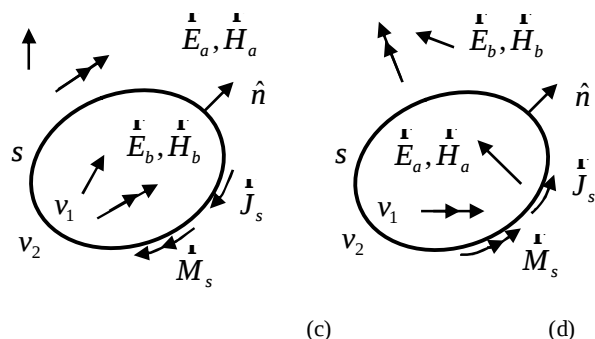


图 10-2 双区域等效原理

- (a) 原问题 a (b) 原问题 b
(c) 等效于 s 面外的 a 和 s 面内的 b
(d) 等效于 s 面外的 b 和 s 面内的 a

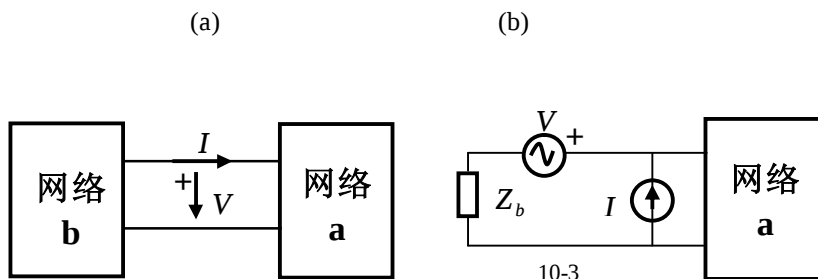
为了支持这样的场，在 s 面上必须有面电流 $\vec{J}_s$ 和面磁流 $\vec{M}_s$ 。根据边界条件，这些表面流是

$$\begin{cases} \vec{J}_s = \hat{n} \times (\vec{H}_a - \vec{H}_b) \\ \vec{M}_s = -\hat{n} \times (\vec{E}_a - \vec{E}_b) \end{cases} \quad (10-8)$$

图 (10-2c) 显示了这一等效问题。对于问题 a 而言，等效表面流恰好抵消了 s 面以内区域的变化对 s 面外区域的影响。而对于原问题 b 而言，等效表面流恰好抵消了 s 面以外区域内的变化对 s 面以内区域的影响。用类似的方式可建立另一个问题，等效于 s 面之外的 b 问题和 s 面之内的 a 问题，如图 (10-2d) 所示。注意，在每一种情况中，对于等效场的区域内，必须保证原有的源和媒质。

现在，我们已清楚了等效原理的一般过程。确定等效表面流的依据是：当唯一性条件满足时，场与源之间是一一对应的。如果规定了空间内每一处的场和媒质，就能确定产生这一场的源。各种等效性就是用此方式导出的。

上述场的等效原理可以类比于电路中的等效原理。考虑图 10-3(a) 所示的两个网络。就网络 a 而言，建立其等效问题方法如下：设从网络连接口向网络 b 看去的无源输入阻抗（网络 b 中的电压源短路，电流源开路）为 Z_b 。把网络 b 用输入阻抗 Z_b 替代，在 Z_b 与网络 a 之间串接等于原问题中连接口两端电压的电压源，连接点之间并接等于原问题中流过连接口的电流的电流源，如图 10-4(b) 所示，这类似于图 10-1(b)。由于源阻抗并未受激励，所以可以用任意阻抗代替而不影响到网络 a 的激励。



10-3

这类似于在图 10-1(b) 的等效场中在 s 内任意填充媒质。特别在源阻抗改为短路时，将电流源开路，只留下电压源激励网络 a ，如图 10-3(c) 所示，这类似于 Love 场等效原理中的情况 2。如果源阻抗改为开路，只留下电流源来激励无源网络，如图 10-3(d) 所示，这类似于 Love 场等效原理中的情况 3。

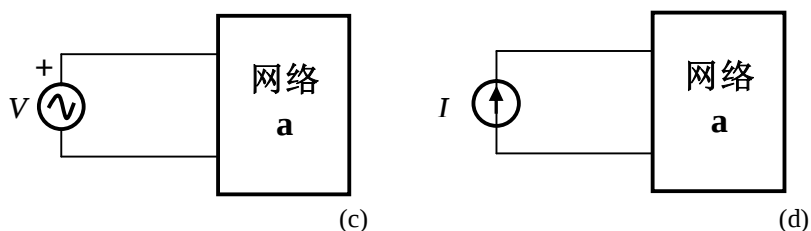


图 10-3 电路等效原理

(a) 原问题 (b) 一般等效源
(c) 输入阻抗短路 (d) 输入阻抗开路

等效原理对于分析电磁孔隙问题特别有用。

[例 10-1] 如图 10-4 所示，一同轴线通向无限大接地导电平面。求此同轴线在 $z > 0$ 半空间的辐射场。

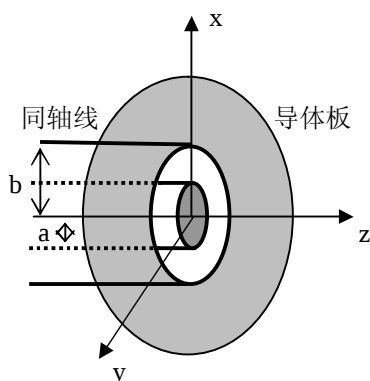


图 10-4 同轴线通向无限大接地导电平面

解：首先利用等效原理将原问题分成两个等效问题如图 10-5(a)和(b)所示。孔隙面用导体封闭，所以在封闭的孔隙面上只有面磁流起作用。在孔隙面同轴线一侧，等效磁流为 $\dot{\vec{M}}_a = \dot{\vec{M}} = \hat{n} \times \dot{\vec{E}}$ ，而在孔隙面半空间一侧，等效磁流为 $\dot{\vec{M}}_b = (-\hat{n}) \times \dot{\vec{E}}$ ，即 $\dot{\vec{M}}_b = -\dot{\vec{M}}_a$ 。这里 $\dot{\vec{E}}$ 为原孔隙处的电场。等效磁流的设置已保证了在孔隙面上切向电场连续。还应保证在孔隙面上切向磁场连续，即在孔隙面上满足

$$\dot{\vec{H}}^a + \dot{\vec{H}}^i = \dot{\vec{H}}^b + \dot{\vec{H}}^i \quad (10-9)$$

其中 $\dot{\vec{H}}^i$ 是同轴线中的传输场。 $\dot{\vec{H}}^a$, $\dot{\vec{H}}^b$ 分别是 $\dot{\vec{M}}_a$ 和 $\dot{\vec{M}}_b$ 在同轴线和半空间中产生的磁场。由于 $\dot{\vec{H}}^b$ 为线性场

$$\vec{H}^b(-\vec{M}) = -\vec{H}^b(\vec{M})$$

所以有

$$\vec{H}^a(\vec{M}) + \vec{H}^b(\vec{M}) = -\vec{H}^i \quad (10-10)$$

上式正是确定 $\vec{M}$ 的方程。一般为积分方程。一旦确定了 $\vec{M}$ ，则同轴线和半空间中的场也就可以确定了。

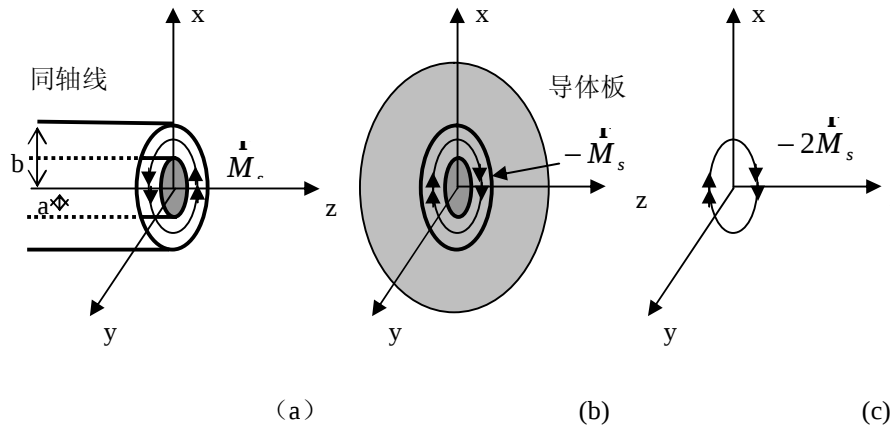


图 10-5 等效原理应用 (a) 区域 a 等效 (同轴线)
(b) 区域 b 等效 (半空间) (c) 自由空间中的圆环磁流

如何确定 $\vec{M}$ 构成了求解孔隙问题的各种方法，如 Bathe 小孔耦合理论，矩量法等。一种更近似的方法是用同轴线中的传输场 (TEM 模) 近似口面上的场，从而避免了求解 (10-10)。于是

$$\vec{E} = E_r \hat{r} = \frac{V}{r \ln b/a}$$

式中，V 为同轴线内外导体间电位差。等效磁流为

$$\vec{M} = -\vec{n} \times \vec{E} = -\vec{z} \times \nabla E_r = -E_r \hat{\phi}$$

这是一个圆环磁流，如果 $b \ll l$ (波长)，则是一个小圆环磁流。我们知道，小圆环电流可以等效为磁流元。应用对偶原理，可知小圆环磁流可以等效为电流元 Il ，且 $Il = j\omega KS$ ，总电矩

$$KS = \int pr^2 dK = \int pr^2 \vec{M} \cdot \hat{j} dr = -\frac{pV}{\ln b/a} \int_a^b r dr = -\frac{pV(b^2 - a^2)}{2 \ln b/a}$$

故等效电流元为

$$Il = j\omega KS = -j \frac{\omega p V (b^2 - a^2)}{2 \ln b/a}$$

应用镜像法，把图 10-5(b) 的问题等效为面磁流在无限大自由空间的辐射问题，如图 10-5(c) 所示。于是所要求解的辐射场为

$$E_q = \frac{2j\omega m Il}{4\pi r} e^{-jkr} \sin q = \frac{k^2 V (b^2 - a^2)}{4r \ln b/a} \sin q e^{-jkr}$$

$$H_j = \frac{E_q}{h_0}, \quad h_0 = \sqrt{\frac{m_0}{e_0}} = 120p$$

利用等效原理研究孔隙问题虽然并未直接产生解，但把一个复杂问题分离成几个相对简单的问题，使分析和计算简化。

10.2 感应定理

感应定理的原理与等效原理是一致的。实质上感应定理也是等效原理的一种特殊应用。

考虑如图 10-6(a) 所示的障碍物散射问题。

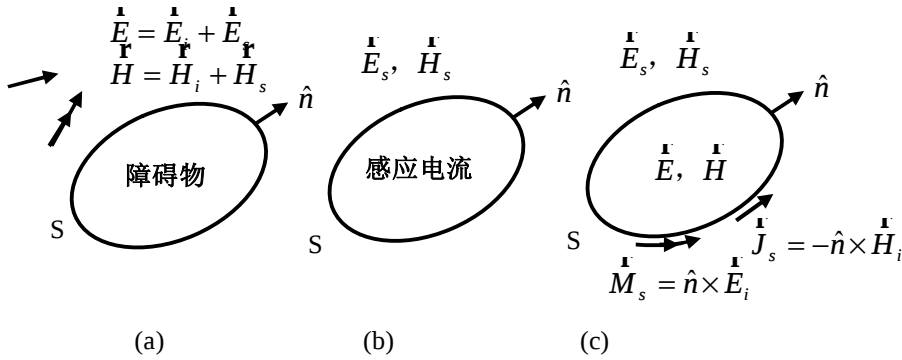


图 10-6 感应定理 (a) 原问题 (b) 散射场 (c) 等效感应

设入射场（无障碍物时源产生的场）为 $\vec{E}_i, \vec{H}_i$ ，障碍物的散射场为 $\vec{E}_s, \vec{H}_s$ ，则有障碍物时源辐射的总场为

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_s \\ \vec{H} = \vec{H}_i + \vec{H}_s \end{cases} \quad (10-11)$$

在障碍物之外， $\vec{E}, \vec{H}$ 和 $\vec{E}_i, \vec{H}_i$ 都有相同的源， $\vec{E}_s, \vec{H}_s$ 是障碍物的散射场，可以想象为障碍物上的感应电流产生的。在障碍物之外 $\vec{E}_s, \vec{H}_s$ 是无源场。如图 10-6(b) 所示。

根据等效原理，可建立如下的等效问题：在障碍物内保留原有场 $\vec{E}, \vec{H}$ 及媒质分布。在障碍物之外为散射场 $\vec{E}_s$ 和 $\vec{H}_s$ 。这样两个区域均无源。为了支持这样的场，s 面上就必须有等效表面流

$$\begin{cases} \vec{J}_s = \hat{n} \times (\vec{H}_s - \vec{H}_i) \\ \vec{M}_s = -\hat{n} \times (\vec{E}_s - \vec{E}_i) \end{cases} \quad (10-12)$$

将 (10-11) 代入得

$$\begin{cases} \vec{J}_s = -\hat{n} \times \vec{H}_i \\ \vec{M}_s = \hat{n} \times \vec{E}_i \end{cases} \quad (10-13)$$

表面流 $\vec{J}_s, \vec{M}_s$ 在障碍物之外产生散射场 $\vec{E}_s, \vec{H}_s$ ，在障碍物之内则产生总场 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 。

感应定理与等效原理的不同处在于：前者的表面流是已知的，而后的待求（利用切向磁场连续条件）。前者的障碍物必须保留，既不能改变原问题的媒质分布而后者非等效区域的媒质可任意设定。

如果障碍物是理想导体时，障碍物内 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 为零，所以在 s 面上等效磁流 $\vec{M}_s = -\hat{n} \times \vec{E}_s$ 。由于在导体表面上 $\hat{n} \times \vec{E} = 0$ 即 $\hat{n} \times \vec{E}_s = -\hat{n} \times \vec{E}_i$ ，所以 $\vec{M}_s = -\hat{n} \times \vec{E}_s = \hat{n} \times \vec{E}_i$ 仍满足 (10-13)。这反映了理想导体对场产生全反射。这时面电流 $\vec{J}_s$ 不起作用。

[例 10-2] 计算大导电平面的雷达散射截面。如图 10-7(a) 所示，一平面波垂直入射到位于 $z = 0$ 的大导体平面上，入射场为 $\vec{E}_i = E_0 e^{-jkz} \hat{x}$ 。

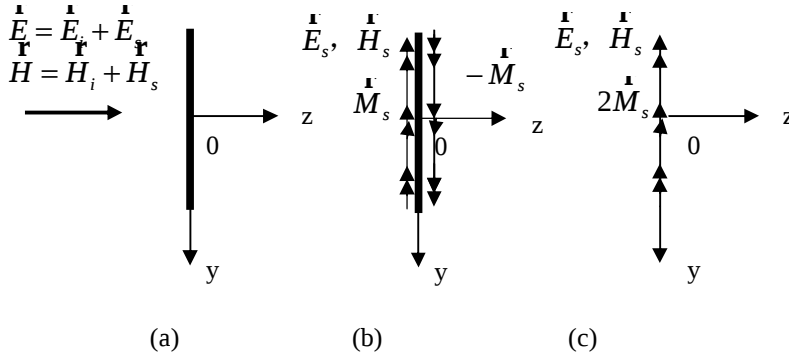


图 10-7 导电平板的散射
(a) 原问题 (b) 等效感应 (c) 镜像法

解：

根据感应定理，在 $z < 0$ 空间的散射场是由导电板表面等效磁流所产生的：

$$\vec{M}_s = \hat{n} \times \vec{E}_i|_{z=0} = -z \times \vec{E}_i = -E_0 \hat{y}$$

如图 10-7(b) 所示。

为了求导电平板面磁流在 $z < 0$ 空间产生的场，可近似认为面磁流是放在无限大导电平板上，于是可应用镜像法，把图 10-7(b) 变成无限大均匀空间面磁流 $2\vec{M}_s = -2E_0 \hat{y}$ 在 $z < 0$ 空间产生的场，于是，在远区面磁流单元产生的场为

$$dE_{xs} = \frac{jk2M_s ds}{4\pi r} e^{-jkr} = -\frac{jkE_0 ds}{2\pi r} e^{-jkr}$$

面磁流在远区产生的总的散射场为

$$E_{xs} = \int_s dE_{xs} = -\frac{jkE_0 A}{2\pi r} e^{-jkr} \quad (10-14)$$

雷达散射截面定义为

$$A_e = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[4\pi r^2 \frac{\langle S_s \rangle}{\langle S_i \rangle} \right] \quad (10-15)$$

式中， $\langle S_i \rangle$ 为入射波平均功率密度， $\langle S_s \rangle$ 为散射波平均功率密度。

对于均匀平面波

$$\langle S_i \rangle = \frac{1}{2} |\vec{E}_i \times \vec{H}_i^*| = \frac{1}{2\eta_0} |E_0|^2$$

$$\langle S_s \rangle = \frac{1}{2} |\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*| = \frac{1}{2h_0} |\mathbf{E}_s|^2 = \left| \frac{kE_0 A}{2pr} \right|^2$$

所以

$$A_e = \frac{k^2 A^2}{p} = \frac{4p}{l^2} A^2 l \quad (10-16)$$

习题 10

10-1 试利用等效原理，计算如图 10-7 所示的通向接地导电平面的矩形波导开口端的辐射场(假定开口端的 E_y 为 TE_{10} 波的电场)。

答案：

$$H_q = \frac{jbE_0 e^{-jkr}}{2hr} \cdot \sin(k \frac{a}{2} \cos j \sin q) \cdot \frac{\cos(k \frac{b}{2} \cos q)}{\cos j [p^2 - (kb \cos q)^2]}$$

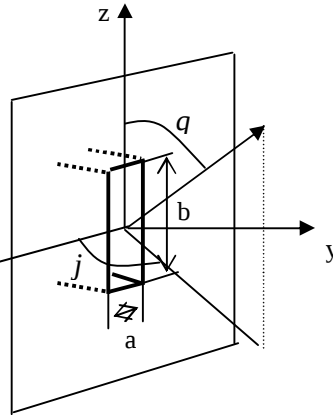


图 10-7 矩形波导通向无限大导电平面

◆◆

第 11 讲 镜像原理 (I)

镜像原理的基础是唯一性定理，即在某一特定区域，只要解满足该区域的支配方程和相应的边界条件，那么，这个解就是该区域的唯一正确解。

11.1 导体平面镜像原理

设一点电荷放置在无限大接地导体平面的右半空间中，导体平面位于 $x=0$ 处，点电荷位于 $x=x_0$ 处。如图 11-1(a) 所示。

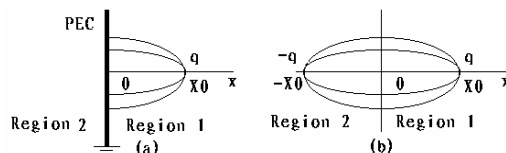


图 11-1 导体平面对点电荷的镜像原理
(a) 原问题 (b) 镜像问题

图 11-1(a) 中区域 1 的边界条件是在 $x=0$ 导体平面上切向电场为零，图中的电力线也清楚地表明了这一点。如果在区域 2 中 $x=-x_0$ 处放一点电荷 $-q$ ，并去掉导体平面，如图 11-1(b) 所示，则由电力线分布可以看出，这两个点电荷产生的电场在 $x=0$ 平面上仍保持切向电场为零，并且也没有改变区域 1 中的电荷分布，所以由唯一性定理可知，区域 1 中电场保持不变，即就区域 1 而言，图 11-1(a) 与 11-1(b) 的两个问题是等效的。

注意就区域 2 而言，两个问题是不等效的，因为图 11-1(b) 区域 1 中多了一个点电荷 $-q$ 。类比可知，对于点电荷，导体平面就如同一面镜子，故将这一原理称为镜像原理。在 $x=-x_0$ 处的点电荷 $-q$ ，称为镜像电荷。

依照同一原理，可以导出导体平面对点磁荷 q_m 的镜像原理。所不同的是磁荷产生的磁场在导电平面上法向分量为零，所以镜像磁荷应与原磁荷值相同。

电流、磁流分别是由电荷、磁荷的流动形成的，所以利用点电荷和点磁荷的导体平面镜像原理。可以导出导体平面对电流和磁流的镜像原理，如图 11-2 所示。

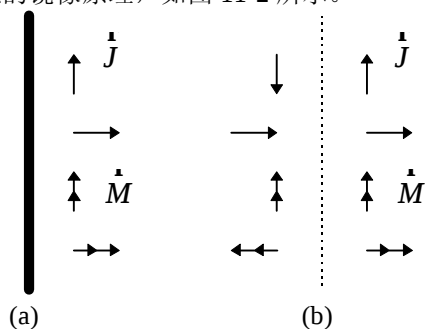


图 11-2 导体平面对电流和磁流的镜像原理

应当注意的是，在应用镜像原理时，不仅要考虑源的镜像，有其他物体存在时还要考虑其他物体的镜像，使镜像问题维持对称，如图 11-3 所示。

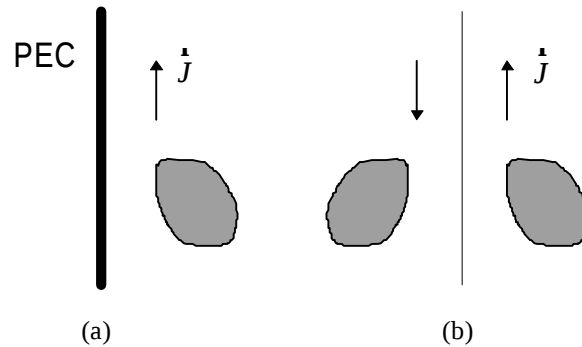


图 11-3 有其他物体存在时的镜像原理

上述导体平面镜像原理可以推广到多导体平面的镜像问题。

I 导体拐角的镜像原理

如图 11-4(a)在无限大导体直角内放置一点电荷 q 。当去掉导体拐角后，为了保证导体平面上的切向电场为零，必须分别在二、三、四象限内放置镜像电荷，如图 11-4(b)所示。 $y=0$ 平面上的两个点电荷与下面的两个点电荷保证了 $y=0$ 的切向电场为零。 $x=0$ 平面左边的两个点电荷与右边的两个点电荷保证了 $x=0$ 平面切向电场为零，所以整个导体拐角上切向电场为零。

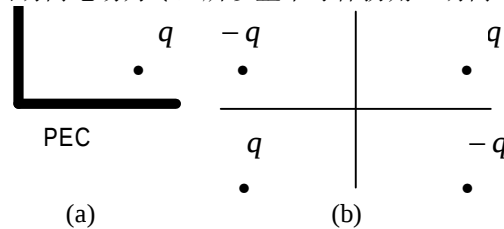


图 11-4 导体直角镜像原理 (a) 原问题 (b) 镜像问题

事实上，只要导体拐角满足 $\alpha = 180^\circ/n$ (n 为整数)，就可以应用镜像原理，其镜像数目为 $(2n-1)$ 个，分布在半径为 r_0 的圆上，镜像的角度分布为 $2m\alpha \pm \theta$, $m=1,2,\dots,L$, 电荷量为 $\pm q$ ，其中 r_0 为点电荷到拐角点的距离， θ 为点电荷与拐角一平面的夹角。如果 $\alpha \neq 180^\circ/n$ ，则无法应用镜像原理。图 11-5 显示了 $n=4, \alpha=45^\circ$ 的导体拐角的镜像原理。

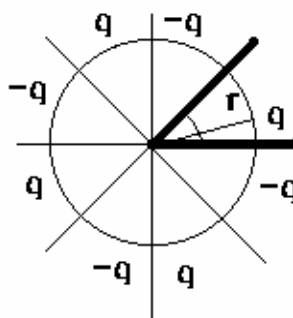
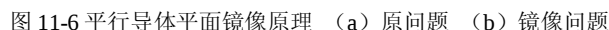


图 11-5 $\alpha = 45^\circ$ 导体拐角的镜像原理



如此继续下去，直至无穷。这一系列镜像电荷及原电荷保证了 $x=0$ 平面的切向电场为零，但对 $x=h$ 平面只是镜像电荷在其上产生的切向电场为零。若加上原电荷， $x=h$ 平面的边界条件将不能满足。为此，在 $x=2h-x_0$ 处放置上原电荷关于 $x=h$ 平面的镜像 $q_{20}=-q$ 。再在 $x=-(2h-x_0)$ 处放置 q_{20} 关于 $x=0$ 平面的镜像 $q_{21}=-q_{20}=q$ ，又在 $x=4h-x_0$ 处放置 q_{21} 关于 $x=h$ 平面的镜像，如此继续下去。于是便得到如图 11-6(b)所示的多重镜像电荷分布。

A 5x5 square lattice with dashed lines. Each site contains a spin symbol: down arrow (↓) or up arrow (↑). The central site (row 3, column 3) is highlighted with a thick black border and contains an up arrow (↑) and the letter J with a superscript i .

图 11-7 矩形波导中电流源的镜像原理

11.2 导体球面的镜像原理

如图 11-8 所示, 考虑一点电荷 q 位于接地导体球面外 $x=r_a$ 处, 球面半径为 r_0 。这时利用电力线(图解法)已无法直接判别镜像电荷的位置与大小。须采用解析的方法。将问题的区域分为区域 I (导体球内) 和区域 II (导体球外)。对于静电荷, 电位满足的 Poisson 和 Laplace 方程

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi_I = -qd(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)/e_0 & r > r_0 \\ \nabla^2 \Phi_{II} = 0 & r < r_0 \end{cases} \quad (11-1)$$

和边界条件 $\Phi_I = \Phi_{II} = 0 \quad r = r_0 \quad (11-2)$

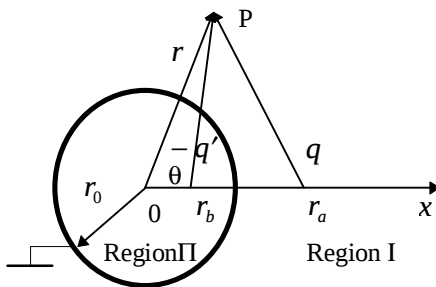


图 11-8 导体球面外点电荷

去掉导体球面后，为保持球面导体边界条件不变，设在 $x = r_b$ 处有一镜像电荷 $-q'$ 。电位的试探解为

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2 + r_a^2 - 2rr_a\cos\theta}} - \frac{q'}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2 + r_b^2 - 2rr_b\cos\theta}} \quad (11-3)$$

根据球面上 $r = r_0$ ， $\Phi = 0$ ，得

$$\frac{q^2}{r_0^2 + r_a^2 - 2r_0r_a\cos\theta} = \frac{q'^2}{r_0^2 + r_b^2 - 2r_0r_b\cos\theta}$$

$$\text{即} \quad q^2(r_0^2 + r_b^2) - 2q^2r_0r_b\cos\theta = q'^2(r_0^2 + r_a^2) - 2q'^2r_0r_a\cos\theta \quad (11-4)$$

由于对于任意 θ 都成立，所以有

$$\begin{cases} q^2(r_0^2 + r_b^2) = q'^2(r_0^2 + r_a^2) \\ q^2r_b = q'^2r_a \end{cases} \quad (11-5)$$

于是

$$r_a(r_0^2 + r_b^2) = r_b(r_0^2 + r_a^2)$$

即

$$(r_a - r_b)(r_0^2 - r_0r_b) = 0$$

(11-6)

有两组解

$$r_b = r_a$$

(11-7)

或

$$r_0^2 = r_ar_b \quad \text{即} \quad r_b = \frac{r_0^2}{r_a}$$

(11-8)

情况 1: 如果 $r_b = \frac{r_0^2}{r_a} < r_0$ 则

$$q' = \sqrt{\frac{r_b}{r_a}}q = \frac{r_0}{r_a}q \quad (11-9)$$

这正是关于区域 I 等效的镜像问题。

情况 2: 如果 $r_a = r_b > r_0$ ，则

$$q' = q \quad (11-10)$$

这正是关于区域Ⅱ等效的镜像问题。

于是得

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_I = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_a^2 - 2r_a r \cos q}} - \frac{r_0}{r_a \sqrt{r^2 + r_b^2 - 2r_b r \cos q}} \right] \\ \Phi_{II} = 0 \end{array} \right. \quad (11-11)$$

利用(11-11)可以求出接地导体球面上的总感应电荷。在导体面上感应电荷面密度 r_s 满足

$$r_s = -e_0 \frac{\nabla \Phi_I}{\nabla r} \bigg|_{r=r_0} = \frac{q(r_0 - r_a \cos q)}{4\pi(r_0^2 + r_a^2 - 2r_a r_0 \cos q)^{3/2}} - \frac{q'(r_0 - r_b \cos q)}{4\pi(r_0^2 + r_b^2 - 2r_b r_0 \cos q)^{3/2}} \quad (11-12)$$

所以总感应面电荷为

$$\begin{aligned} Q &= \int_s r_s ds = \int_0^\pi r_s 2\pi r_0 \sin q r_0 dq \\ &= \frac{q}{2} \int_0^\pi \frac{(1 - \frac{r_a}{r_0} \cos q) \sin q dq}{\left[1 + (\frac{r_a}{r_b})^2 - 2\frac{r_a}{r_b} \cos q \right]^{3/2}} - \frac{q'}{2} \int_0^\pi \frac{(1 - \frac{r_b}{r_0} \cos q) \sin q dq}{\left[1 + (\frac{r_b}{r_0})^2 - 2\frac{r_b}{r_0} \cos q \right]^{3/2}} \end{aligned} \quad (11-13)$$

可以证明积分

$$I = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{(1 - k \cos q) \sin q dq}{(1 + k^2 - 2k \cos q)^{3/2}} = \begin{cases} 0 & k > 1 \\ 1 & k < 1 \end{cases} \quad (11-14)$$

事实上, 令 $u = 1 + k^2 - 2k \cos q$, 则

$$I = \frac{1}{8k} \int_{(1-k)^2}^{(1+k)^2} \left(\frac{1}{u^{1/2}} + \frac{1-k^2}{u^{3/2}} \right) du = \frac{1}{4k} \left(u^{1/2} - \frac{1-k}{u^{1/2}} \right) \bigg|_{(1-k)^2}^{(1+k)^2} = \begin{cases} 1 & k < 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$$

于是, (11-13)变为

$$Q = -q' = -\frac{r_a}{r_b} q \quad (11-15)$$

可见, 球面上总感应电荷就等于镜像电荷。

所以, 镜像原理也可以从物理上这样解释: 放在导体球外的静电荷, 在球面上感应电荷。由于导体接地, 球面上只有负感应电荷分布。镜像原理就是利用镜像电荷来等效导体球面上感应电荷的作用。

如果导体球不接地, 导体球面的电位不为零, 而是一等电位面。球面上一端感应有负电荷分布, 另一端感应正电荷分布。但感应的净电荷分布为零。

这种情况下，镜像原理可分成两步：第一步，假设导体球接地，利用上述方法确定镜像；第二步，球面内放置另一个镜像电荷 q'' 使球面为等电位，显然 q'' 应放在球心。 q'' 在球面上产生的电

位为
$$\Phi'' = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (11-16)$$

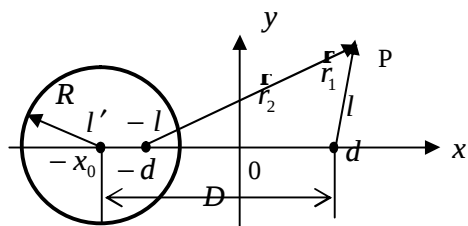
这一镜像电荷应抵消接地导体球面的感应负分布电荷，即应有：

$$\int (-e_0 \frac{\partial \Phi''}{\partial r} \Big|_{r=R}) ds = q' \quad (11-17)$$

将(11-16)代入，得 $q'' = q'$ ，所以，在球心处应放置一个 $+q'$ 电荷。

11.3 导体柱面的镜像原理

图 11-9 (a) 导体镜面等效原理



考虑一密度为 l 的无限长均匀分布的线电荷，平行放置在半径为 R 的接地导体圆柱外 $x = a$ 处。如图 11-9(a) 所示。

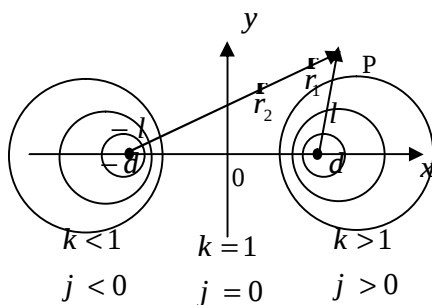


图 11-9 (b) 电轴产生的电位

为了采用镜像原理解决这一问题，我们首先讨论相距为 d 的两个密度分别为 l 和 $-l$ 的无限长均匀分布的线电荷（称之为电轴）在空间产生的电位，如图 11-9(b) 所示。

电位表达式为

$$j = \frac{l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (11-18)$$

在直角坐标系中， $r_1 = \sqrt{(x-d)^2 + y^2}$ ， $r_2 = \sqrt{(x+d)^2 + y^2}$ 。这种系统的等位面方程为 $\frac{r_2^2}{r_1^2} = k^2$ ，即 $\frac{(x+d)^2 + y^2}{(x-d)^2 + y^2} = k^2$ ，整理后，得到

$$\left(x - \frac{k^2+1}{k^2-1}d\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2kd}{k^2-1}\right)^2 \quad (11-19)$$

这是一圆方程。

所以该系统产生的等位线是一簇圆，如图 11-9(b) 所示，圆心坐标 (x_0, y_0) 和半径 R 分别为

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{k^2+1}{k^2-1}d, 0\right), \quad R = \left|\frac{2kd}{k^2-1}\right|$$

而且可以证明 $x_0^2 = R^2 + d^2$ (11-20)

或 $R^2 = (x_0 - d)(x_0 + d)$ (11-21)

注意， $(x_0 - d)$ 和 $(x_0 + d)$ 恰好是两个线电荷到圆心的距离。

利用电轴在空间产生的电位结果，可以容易地研究图 11-9(a) 所示的导体柱面的镜像原理。由于导体柱面为一等位面，所以可以把导体柱面作为图 11-9(b) 中的电轴产生的一个等位面，原线电荷位于电轴的一个位置，镜像电荷则位于电轴的另一个位置，取值为原电荷的负值。但是，利用两个电轴只能保证原导体柱面的圆上是等电位的，电轴的电荷一旦确定，圆上的电位也就确定了，但这个电位可能不等于原导体柱面上的电位。为此，我们在圆心处再加一个线电荷，以保证等位圆上的电位与原导体柱面上的电位相同。

习题 11

11-1 一点电荷 q 放置在夹角为 60° 的导体拐角中，电荷距拐角尖点的距离为 r_0 ，与拐角的最小夹角为 q 。试利用镜像原理求解点电荷在拐角中产生的电位。如果拐角的夹角改为 50° ，问能否应用镜像原理？为什么？

11-2 如图 11-9 所示，接地无限大导体平板上突起一半径为 a 的半球形，在 $x = d$ 处有一点电荷 q 。试利用镜像原理求解该电荷产生的电位。

11-3 如图 11-10 所示，一密度为 l 的无限长均匀分布的线电荷，平行放置在半径为 R 的接地导体圆柱外 $x = a$ 。试尝试用镜像原理求解该问题。

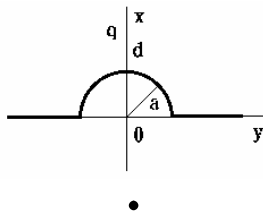


图 11-10 题 11-2 用图

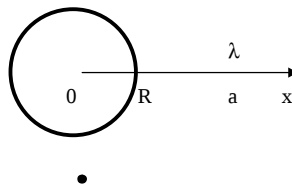


图 11-11 题 11-3 用图

◆◆

第 12 讲 镜像原理(II)

12. 1. 介质交界平面的镜像原理

首先研究二维线电荷 l 关于介质交界面的镜像原理。如图 12-1(a)所示, 在 $x > 0$ 和 $x < 0$ 的半空间中分别填充介电常数为 ϵ_1 和 ϵ_2 的介质, 交界面位于 $x = 0$ 。在 $x > 0$ 空间 $x = d$ 处放置一线电荷 l 。各区域电位满足的支配方程为

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi_I = -\frac{1}{\epsilon_1} l \delta(x-d) \delta(y) & x > 0 \\ \nabla^2 \Phi_{II} = 0 & x < 0 \end{cases} \quad (12-1)$$

交界面边界条件为:

$$\begin{cases} \Phi_I = \Phi_{II} & x = 0 \\ \epsilon_1 \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} = \epsilon_2 \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial x} & x = 0 \end{cases} \quad (12-2)$$

求 $x > 0$ 空间中的电位时, 设全空间只填充一种介质 ϵ_1 , 在原线电荷的镜像位置 $x = -d$ 处放置镜像线电荷 $l' = x l$, 如图 12-1(b)所示。求 $x < 0$ 空间中的电位时, 设全空间只填充一种介质 ϵ_2 , 去掉原电荷, 在原线电荷位置 $x = d$ 处放置镜像电荷 $l'' = h l$, 如图 12-1(c)所示。

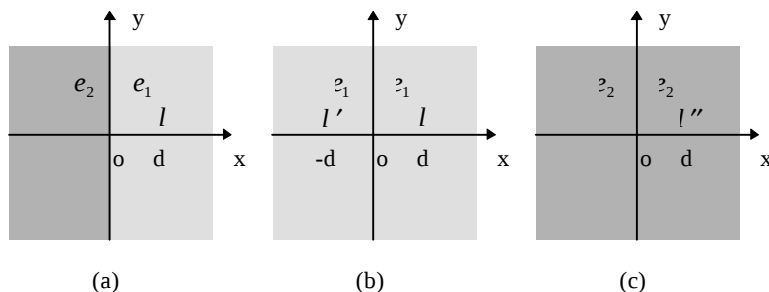


图 12-1 介质交界面镜像原理

(a)原问题 (b) $x > 0$ 半空间镜像问题 (c) $x < 0$ 半空间镜像问题

于是可得到各区域的电位表达式

$$\begin{cases} \Phi_I = \frac{l}{2p\epsilon_1} \left[\ln \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} + x \ln \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}} \right] \\ \Phi_{II} = \frac{l}{2p\epsilon_2} h \ln \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} \end{cases} \quad (12-3)$$

Φ_I 和 Φ_{II} 关于 x 的导数为

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} = \frac{-l}{2p\epsilon_1} \left[\frac{(x-d)}{(x-d)^2 + y^2} + \frac{x(x+d)}{(x+d)^2 + y^2} \right] \\ \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial x} = -\frac{l}{2p\epsilon_2} \cdot \frac{h(x-d)}{(x-d)^2 + y^2} \end{cases} \quad (12-4)$$

利用边界条件(12-2), 得

$$\begin{cases} \frac{1}{e_1}(1+x) = \frac{1}{e_2}h \\ (1-x) = h \end{cases} \quad (12-5)$$

于是

$$\begin{cases} x = \frac{e_1 - e_2}{e_1 + e_2} \\ h = \frac{2e_2}{e_1 + e_2} \end{cases} \quad (12-6)$$

如果从 l'' 中除去 l ，则新增加的电荷为 $l'' - l = (h-1)l = -xl$ 。

如果原电荷是点电荷 q ，可以证明，镜像原理完全一样，即 $q' = xq$ ， $q'' = hq$ 。

12.2 介质交界面平行导体平面的镜像原理

考虑一个由空气、介质和导体三层媒质组成的结构，在仅靠介质面的空气中放置一线电荷 l ，如图 12-2 所示。现在利用镜像原理求解线电荷 l 在空间产生的电位。这一问题的实际背景就是求微带的 Green 函数。

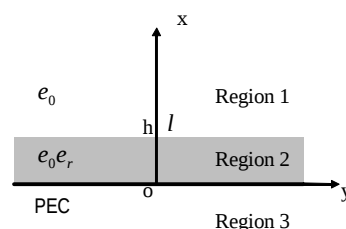


图 12-2 介质交界面平行导体平面

分析的总原则是

- (1) 在所考虑的区域保持原电荷及媒质分布；
- (2) 区域外的电荷和媒质可任意改变，但所有的分布应使边界上的电位满足边界条件。

首先，利用介质镜像原理和导体镜像原理确定 $0 < x < h$ 的介质区域(区域 2)的镜像问题。

将区域 1 和 3 也填充区域 2 的媒质，即整个空间填充 $e_0 e_r$ 媒质。镜像电荷的分布应满足如下规律：

- I 在区域 2 中无电荷；
- I 电荷分布应与 y 轴反对称，以满足 $x=0$ 的导体边界条件
- I 电荷分布也应以 $x=h$ 对称，以满足介质边界条件。

为了满足 $x=h$ 处的介质边界条件，在区域 1 中 $x=h^+$ 处放置一线电荷 $\frac{2e_r}{1+e_r}l$ ，接着为了满足

足 $x=0$ 的导体边界条件，在区域 3 中 $x=-h$ 处放置线电荷 $-\frac{2e_r}{1+e_r}l$ 。然后再在区域 1 中 $x=3h$

处放置线电荷 $-\frac{2e_r}{1+e_r} \frac{e_r-1}{e_r+1}l$ ，以满足介质边界条件。再在区域 3 中 $x=-3h$ 处放置线电荷

$\frac{2e_r}{1+e_r} \frac{e_r-1}{e_r+1}l$ ，如此继续，直至无穷。图 12-3(a)说明了这一过程。

电荷的位置为

$$\pm(2k+1)h \quad k=0,1,2,\mathbf{L}$$

对应的电荷为

$$\pm \frac{2e_r}{1+e_r} \left(\frac{1-e_r}{e_r+1} \right)^k \quad k=0,1,2,\mathbf{L}$$

所以，区域 2 中的电位为

$$\Phi_{\text{II}} = \frac{1}{pe_0(1+e_r)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1-e_r}{e_r+1} \right)^k \cdot \left[\ln \frac{1}{\sqrt{[x-(2k+1)h]^2 + (y-y_0)^2}} - \ln \frac{1}{\sqrt{[x+(2k+1)h]^2 + (y-y_0)^2}} \right] \quad (12-7)$$

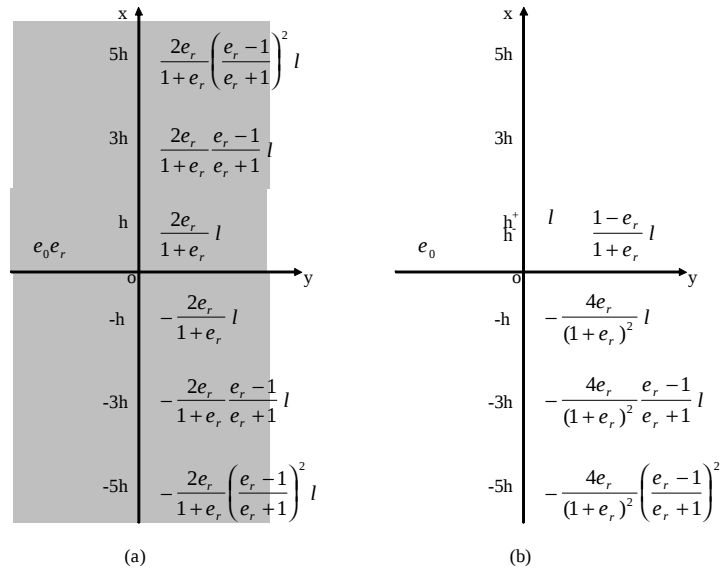


图 12-3 介质界面平行导体平面结构的镜像问题
(a) 介质区域的镜像问题 (b) 空气区域的镜像问题

再利用介质镜像原理确定等效区域 1 的镜像电荷分布。确定区域 1 镜像问题的规律是

- Ⅰ 区域 1 中只有真实线电荷 l ；
- Ⅰ 区域 1 只有一个边界，就是 $x=h$ 的介质面，电荷分布只需满足该边界条件。
- Ⅰ 应考虑区域 2 中导体边界对区域 1 的影响，但无需满足 $x=0$ 的导体边界条件

图 12-3(b)表明了确定过程。为了保证 $x=h$ 介质边界条件，在区域 2 中 $x=h^-$ 处加电荷 $\frac{1-e_r}{1+e_r} l$ 。导体对区域 1 的影响可以等效地看成图 12-3(a)区域 3 中的电荷对区域 1 的影响，依照介

质镜像原理，在这些电荷上应乘以因子 $h = \frac{2}{1+e_r}$ 。于是区域 1 中的电位为

$$\Phi_{\text{I}} = \frac{l}{pe_0(1+e_r)} \left\{ \ln \frac{1}{\sqrt{(x-h)^2 + (y-y_0)^2}} - \frac{2e_r}{1+e_r} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1-e_r}{1+e_r} \right)^k \ln \frac{1}{\sqrt{[x+(2k+1)h]^2 + (y-y_0)^2}} \right\} \quad (12-8)$$

最后求区域 3 中的电位，由于区域 3 为接地导体，故区域 3 的电位为 $\Phi_{\text{III}} = 0$ 。

下面检验上述解是否满足边界条件及支配方程。首先检验 $x=h$ 处的介质交界面条件。

$$\Phi_I|_{x=h} = \frac{l}{pe_0(1+e_r)} \left\{ \ln \frac{1}{\sqrt{(y-y_0)^2}} - \frac{2e_r}{1+e_r} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1-e_r}{1+e_r} \right)^k \ln \frac{1}{\sqrt{[2(k+1)h]^2 + (y-y_0)^2}} \right\} \quad (12-9)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{II}|_{x=h} &= \frac{l}{pe_0(1+e_r)} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1-e_r}{1+e_r} \right)^k \left[\ln \frac{1}{\sqrt{(2kh)^2 + (y-y_0)^2}} - \ln \frac{1}{\sqrt{[2(k+1)h]^2 + (y-y_0)^2}} \right] \right\} \\ &= \frac{l}{pe_0(1+e_r)} \left[\ln \frac{1}{\sqrt{(y-y_0)^2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-e_r}{e_r+1} \right)^k \ln \frac{1}{\sqrt{(2kh)^2 + (y-y_0)^2}} - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1-e_r}{1+e_r} \right)^k \ln \frac{1}{\sqrt{[2(k+1)h]^2 + (y-y_0)^2}} \right] \\ &= \frac{l}{pe_0(1+e_r)} \left[\ln \frac{1}{\sqrt{(y-y_0)^2}} - \frac{2e_r}{e_r+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1-e_r}{e_r+1} \right)^k \ln \frac{1}{\sqrt{[2(k+1)h]^2 + (y-y_0)^2}} \right] \end{aligned} \quad (12-10)$$

$$\text{可见} \quad \Phi_I|_{x=h} = \Phi_{II}|_{x=h} \quad (12-11)$$

再验证 $x=h$ 处的导数边界条件

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial x} \Big|_{x=h} = e_r \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial x} \Big|_{x=h} \quad (12-12)$$

根据(12-8)得

$$\begin{aligned} \Phi_I \Big|_{x=h} &= \frac{l}{pe_0(1+e_r)} \left\{ -\frac{x-h}{(x-h)+(y-y_0)^2} + \frac{2e_r}{1+e_r} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1-e_r}{1+e_r} \right)^k \frac{x+(2k+1)h}{[x+(2k+1)h]^2 + (y-y_0)^2} \right\} \Big|_{x=h} \\ &= \frac{4le_r}{pe_0(1+e_r)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1-e_r}{1+e_r} \right)^k \frac{(k+1)h}{[2(k+1)h]^2 + (y-y_0)^2} \end{aligned} \quad (12-13)$$

再根据(12-7)得

$$\begin{aligned} \Phi_{II} \Big|_{x=h} &= \frac{1}{pe_0(1+e_r)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1-e_r}{1+e_r} \right)^k \left\{ -\frac{x-(2k+1)h}{[x-(2k+1)h]^2 + (y-y_0)^2} + \frac{x+(2k+1)h}{[x+(2k+1)h]^2 + (y-y_0)^2} \right\} \Big|_{x=h} \\ &= \frac{l}{pe_0(1+e_r)} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-e_r}{1+e_r} \right)^k \frac{2kh}{(2kh)^2 + (y-y_0)^2} + \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{1-e_r}{1+e_r} \right)^k \frac{2(k+1)h}{[2(k+1)h]^2 + (y-y_0)^2} \right\} \\ &= \frac{4l}{pe_0(1+e_r)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1-e_r}{1+e_r} \right)^2 \frac{(k+1)h}{[2(k+1)h]^2 + (y-y_0)^2} \end{aligned} \quad (12-14)$$

4)

显然满足(12-12)。最后还应满足每个区域内的支配方程。由于电位均是由静电荷产生的，且各区域等效时镜像电荷并未进入区域，故所考虑的区域电荷分布不变，所以各区域的电位一定满足该区域的 Poisson 方程或 Laplace 方程。

*

三、介质球镜像原理

如图 12-4(a)所示, 介质球外一点电荷 q 位于距球心 r_a 处, 介质球的半径为 r_0 , 相对介电常数为 ϵ_r 。现利用镜像原理求解该问题。将该问题分成两个区域, 区域 1: 介质球外的空气, 区域 2: 介质球内。在等效区域 1 时, 区域 2 填充空气, 并在 $x = r_b < r_0$ 处放上镜像电荷 $q' = xq$, 如图 12-5(b)所示。在等效区域 2 时, 区域 1 中填充 $\epsilon_0\epsilon_r$, 在 $x = r_a$ 处放上电荷 $q'' = hq$ 。于是两个区域中的电位为

$$\Phi_I = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_a^2 - 2rr_a \cos q}} + \frac{x}{\sqrt{r^2 + r_b^2 - 2rr_b \cos q}} \right) \quad (12-15)$$

$$\Phi_{II} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_a^2 - 2rr_a \cos q}} \quad (12-16)$$

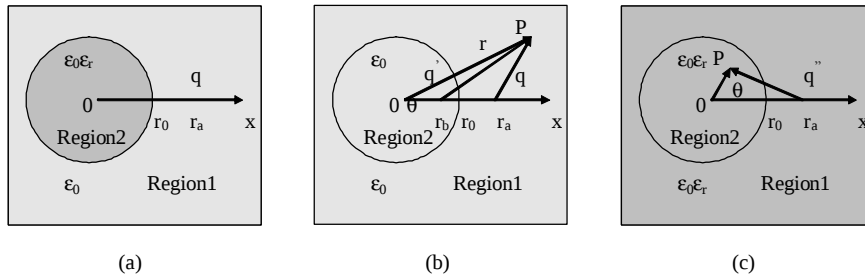


图 12-5 介质球镜像原理

(a) 原问题 (b) 区域 1 的镜像问题 (c) 区域 2 的等效问题

根据边界条件 $\Phi_I|_{r=r_0} = \Phi_{II}|_{r=r_0}$, 得

$$\left(\frac{h}{e_r} - 1 \right) \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + r_a^2 - 2r_0r_a \cos q}} = \frac{x}{\sqrt{r_0^2 + r_b^2 - 2r_0r_b \cos q}} \quad (12-17)$$

即 $\left(\frac{h}{e_r} - 1 \right)^2 (r_0^2 + r_b^2 - 2r_0r_b \cos q) = x^2 (r_0^2 + r_a^2 - 2r_0r_a \cos q)$

上式对于任意 q 均满足, 所以

$$\begin{cases} \left(\frac{h}{e_r} - 1 \right)^2 (r_0^2 + r_b^2) = x^2 (r_0^2 + r_a^2) \\ \left(\frac{h}{e_r} - 1 \right)^2 r_b = x^2 r_a \end{cases} \quad (12-18)$$

整理得

$$r_a(r_0^2 + r_b^2) = r_b(r_0^2 + r_a^2)$$

即

$$(r_a - r_b)(r_0^2 - r_a r_b) = 0 \quad (12-19)$$

由于 $r_a \neq r_b$, $r_0^2 = r_a r_b$, 即, $r_b = \frac{r_0^2}{r_a}$ (12-20)

将上式代入(12-17), 得: $\frac{h}{e_r} - 1 = x \frac{r_a}{r_0}$ (12-21)

再利用导数边界条件

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = e_r \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \quad (12-22)$$

因为

$$\left. \frac{\Phi_I}{r} \right|_{r=r_0} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r_0 - r_a \cos q}{(r_0^2 + r_a^2 - 2r_0 r_a \cos q)^{3/2}} + \frac{x(r_0 - r_b \cos q)}{(r_0^2 + r_b^2 - 2r_0 r_b \cos q)^{3/2}} \right]$$

$$\left. \frac{\Phi_{II}}{r} \right|_{r=r_0} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{h(r_0 - r_a \cos q)}{(r_0^2 + r_a^2 - 2r_0 r_a \cos q)^{3/2}}$$

于是

$$\frac{(h-1)(r_0 - r_a \cos q)}{(r_0^2 + r_a^2 - 2r_0 r_a \cos q)^{3/2}} = \frac{x(r_0 - r_b \cos q)}{(r_0^2 + r_b^2 - 2r_0 r_b \cos q)^{3/2}}$$

将(12-20)代入, 得

$$(h-1)(r_0 - r_a \cos q) = x \left(r_0 - \frac{r_0^2}{r_a} \cos q \right) \left(\frac{r_a}{r_0} \right)^3 \quad (12-23)$$

考虑到 q 的任意性, 得

$$\begin{cases} h-1 = x \frac{r_a^3}{r_0^3} \\ h-1 = x \frac{r_a}{r_0} \end{cases} \quad (12-24)$$

居然出现了矛盾的结果! 原因何在?

习题 12

12-1 试利用镜像原理求解如图 12-6 所示的线电荷 l 在三层介质中产生的电位。

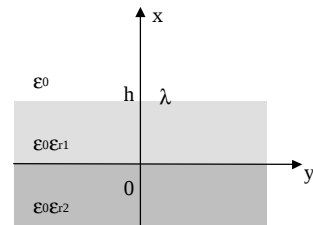


图 12-6 题 12-1 用图

12-2 三维介质面 (介电常数为 $\epsilon_0\epsilon_r$) 上有一介质半球 (半径为 r_0 , 介电常数为 $\epsilon_0\epsilon_r$), 在 $x=a$ 处 ($a > r_0$) 有一点电荷 q , 试用镜像原理求解该电荷产生的电位。

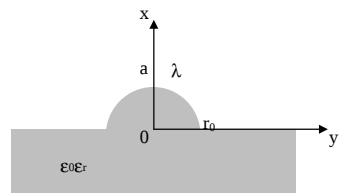


图 12-7 题 12-2 用图

第 13 讲 分离变量法

本讲讨论求解齐次波动方程(Helmholtz 方程)的分离变量法。

对于时谐场, 设波函数 $y(\vec{r}, t) = y(\vec{r})e^{j\omega t}$ 满足齐次波动方程

$$(\nabla^2 + k^2)y(\vec{r}) = 0 \quad (13-1)$$

式中, $k = \omega\sqrt{me}$ 。下面利用分离变量法在三种常用坐标系下求解(13-1)。

13.1、直角坐标系中的分离变量法

在直角坐标系 (x, y, z) 中, 方程(13-1)可写成

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + k^2 y = 0 \quad (13-2)$$

设波函数 $y(\vec{r})$ 为 $y(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ (13-3)

式中, X, Y, Z 分别只是 x, y, z 的函数。

将上式代入(13-2)并除以 XYZ , 得

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 = 0 \quad (13-4)$$

上式中每一项只与一个不同的坐标有关, 每一坐标可以独立变化, 所以为了使上式成立, 每一项都应与坐标 x, y, z 无关。于是可设

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0 \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0 \end{cases} \quad (13-5)$$

式中, k_x, k_y, k_z 称为分离常数, 它们满足

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \quad (13-6)$$

这样, 应用分离变量法, 我们将(13-2)的偏微分方程转化为三个独立的常微分方程, 称之为谐方程, 其解称为谐函数。常用的谐函数有 $e^{j\pm k_u u}$, $\sin k_u u$, $\cos k_u u$ 。根据(13-6)可知, 分离常数 k_x, k_y, k_z 中只有两个是独立的, 这些分离常数的取值由具体问题的边界条件确定。对于有界区域, 如波导和谐振腔, 分离常数一般为无穷多的离散值, 称为离散谱。对于无界空间, 分离常数则一般为连续值, 称为连续谱。于是, 我们得到了一系列的谐函数。最后, 我们便可以得到齐次波动方程的一般解为

对于离散谱

$$y(x, y, z) = \sum_{k_x} \sum_{k_y} A(k_x, k_y) X(k_x x) Y(k_y y) Z(k_z z) \quad (13-7)$$

对于连续谱

$$y(x, t, z) = \int \int_{k_x k_y} A(k_x, k_y) X(k_x x) Y(k_y y) Z(k_z z) dk_x dk_y \quad (13-8)$$

为了求得适合于各种具体问题的波函数，需要根据具体问题的特点，选择谐函数的形式。因此，了解各种谐函数的数学性质和物理意义是有益的。以 $X(k_x x)$ 为例，当 k_x 为正实数时， $e^{-jk_x x}$ 和 $e^{jk_x x}$ 分别代表沿 $+x$ 和 $-x$ 方向传播的行波， $\sin k_x x$ 和 $\cos k_x x$ 代表沿 x 方向的纯驻波。当 k_x 为复数且 $\text{Im}\{k_x\} < 0$ 时， $e^{-jk_x x}$ 和 $e^{jk_x x}$ 分别代表沿 $+x$ 和 $-x$ 方向传播的衰减行波；当 k_x 为纯虚数时， $e^{-jk_x x}$ 和 $e^{jk_x x}$ 分别代表沿 $+x$ 和 $-x$ 方向的衰减波。

判别波传播方向可以从等相面入手。考虑行波 $e^{j(\omega t - k_x x)}$ ，等相面为 $\omega t - k_x x = \text{常数}$ ，对该式两边关于 t 求导，可得波相速为

$$v_p = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k_x} > 0$$

所以， $e^{-jk_x x}$ 表示波沿 x 方向传播。同理可判别 $e^{+jk_x x}$ 。值得注意的是，上述判别与时间因子 $e^{j\omega t}$ 的假设有关。如果假设时间因子为 $e^{-j\omega t}$ ，则情形相反。在本书中，时间因子均假设为 $e^{j\omega t}$ 。

[例 13-1] 求图 13-1 所示的矩形波导中的电 Hertz 矢量 $\vec{\Pi}_e = \Pi_e \hat{z}$ 。

解： Π_e 满足齐次波动方程

$$\left(\nabla^2 - me \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Pi_e = 0$$

设波沿 z 方向传输，时间因子为 $e^{j\omega t}$ ，则有 $\Pi_e = \Pi_e(x, y) e^{j(\omega t - bz)}$

于是，波动方程变为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) \Pi_e = 0$$

其中， $k_c^2 = k^2 - b^2$ 。根据 $E_z = \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial z^2} - me \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial t^2}$ ，则有 $E_z = k_c^2 \Pi_e$ ，所以 Π_e 的边界条件为

$$\Pi_e \Big|_{x=0,a} = 0, \quad \Pi_e \Big|_{y=0,b} = 0$$

利用分离变量法，可得 Π_e 的解为

$$\Pi_e = A \sin \frac{p}{a} x \sin \frac{p}{b} y e^{j(\omega t - bz)}$$

且 $k_c = p \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$ 。

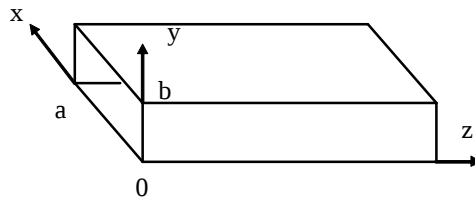


图 13-1 矩形波导

13.2、圆柱坐标系中的分离变量法

在圆柱坐标系 (r, θ, z) 中，齐次波动方程为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 y}{\partial j^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + k^2 y = 0 \quad (13-9)$$

$$\text{设波函数 } y(r, j, z) = R(r)\Phi(j)Z(z) \quad (13-10)$$

将(13-10)代入(13-9)，并且方程两边乘以 $\frac{r^2}{R\Phi Z}$ ，得

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{dj^2} + \frac{r^2}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 r^2 = 0 \quad (13-11)$$

上式中第二项与其他项独立，应满足

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{dj^2} = -m^2 \quad (13-12)$$

上式的解由圆周 j 方向场的单值性或场的边界条件确定。

$$\text{如果所研究的区域包括 } j \in [0, 2\pi] \text{ 的整个区域, 为了保证场的单值性, 则 } \Phi = \begin{pmatrix} \cos mj \\ \sin mj \end{pmatrix} \quad (13-13)$$

其中， m 为整数。如果所研究的区域为 $j \in [j_1, j_2]$ 的扇形区域，为了满足边界条件，一般来说， m 不是整数。

将(13-12)代入(13-11)，方程两边除以 r^2 ，利用各项的独立性，可令

$$\begin{cases} \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -b^2 \\ \frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left(n^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (13-14)$$

式中 $n^2 = k^2 - b^2$ 。上式中第一个方程的解形式为 $e^{\pm jbz}$ ， $\sin bz, \cos bz$ 。 b 的取值决定于 z 方向的边界条件。

(13-14)中的第二个方程可写成

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(n^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (13-15)$$

称为 Bessel 方程。Bessel 方程的通解常有三种形式。当表示闭合系统(如圆波导、同轴线、同轴腔等)中的电磁波时，波沿 r 方向为驻波，采用 Bessel 函数 $J_m(x)$ 和 Neumann 函数 $N_m(x)$ ，即

$$R(nr) = AJ_m(nr) + BN_m(nr) \quad (13-16)$$

当表示沿径向 r 传播的波时，可采用第一类和第二类 Hankel 函数 $H_m^{(1)}(x)$ 和 $H_m^{(2)}(x)$ ，即

$$R(nr) = AH_m^{(1)}(nr) + BH_m^{(2)}(nr) \quad (13-17)$$

$H_m^{(1)}$ 和 $H_m^{(2)}$ 与 J_m 和 N_m 的关系为

$$\begin{cases} H_m^{(1)} = J_m + jN_m \\ H_m^{(2)} = J_m - jN_m \end{cases} \quad (13-18)$$

当 $b > k$ 时， n 为虚数，设 $n = jt$ ，此时(13-15)称为修正(变态)Bessel 方程。这时，解通常取第一类和第二类修正 Bessel 函数 $I_m(x)$ 和 $K_m(x)$ ，

$$R(tr) = AI_m(tr) + BK_m(tr) \quad (13-19)$$

I_m 和 K_m 与 J_m 和 $H_m^{(1)}$ 的关系为

$$\begin{cases} I_m(x) = j^{-m} J_m(jx) \\ K_m(x) = \frac{p}{2} j^{m+1} H_m^{(1)}(jx) \end{cases} \quad (13-20)$$

J_m 和 N_m 类似于余弦函数和正弦函数, $H_m^{(1)}$ 和 $H_m^{(2)}$ 类似于表示行波的复指数函数, 而 I_m 和 K_m 则类似于实指数函数。

[例 13-2] 求如图 13-2 所示的同轴线的 TM 高次模

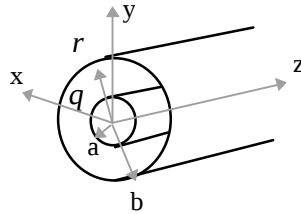


图 13-2 同轴线

解: 令电 Hertz 矢量 $\vec{\Pi}_e = \Pi_e \hat{z}$, 则边界条件为 $\Pi_e \Big|_{r=a} = 0$ 。自然边界条件是在圆周方向场单值。于是,

$$\Pi_e = [AJ_m(nr) + BN_m(nr)] \begin{pmatrix} \cos mj \\ \sin mj \end{pmatrix} e^{\pm jbz}$$

由边界条件得

$$\begin{cases} AJ_m(na) + BN_m(na) = 0 \\ AJ_m(nb) + BN_m(nb) = 0 \end{cases}$$

于是: $J_m(na)N_m(nb) = J_m(nb)N_m(na)$

上式便是确定 n 的本征方程。确定了 n 后, 由 $n^2 = k^2 - b^2$ 便可确定传播常数 b , 进而得电 Hertz 矢量为

$$\Pi_e = A \left[J_m(nr) - \frac{J_m(na)}{N_m(na)} N_m(nr) \right] \begin{pmatrix} \cos mj \\ \sin mj \end{pmatrix} e^{\pm jbz}$$

三、球坐标系中的分离变量法

在球坐标系 (r, q, j) 中, 齐次波动方程可写为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left(\sin q \frac{\partial y}{\partial q} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 q} \frac{\partial^2 y}{\partial j^2} + k^2 y = 0 \quad (13-21)$$

设波函数

$$y(r, q, j) = R(r)\Theta(q)\Phi(j) \quad (13-22)$$

代入(13-21), 两边除以 $R\Theta\Phi$, 乘以 $r^2 \sin^2 q$, 得

$$\frac{\sin^2 q}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin q}{\Theta} \frac{d}{dq} \left(\sin q \frac{d\Theta}{dq} \right) + k^2 r^2 \sin^2 q = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{dj^2} \quad (13-23)$$

上式右边只是 j 函数, 为使上式成立, 上式两端必须等于常数, 设常数为 m^2 , 则

$$\frac{d^2 \Phi}{dj^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (13-24)$$

所以解为

$$\Phi = Ae^{jmj} + Be^{-jmj} \quad (13-25a)$$

或 $\Phi = A \cos mj + B \sin mj$ (13-25b)

m 根据场的单值性来确定。

由(13-23)左边可得

$$\frac{1}{\Theta \sin q} \frac{d}{dq} (\sin q \frac{d\Theta}{dq}) - \frac{m^2}{\sin^2 q} = -\frac{1}{R} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dR}{dr}) - k^2 r^2 \quad (13-26)$$

上式两边分别只是 q 和 r 的函数，所以两边必须等于常数，设常数为 $-b^2$ ，于是有

$$\frac{1}{\Theta \sin q} \frac{d}{dq} (\sin q \frac{d\Theta}{dq}) - \frac{m^2}{\sin^2 q} = -b^2 \quad (13-27)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dR}{dr}) + k^2 r^2 = b^2 \quad (13-28)$$

为了求解(13-27)，令 $x = \cos q$, $P(x) = \Theta(q)$ ，则

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2) \frac{dP}{dx}] + (b^2 - \frac{m^2}{1-x^2}) P = 0$$

$$\text{展开得} \quad (1-x^2) \frac{d^2 P}{dx^2} - 2x \frac{dP}{dx} + (b^2 - \frac{m^2}{1-x^2}) P = 0 \quad (13-29)$$

显然， $x = \pm 1$ 为方程的奇异点。

一般情况下，解在 $x = \pm 1$ 处是发散的。但如果我们取

$$b^2 = n(n+1) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

则解只有有限项，且在 $x = \pm 1$ 处收敛。于是(13-29)可写为

$$(1-x^2) \frac{d^2 P}{dx^2} - 2x \frac{dP}{dx} + [n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}] P = 0 \quad (13-30)$$

(13-30)称为连带勒让德方程，当 $m = 0$ 时称为勒让德方程。(13-30)的一个解为

$$P_n^m(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \cdot \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n \quad (m \leq n, |x| \leq 1) \quad (13-31)$$

$P_n^m(x)$ 称为 n 次 m 阶勒让德多项式，或称第一类连带勒让德函数。 $m = 0$ 时称为勒让德多项式或第一类勒让德函数。

(13-30)的另一个线性无关解为

$$Q_n^m(x) = P_n^m(x) \int \frac{dx}{(1-x^2)[P_n^m(x)]^2} \quad (13-32)$$

称为第二类勒让德函数 ($m = 0$) 或第二类连带勒让德函数 ($m \neq 0$)。于是，(13-30)的一般解为

$$P(x) = A P_n^m(x) + B Q_n^m(x) \quad (13-33)$$

由于 $x = \pm 1$ 是 $Q_n^m(x)$ 的奇异点，所以，当我们研究区域包含 $x = \pm 1$ ，即 $q = 0$ 或 p 时，应有 $B = 0$ ，即解中不包含 $Q_n^m(x)$ 。

最后，我们来求解(13-28)。将 $b^2 = n(n+1)$ 代入(13-28)得

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + [k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}] R = 0 \quad (13-34)$$

该方程类似于 Bessel 方程，其解为球 Bessel 函数：

$$\begin{cases} j_n(kr) = \sqrt{\frac{p}{2kr}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \\ n_n(kr) = \sqrt{\frac{p}{2kr}} N_{n+\frac{1}{2}}(kr) \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} h_n^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{p}{2kr}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr) \\ h_n^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{p}{2kr}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \end{cases} \quad (13-35)$$

定性地说, 球 Bessel 函数与相应的 Bessel 函数有类似的特点: 当 k 为实数时, $j_n(kr)$ 和 $n_n(kr)$ 代表驻波, $h_n^{(1)}(kr)$ 代表向内行波, $h_n^{(2)}(kr)$ 代表向外行波。在实际问题中, 究竟 $R(r)$ 取(13-35) 中的哪个或哪几个函数的线性组合, 应当由实际问题中 r 的变化范围和各个球 Bessel 函数的特性来决定。

习题 13

13-1 求 13-2 所示的同轴线 TM 模的场分布。

13-2 证明 $y = (\ln r)e^{-jkz}$ 是齐次标量波动方程的一个解。若取 $\vec{\Pi}_e = y\vec{e}_z$, 计算由此 y 所形成的 TM 波。在 $z = \text{常数}$ 的平面上画出瞬时电力线和磁力线分布。什么样的实际系统可以支持这样的波?

第 14 讲 本征函数展开法

一、本征函数法的基本概念

研究线性算子方程

$$Lu = g \quad (14-1)$$

例如，对于波动方程 $(\nabla^2 + k^2)u = -f$ ，则 $L = -(\nabla^2 + k^2)$ ， $g = f$ 。

我们的目标是已知算子 L 、源 g ，求解函数 u 。引入本征方程

$$Lu = lu \quad (14-2)$$

其中， l 称为本征值， u 称为对应于 l 的本征函数矢量。

一般来说，若边界有限，则本征值 l 为离散谱。若边界无界，则本征值 l 为连续谱。所以对于有限边界

$$Lu_n = l_n u_n \quad n = 1, 2, \dots, \infty \quad (14-3)$$

设 $\{l_n\}$ 为本征值谱， $\{u_n\}$ 为本征函数系。

如果 $\{u_n\}$ 完备，则 g 可以用本征函数系 $\{u_n\}$ 展开为

$$g = \sum_n b_n u_n \quad (14-4)$$

如果 $\{u_n\}$ 还为正交归一系，即

$$\langle u_m, u_n \rangle = d_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \quad (14-5)$$

式中， $\langle a, b \rangle$ 表示 a 与 b 的内积。

对(14-4)式两边关于 u_n 取内积，可得

$$b_n = \langle u_n, g \rangle \quad (14-6)$$

未知解函数 u 也可以用 $\{u_n\}$ 展开为

$$u = \sum_n a_n u_n \quad (14-7)$$

于是求 u 的问题转化为求 a_n 的问题。

将(14-7)和(14-4)代入算子方程(14-1)，得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n L_n u_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n \quad (14-8)$$

$$\text{将(14-3)代入，得} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n l_n - b_n) u_n = 0 \quad (14-9)$$

$$\text{根据正交归一性，有} \quad a_n = \frac{b_n}{l_n} \quad (14-10)$$

本征函数展开理论认为，带激励的算子方程可以分解为两部分，一部分由算子自身特性(包括区域边界几何特性、媒质特性)决定，它将给出一切可能的潜在解，即本征函数系及其展开。另一部分则是激励，它决定激励哪些特殊解。前者为内因，后者为外因，就如同一只鼓，当它做成以后，所有可能的音域已经确定，敲鼓的点和方式不同，声音不同，但都是可能音域中的某些成分或组合。大鼓绝对发不出高音来。因此，如果我们把问题的本征函数搞清楚了，一切激励均迎刃而解。

利用本征函数展开求解具体源激励问题是一个扬弃的过程。扬弃过程的一个最简单例子是从算术到代数再到函数的过程，如图 14-1 所示。表面上看，扬弃的过程中丢掉了一些东西，但丢掉的是特殊性，却得到了更大的普遍性。本征函数展开法的道理一样，扬弃了具体源。但正是因为扬弃了具体源，本征函数展开法才能解决任何源问题，并且在认识上达到了更深层次。

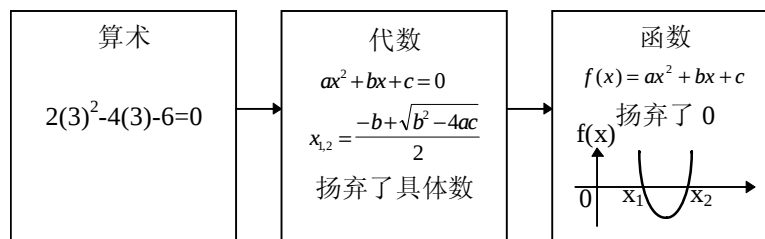


图 14-1 从算术、代数到函数的过程

二、波导激励问题

如图 14-2 所示，考虑一无限长的波导，其中的电流源 $\vec{J}$ 位于 $z_1 \leq z \leq z_2$ 的区域内。现在我们要求电流源 $\vec{J}$ 在 $z > z_2$ 和 $z < z_1$ 区域中辐射的场。根据本征函数展开理论， $\vec{J}$ 所辐射的场可以用无源区域的波导模式场(本征函数系)展开，即

$$\begin{cases} \vec{E}^+ = \sum_n C_n^+ (\vec{e}_n + \vec{e}_{zn}) e^{-jb_n(z-z_2)} & z > z_2 \\ \vec{H}^+ = \sum_n C_n^+ (\vec{h}_n + \vec{h}_{zn}) e^{-jb_n(z-z_2)} & z > z_2 \\ \vec{E}^- = \sum_n C_n^- (\vec{e}_n - \vec{e}_{zn}) e^{+jb_n(z-z_1)} & z < z_1 \\ \vec{H}^- = \sum_n C_n^- (-\vec{h}_n + \vec{h}_{zn}) e^{+jb_n(z-z_1)} & z < z_1 \end{cases} \quad (14-11)$$

式中， $\sum_n$ 表示对所有可能出现的 TE 和 TM 模求和。于是，求场分布的问题转化为求系数 C_n^+ 和 C_n^- 的问题。

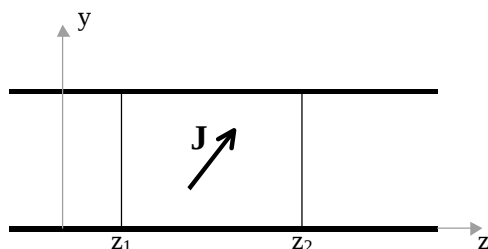


图 14-2 波导中的电流源

这里，我们不采用第一节介绍的确定系数的方法，而是采用更为简洁的方法。利用互易定理

$$\oint_s (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot d\mathbf{s} = \oint_v (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1) \cdot dv \quad (14-12)$$

选取 $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ 为电流源 $\mathbf{J}$ 的辐射场, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ 为第 n 个波导模的场 $\mathbf{E}_n^-$, $\mathbf{H}_n^-$, $\mathbf{J}_1 = \mathbf{J}$, $\mathbf{J}_2 = 0$ 。闭合面 s 由波导壁、 $z = z_1$ 处及 $z = z_2$ 处横截面构成。

根据波导壁的边界条件 $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_n^- = 0$, 波导壁上的面积分为零。因为模式是正交的, 即

$$\oint_{s_0} (\mathbf{E}_m^\pm \times \mathbf{H}_n^\pm) \cdot \mathbf{n} ds = 0$$

式中, s_0 为波导横截面。所以,

$$\begin{aligned} & \oint_s (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{n} ds \\ &= \int_{s_0} C_n^+ [(\mathbf{e}_n + \mathbf{e}_{zn}) \times (-\mathbf{h}_n + \mathbf{h}_{zn}) - (\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_{zn}) \times (\mathbf{h}_n + \mathbf{h}_{zn})] \cdot \hat{z} ds \\ &+ \int_{s_0} C_n^- [(\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_{zn}) \times (-\mathbf{h}_n + \mathbf{h}_{zn}) - (\mathbf{e}_n + \mathbf{e}_{zn}) \times (\mathbf{h}_n + \mathbf{h}_{zn})] \cdot \hat{z} ds \\ &= -2C_n^+ \int_{s_0} (\mathbf{e}_n \times \mathbf{h}_n \cdot \hat{z}) ds = \int_v \mathbf{E}_n^- \cdot \mathbf{J} dv \end{aligned}$$

$$\text{于是, } C_n^+ = -\frac{1}{P_n} \int_v \mathbf{E}_n^- \cdot \mathbf{J} dv = -\frac{1}{P_n} \int_v (\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_{zn}) \cdot \mathbf{J} e^{jb_n(z-z_1)} dv \quad (14-13)$$

式中, $P_n = 2 \int_{s_0} \mathbf{e}_n \times \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{n} ds$ 。

同理, 若把 $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ 选取为 $\mathbf{E}_n^+$, $\mathbf{H}_n^+$, 则

$$C_n^- = -\frac{1}{P_n} \int_v \mathbf{E}_n^+ \cdot \mathbf{J} dv = -\frac{1}{P_n} \int_v (\mathbf{e}_n + \mathbf{e}_{zn}) \cdot \mathbf{J} e^{-jb_n(z-z_2)} dv \quad (14-14)$$

I 横向线电流元的辐射

对于横向线电流元 $\mathbf{J} = J_y(y) d(x-x_0) d(z-z_0) \mathbf{\hat{y}}$, 由(14-13)和(14-14)得, 所辐射的第 n 个模的振幅为

$$C_n^+ = C_n^- = -\frac{1}{P_n} \int_{-i}^i \mathbf{e}_{zn} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ z=z_0}} \cdot J_y \mathbf{\hat{y}} dy \quad (14-15)$$

也就是说, 一个模向电流源向两边区域所辐射的横向场的振幅是相等的。

I 纵向线电流元的辐射

这时 $\mathbf{J} = J_z d(x-x_0) d(y-y_0) \mathbf{\hat{z}}$, 则

$$\begin{aligned} C_n^+ &= \frac{1}{P_n} \int_{-i}^i \mathbf{e}_{zn} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \cdot J_z \mathbf{\hat{z}} e^{jb_n z} dz \\ C_n^- &= -\frac{1}{P_n} \int_{-i}^i \mathbf{e}_{zn} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \cdot J_z \mathbf{\hat{z}} e^{-jb_n z} dz \end{aligned}$$

如果电流源 J_z 在 $-i < z < i$ 之间是 z 的对称函数。由于 $\mathbf{e}_{zn}$ 不是 z 的函数而得

$$C_n^+ = -C_n^- = \frac{1}{P_n} \int_{-i}^i \mathbf{e}_{zn} \cdot J_z \mathbf{\hat{z}} \cos b_n z ds \quad (14-16)$$

所以, 一个关于 $z = 0$ 对称的纵向电流源向两边区域所辐射的横向场的振幅是相反的。

I 线电流环的辐射场

对于电流为 I 的线电流环，所辐射的第 n 个模的振幅为

$$C_n^+ = -\frac{1}{P_n} \oint_c \mathbf{E}_n^- \cdot \mathbf{dl}$$

式中， $\mathbf{dl}$ 是沿线电流环围线 c 的单位矢量。由斯托克斯定律，得

$$C_n^+ = -\frac{1}{P_n} \oint_c \mathbf{E}_n^- \cdot \mathbf{dl} = -\frac{I}{P_n} \int_s \nabla \times \mathbf{E}_n^- \cdot \mathbf{ds}$$

式中， s 为电流环的面积， $\mathbf{ds}$ 为 s 面的单位法向矢量。由 $\nabla \times \mathbf{E}_n^- = -j\omega \mathbf{B}_n^-$ ，可得

$$C_n^+ = \frac{j\omega I}{P_n} \int_s \mathbf{B}_n^- \cdot \mathbf{ds} \quad (14-17)$$

同理，

$$C_n^- = \frac{j\omega I}{P_n} \int_s \mathbf{B}_n^+ \cdot \mathbf{ds} \quad (14-18)$$

可见，电流环所激励的第 n 个模的振幅正比于穿过此电流环时的总磁通。

如果此电流环很小， $\mathbf{B}_n^\pm$ 在环面上近似为常数，则

$$C_n^\pm = \frac{j\omega}{P_n} \mathbf{B}_n^\pm \cdot \mathbf{M} \quad (14-19)$$

式中， $\mathbf{M} = I s \mathbf{dl}$ 为电流环的等效磁偶极矩。所以，小电流环的辐射可以等效为磁偶极子的辐射。

三、非互易媒质中的本征波

考虑非互易媒质 $\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_r, \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_r$ 。在无源情况下，满足

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_r \mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_r \cdot \mathbf{H} \end{cases} \quad (14-20)$$

$$\text{于是} \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = k_0^2 \mathbf{e}_r \mathbf{m}_r \cdot \mathbf{H} \quad (14-21)$$

考虑无限大空间的均匀平面波，设

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m e^{-j\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}} \quad (14-22)$$

式中， $\mathbf{H}_m$ 为常矢。

应用矢量公式，可以证明

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = b^2 \mathbf{H} - \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{H}) \quad (14-23)$$

$$\text{代入(14-21), 得} \quad b^2 \mathbf{H} - \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{H}) = k_0^2 \mathbf{e}_r \mathbf{m}_r \cdot \mathbf{H} \quad (14-24)$$

把 $\mathbf{H}$ 分解成平行于传播方向 $\mathbf{b}$ 的 $\mathbf{H}_i$ 分量和垂直于 $\mathbf{b}$ 的 $\mathbf{H}_t$ 分量，即

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_t \quad (14-25)$$

则(14-24)变为

$$b^2 (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_t) - b^2 \mathbf{H}_i = k_0^2 \mathbf{e}_r [\mathbf{m}_{tt} + \mathbf{m}_{ti} + \mathbf{m}_{it} + \mathbf{m}_{uu}] \cdot (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_t)$$

$$\text{即} \quad (k_0^2 \mathbf{e}_r \mathbf{m}_{tt} - b^2 \mathbf{I}) \cdot \mathbf{H}_t - k_0^2 \mathbf{e}_r \mathbf{m}_{ti} \cdot \mathbf{H}_i = 0$$

$$k_0^2 \mathbf{e}_r (\mathbf{m}_{it} \cdot \mathbf{H}_t + \mathbf{m}_{ii} \cdot \mathbf{H}_i) = 0$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \overline{m}_{tt} - l \overline{I} & \overline{m}_{ti} \\ \overline{m}_{it} & \overline{m}_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_t \\ \mathbf{H}_l \end{bmatrix} = 0 \quad (14-26)$$

式中, $l = \frac{b^2}{k_0^2 e_r}$ 。上式便是求传播常数 b 的本征方程。

使 $\mathbf{H}$ 有非零解的充要条件是

$$\det \begin{bmatrix} \overline{m}_{tt} - l \overline{I} & \overline{m}_{ti} \\ \overline{m}_{it} & \overline{m}_{ii} \end{bmatrix} = 0 \quad (14-27)$$

求得了 l 后, 可得传播常数 $b = k_0 \sqrt{e_r l}$ (14-28)

此时 b 所对应的波, 称为非均匀媒质中的本征波。

下面把上述结果应用铁氧体。假设传播方向为 z 方向。

I 纵向磁化。外场 $\mathbf{H}_0$ 与传播方向 $\mathbf{b}$ 平行, 这时

$$\overline{m}_r = \begin{bmatrix} m & jk & 0 \\ -jk & m & 0 \\ 0 & 0 & m_z \end{bmatrix} \quad (14-29)$$

于是, 本征方程为

$$\det \begin{bmatrix} m-l & jk & 0 \\ -jk & m-l & 0 \\ 0 & 0 & m_z \end{bmatrix} = 0 \quad (14-30)$$

即

$$(m-l)^2 - k^2 = 0$$

设 $m > k$, 则

$$\begin{cases} l_1 = m + k \\ l_2 = m - k \end{cases} \quad (14-31)$$

l_1 对应的本征矢为

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} h \\ -jh \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14-32)$$

l_2 对应的本征矢为

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} h \\ jh \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14-33)$$

式中, h 为任意常数。

因此, 在纵向磁化时, 对应有两个本征波, 一个是 xoy 平面的右旋(相对于 $\mathbf{H}_0$)圆极化波, $\mathbf{H}_1$, 对应的传播常数为

$$b_1 = w_0 \sqrt{e_0 e_r m_0 (m+k)} \quad (14-34)$$

另一个本征波是 xoy 平面的左旋(相对于 $\mathbf{H}_0$)圆极化波 $\mathbf{H}_2$, 对应的传播常数为

$$b_2 = w_0 \sqrt{e_0 e_r m_0 (m-k)} \quad (14-35)$$

I 横向磁化。 $\mathbf{H}_0$ 与传播方向垂直。设 $\mathbf{H}_0$ 为 y 方向, 则

$$\bar{m}_r = \begin{bmatrix} m & 0 & -jk \\ 0 & m_z & 0 \\ jk & 0 & m \end{bmatrix} \quad (14-36)$$

本征方程为 $\det \begin{bmatrix} m-l & 0 & -jk \\ 0 & m_z-l & 0 \\ jk & 0 & m \end{bmatrix} = 0$ (14-37)

即 $(m-l)(m_z-l)m - k^2(m_z-l) = 0$

即 $\begin{cases} l_1 = m - \frac{k^2}{m} = \frac{m^2 - k^2}{m} \\ l_2 = m_z \end{cases}$ (14-38)

8)

本征值 l_1 , 对应的本征矢为 $\vec{H}_1 = \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ -jk/m \end{bmatrix}$ (14-39)

本征值 l_2 对应的本征矢为 $\vec{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{bmatrix}$ (14-40)

$\vec{H}_1$ 表示椭圆极化波, $\vec{H}_2$ 表示线极化波。其传播常数分别为

$$b_1 = w \sqrt{m_0 \epsilon_0 \epsilon_r \left(\frac{m^2 - k^2}{m} \right)} \quad (14-41)$$

$$b_2 = w \sqrt{m_0 \epsilon_0 \epsilon_r m_z} \quad (14-42)$$

在铁氧体中传播的任何波均可以分解为上述本征波的线性组合。

习题 14

14-1 图 14-3 所示为一同轴线-矩形波导探针激励装置。假设探针电流为无限细线电流形式

$$I = I_0 \sin k_0(d-y)$$

$$0 \leq y \leq d, x = \frac{a}{2}, z = 0$$

试求由此电流所激励的 TE_{10} 模的振幅。

14-2 已知 $\vec{H} = \vec{H}_m e^{-j\vec{b} \cdot \vec{r}}$, $\vec{H}_m$ 为常矢量, 试证明:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = b^2 \vec{H} - \vec{b}(\vec{b} \cdot \vec{H})$$

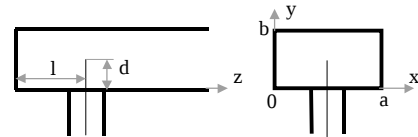


图 14-3 同轴线-波导探针激励装置

14-3 一平面波在无界等离子体中传播。传播方向与外加磁场 $\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$ 平行, 张量介电常数为

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & j\epsilon_2 & 0 \\ -j\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}, \text{ 试求本征波的传播常数和场表示式。}$$

第 15 讲 Green 函数法 (I)

15.1 Green 函数法的基本思想

考虑算子方程

$$Lu(\vec{r}) = g(\vec{r}) \quad (15-1)$$

其中, L 表示线性算子, g 表示激励源, u 表示待求的场解。

为了求解该方程, 引入 Green 函数 $G(\vec{r}, \vec{r}')$, 满足

$$LG(\vec{r}, \vec{r}') = d(\vec{r} - \vec{r}') \quad (15-2)$$

式中, $\vec{r}, \vec{r}'$ 分别表示场点和源点矢径。

由于 $d(\vec{r} - \vec{r}') = d(\vec{r}' - \vec{r})$, 所以 $G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r})$, 即 Green 函数具有对称性。根据 d 函数的选择性, 当 $\vec{r}' \in v$ 时 $\int_v f(\vec{r}') d(\vec{r} - \vec{r}') dv' = f(\vec{r})$, 如果定义内积 (反应) $\langle a, b \rangle = \int_v abd\vec{r}$, 则选择性可表示为

$$\langle f(\vec{r}'), d(\vec{r} - \vec{r}') \rangle = f(\vec{r})$$

于是, 对(15-2)两边关于源 g 取内积, 得

$$\langle g(\vec{r}'), LG(\vec{r}, \vec{r}') \rangle = \langle g(\vec{r}'), d(\vec{r} - \vec{r}') \rangle = g(\vec{r})$$

由于算子 L 仅作用于场点 $\vec{r}$ 。所以, 算子 L 可提到内积符号外, 即

$$L \langle g(\vec{r}'), G(\vec{r}, \vec{r}') \rangle = g(\vec{r}) \quad (15-3)$$

与(15-1)比较可知

$$u(\vec{r}) = \langle g(\vec{r}'), G(\vec{r}, \vec{r}') \rangle = \int_v g(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}' \quad (15-4)$$

从(15-2)可以看出, 所谓 Green 函数是 $\vec{r}'$ 处的点源在 $\vec{r}$ 处产生的场, 而源 g 与 Green 函数的内积便是源产生的场。所以, Green 函数法的本质是利用点源产生的场展开求具体源产生的场, 其展开系数就是源函数。

实际上, Green 函数与本征函数关系密切, 根据本征函数法的结果

$$u(\vec{r}) = \sum_n \frac{1}{l_n} \langle g(\vec{r}'), u_n(\vec{r}') \rangle u_n(\vec{r}) = \langle g(\vec{r}'), \sum_n \frac{1}{l_n} u_n(\vec{r}') u_n(\vec{r}) \rangle \quad (15-5)$$

与(15-4)比较, 可知

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_n \frac{1}{l_n} u_n(\vec{r}) u_n(\vec{r}') \quad (15-6)$$

这正是用本征函数展开法求解 Green 函数的公式。

进一步, 有

$$d(\vec{r} - \vec{r}') = LG(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_n \frac{1}{l_n} u_n(\vec{r}') Lu(\vec{r}) = \sum_n u_n(\vec{r}') u_n(\vec{r}) \quad (15-7)$$

也就是说, d 函数也可以用本征函数展开法求解, 这为 d 函数的研究提供了新途径。

15.2 频域非齐次标量波动方程的 Green 函数解

频域非齐次标量波动方程的一般形式为

$$(\nabla^2 + k^2)y(\vec{r}) = -g(\vec{r}) \quad (15-8)$$

引入 Green 函数 $G(\vec{r}, \vec{r}')$, 满足

$$(\nabla^2 + k^2)G(\vec{r}, \vec{r}') = -d(\vec{r} - \vec{r}') \quad (15-9)$$

应用 Green 定理 $\int_V (j \nabla^2 f - f \nabla^2 j) dv = \oint_S (j \nabla f - f \nabla j) \cdot \hat{n} ds$

取 $j = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $f = y(\mathbf{r}')$, 则

$$\begin{aligned} & \int_V [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 y(\mathbf{r}') - y(\mathbf{r}') \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] dv \\ &= \oint_S [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 y(\mathbf{r}') - y(\mathbf{r}') \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \cdot \hat{n} ds \end{aligned}$$

考虑(15-8)和(15-9), 以及 Green 函数的对称性, 上式左边可写为

$$\begin{aligned} & \int_V \{G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'^2 y(\mathbf{r}') + y(\mathbf{r}') [k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + d(\mathbf{r} - \mathbf{r}')]\} dv' \\ &= \int_V [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\nabla'^2 + k^2) y(\mathbf{r}') + y(\mathbf{r}') d(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] dv' \\ &= - \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') g(\mathbf{r}') dv' + y(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

于是, 得到了波函数的积分表达式

$$y(\mathbf{r}) = \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') g(\mathbf{r}') dv' + \oint_S [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' y(\mathbf{r}') - y(\mathbf{r}') \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \cdot \hat{n} ds' \quad (15-10)$$

在由(15-9)引入 Green 函数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 时, 非没有考虑 Green 函数的边界条件。根据边界条件的不同, Green 函数可分为三类。

1、均匀无界空间中的 Green 函数, 记为 $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 。

$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 在整个均匀无界空间满足方程(15-9), 没有任何强制性的边界条件。但由于 Green 函数是由点源产生的场, 所以, 在无限远处 $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$, $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 应满足自然边界条件

$$\lim_{R \rightarrow \infty} G_0 = 0 \quad (15-11)$$

2、有界空间第一类 Green 函数, 记为 $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 。

它满足第一类边值问题(Dirichlet 边值问题), 即在边界 S 上, 满足

$$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_S = 0 \quad (15-12)$$

3、有界空间第二类 Green 函数, 记为 $G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 。

它满足第二类边值问题(Neumann 边值问题), 即在边界 S 上, 满足

$$\frac{\partial G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \bigg|_S = 0 \quad (15-13)$$

应当注意, Green 函数的使用与原场问题的边界并没有直接关系。

对于有界区域的问题, 仍可以使用无界空间的 Green 函数 G_0 。但是, 这时为了求得波函数 $y(\mathbf{r})$, 还需知道它在边界 S 上的值及其法向导数。

如果使用第一类 Green 函数 G_1 , 则(15-10)变为

$$y(\mathbf{r}) = \int_V G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') g(\mathbf{r}') dv' - \oint_S y(\mathbf{r}') \nabla' G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \hat{n} ds' \quad (15-14)$$

这时, 只需知道波函数在边界上的场值。同样, 如果使用第二类 Green 函数 G_2 , 则(15-10)变为

$$y(\mathbf{r}) = \int_V G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') g(\mathbf{r}') dv' + \oint_S G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' y(\mathbf{r}') \cdot \hat{n} ds' \quad (15-15)$$

只需知道波函数在边界上的法向导数。

15.3 均匀无界空间中的 Helmholtz 算子的 Green 函数

均匀无界空间 Helmholtz 算子的 Green 函数满足(15-9)以及自然边界条件(15-11)。将坐标系的原

点选在 $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = 0$ 处，则点源 $d(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ 在均匀无界空间中产生的波函数—Green 函数，一定是球对称的，只与 R 有关，因而球坐标系中的(15-9)可写成

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (RG) + k^2 G = -d(R) \quad (15-16)$$

方程两边乘以 R ，得

$$\frac{d^2}{dR^2} (RG) + k^2 GR = -d(R)R \quad (15-17)$$

注意到

$$d(R)R = 0 \quad (15-18)$$

事实上， $R \neq 0$ 时上式显然成立。为了判别 $R = 0$ 时 $d(R)R$ 的值，在以 $R = 0$ 为球心半径趋于 0 的球内积分，有 $\int_V d(R)R dV = 0$ ，所以， $R = 0$ 时(15-18)也成立。

于是，(15-17)实际上是一个齐次波动方程，解为 $G = \frac{A}{R} e^{\pm jkR}$ ，其中， A 为常数。考虑到 G 是位

于球心的点源产生的波函数， G 只可能是外面波，所以应取 $G = \frac{A}{R} e^{-jkR}$ (15-19)

为了确定 A ，将上式代入(15-9)，并在球心位于 $R = 0$ 、半径 R 趋于 0 的小球体积内积分，得

$$\int_V (\nabla^2 + k^2) G dV = - \int_V d(R) dV = -1 \quad (15-20)$$

上式左边第一项当 $R \rightarrow 0$ 时为

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 0} \int_V \nabla^2 G dV &= \lim_{R \rightarrow 0} \oint_S \nabla G \cdot \hat{\mathbf{R}} ds = \lim_{R \rightarrow 0} \oint_S \frac{1}{R} \left(\frac{A}{R} e^{-jkR} \right) ds \\ &= \lim_{R \rightarrow 0} \left(-\frac{A}{R^2} e^{-jkR} - j \frac{Ak}{R} e^{-jkR} \right) 4\pi R^2 = -4\pi A \end{aligned}$$

左边第二项为 $\lim_{R \rightarrow 0} \int_V k^2 G dV = \lim_{R \rightarrow 0} \int_0^R k^2 \frac{A}{R} e^{-jkR} 4\pi R^2 dR = 0$

所以 $A = \frac{1}{4\pi}$

于是，均匀无界空间 Helmholtz 算子的 Green 函数为

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (15-21)$$

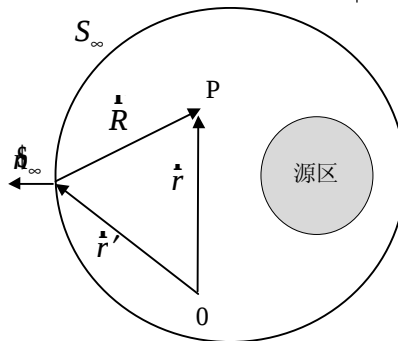


图 15-1 场源分布在有限区域内

15.4 Sommerfeld 辐射条件

在均匀无界空间中，假定场源分布在有限区域中，作一足够大的闭合曲面 S 包含整个场源。于

是，波函数满足(15-10)的积分表达式。根据场的叠加原理，(15-10)中体积分项表示闭合曲面 S 内的源所产生的场，而面积分项则表示曲面 S 外的源的贡献。如果曲面 S 为无穷大曲面 S_∞ ，在 S_∞ 面外不存在源，则面积分项应为零，即

$$\oint_{S_\infty} \left[\frac{e^{-jkR}}{R} \nabla' y(\mathbf{r}') - y(\mathbf{r}') \nabla' \frac{e^{-jkR}}{R} \right] \cdot \hat{n}_\infty ds' \quad (15-22)$$

式中， $\hat{n}_\infty$ 为 S_∞ 面上的法向单位矢量。因为 S_∞ 为无限大球面， $R \rightarrow \infty$ ，所以 $\hat{n}_\infty$ 与 $\hat{\mathbf{R}}$ 方向相反以及 $\mathbf{r}' = -\hat{\mathbf{R}}$ ，如图 15-1 所示，于是

$$\begin{aligned} \nabla \frac{e^{-jkR}}{R} \cdot \hat{n}_\infty &= -\nabla \frac{e^{-jkR}}{R} \cdot \hat{n}_\infty = \frac{1}{R} \left(\frac{e^{-jkR}}{R} \right) = -jk \frac{e^{-jkR}}{R} - \frac{e^{-jkR}}{R^2} \\ \nabla' y(\mathbf{r}') \cdot \hat{n}_\infty &= \frac{1}{R} \frac{y}{R} \end{aligned}$$

代入(15-22)并考虑 $ds = R^2 d\Omega$ ，其中 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ 为立体角元，有

$$\oint_{S_\infty} \left[R \left(\frac{1}{R} y + jky \right) + y \right] e^{-jkR} d\Omega = 0 \quad (15-23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{R \rightarrow \infty} Ry = \text{有限值} \\ \lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{1}{R} y + jky \right) = 0 \end{array} \right. \quad (15-24)$$

为使上式成立，应有

上式称为 Sommerfeld 辐射条件。当波函数满足(15-24)时，表示无穷远处不存在场源，波函数只表示外向波，即辐射场。

15.5 均匀无界空间中非齐次波动方程的解

根据波函数的积分表达式(15-10)和 Sommerfeld 辐射条件，在均匀无界空间中当场源分布在有限区域内时，波函数为

$$y(\mathbf{r}) = \int_V \frac{g(\mathbf{r}') e^{-jkR}}{4\pi R} dV' \quad (15-25)$$

上式称为 Helmholtz 积分，它就是均匀无界空间中当场源分布在有限区域内时非齐次波动方程的解。

如果把 y 看成是标位 j ，那么由(15-25)可直接得到均匀无界空间中电荷分布在有限区域内时标位 j 的表示式

$$j(\mathbf{r}) = \int_V \frac{r(\mathbf{r}') e^{-jkR}}{4\pi R} dV' \quad (15-26)$$

我们也可以把 y 看成是矢位 $\mathbf{A}$ 或 Hertz 矢量 $\mathbf{\Pi}_e$ 、 $\mathbf{\Pi}_m$ 的每一个直角坐标分量，然后将三个直角坐标分量相加，可求得均匀无界空间中场源分布在有限区域内时矢位 $\mathbf{A}$ 和 Hertz 矢量 $\mathbf{\Pi}_e$ 、 $\mathbf{\Pi}_m$ 的表

$$\text{示式为} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mathbf{m}J(\mathbf{r}') e^{-jkR}}{4\pi R} dV' \\ \mathbf{\Pi}_e(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') e^{-jkR}}{4\pi R} dV' \\ \mathbf{\Pi}_m(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') e^{-jkR}}{4\pi R} dV' \end{array} \right. \quad (15-27)$$

15.6 时域非齐次波动方程的 Green 函数解

应用 Fourier 变换, 我们可以从频域非齐波波动方程的 Green 函数解(15-10)得到其时域方程解。首先根据 Fourier 变换及(15-10), 有

$$\begin{aligned} y(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} y(\mathbf{r}) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \int_{\mathbf{v}} \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') g(\mathbf{r}') e^{j\omega t} d\omega d\mathbf{v}' \\ &\quad + \oint_s \left\{ \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' y(\mathbf{r}') - y(\mathbf{r}') \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{j\omega t} d\omega] \cdot \hat{n} ds \right\} \end{aligned}$$

再利用 Fourier 逆变换, 上式可写为

$$\begin{aligned} y(\mathbf{r}, t) &= \int_{\mathbf{v}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') g(\mathbf{r}', t') e^{j\omega t} e^{-j\omega t'} d\omega dt' d\mathbf{v}' \\ &\quad + \oint_s \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' y(\mathbf{r}', t') e^{j\omega t} e^{-j\omega t'} d\omega dt' \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2p} y(\mathbf{r}', t') \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{j\omega t} e^{-j\omega t'} d\omega dt' \right] \cdot \hat{n} ds \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} y(\mathbf{r}, t) &= \int_{\mathbf{v}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') g(\mathbf{r}', t') dt' d\mathbf{v}' + \oint_s \left[\int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') \nabla' y(\mathbf{r}', t') dt' \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} y(\mathbf{r}', t') \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') dt' \right] \cdot \hat{n} ds \end{aligned} \quad (15-28)$$

$$\text{式中,} \quad G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{j\omega(t-t')} d\omega \quad (15-30)$$

将算子 $(\nabla^2 - me \frac{\mathbb{I}^2}{t^2})$ 作用于上式两边, 可得

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - me \frac{\mathbb{I}^2}{t^2}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') &= \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{j\omega(t-t')} d\omega - \frac{me}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\mathbb{I}^2}{t^2} e^{j\omega(t-t')} d\omega \\ &= \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} (\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{j\omega(t-t')} d\omega = -d(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-t')} d\omega \end{aligned}$$

应用积分变换公式 $\frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega i} d\omega = d(i)$, 可得

$$(\nabla^2 - me \frac{\mathbb{I}^2}{t^2}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = -d(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d(t - t') \quad (15-31)$$

所以, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')$ 就是时域 Helmholtz 算子的 Green 函数, 它表示 $t = t'$ 时刻出现在 $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'$ 处的单位点源产生的波函数。

习题 15

15-1 试证一维、二维标量波动方程的标量 Green 函数分别为

$$G_0(x, x') = -\frac{j}{2k} e^{-jk|x-x'|}$$

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{j}{4} H_0^{(2)}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$$

式中, $\mathbf{r}', \mathbf{r}'$ 为源点坐标, $\mathbf{r}, \mathbf{r}$ 为场点坐标。

15-2 设算子 $L = -\frac{d^2}{dx^2}$, 它的 Green 函数 $G(x, x')$ 满足边界条件

$$G|_{x=0} = G|_{x=1} = 0 \quad x \in [0, 1]$$

试证明,
$$G(x, x') = \begin{cases} x(1-x') & x < x' \\ x'(1-x) & x > x' \end{cases}$$

第 16 讲 Green 函数法(II)

本讲讨论应用 Green 函数法求解电磁场的矢量波动方程

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} - k^2 \vec{E} = -j\omega \vec{J} \quad (16-1)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} - k^2 \vec{H} = \nabla \times \vec{J} \quad (16-2)$$

一、电磁场量的积分表示式

设由闭合面 s 所包围的体积 v 中包含场源 $\vec{J}$ 和 r 。根据矢量 Green 公式

$$\begin{aligned} & \int_v (\vec{P} \cdot \nabla \times \nabla \times \vec{Q} - \vec{Q} \cdot \nabla \times \nabla \times \vec{P}) dv \\ &= \oint_s (\vec{Q} \cdot \nabla \times \vec{P} - \vec{P} \cdot \nabla \times \vec{Q}) \cdot \hat{n} d\vec{a} \end{aligned} \quad (16-3)$$

式中, $\hat{n}$ 为 s 面的外法向单位矢量。

$$\begin{cases} \vec{P} = \vec{E}(\vec{r}) \\ \vec{Q} = G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{a} \end{cases} \quad (16-4)$$

式中, $\vec{a}$ 为任意常矢, $G(\vec{r}, \vec{r}')$ 是算子 $(\nabla^2 + k^2)$ 的 Green 函数, 满足

$$(\nabla^2 + k^2)[G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{a}] = -\vec{a} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (16-5)$$

将(16-4)代入(16-3), 并考虑到 $G(\vec{r}, \vec{r}')$ 的对称性, 得

$$\begin{aligned} & \int_v \{ \vec{E}(\vec{r}') \cdot \nabla' \times \nabla' \times [G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{a}] - G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{a} \cdot \nabla' \times \nabla' \times \vec{E}(\vec{r}') \} dv' \\ &= \oint_s \{ G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{a} \times \nabla' \times \vec{E}(\vec{r}') - \vec{E}(\vec{r}') \times \nabla' \times [G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{a}] \} \cdot \hat{n} ds' \end{aligned} \quad (16-6)$$

利用矢量恒等式

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \vec{A} &= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \\ \nabla(f\vec{A}) &= \nabla f \cdot \vec{A} + f\nabla \cdot \vec{A} \\ \nabla \times (f\vec{A}) &= \nabla f \times \vec{A} + f\nabla \times \vec{A} \end{aligned}$$

以及(16-5)和 $\vec{a}$ 为常矢的性质, 可得

$$\begin{aligned} \nabla' \times \nabla' \times [G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{a}] &= \nabla' \nabla' \cdot [G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{a}] - \nabla'^2 [G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{a}] \\ &= \nabla' [\nabla' G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{a}] + k^2 G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{a} + \vec{a} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \end{aligned} \quad (16-7)$$

$$\nabla' \times [G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{a}] = \nabla' G(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{a} \quad (16-8)$$

将(16-7), (16-8), (16-1)以及 $\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{H}$ 代入(16-6), 得

$$\begin{aligned} & \int_v \vec{E}(\vec{r}') \cdot \{ \nabla' [\nabla' G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{a}] + k^2 G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{a} + \vec{a} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \} dv' - \int_v G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{a} \cdot [k^2 \vec{E}(\vec{r}') - j\omega \vec{J}(\vec{r}')] dv' \\ &= \oint_s \{ G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{a} \times [-j\omega \vec{H}(\vec{r}')] - \vec{E}(\vec{r}') \times [\nabla' G(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{a}] \} \cdot \hat{n} ds' \end{aligned} \quad (16-9)$$

进一步利用矢量恒等式 $\nabla \cdot (f\vec{A}) = \nabla f \cdot \vec{A} + f\nabla \cdot \vec{A}$, 可得

$$\begin{aligned} & \vec{E}(\vec{r}') \cdot \nabla' [\nabla' G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{a}] \\ &= \nabla' \cdot \{ (\nabla' G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{a}) \vec{E}(\vec{r}') \} - [\nabla' G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{a}] \nabla' \cdot \vec{E}(\vec{r}') \end{aligned} \quad (16-10)$$

将(16-10)代入(16-9), 在(16-9)左边利用矢量积分公式和 δ 函数选择性, 在(16-9)右边的面积分中应用矢量三重运算恒等式 $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$, 整理后得

$$\begin{aligned} & \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{d} \cdot \oint_s [\hat{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds' - \mathbf{d} \cdot \int_v \nabla' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv' + \mathbf{d} \cdot \int_v j\omega m \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv' \\ &= \mathbf{d} \cdot \oint_s [j\omega m \hat{n} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - [\hat{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \times \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] ds' \end{aligned}$$

将 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/e$ 代入上式，并考虑到 $\mathbf{d}$ 为任意矢量，便得到电场 $\mathbf{E}$ 的积分表示式

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & - \int_v [j\omega m \mathbf{J}(\mathbf{r}') \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r}')}{e} \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] dv' \\ & + \oint_s \{ j\omega m \hat{n} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - [\hat{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \times \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \hat{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \} ds' \end{aligned} \quad (16-11)$$

同理，利用磁场 $\mathbf{H}$ 满足的波动方程(16-2)和矢量 Green 公式可以得到磁场 $\mathbf{H}$ 的积分表示式

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = & - \int_v \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv' - \oint_s \{ j\omega e \hat{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ & + [\hat{n} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')] \times \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \hat{n} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}') \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \} ds' \end{aligned} \quad (16-12)$$

利用矢量公式 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ ，(16-11)和(16-12)可以进一步简化为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & - \int_v [j\omega m \mathbf{J}(\mathbf{r}') \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r}')}{e} \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] dv' \\ & + \oint_s \{ j\omega m \hat{n} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \hat{n} \cdot \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \} ds' \end{aligned} \quad (16-13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = & - \int_v \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv' - \oint_s \{ j\omega e \hat{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ & + \mathbf{H}(\mathbf{r}') \cdot \hat{n} \cdot \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \} ds' \end{aligned} \quad (16-14)$$

从上面公式可以看出，为了求得 v 中的电场 $\mathbf{E}$ 或磁场 $\mathbf{H}$ 不仅需要知道 v 中的源，还需要知道闭曲面 s 上的电磁场。至于需要 s 面上哪些场分量是由 Green 函数的性质决定的。如果 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 为无界空间的 Green 函数 $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ，为了求得 v 中的电场 $\mathbf{E}$ 需要知道 s 面上的切向磁场分量和所有电场分量，为了求得 v 中的磁场 $\mathbf{H}$ 需要知道 s 面上的切向电场分量和所有磁场分量。如果 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 为第一类 Green 函数 $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ，则需要知道 s 面上所有电场分量或所有磁场分量。如果 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 为第二类 Green 函数 $G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ，则只需知道 s 面上的切向磁场或切向电场分量，这正验明了电磁场的唯一性定理。

二、电磁场的辐射条件

设均匀无界空间中所有场源分布在有限区域内。取闭曲面 s 为无限大球面，则在 s 面所包围的体积 v 中包含了所有场源。由于(16-11)–(16-14)中右边的面积分项表示分布在 s 面外的源对 v 内场的贡献，而无穷远处不存在源，所以该面积分项应为零。选取 Green 函数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 为无界空间 Green 函数 $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ，即

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \quad (16-15)$$

式中， $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 。在无限大球面上， $\hat{n} = -\hat{R}$ ，因此

$$\hat{n} \nabla' G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\hat{n} \cdot \nabla G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\nabla G_0}{\nabla R} = -(jk + \frac{1}{R})G_0 \quad (16-16)$$

于是(16-13)中的面积分项为

$$\oint_s [j\omega m \hat{n} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') + \mathbf{E}(\mathbf{r}') (jk + \frac{1}{R})] \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} ds' \quad (16-17)$$

当 $R \rightarrow \infty$ 时，由于球面面积与 R^2 成正比，所以为了使上式等于零，应有下列条件

$$\begin{cases} \lim_{R \rightarrow \infty} R \vec{E} = \text{有限值} \\ \lim_{R \rightarrow \infty} R(\vec{E} + h \hat{n} \times \vec{H}) = 0 \end{cases} \quad (16-18)$$

式中, $h = \sqrt{\frac{m}{e}}$ 为均匀空间中的波阻抗。

上式第一式说明, 在离开场源很远的地方, 电场的幅值随距离的变化至少按 $\frac{1}{R}$ 减小。对(16-18)第二项取 $\hat{n}$ 的点积, 得

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R(\hat{n} \cdot \vec{E}) = 0 \quad (16-19)$$

所以 $\vec{E}$ 在 $\hat{n}$ 方向的分量比 $\frac{1}{R}$ 减小更快。

而第二式说明, 当 $R \rightarrow \infty$ 时,

$$\vec{E} = h \vec{H} \times \hat{n} \quad (16-20)$$

即 $\vec{E}, \vec{H}, \hat{n}$ 三者相互垂直, 这与从球心发出的球面 TEM 波向外传播的情况相同。这是因为 $R \rightarrow \infty$ 时有限区域内的波源可以看作是位于球心的点源。因此, (16-18)保证了通过无限大球面的波是从波源向无限远辐射的波。通常称(16-18)为电场在无穷远处的辐射条件。

同理, 利用(16-14)中的面积分项, 可以得到磁场辐射条件

$$\begin{cases} \lim_{R \rightarrow \infty} R \vec{H} = \text{有限值} \\ \lim_{R \rightarrow \infty} R(\hat{n} \times \vec{E} - h \vec{H}) = 0 \end{cases} \quad (16-21)$$

将上式中的第二式关于 $\hat{n}$ 叉乘, 即

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R(\hat{n} \times \hat{n} \times \vec{E} - h \hat{n} \times \vec{H}) = 0$$

利用 $\hat{n} \times \hat{n} \times \vec{E} = \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{E}) - \vec{E}(\hat{n} \cdot \hat{n})$ 以及(16-19), 可知(16-21)中的第二式与(16-18)的第二项相同。

所以, 电磁场的辐射条件可以统一表示为

$$\begin{cases} \lim_{R \rightarrow \infty} R \vec{E} = \text{有限值} \\ \lim_{R \rightarrow \infty} R \vec{H} = \text{有限值} \\ \lim_{R \rightarrow \infty} R(\vec{E} + h \hat{n} \times \vec{H}) = 0 \end{cases} \quad (16-22)$$

于是, 在均匀无界空间中, 当场源分布在有限区域 v 中时, 电磁场量可表示为

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\int_v [j\omega m J(\vec{r}') G_0(\vec{r}, \vec{r}') - \frac{r(\vec{r}')}{e} \nabla' G_0(\vec{r}, \vec{r}')] d\vec{v}' \quad (16-23)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \int_v J(\vec{r}') \times \nabla' G_0(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{v}' \quad (16-24)$$

最后, 讨论一下(16-11)–(16-14)中面积分项的被积函数中场量是 v 内和 v 外的源共同产生的总场量, 还是仅由 v 外的源产生的场量。

根据这些公式的推导过程知道, 它们应该是总场量。但是, 根据场的叠加原理, v 内任一点的场应该是 v 内场源和 v 外场源产生的场的叠加, (16-11)–(16-14)中的体积分项代表了 v 内源产生的场, 所以面积分项代表的应该是 v 外源产生的场。根据这一点, 面积分项的被积函数中场量应该是仅由 v 外源在闭合面 s 上产生的场量。因此, v 内场源在 s 面上产生的场量对面积分项没有贡献。如果把它们代入面积分内, 其积分结果必然为零。

三、线天线的远区辐射场

作为电磁场位函数的应用, 我们讨论线天线的远区辐射场。所谓天线就是一根很细的载流直

导线，在横截面内电流密度 $\vec{J}$ 只有平行于导线的纵向分量且均匀分布。设天线中心位于坐标原点，沿 z 轴放置，如图 16-1 所示。采用矢位 $\vec{A}$ 求解电磁场。

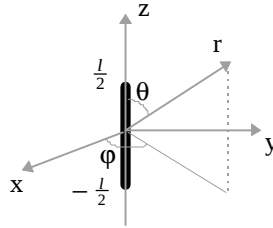


图 16-1 线天线

首先，考虑电流作时谐变化的线天线。已知无界空间中矢位 $\vec{A}$ 为

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_v \frac{mJ(\vec{r}')e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} d\vec{v}' \quad (16-25)$$

在远区 $r \gg r'$ ，则

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} \quad (16-26)$$

对于线天线元，长度 l 极短， $r' \ll l$ ，其中 l 为空间波长，则

$$e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|} = e^{-j\frac{2\pi}{l}|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx e^{-jkr}$$

所以

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{me^{-jkr}}{4\pi r} \int_v \vec{J}(\vec{r}') d\vec{v}' \quad (16-27)$$

设线天线元上电流为 I_0 ，方向为 z 轴方向，沿线均匀分布，则 $\int_v \vec{J}(\vec{r}') d\vec{v}' = I_0 l \hat{z}$ 。于是上式变为

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{I_0 l m}{4\pi r} e^{jkr} \hat{z} \quad (16-28)$$

另一方面，根据并矢微分恒等式 $\nabla \cdot (\vec{J}\vec{r}) = (\nabla \cdot \vec{J})\vec{r} + \vec{J} \cdot \nabla \vec{r}$ ， $\nabla \vec{r} = \bar{\bar{I}}$

以及并矢积分定理 $\int_v \nabla \cdot (\vec{J}\vec{r}) d\vec{v} = \oint_s \hat{n} \cdot (\vec{J}\vec{r}) ds$ 和电流连续性方程

$$\nabla \cdot \vec{J} + j\omega r = 0$$

可以得到

$$\int_v \vec{J}(\vec{r}') d\vec{v}' = \int_v \{ \nabla' \cdot [\vec{J}(\vec{r}')\vec{r}'] - [\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}')] \vec{r}' \} d\vec{v}' = \oint_s \hat{n} \cdot [\vec{J}(\vec{r}')\vec{r}'] ds' + \int_v j\omega r (\vec{r}')\vec{r}' d\vec{v}'$$

式中， v 为无界空间，闭合面 s 为无限大曲面，在 s 上 $\vec{J} = 0$ ，所以上式右边的面积分项为 0。定义辐射系统的电偶极矩为

$$\vec{P} = \int_v r(\vec{r}')\vec{r}' d\vec{v}' \quad (16-29)$$

则

$$\int_v \vec{J}(\vec{r}') d\vec{v}' = j\omega \vec{P} \quad (16-30)$$

于是矢位 $\vec{A}$ 也可表示为

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{j\omega m}{4\pi r} \vec{P} e^{jkr} \quad (16-31)$$

比较(16-31)与(16-28)可知，电偶极矩 $\vec{P}$ 为

$$\vec{P} = \frac{I_0 l}{j\omega} \hat{z} \quad (16-32)$$

静电场中电偶极子是由彼此相距 l 的两个点电荷 $+Q$ 和 $-Q$ 构成的，其电偶极矩为

$$\vec{P} = Ql\hat{z} \quad (16-33)$$

对于极短的线天线元而言，当电流流入导线元的一端时，必然引起该端上的电荷量发生变化，根据电流连续性可知， $j\omega Q = I_0$ 。所以，一段极短的线天线元可以等效一个振荡的电偶极子，电荷量 $Q = \frac{I_0}{j\omega}$ 。如图 16-2 所示。

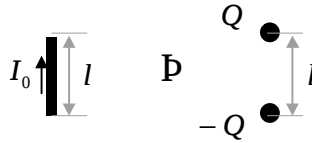


图 16-2 线天线元等效为振荡的电偶极子

对于有限长的线天线，可以看成无数个线天线元的叠加，在远区 $r \gg r'$ ，(16-26)的近似仍然成立。但相位因子 e^{-jkR} 在整个天线上变化可能很大，取近似

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} \approx r - \hat{r} \cdot \vec{r}'$$

于是，(16-25)近似为

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{me^{-jkr}}{4\pi r} \int_V \vec{J}(\vec{r}') e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'} dV' \quad (16-34)$$

对于非常细的线天线，在横截面内积分时 $e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'} \approx e^{jk\hat{r} \cdot \hat{z}z'}$ 。设电流为 $I(z)$ ，则

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{me^{-jkr}}{4\pi r} \int_I \vec{I}(z') e^{jkz' \cos q'} dz' \quad (16-35)$$

式中， $\cos q' = \hat{r} \cdot \hat{z}'$ ， q 为矢径 $\vec{r}$ 与 z 轴的夹角。如果知道了线上的电流分布，利用(16-35)不难得到线天线在远区的矢位。

但是，实际中只知道线天线的激励点，而确定线天线上的电流分布却是一件不容易的事情。作为简单的近似，通常假定天线上的电流作正弦变化，并且天线两端开路，电流为零。如果天线在中心处 ($z = 0$) 被激励，则天线上的电流分布以 $z = 0$ 点对称，并可写成

$$I(z') = I_0 \sin k\left(\frac{l}{2} - |z'|\right) \quad |z'| \leq \frac{l}{2} \quad (16-36)$$

实验测量表明，在一定频率范围内，上述假设是合理的。

对于这种电流分布，可得

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{mI_0 \hat{z}}{2\pi kr} e^{-jkr} \frac{\cos\left(\frac{kl}{2} \cos q\right) - \cos\left(\frac{kl}{2}\right)}{\sin^2 q} \quad (16-37)$$

一旦求出了矢值 $\vec{A}(\vec{r})$ ，利用 $\vec{B} = \frac{1}{m} \nabla \times \vec{A}$ ， $\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \vec{H}$ ，便可得到线天线在远区的辐射场，进而研究线天线的特性。

我们再考虑以任意规律变化的线天线元的辐射场。在时域，矢位 $\vec{A}$ 为

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int_V \frac{m\vec{J}(\vec{r}', t - R/c)}{4\pi R} dV' \quad (16-38)$$

式中， c 为电磁波在自由空间中的传播速度。对于无限细无限短的线天线元，当 $r \gg r'$ 时

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) &\approx \frac{m}{4\pi r} \int_V \vec{J}(\vec{r}'(t - r/c)) dv = \frac{m}{4\pi r} I_0(t - r/c) \hat{z} \\ &= \hat{z} \frac{ml}{4\pi r} \frac{q(t')}{r'} \bigg|_{t'=t-r/c} = \hat{z} \frac{m}{4\pi r} \frac{p(t')}{r'} \bigg|_{t'=t-r/c}\end{aligned}\quad (16-39)$$

式中， $q(t) = \int_0^t I(t') dt'$ ， $p(t) = q(t)l$ 。在球坐标系中，

$$\vec{A} = \cos q A_z \hat{r} - \sin q A_z \hat{q}$$

式中， $A_z = \frac{m}{4\pi r} \frac{p(t')}{r'} \bigg|_{t'=t-r/c}$ 。

于是电磁场量

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \frac{1}{m} \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{mr^2 \sin q} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{q} & r\sin q \hat{j} \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{q} & \frac{1}{j} \\ A_z \cos q & -A_z r \sin q & 0 \end{vmatrix} \\ &= \hat{j} \frac{1}{mr^2 \sin q} [r \sin q \frac{1}{r} (-r A_z \sin q) - r \sin q (A_z \cos q)] \\ &= \hat{j} \frac{\sin q}{4\pi} \left[\frac{p'(t')}{r^2} + \frac{p''(t')}{c} \right]_{t'=t-r/c}\end{aligned}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \vec{H}$$

习题 16

16-1 试推导磁场 $\vec{H}$ 的积分表达式

$$\begin{aligned}\vec{H}(\vec{r}) &= - \int_V \vec{J}(\vec{r}') \times \nabla' G_0(\vec{r}, \vec{r}') dv' - \oint_S \{ j\omega\epsilon \vec{s} \times \vec{E}(\vec{r}') G_0(\vec{r}, \vec{r}') \\ &\quad + [\vec{s} \times \vec{H}(\vec{r}')] \times \nabla' G_0(\vec{r}, \vec{r}') + \vec{s} \cdot \vec{H}(\vec{r}') \nabla' G_0(\vec{r}, \vec{r}') \} ds'\end{aligned}$$

16-2 设有两个电荷 $+q$ 和 $-q$ ，开始时都位于坐标原点， $t=0$ 时刻突然将两个电荷沿 z 轴方向拉开，两电荷间距为 l 。求此电偶极子产生的电磁场。

◆◆

第 17 讲 并矢 Green 函数

17.1 并矢 Green 函数的定义

设有一 x 方向的点电流源

$$\mathbf{J}^{(x)}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{j\omega m} d(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{x} \quad (17-1)$$

在空间产生的电磁场记为

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{(x)} = \mathbf{G}_e^{(x)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ \mathbf{H}^{(x)} = -\frac{1}{j\omega m} \mathbf{G}_m^{(x)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{cases} \quad (17-2)$$

根据 Maxwell 旋度方程, 可得

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{G}_e^{(x)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{G}_m^{(x)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ \nabla \times \mathbf{G}_m^{(x)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = d(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{x} + k^2 \mathbf{G}_e^{(x)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{cases} \quad (17-3)$$

同理, 分别设 y 方向和 z 方向点电流源

$$\mathbf{J}^{(y)}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{j\omega m} d(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{y} \quad (17-4)$$

$$\mathbf{J}^{(z)}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{j\omega m} d(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{z} \quad (17-5)$$

它们在空间产生的电磁场分别记为

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{(y)} = \mathbf{G}_e^{(y)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ \mathbf{H}^{(y)} = -\frac{1}{j\omega m} \mathbf{G}_m^{(y)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{cases} \quad (17-6)$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{(z)} = \mathbf{G}_e^{(z)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ \mathbf{H}^{(z)} = -\frac{1}{j\omega m} \mathbf{G}_m^{(z)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{cases} \quad (17-7)$$

同样根据 Maxwell 旋度方程, 可得

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{G}_e^{(y)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{G}_m^{(y)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ \nabla \times \mathbf{G}_m^{(y)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = d(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{y} + k^2 \mathbf{G}_e^{(y)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{cases} \quad (17-8)$$

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{G}_e^{(z)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{G}_m^{(z)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ \nabla \times \mathbf{G}_m^{(z)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = d(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{z} + k^2 \mathbf{G}_e^{(z)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{cases} \quad (17-9)$$

引入并矢函数

$$\overline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{G}_e^{(x)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{x} + \mathbf{G}_e^{(y)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{y} + \mathbf{G}_e^{(z)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{z} \quad (17-10)$$

$$\overline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{G}_m^{(x)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{x} + \mathbf{G}_m^{(y)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{y} + \mathbf{G}_m^{(z)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{z} \quad (17-11)$$

式中 $\overline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 称为电并矢 Green 函数, $\overline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 称为磁并矢 Green 函数。利用(17-3),(17-8),(17-9), 容易证明

$$\begin{cases} \nabla \times \overline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \overline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ \nabla \times \overline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = Id(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + k^2 \overline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{cases} \quad (17-12)$$

通过上述推导可以看出，并矢 Green 函数可以看成是并矢点电流源 $\bar{\bar{J}} = -\bar{\bar{I}}d(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}')/j\omega m$ 在空间产生的并矢电磁场。(17-12)就是并矢电磁场所满足的 Maxwell 方程。对(17-12)取旋度，可得并矢 Green 函数满足的波动方程

$$(\nabla \times \nabla \times - k^2)\bar{\bar{G}}_e(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') = \bar{\bar{I}}d(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}') \quad (17-13)$$

$$(\nabla \times \nabla \times - k^2)\bar{\bar{G}}_m(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') = \nabla \times [\bar{\bar{I}}d(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}')] \quad (17-14)$$

$\bar{\bar{G}}_e$ 与 $\bar{\bar{G}}_m$ 不是独立的，它们由(17-12)联系在一起。所以在求解电磁场时只需其中一个即可。

下面主要讨论电并矢 Green 函数 $\bar{\bar{G}}_e$ 。

电并矢 Green 函数除满足波动方程(17-13)外，在边界面上还应满足一定的边界条件。根据边界条件的不同，电并矢 Green 函数可分为以下几类：

a、无界空间电并矢 Green 函数，记为 $\bar{\bar{G}}_{e0}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')$ 。它在无穷远处满足辐射条件，根据电场的辐射条件，可得到 $\bar{\bar{G}}_{e0}$ 的辐射条件。

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R[\nabla \times \bar{\bar{G}}_{e0}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') + jk\hat{\mathbf{n}} \times \bar{\bar{G}}_{e0}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')] = 0 \quad (17-15)$$

b、第一类电并矢 Green 函数，记为 $\bar{\bar{G}}_{e1}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')$ ，在边界上满足

$$\hat{\mathbf{n}} \times \bar{\bar{G}}_{e1}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') = 0 \quad (17-16)$$

c、第二类电并矢 Green 函数，记为 $\bar{\bar{G}}_{e2}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')$ ，在边界上满足

$$\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{e2}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') = 0 \quad (17-17)$$

17.2 并矢 Green 函数的对称性

电并矢 Green 函数具有如下对称性

$$[\bar{\bar{G}}_e(\bar{\mathbf{r}}', \bar{\mathbf{r}})]^T = \bar{\bar{G}}_e(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') \quad (17-18)$$

式中， $[\]^T$ 表示转置。

证明：考虑并矢 Green 公式

$$\int_v (\bar{\mathbf{P}} \cdot \nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{Q}} - \nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{P}} \cdot \bar{\mathbf{Q}}) dv = - \oint_s \hat{\mathbf{n}} \cdot [\bar{\mathbf{P}} \times \nabla \times \bar{\mathbf{Q}} + \nabla \times \bar{\mathbf{P}} \times \bar{\mathbf{Q}}] ds \quad (17-19)$$

式中， $\hat{\mathbf{n}}$ 为闭合面 s 的外法向单位矢量。

取 $\bar{\mathbf{P}} = \bar{\bar{G}}_e(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}_a) \cdot \bar{\mathbf{a}}$ ， $\bar{\mathbf{Q}} = \bar{\bar{G}}_e(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}_b)$ ，其中， $\bar{\mathbf{a}}$ 为任意常矢量。

利用电并矢 Green 函数满足的波动方程(17-13)，有

$$\begin{aligned} & \int_v \{ [\bar{\bar{G}}_e(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}_a) \cdot \bar{\mathbf{a}}] \cdot [k^2 \bar{\bar{G}}_e(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}_b) + \bar{\bar{I}}d(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_b)] \\ & - [k^2 \bar{\bar{G}}_e(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}_a) \cdot \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{a}}d(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_a)] \cdot \bar{\bar{G}}_e(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}_b) \} dv \\ & = - \oint_s \hat{\mathbf{n}} \cdot \{ [\bar{\bar{G}}_e(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}_a) \cdot \bar{\mathbf{a}}] \times [\nabla \times \bar{\bar{G}}_e(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}_b)] \\ & + \nabla \times [\bar{\bar{G}}_e(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}_a) \cdot \bar{\mathbf{a}}] \times \bar{\bar{G}}_e(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}_b) \} ds \end{aligned} \quad (17-20)$$

$$\text{利用并矢恒等式 } \bar{\mathbf{a}} \cdot (\bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}}) \cdot \bar{\mathbf{c}} = -\bar{\mathbf{b}} \cdot (\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{c}}) \quad (17-21)$$

$$\bar{\mathbf{a}} \times (\bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}}) \cdot \bar{\mathbf{c}} \quad (17-22)$$

(17-20)右边的面积分项可写为

$$\begin{aligned}
 & - \oint_s \{ [\hat{n} \times \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a)] \cdot \mathbf{d} \cdot [\nabla \times \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_b)] - [\nabla \times \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a)] \cdot \mathbf{d} \cdot [\hat{n} \times \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_b)] \} ds \\
 & = \oint_s \{ \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a) \cdot \mathbf{d} \cdot [\hat{n} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_b)] - [\hat{n} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a)] \cdot \mathbf{d} \cdot \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_b) \} ds
 \end{aligned}$$

所以，不论 $\bar{\bar{G}}_e$ 是哪类电并矢 Green 函数，上式右边均为零。于是

$$[\bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}_b, \mathbf{r}_a)] \cdot \mathbf{d} = \mathbf{d} \cdot [\bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}_b, \mathbf{r}_a)]^T = \mathbf{d} \cdot \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)$$

由于 $\mathbf{d}$ 为任意常矢量，从上式两端可消去 $\mathbf{d}$ ，然后用 $\mathbf{r}$ 代替 $\mathbf{r}_a$ ，用 $\mathbf{r}'$ 代替 $\mathbf{r}_b$ ，则(17-18)得证。

同理，利用矢量 Green 第一定理

$$\int_v [(\nabla \times \mathbf{P}) \cdot (\nabla \times \mathbf{Q}) - \mathbf{Q} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{P}] dv = \oint_s (\mathbf{Q} \times \nabla \times \mathbf{P}) \cdot \hat{n} ds \quad (17-23)$$

$$\text{可以证明} \quad [\nabla' \times \bar{\bar{G}}_{e0}(\mathbf{r}', \mathbf{r})]^T = \nabla \times \bar{\bar{G}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (17-24)$$

$$[\nabla' \times \bar{\bar{G}}_{e1}(\mathbf{r}', \mathbf{r})]^T = \nabla \times \bar{\bar{G}}_{e2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (17-25)$$

$$[\nabla' \times \bar{\bar{G}}_{e2}(\mathbf{r}', \mathbf{r})]^T = \nabla \times \bar{\bar{G}}_{e1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (17-26)$$

17.3 电磁场量并矢 Green 函数积分表示

在并矢 Green 公式(17-19)中，取 $\mathbf{P} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ ， $\mathbf{Q} = \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 。

考虑到电场满足的波动方程和电并矢 Green 函数满足的波动方程(17-13)，则有

$$\begin{aligned}
 & \int_v \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot [k^2 \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \bar{\bar{I}} d(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] - [k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) - j\omega \mathbf{m} \mathbf{J}(\mathbf{r})] \cdot \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \} dv \\
 & = - \oint_s \{ \hat{n} \cdot [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + [\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] \times \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \} ds
 \end{aligned}$$

利用 $\int_v \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \bar{\bar{I}} d(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \} dv = \mathbf{E}(\mathbf{r}')$ ， $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \mathbf{m} \mathbf{H}(\mathbf{r})$ ，以及并矢公式(17-21)，可得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{r}') & = - \int_v j\omega \mathbf{m} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}', \mathbf{r}') dv \\
 & - \oint_s \{ [\hat{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] \cdot \nabla \times \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - j\omega \mathbf{m} [\hat{n} \times \mathbf{H}(\mathbf{r})] \cdot \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \} ds \\
 & = - \int_v j\omega \mathbf{m} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}', \mathbf{r}') dv \\
 & + \oint_s \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot [\hat{n} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] - j\omega \mathbf{m} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot [\hat{n} \times \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \} ds
 \end{aligned}$$

将上式中带撇与不带撇的量互换，可得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{r}) & = - \int_v j\omega \mathbf{m} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}', \mathbf{r}) dv' \\
 & - \oint_s \{ [\hat{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \cdot \nabla' \times \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}', \mathbf{r}) - j\omega \mathbf{m} [\hat{n} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')] \cdot \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \} ds' \\
 & = - \int_v j\omega \mathbf{m} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}', \mathbf{r}) dv' \\
 & + \oint_s \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot [\hat{n} \times \nabla' \times \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}', \mathbf{r})] - j\omega \mathbf{m} \mathbf{H}(\mathbf{r}') \cdot [\hat{n} \times \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}', \mathbf{r})] \} ds'
 \end{aligned} \quad (17-27)$$

同理，根据磁场满足的波动方程和并矢 Green 公式，可得磁场的积分表示式

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}(\mathbf{r}) & = \int_v \nabla' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}', \mathbf{r}) dv' - \oint_s \{ j\omega e [\hat{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \cdot \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}', \mathbf{r}) + [\hat{n} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')] \cdot \nabla' \times \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \} ds' \\
 & = \int_v \nabla' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}', \mathbf{r}) dv' + \oint_s \{ j\omega e \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \hat{n} \times \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}', \mathbf{r}) + \mathbf{H}(\mathbf{r}') \cdot [\hat{n} \times \nabla' \times \bar{\bar{G}}_e(\mathbf{r}', \mathbf{r})] \} ds'
 \end{aligned} \quad (17-28)$$

在(17-27)和(17-28)中, 如果 $\bar{\bar{G}}_e$ 为无界空间电并矢 Green 函数 $\bar{\bar{G}}_{e0}$, 则根据对称性(17-18)和(17-24), 可得

$$\bar{\bar{E}}(\mathbf{r}) = -\int_v j\omega \bar{\bar{G}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{v}' + \oint_s \{ j\omega \bar{\bar{G}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot [\hat{n} \times \bar{\bar{H}}(\mathbf{r}')] - \nabla \times \bar{\bar{G}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot [\hat{n} \times \bar{\bar{E}}(\mathbf{r}')] \} ds' \quad (17-29)$$

$$\begin{aligned} &= -\int_v j\omega \bar{\bar{G}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{v}' - \oint_s \{ j\omega [\hat{n} \times \bar{\bar{G}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \bar{\bar{H}}(\mathbf{r}') - [\hat{n} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \bar{\bar{E}}(\mathbf{r}')] \} ds' \\ \bar{\bar{H}}(\mathbf{r}) &= \int_v \bar{\bar{G}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \nabla' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{v}' - \oint_s \{ j\omega \bar{\bar{G}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot [\hat{n} \times \bar{\bar{E}}(\mathbf{r}')] + \nabla \times \bar{\bar{G}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot [\hat{n} \times \bar{\bar{H}}(\mathbf{r}')] \} ds' \\ &= \int_v \bar{\bar{G}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \nabla' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{v}' + \oint_s \{ j\omega \bar{\bar{G}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \bar{\bar{E}}(\mathbf{r}') + [\hat{n} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \bar{\bar{H}}(\mathbf{r}')] \} ds' \end{aligned} \quad (17-30)$$

当源分布在有限区域内时, 取 s 面足够大, 使源分布在 s 面所包围的体积内, 则(17-29)和(17-30)中的面积分项为零, 于是

$$\begin{cases} \bar{\bar{E}}(\mathbf{r}) = -j\omega \int_v \bar{\bar{G}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{v}' \\ \bar{\bar{H}}(\mathbf{r}) = \int_v \bar{\bar{G}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \nabla' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{v}' \end{cases} \quad (17-31)$$

在(17-27)和(17-28)中, 如果取 $\bar{\bar{G}}_e$ 为第一类电并矢 Green 函数 $\bar{\bar{G}}_{e1}$, 当边界 s 面是理想电壁时, 利用 $\bar{\bar{G}}_{e1}$ 和电场的边界条件以及对称性(17-18), 可得,

$$\bar{\bar{E}}(\mathbf{r}) = -\int_v j\omega \bar{\bar{G}}_{e1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{v}' \quad (17-32)$$

当边界 s 面是理想磁壁时, 利用 $\bar{\bar{G}}_{e1}$ 和磁场的边界条件以及对称性(17-18), 可得

$$\bar{\bar{H}}(\mathbf{r}) = \int_v \bar{\bar{G}}_{e1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \nabla' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{v}' \quad (17-33)$$

在(17-27)和(17-28)中, 如果取 $\bar{\bar{G}}_e$ 为第二类电并矢 Green 函数 $\bar{\bar{G}}_{e2}$, 如果边界 s 面是理想电壁, 则磁场积分表示式中只剩下体积分项, 即

$$\bar{\bar{H}}(\mathbf{r}) = \int_v \bar{\bar{G}}_{e2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \nabla' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{v}' \quad (17-34)$$

如果边界是理想磁壁, 则电场表示式中只有体积分项, 即

$$\bar{\bar{E}}(\mathbf{r}) = -\int_v j\omega \bar{\bar{G}}_{e2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{v}' \quad (17-35)$$

三、并矢 Green 函数的求解

1、无界空间电并矢 Green 函数

已经知道, 电场可由矢位表示为

$$\begin{aligned} \bar{\bar{E}}(\mathbf{r}) &= -j\omega [\bar{\bar{A}}(\mathbf{r}) + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \bar{\bar{A}}(\mathbf{r})] \\ \bar{\bar{A}}(\mathbf{r}) &= \int_v \mathbf{J}(\mathbf{r}') G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{v}' \end{aligned}$$

式中, $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi R} e^{-jkR}$ 为无界空间标量 Green 函数。

若电流源为 $\mathbf{J}^{(x)} = -\frac{1}{j\omega m} d(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{x}$, 则 $\bar{\bar{A}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{j\omega} G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{x}$, 那么

$$\bar{\bar{E}}(\mathbf{r}) = \bar{\bar{G}}_0^{(x)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = (1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{x} \quad (17-36)$$

显然, $\vec{G}_0^{(x)}(\vec{r}-\vec{r}')$ 满足波动方程

$$(\nabla \times \nabla \times - k^2) \vec{G}_0^{(x)}(\vec{r}-\vec{r}') = d(\vec{r}-\vec{r}') \hat{x} \quad (17-37)$$

和辐射条件

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R[\nabla \times \vec{G}_0^{(x)}(\vec{r}, \vec{r}') + jk\hat{n} \times \vec{G}_0^{(x)}(\vec{r}, \vec{r}')] = 0 \quad (17-38)$$

同理, 当电流源分别为 $\hat{y}$ 和 $\hat{z}$ 方向的点源时, 电场 $\vec{G}_0^{(y)}$ 和 $\vec{G}_0^{(z)}$ 分别满足与(17-36)-(17-38)形式相同的方程, 只需将上标 (x) 改为 (y) 或 (z) 即可。

于是, 我们得到无界空间电并矢 Green 函数

$$\vec{\vec{G}}_{e0}(\vec{r}, \vec{r}') = (1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot) [\vec{\vec{I}} G_0(\vec{r}, \vec{r}')] = (\vec{\vec{I}} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla) G_0(\vec{r}, \vec{r}') \quad (17-39)$$

它满足波动方程(17-13)和辐射条件(17-15)。

2、半空间第一类电并矢 Green 函数

设一无限大接地导电平面所形成的半空间中有一并矢点电流源 $\vec{J} = -\vec{\vec{I}} d(\vec{r}-\vec{r}')/j\omega m$, 它所产生的并矢场 $\vec{\vec{G}}_{e1}(\vec{r}, \vec{r}')$ 在导电平面上满足边界条件 $\hat{n} \times \vec{\vec{G}}_{e1}(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ 。并矢场 $\vec{\vec{G}}_{e1}$ 就是我们要求的半空间第一类电并矢 Green 函数。根据镜像原理, $\vec{\vec{G}}_{e1}$ 可以看成是不存在导电平面的全空间中 $\vec{J}$ 及其镜像 $\vec{J}' = (\vec{\vec{I}} - 2\hat{z}\hat{z})d(\vec{r}-\vec{r}'')/j\omega m$ 在上半空间中产生的并矢场, 其中 $\vec{r}'' = \vec{r}' - 2z\hat{z}$ 是镜像的位置。如图 17-1 所示。

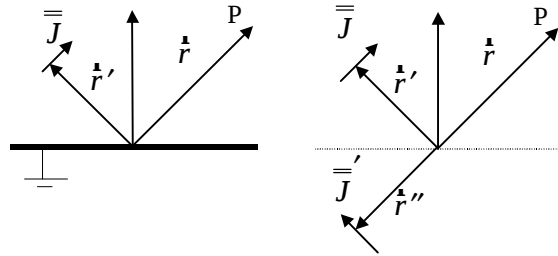


图 17-1 采用镜像法求半空间第一类电并矢 Green 函数 $\vec{\vec{G}}_{e1}$

$\vec{J}$ 和 $\vec{J}'$ 在全空间中产生的并矢场分别为

$$\vec{\vec{G}}_0(\vec{r}, \vec{r}') = (\vec{\vec{I}} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla) G_0(\vec{r}, \vec{r}')$$

$$\vec{\vec{G}}_0'(\vec{r}, \vec{r}'') = (1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot) [(-\vec{\vec{I}} + 2\hat{z}\hat{z}) G_0(\vec{r}, \vec{r}'')]$$

$$= [-\vec{\vec{I}} + 2\hat{z}\hat{z} + \frac{1}{k^2} \nabla (-\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} - \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z})] G_0(\vec{r}, \vec{r}'')$$

由于

$$\nabla G_0(\vec{r}, \vec{r}') = -\nabla' G_0(\vec{r}, \vec{r}')$$

$$\frac{\partial G_0(\vec{r}, \vec{r}'')}{\partial x} = -\frac{\partial G_0(\vec{r}, \vec{r}'')}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial G_0(\vec{r}, \vec{r}'')}{\partial y} = -\frac{\partial G_0(\vec{r}, \vec{r}'')}{\partial y'}$$

$$\frac{\partial G_0(\vec{r}, \vec{r}'')}{\partial z} = +\frac{\partial G_0(\vec{r}, \vec{r}'')}{\partial z'}$$

则

$$\vec{\vec{G}}_0(\vec{r}, \vec{r}') = (\vec{\vec{I}} - \frac{1}{k^2} \nabla \nabla') G_0(\vec{r}, \vec{r}')$$

$$\overline{\overline{G}}_0'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (-\overline{\overline{I}} + 2\hat{z}\hat{z} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla') G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

于是

$$\begin{aligned} \overline{\overline{G}}_{e1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \overline{\overline{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \overline{\overline{G}}_0'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ &= (\overline{\overline{I}} = \frac{1}{k^2} \nabla \nabla') [G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] + 2\hat{z}\hat{z} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (17-40)$$

习题 17

17-1 证明 $[\nabla' \overline{\overline{G}}_{e0}(\mathbf{r}', \mathbf{r})]^T = \nabla \times \overline{\overline{G}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

17-2 已知无限大导体平面上方有一电流源

$$\mathbf{J} = (J \sin q_0 + J \cos q_0) d(x - x_0) d(y - y_0) d(z - z_0)$$

试利用公式

$$\mathbf{E} = -j\omega m_0 \int_v \overline{\overline{G}}_{e1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv'$$

求电场表示式。

◆◆

第 18 讲 Einstein 相对论

1905 年 Einstein 27 岁时在一篇<<运动物体中的电动力学>>的文章中，提出了后来被称为“狭义相对论”的理论，宣告了 Newton 经典绝对时空观的破产，建立了全新的相对时空观，对物理学产生了革命性的变化。狭义相对论也是研究运动系统电磁场特性的基础。

Einstein 相对论的诞生不是孤立的。它是十九世纪末物理学研究，特别是电磁学和光学研究中很多新结果与经典物理学的时空观发生尖锐矛盾的必然结果。

18.1 绝对时空观 — 伽利略变换

自古以来，空间概念来源于物体的广延性，时间概念来源于过程的延续性。

所有的物理定律，几乎都是在表明一定的物体在空间中的活动情况怎样随着时间而变化。

一个物体的位置，或一事件发生的地点只有参照另外一个适当选择的物体，才能表达出来。

所以，空间与时间即做为物理事件发生的载体，又可以做为用空间坐标和时间坐标描述事件的参照系。

我们可以采用任何一种参考系来描述物理事件和表述其定律。但是只存在一个或一些参考系，在这些参考系中物理定律比较简洁，即在这些参考系中物理定律比其他参考系中包含较小的因素。对于力学而言，在所有可以想像的参考系中，存在着一些参考系，根据这些参考系，惯性定律可以写成大家所常见的形式，即在没有外力作用时，物体保持匀速直线运动。这样的参考系称为惯性系。

相对于惯性系做匀速直线运动的任何参考系也是惯性系。绝对时空观的代表人 Newton 认为在这些惯性系中存在一个绝对静止的空间。

根据绝对时空观，惯性系间空间和时间坐标的关系可以用伽利略变换来描述。设惯性系 S' 相对于惯性系 S 以速度 v 匀速直线运动。选取它们的 x 和 x' 轴沿着运动方向， y 和 y' 轴、 z 和 z' 轴平行，则空间一点 P 的坐标在 S 系中为 (x, y, z) ，在 S' 系中为 (x', y', z') ，如图 18-1 所示。

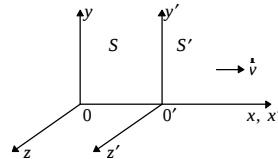


图 18-1 惯性系 S' 相对 S 匀速直线运动

设在 S 系和 S' 系中时间分别用 t 和 t' 表示，在 $t = t' = 0$ 时刻，两惯性系的坐标原点重合。伽利略变换可表述为：

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (18-1)$$

根据伽利略变换，绝对时空观认为：

- I 时间坐标是绝对的，与空间坐标及惯性系运动速度无关；
- I 速度满足经典力学中的相加原理，即如果在 S' 系中一质点沿 x' 轴以速度 u' 作匀速运动，则在 S 系中，观察到的质点的速度为 $u = u' + v$ ；
- I 牛顿力学定律在所有惯性系中保持形式不变。即力学定律满足相对性原理。

设 S 系中牛顿方程为 $F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}$ 。根据伽利略变换，有 $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt'^2}$ 。即在 S 和 S' 系中加速度保持不变，设在 S 和 S' 中力和质量不变即 $F = F'$ ， $m = m'$ ，则牛顿方程保持不变。因为力学定律在所有惯性系中都取相同的形式，所以，从力学观点看，一切惯性系都是等效的。

我们把一物体的运动与某一不受任何力作用的质点的运动进行比较，就可以知道，这物体是“加速的”还是“未加速的”。但是物体是“静止”的还是作“匀速运动”，完全取决于用来描述它的惯性

系。如果存在一个绝对的静止空间，那末利用任何力学试验都无法找到它。在低速物质世界的试验已证明了伽利略变换的正确性，换句话说，在低速物质世界中，绝对时空观是成立的。

但是，十九世纪末在利用电磁学和光学寻找绝对静止空间的试验研究中所发现的结果却对绝对时空观提出了严重的挑战。十九世纪六十年代 Maxwell 建立了著名的电磁场方程，预言了电磁场可以脱离源而以波的形式在空间传播。光本身也是一种电磁波，在真空中光速为 $c = 3 \times 10^8$ 公里。这些预言后来被 Hertz 实验所证实。

光速 c 作为从 Maxwell 方程解出的电磁波的传播速度，是一个与光源的速度没有关系的普适常数。但是，如果在 S' 系中有一光源发射一束光，当光沿 $\pm x'$ 方向传播时，根据伽利略变换，在 S 系中测得的光速应为 $c \pm v$ 。

也就是说，在伽利略变换下，Maxwell 方程在不同的关系中形式将发生变化，即不满足相对性原理。如果有这样一个参考系，光在各个方向传播的速度都是一样的，Maxwell 方程具有最简洁的形式，那么就可以用这样的参考系来定义“绝对静止”和“绝对运动”，也就证明了绝对静止空间的存在。

在十九世纪末人们认为通过对光速的测量，应该可以找到这个唯一的绝对参考系。很多实验物理学家做了大量相关的实验，最著名就是迈克耳逊实验。

但是，所有的实验都没有成功。相反地，所有的实验好象都表明光速是不变的，即相对性原理也适用 Maxwell 方程。理论与实验的矛盾在当时引起了很大的困惑。1900 年著名的英国物理学家开尔文(威廉汤姆逊)在一篇瞻望二十世纪物理学的文章中说：“在已基本建成的科学大厦中，后辈物理学家只要做一些零碎的修补工作就行了”，“但是，在物理学晴朗天空的远处，还有两朵小小的令人不安的乌云”。这两朵乌云，指的是当时物理学无法解释的两个实验，一个是热辐射实验，它导致了量子力学的诞生。另一个就是迈克耳逊实验，它引出了 Einstein 相对论。

18.2 对时空观——Lorentz 变换

为了解决理论与实验的矛盾，许多物理学家如荷兰物理学家 Lorentz、法国物理学家彭加勒、英国物理学家拉摩等都提出了一些新理论，但由于他们始终没有摆脱绝对时空观，限制了他们再向前迈进一步。只有 Einstein 抛弃了绝对时空观，提出了相对时空观，才去除了理论与实验间的鸿沟。而把相对时空观用于物理学，就产生了狭义相对论。

Einstein 狭义相对论基于以下两条公理：

- I 相对性原理：任何惯性系中物理学定律的形式保持不变。因此，世界上不存在任何特殊优越的绝对参考系。
- I 光速不变原理：真空中的光速相对任何惯性系沿任何方向恒等于 c ，并且与光源运动无关。

我们知道，光速不变性是 Maxwell 方程的推论，因此，要求光速不变也就是要求相对性原理对 Maxwell 方程成立。因此，两个公理是彼此联系的，不矛盾的。

利用光速不变原理，可以导出反映相对时空观的 Lorentz 变换。考虑图 18-1 所示的两个惯性系。由于它们相对匀速运动，所以，一个“事件”发生，它在 S' 系中的空时坐标 (x', y', z', t') 与它在 S 系中的空时坐标 (x, y, z, t) 之间是线性关系。考虑到 y, z 方向与 x 方向垂直，而运动只有 x 方向，所以可设

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = a_{21}x + a_{22}t \end{cases} \quad (18-2)$$

为了确定系数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ ，首先考察 S' 系坐标原点 O' 的运动。在 S' 系中 O' 的坐标 $x' \equiv 0$ ，但在 S 系中， O' 的坐标为 $x = vt$ ，代入(18-2)第一式得

$$\begin{aligned} 0 &= a_{11}vt + a_{12}t \\ \text{即} \quad a_{12} &= -a_{11}v \end{aligned} \quad (18-3)$$

其次，应用光速不变原理。设当两个坐标系原点 O 和 O' 重合的一瞬间（即 $t = t' = 0$ ），从原点发出一束光。根据光速不变原理，光在两个惯性系中均以速度 c 传播。

在 S 系中 t 时刻光到达的坐标 (x, y, z) 满足

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct \quad (18-4)$$

而在 S' 系中 t' 时刻光到达的坐标 (x', y', z') 满足

$$\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = ct' \quad (18-5)$$

于是,

$$x^2 - x'^2 + y^2 - y'^2 + z^2 - z'^2 = c^2(t^2 - t'^2)$$

将(18-2)以及(18-3)代入得

$$x^2 - a_{11}^2(x - vt)^2 = c^2[t^2 - (a_{21}x + a_{22}t)^2]$$

即

$$(a_{11}^2 - c^2 a_{21}^2 - 1)x^2 - 2(va_{11}^2 + c^2 a_{21} a_{22})xt(a_{11}^2 v^2 - c^2 a_{22}^2 + c^2)t^2 = 0$$

由于 x, t 连续可变, 所以, 为使上式成立, 应有

$$\begin{cases} c^2 a_{21}^2 = a_{11}^2 - 1 \\ c^2 a_{21} a_{22} = -va_{11}^2 \\ c^2 a_{22}^2 = a_{11}^2 v^2 + c^2 \end{cases} \quad (18-6)$$

于是, 上式中第一式乘以第三式, 得

$$c^4 a_{21}^2 a_{22}^2 = (a_{11}^2 - 1)(a_{11}^2 v^2 + c^2)$$

再利用第二式, 得

$$v^3 a_{11}^4 = (a_{11}^2 - 1)(a_{11}^2 v^2 + c^2)$$

于是

$$a_{11}^2 c^2 - a_{11}^2 v^2 = c^2$$

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (18-7)$$

代回(18-6)和(18-3)便可得

$$\begin{aligned} a_{22} &= a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ a_{12} &= -\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ a_{21} &= \frac{v}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (18-8)$$

于是, 得到 Lorentz 变换

$$\begin{cases} x' = g(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = g(t - \frac{v}{c^2}x) \end{cases} \quad (18-9)$$

式中, $g = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ 。可以看出, 当 $v \ll c$ 时, 上式就简化为伽利略变换(18-1)。所以, 伽利略变换是

Lorentz 变换在低速下的近似。

采用 Minkovski (闵可夫斯基, 36 岁因阑尾炎死于手术台) 提出的四维空间坐标 (x, y, z, jct) Lorentz 变换可写成

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ jct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & 0 & 0 & jgb \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -jgb & 0 & 0 & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ jct \end{bmatrix} \quad (18-10)$$

式中, $b = v/c$ 。

18.3 Lorentz 变换的时空效应

I 同时性的相对性

设在惯性系 S 中, 两个不同地点 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) 在同一时刻 $t_1 = t_2 = t$ 发生两事件, 根据 Lorentz 变换, 在相对于 S 系以速度 v 运动的惯性系 S' 中, 两事件发生的时刻分别

$$t'_1 = g(t - \frac{v}{c^2} x_1), \quad t'_2 = g(t - \frac{v}{c^2} x_2)$$

$$\text{于是,} \quad t'_2 - t'_1 = -g \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1) \quad (18-11)$$

只要 $x_2 \neq x_1$, 则 $t'_2 \neq t'_1$ 。由此可见, 在 S 系中不同地点同时发生的事件在 S' 系中观察时并不是同时发生的。

I 运动时钟延缓

设在 S' 系中 (x', y', z') 处有一时钟, 在 t'_1 和 t'_2 时刻分别对应于 S 系中的 t_1 和 t_2 时刻, 则由 Lorentz 变换, 得

$$t_2 - t_1 = g[(t'_2 + \frac{v}{c^2} x'_1) - (t'_1 + \frac{v}{c^2} x'_1)] = g(t'_2 - t'_1) > t'_2 - t'_1 \quad (18-12)$$

所以, 运动物体上的时间过程比静止物体上同样的过程延缓了。

I 运动尺子缩短

设 S' 系中有一静止的尺子, 两端点 p_1 和 p_2 的坐标分别 (x'_1, y', z') 和 (x'_2, y', z') 。在 S 系中 t 时刻测得的 p_1 , p_2 的坐标分别为 (x_1, y, z) 和 (x_2, y, z) , 根据 Lorentz 变换

$$x'_2 - x'_1 = g(x_2 - vt) - g(x_1 - vt) = g(x_2 - x_1) > (x_2 - x_1) \quad (18-13)$$

即运动物体的长度的缩短了。

I 速度极限

在 S' 系中有一质点以速度 u' 沿 x' 方向运动, 在 $t' = 0$ 时该质点与原点重合, 在 t' 时刻, 质点位于 x' , 则 $u' = \frac{x'}{t'}$, 应用 Lorentz 变换, 得

$$u' = \frac{g(x - vt)}{g(t - \frac{v}{c^2} x)} = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

其中, $u = \frac{x}{t}$, 于是,

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \quad (18-14)$$

如果 $u' \leq c$, $v \leq c$, 则 $u \leq c$ 。因为尚未观察到速度大于光速的物体运动, 所以 Einstein 断言: 在任何惯性系中, 任何物体的运动速度都不可能超过光速。换句话说, 光速 c 是物质运动速度的极限。这与伽利略变换下速度可无限增加是截然不同的。

习题 18

18-1 证明在 Lorentz 变换下四维空间长度 $l_4 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + (jct)^2}$ 保持不变, 而在伽利略变换下, 三维空间长度 $l_3 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 保持不变。

18-2 设 S' 系相对于 S 系以 $\vec{v}_1 = v_1 \hat{x}$ 运动, S'' 系相对于 S 系以 $\vec{v}_2 = v_2 \hat{x}$ 运动, 试写出 S'' 系与 S' 系之间的 Lorentz 变换。

第 19 讲 电磁场量的 Lorentz 变换(I)

19.1 时间和空间坐标的 Lorentz 变换

在上一讲我们简单地介绍了 Einstein 狭义相对论。为了分析简单,假设了惯性系 S 和 S' 只是沿 x 轴方向作相对匀速运动。本节我们推广到一般情形。

设惯性系 S' 相对于 S 的运动速度 $\mathbf{v}$ 为任意方向,如图 19-1 所示,在 $t=t'=0$ 时刻两惯性系的坐标原点重合。设 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r}'$ 分别为 S 系中 t 时刻和 S' 系中 t' 时刻点 P 的矢径。将这些矢径分解为平行于速度 $\mathbf{v}$ 和垂直于 $\mathbf{v}$ 的两个分量,即 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_p + \mathbf{r}_n$, $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_p + \mathbf{r}'_n$, 式

中,下标 p 和 n 分别表示平行于 $\mathbf{v}$ 和垂直于 $\mathbf{v}$ 的分量。根据上讲

给出的 Lorentz 变换,可以得到

$$\begin{cases} \mathbf{r}'_n = \mathbf{r}_n \\ \mathbf{r}'_p = g(\mathbf{r}_p - b\mathbf{v}ct) \\ ct' = g(ct - b \cdot \mathbf{r}_p \cdot \mathbf{v}) \end{cases} \quad (19-1)$$

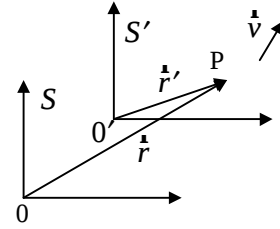


图 19-1 惯性系 S' 以速度 $\mathbf{v}$ 相对于 S 匀速运动

式中, $b = \mathbf{v}/c$ 。

动

因为 $\mathbf{r}'_p = (\mathbf{r} \cdot \hat{b})\hat{b} = \mathbf{r} \cdot (\frac{b\mathbf{v}}{b^2})$, $\mathbf{r}'_n = \mathbf{r} - \mathbf{r}'_p$, 所以

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r}'_p + \mathbf{r}'_n = g(\mathbf{r}_p - \mathbf{v}t) + \mathbf{r}'_n = (g-1)\mathbf{r}_p - g\mathbf{v}t + \mathbf{r}' \\ &= (g-1)\mathbf{r} \cdot (\frac{b\mathbf{v}}{b^2}) - g\mathbf{v}t + \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot [\bar{I} + (g-1)\frac{b\mathbf{v}}{b^2}] - g\mathbf{v}ct \end{aligned}$$

以及

$$ct' = g(ct - b \cdot \mathbf{r})$$

于是

$$\begin{cases} \mathbf{r}' = \bar{a} \cdot \mathbf{r} - g\mathbf{v}ct \\ ct' = -g\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} + gct \end{cases} \quad (19-2)$$

式中,

$$\bar{a} = \bar{I} + (g-1)\frac{b\mathbf{v}}{b^2} \quad (19-3)$$

也可将(19-2)写成矩阵形式,并采用 Minkovski 的四维空间坐标表示为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}' \\ jct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a} & jgb \\ -jgb^T & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ jct \end{bmatrix} \quad (19-4)$$

$$\text{这时 } \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \mathbf{r}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}, \bar{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{(g-1)}{b^2} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}.$$

称矩阵

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} \bar{a} & jgb \\ -jgb^T & g \end{bmatrix} \quad (19-5)$$

为 Lorentz 变换矩阵。显然, $\bar{L}^{-1} = \bar{L}^T$, $\bar{L}^+ = \bar{L}$, $\bar{L}^+$ 表示 $\bar{L}$ 的转置共轭。

19.2 时间和空间导数的 Lorentz 变换

I 时间导数变换

设一函数 $f = f(x', y', z', t') = f(\mathbf{r}', t')$ 。由 Lorentz 变换可知, $\mathbf{r}'$ 又是 $\mathbf{r}$ 和 t 的函数, 所以

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t} \cdot \nabla' f + \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t}$$

利用(19-2), 可得 $\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t} = -g\mathbf{b}c$, $\frac{\partial t'}{\partial t} = g$, 于是, $\frac{\partial f}{\partial t} = -g\mathbf{b}c \cdot \nabla' f + g \frac{\partial f}{\partial t'}$, 即

$$\frac{\partial f}{\partial t} = g \left(\frac{\partial f}{\partial t'} - c\mathbf{b} \cdot \nabla' \right) \quad (19-6)$$

I 空间导数变换

因为

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} \right) \hat{x} \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial y} \right) \hat{y} \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial z} \right) \hat{z} \\ &= (\nabla \mathbf{r}') \cdot \nabla' f + (\nabla t') \frac{\partial f}{\partial t'} \end{aligned}$$

根据(19-2), 有

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{r}' &= \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = (\nabla \mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{r} \\ \nabla t' &= -\nabla \frac{g\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}}{c} = -\frac{g}{c} (\nabla \mathbf{b}) \cdot \mathbf{r} - \frac{g}{c} \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{r} \end{aligned}$$

由于 $\nabla \mathbf{a} = 0$, $\nabla \mathbf{b} = 0$, $\nabla \mathbf{r} = \mathbf{I}$, 所以, $\nabla \mathbf{r}' = \mathbf{a}$, $\nabla t' = -\frac{g\mathbf{b}}{c}$, 于是

$$\nabla f = \mathbf{a} \cdot \nabla' f - \frac{g\mathbf{b}}{c} \frac{\partial f}{\partial t'}$$

即

$$\nabla = \mathbf{a} \cdot \nabla' - g\mathbf{b} \frac{\partial}{\partial t'} \quad (19-7)$$

将(19-6)和(19-7)写成矩阵形式, 得

$$\begin{bmatrix} \nabla \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & -g\mathbf{b} \\ g\mathbf{b} & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla' \\ \frac{\partial}{\partial t'} \end{bmatrix} \quad (19-8)$$

上式的逆变换为

$$\begin{bmatrix} \nabla' \\ \frac{\partial}{\partial t'} \end{bmatrix} = \mathbf{L} \begin{bmatrix} \nabla \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (19-9)$$

可见, 空间和时间导数的变换矩阵仍然是 Lorentz 矩阵。

下面讨论在低速情况下 Lorentz 变换的两种近似情况。

1. 一阶 Lorentz 变换: 运动速度远小于光速的低速情况 $b \ll 1$, 即 $v \ll c$,

这时, $g \approx 1$, $\mathbf{a} \approx \mathbf{I}$, 则空间时间坐标变换近似为

$$\begin{cases} \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t \\ jct' = jct - j\mathbf{b} \cdot \mathbf{r} \end{cases} \quad (19-10)$$

微分算子变换近似为

$$\begin{cases} \nabla' = \nabla + j\mathbf{b} \frac{\nabla \cdot \mathbf{r}}{jct} \\ \frac{\nabla \cdot \mathbf{r}}{jct'} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{r}}{jct} - j\mathbf{b} \cdot \nabla \end{cases} \quad (19-11)$$

2. 伽利略变换

如果满足下列条件

- (1) $b \ll 1$ 低速, 则 $g \approx 1$, $\bar{a} = \bar{I}$
- (2) $\left| \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{b} \right| \ll ct$ 空间小范围
- (3) $\left| \frac{\mathbf{v} \cdot \nabla}{b} \right| \ll c|\nabla|$ 时间缓慢变化

则 Lorentz 变换近似为伽利略变换

$$\begin{cases} \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t \\ t' = t \end{cases} \quad (19-12)$$

和

$$\begin{cases} \nabla' = \nabla \\ \frac{\nabla \cdot \mathbf{r}}{t'} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{r}}{t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \end{cases} \quad (19-13)$$

所以, 伽利略变换反映的规律是属于低速、小范围和随时间变化缓慢的情况。

19.3 电荷和电流的变换

Einstein 相对论的基础是相对性原理和光速不变原理。前面已利用光速不变原理导出了时空坐标以及微分算子的 Lorentz 变换。下面再结合相对性原理给出电磁场物理量的变换关系。本节考虑电流连续性方程。设在惯性系 S 中电流连续性方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\nabla \cdot \mathbf{r}}{t} = 0 \quad (19-14)$$

根据相对性原理, 在相对 S 系以速度 $\mathbf{v}$ 运动的惯性系 S' 中, 电流连续性方程应保持相同形式

$$\nabla' \cdot \mathbf{J}' + \frac{\nabla' \cdot \mathbf{r}'}{t'} = 0 \quad (19-15)$$

将时间空间微分算子变换式(19-6), (19-7)代入(19-14), 得

$$(\bar{a} \cdot \nabla' - gb \frac{\nabla \cdot \mathbf{r}}{jct'}) \cdot \mathbf{J} + g \left(\frac{\nabla \cdot \mathbf{r}}{jct'} - cb \cdot \nabla' \right) r = 0$$

整理后有

$$\bar{a} \cdot \nabla' \cdot \mathbf{J} - cgb \cdot \nabla' r - gb \frac{\nabla \cdot \mathbf{r}}{jct'} + g \frac{\nabla \cdot \mathbf{r}}{jct'} = 0$$

考虑到 $\bar{a}$, $\mathbf{b}$, g 不是时间和空间的函数, 则

$$\nabla' (\bar{a} \cdot \mathbf{J} - gbcr) + \frac{\nabla \cdot \mathbf{r}}{jct'} (gr - \frac{g}{c} \mathbf{b} \cdot \mathbf{J}) = 0$$

与(19-15)比较可知

$$\begin{cases} \mathbf{J}' = \bar{a} \cdot \mathbf{J} - gbcr \\ r' = gr - \frac{g}{c} \mathbf{b} \cdot \mathbf{J} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{J}' \\ jcr' \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ jcr \end{bmatrix} \end{cases} \quad (19-16)$$

即

从上式可以看出, S 系中的电荷在 S' 系中不仅构成电荷, 而且还形成一项 $-\mathbf{v}$ 方向的电流 $-g\mathbf{v}r$, 而 S 系中的电流在 S' 系中既是电流, 又形成电荷 $-g\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}/c^2$, 于是构成了两个惯性系中电流连续性方

程形式保持不变。电流与电荷仍满足 Lorentz 变换。

假设在 S 系中电荷 q 是静止的, 电荷密度为 r , 电流密度 $\mathbf{J} = 0$, 由(19-16)得 $r' = gr$, 根据 Lorentz 长度收缩可知, S' 系中的体积元 dv' 在 S 系中收缩为 dv , $dv' = dv/g$, 所以

$$dq' = r'dv' = grdv/g = r dv = dq$$

由此可见, 在体积元内包含的电荷在 S 系和 S' 系中是一个不变量, 将上式在整个体积内积分, 便得到一个重要的结论: 电荷总量在惯性系中是一个不变量, 称为 Lorentz 不变量。不过, 应当注意, 在 S 系中的静止电荷, 在 S' 系中虽然电荷总量保持不变, 但运动状态变了, 变成了运动电荷, 因而形成了电流。

19.4 关于张量 $\bar{a}$ 的若干公式

在讨论场矢量变换之前, 我们先给出有关 $\bar{a}$ 的一些有用公式。

$$\bar{a}^T = \bar{a} \quad (19-17)$$

也就是说, $\bar{a}$ 是一个对称并矢。根据 $\bar{a}$ 的定义(19-3), 上式显而易见成立。

$$\bar{a}^{-1} = \bar{I} + \left(\frac{1}{g} - 1\right) \frac{\mathbf{b}\mathbf{b}}{b^2} = \bar{a} - g \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}}{b^2} \quad (19-18)$$

证:

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot \bar{a}^{-1} &= [\bar{I} + (g-1) \frac{\mathbf{b}\mathbf{b}}{b^2}] \cdot [\bar{I} + (\frac{1}{g} - 1) \frac{\mathbf{b}\mathbf{b}}{b^2}] \\ &= \bar{I} + (\frac{1}{g} - 1) \frac{\mathbf{b}\mathbf{b}}{b^2} + (g-1) \frac{\mathbf{b}\mathbf{b}}{b^2} + (g-1)(\frac{1}{g} - 1) \frac{\mathbf{b}\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}\mathbf{b}}{b^4} \\ &= \bar{I} \end{aligned}$$

又

$$\bar{a}^{-1} = \bar{I} + (g-1) \frac{\mathbf{b}\mathbf{b}}{b^2} + (\frac{1}{g} - g) \frac{\mathbf{b}\mathbf{b}}{b^2} = \bar{a} - g(1 - \frac{1}{g^2}) \frac{\mathbf{b}\mathbf{b}}{b^2}$$

因为 $1 - \frac{1}{g^2} = 1 - (\sqrt{1-b^2}) = b^2$, 所以 $\bar{a}^{-1} = \bar{a} - g \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}}{b^2}$ 。

$$\bar{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \bar{a} = g \mathbf{b} \quad (19-19)$$

证: 由 $\bar{a}^T = \bar{a}$ 知, $\bar{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \bar{a}^T = \mathbf{b} \cdot \bar{a}$, 而

$$\bar{a} \cdot \mathbf{b} = [\bar{I} + (g-1) \frac{\mathbf{b}\mathbf{b}}{b^2}] \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} + (g-1) \mathbf{b} = g \mathbf{b}$$

同理可证

$$\bar{a}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \bar{a}^{-1} = \frac{1}{g} \mathbf{b} \quad (19-20)$$

$$\bar{a}^2 = \bar{I} + g^2 \mathbf{b}\mathbf{b} \quad (19-21)$$

证: 利用 $\bar{a}^{-1} = \bar{a} - g \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}}{b^2}$ 和(19-19)可得

$$\bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = \bar{a} \cdot (\bar{a}^{-1} + g \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}}{b^2}) = \bar{I} + g \bar{a} \cdot \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}}{b^2} = \bar{I} + g^2 \mathbf{b}\mathbf{b}$$

同理可证

$$(\bar{a}^{-1})^2 = \bar{I} - \mathbf{b}\mathbf{b} \quad (19-22)$$

$$|\bar{a} \cdot \mathbf{A}|^2 = |\mathbf{A}|^2 + g^2 (\mathbf{b} \cdot \mathbf{A})^2 \quad (19-23)$$

式中, $\mathbf{A}$ 为任意矢量。

证: $\left| \overline{a} \cdot \overline{A} \right|^2 = (\overline{a} \cdot \overline{A})^T \cdot \overline{a} \cdot \overline{A} = (\overline{A} \cdot \overline{a})^T \cdot (\overline{a} \cdot \overline{A}) = \overline{A} \cdot (\overline{a} \cdot \overline{a}) \overline{A}$, 将(19-21)代入, 得

$$\left| \overline{a} \cdot \overline{A} \right|^2 = \overline{A}(\overline{I} + g^2 \overline{b} \overline{b}) \overline{A} = \overline{A} \overline{A} + g^2 (\overline{b} \cdot \overline{A})^2 = \left| \overline{A} \right|^2 + g^2 (\overline{b} \cdot \overline{A})^2$$

引入并矢 $\overline{b}$ 定义

$$\overline{b} = \begin{bmatrix} 0 & -b_z & b_y \\ b_z & 0 & -b_x \\ -b_y & b_x & 0 \end{bmatrix}$$

显然, $\overline{b}^T = -\overline{b}$, 即 $\overline{b}$ 为反对称张量。引入 $\overline{b}$ 的最大好处是可以把矢量的叉乘运算转化成矢量与张量的点乘运算, 如, $\overline{A} \times \overline{b} = \overline{A} \cdot \overline{b}$, $\overline{b} \times \overline{A} = \overline{b} \cdot \overline{A}$ 。 $\overline{b}$ 满足如下有关公式。

$$\text{I} \quad \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a} = \overline{b} \quad (19-24)$$

证:

$$\begin{aligned} \overline{a} \cdot \overline{b} &= [\overline{I} + (g-1) \frac{\overline{b} \overline{b}}{b^2}] \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot [\overline{I} + (g-1) \frac{\overline{b} \overline{b}}{b^2}] \\ &= \overline{b} \cdot \overline{a} = \overline{b} + (g-1) \frac{\overline{b}}{b^2} \overline{b} \times \overline{b} = \overline{b} \end{aligned}$$

同理可证

$$\text{I} \quad \overline{a}^{-1} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}^{-1} = \overline{b} \quad (19-25)$$

$$\text{I} \quad \overline{b}^2 = \overline{b} \overline{b} - b^2 \overline{I} \quad (19-26)$$

证: 考虑 $\overline{b}^2 \cdot \overline{A} = \overline{b} \cdot \overline{b} \cdot \overline{A} = \overline{b} \times (\overline{b} \times \overline{A}) = \overline{b} (\overline{b} \cdot \overline{A}) - b^2 \overline{A}$, 由于 $\overline{A}$ 为任意矢, 则

$$\overline{b}^2 = \overline{b} \overline{b} - b^2 \overline{I}$$

习题 19

19-1 设有一刚性杆, 在惯性系 S' 中是静止的, 其长度矢量为 $\overline{d}'$ 。已知 S' 系相对于惯性系 S 以速度 $\overline{v}$ 匀速运动, 问在 S 系中测量该杆的长度矢量 $\overline{d}$ 应是多少?

19-2 证明

$$\begin{aligned} (\overline{a}^{-1})^2 &= \overline{I} - \overline{b} \overline{b} \\ \overline{a}^{-1} \cdot \overline{b} &= \overline{b} \cdot \overline{a}^{-1} = \frac{1}{g} \overline{b} \\ \overline{b} \cdot \overline{A} &= \overline{b} \times \overline{A} \end{aligned}$$

第 20 讲 电磁场量的 Lorentz 变换(II)

上一讲我们讨论了两个惯性系间时空坐标、时空微分算子以及电流、电荷间的 Lorentz 变换，其变换矩阵均为 Lorentz 变换矩阵。本讲讨论电磁场矢量的 Lorentz 变换。

20.1 场矢量的变换

在惯性系 S 中，Maxwell 方程为

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (20-1a)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (20-1b)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (20-1c)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (20-1d)$$

根据相对性原理，在相对于 S 系以速度 $\vec{v}$ 运动的惯性系 S' 中，Maxwell 方程应具有相同的形式

$$\nabla' \times \vec{H}' = \vec{J}' + \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t'} \quad (20-2a)$$

$$\nabla' \times \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \quad (20-2b)$$

$$\nabla' \cdot \vec{B}' = 0 \quad (20-2c)$$

$$\nabla' \cdot \vec{D}' = \rho' \quad (20-2d)$$

将时空微分算子的 Lorentz 变换公式，代入(20-1b)得

$$(\vec{a} \cdot \nabla' - g \frac{\partial}{\partial t'}) \times \vec{E} + g (\frac{\partial}{\partial t'} - \vec{b} \cdot \nabla') c \vec{B} = 0$$

用 $\vec{a}$ 前乘上式，整理后得

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \cdot \nabla') \times \vec{E} - c g \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \nabla') \vec{B} + c g \frac{\partial}{\partial t'} (\vec{a} \cdot \vec{B}) - g \frac{\partial}{\partial t'} [\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{E})] = 0 \quad (20-3)$$

将 $\vec{a}$ 的公式代入，并考虑到 $\vec{b}$ 为常矢， $(\vec{b} \cdot \nabla') \times \vec{E} = (\vec{b} \cdot \nabla')(\vec{b} \times \vec{E})$ ，(20-3)的左边第一项为

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{a} \cdot \nabla') \times \vec{E} &= (\vec{I} + \frac{g-1}{b^2} \vec{b} \vec{b}) \cdot [\nabla' \times \vec{E} + \frac{g-1}{b^2} (\vec{b} \cdot \nabla')(\vec{b} \times \vec{E})] \\ &= \nabla' \times \vec{E} + \frac{g-1}{b^2} (\vec{b} \cdot \nabla')(\vec{b} \times \vec{E}) + \frac{g-1}{b^2} \vec{b} \vec{b} \cdot (\nabla' \times \vec{E}) \\ &\quad + \frac{(g-1)^2}{b^4} \vec{b} \vec{b} \cdot (\vec{b} \cdot \nabla')(\vec{b} \times \vec{E}) \end{aligned}$$

考虑到

$$\begin{aligned} \nabla' \times [\vec{b} \times (\vec{b} \times \vec{E})] &= \vec{b} \nabla' \cdot (\vec{b} \times \vec{E}) - (\vec{b} \cdot \nabla')(\vec{b} \times \vec{E}) \\ \nabla' \cdot (\vec{b} \times \vec{E}) &= -\vec{b} \cdot (\nabla' \times \vec{E}) \\ \vec{b} \cdot (\vec{b} \cdot \nabla')(\vec{b} \times \vec{E}) &= 0 \end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned}
 \bar{a} \cdot (\bar{a} \cdot \nabla') \times \bar{E} &= \nabla' \times \bar{E} + \frac{g-1}{b^2} \{ b \nabla' \cdot (\bar{b} \times \bar{E}) - \nabla' \times [b \times (\bar{b} \times \bar{E})] \} - \frac{g-1}{b^2} b [\nabla' \cdot (\bar{b} \times \bar{E})] \\
 &= \nabla' \times [\bar{E} - \frac{g-1}{b^2} b \times (\bar{b} \times \bar{E})] \\
 &= \nabla' \times \{ \bar{E} - \frac{g-1}{b^2} [b(b \cdot \bar{E}) - \bar{E} b^2] \} \\
 &= \nabla' \times \{ g \bar{E} - \frac{g-1}{b^2} b b \cdot \bar{E} \} = \nabla' \times (g \bar{a}^{-1} \cdot \bar{E})
 \end{aligned} \tag{20-4}$$

利用

$$\begin{aligned}
 \bar{a} \cdot (b \cdot \nabla) \bar{B} - b[(\bar{a} \cdot \nabla') \cdot \bar{B}] &= (b \cdot \nabla') \bar{B} + \frac{g-1}{b^2} b b \cdot (b \cdot \nabla') \bar{B} - b(\nabla' \cdot \bar{B}) - \frac{g-1}{b^2} b(b b \cdot \nabla') \cdot \bar{B} \\
 &= (b \cdot \nabla') \bar{B} - b(\nabla' \cdot \bar{B}) = -\nabla' \times (b \times \bar{B})
 \end{aligned}$$

则(20-3)左边第二项为

$$-cg \bar{a} \cdot (b \cdot \nabla') \bar{B} = cg [\nabla' \times (b \times \bar{B}) - b(\bar{a} \cdot \nabla') \cdot \bar{B}] \tag{20-5}$$

将时空微分算子的 Lorentz 变换公式代入(20-1c), 可得

$$(\bar{a} \cdot \nabla') \cdot \bar{B} - gb \cdot \frac{\bar{B}}{c t'} = 0 \tag{20-6}$$

于是, (20-5)可写为

$$-cg \bar{a} \cdot (b \cdot \nabla') \bar{B} = cg [\nabla' \times (b \times \bar{B}) - gb b \cdot \frac{\bar{B}}{c t'}] \tag{20-7}$$

(20-3)左边的第四项为

$$-g \frac{\bar{B}}{c t'} [\bar{a} \cdot (b \times \bar{E})] = -g \frac{\bar{B}}{c t'} [(I + \frac{g-1}{b^2} b b) \cdot (b \times \bar{E})] = -g \frac{\bar{B}}{c t'} (b \times \bar{E}) \tag{20-8}$$

最后, 将(20-4)、(20-7)和(20-8)代入(20-3), 得

$$\nabla' \times (g \bar{a}^{-1} \cdot \bar{E} + gb \times c \bar{B}) + \frac{\bar{B}}{c t'} [g \bar{a} \cdot c \bar{B} - g^2 b b \cdot c \bar{B} - gb \times \bar{E}] = 0$$

利用 $\bar{a}^{-1} = \bar{a} - g b b$, 上式变为

$$\nabla' \times (g \bar{a}^{-1} \cdot \bar{E} + gb \times c \bar{B}) + \frac{\bar{B}}{c t'} [g \bar{a}^{-1} \cdot c \bar{B} - gb \times \bar{E}] = 0 \tag{20-9}$$

与(20-2b)比较可知

$$\begin{cases} \bar{E}' = g \bar{a}^{-1} \cdot \bar{E} + gb \times c \bar{B} \\ c \bar{B}' = g \bar{a}^{-1} \cdot c \bar{B} - gb \times \bar{E} \end{cases} \tag{20-10}$$

利用 $\bar{b} \times \bar{A} = \bar{b} \cdot \bar{A}$, 则上式可写为

$$\begin{cases} \bar{E}' = g \bar{a}^{-1} \cdot \bar{E} + g \bar{b} \cdot c \bar{B} \\ c \bar{B}' = g \bar{a}^{-1} \cdot c \bar{B} - g \bar{b} \cdot \bar{E} \end{cases} \tag{20-11}$$

如果令

$$\bar{L}_6 = g \begin{bmatrix} \bar{a}^{-1} & \bar{b} \\ \bar{b} & \bar{a}^{-1} \end{bmatrix} \tag{20-12}$$

则(20-11)可以表示成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \bar{E}' \\ c \bar{B}' \end{bmatrix} = \bar{L}_6 \cdot \begin{bmatrix} \bar{E} \\ c \bar{B} \end{bmatrix} \tag{20-13}$$

同理利用剩余的两个 Maxwell 方程(20-1a)和(20-1d)以及电流、电荷的 Lorentz 变换公式可以得到场矢量 $\vec{H}$ 和 $\vec{D}$ 的 Lorentz 变换公式为

$$\begin{bmatrix} c\vec{D}' \\ \vec{H}' \end{bmatrix} = \bar{L}_6 \cdot \begin{bmatrix} c\vec{D} \\ \vec{H} \end{bmatrix} \quad (20-14)$$

从(20-10)可以看出，在 S 系中当磁场与速度方向垂直时会在 S' 系中产生电场，因此当一导体垂直于磁场运动时，必然会感应电压。同样，在 S 系中当电场与速度方向垂直时也会在 S' 系中产生磁场。

【讨论】

I 场矢量变换的另一种表示式

将场矢量分解为平行于速度 $\vec{v}$ 的分量和垂直于速度 $\vec{v}$ 的分量，即

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_p + \vec{E}_n, & \vec{E}' &= \vec{E}'_p + \vec{E}'_n \\ \vec{B} &= \vec{B}_p + \vec{B}_n, & \vec{B}' &= \vec{B}'_p + \vec{B}'_n \end{aligned}$$

式中，下标 p 和 n 分别表示平行于和垂直于 $\vec{v}$ 的分量。利用(20-10)，有

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \vec{E}'_p + \vec{E}'_n = g a^{-1} \cdot (\vec{E}_p + \vec{E}_n) + gb \times c(\vec{B}_p + \vec{B}_n) \\ &= g \left(1 + \frac{1-g}{gb^2} \vec{v}\vec{v} \right) \cdot (\vec{E}_p + \vec{E}_n) + gb \times c\vec{B}_n \\ &= g(\vec{E}_p + \vec{E}_n) + \frac{1-g}{b^2} b^2 \vec{E}_p + gb \times c\vec{B}_n \\ &= \vec{E}_p + g(\vec{E}_n + \vec{b} \times c\vec{B}_n) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} \vec{E}'_p = \vec{E}_p \\ \vec{E}'_n = g(\vec{E}_n + \vec{b} \times c\vec{B}_n) \end{cases} \quad (20-15)$$

同理可得

$$\begin{cases} \vec{H}'_p = \vec{H}_p \\ \vec{H}'_n = g(\vec{H}_n - \vec{b} \times c\vec{D}_n) \end{cases} \quad (20-16)$$

$$\begin{cases} \vec{B}'_p = \vec{B}_p \\ c\vec{B}'_n = g(c\vec{B}_n - \vec{b} \times \vec{E}) \end{cases} \quad (20-17)$$

$$\begin{cases} \vec{D}'_p = \vec{D}_p \\ c\vec{D}'_n = g(c\vec{D}_n + \vec{b} \times \vec{H}) \end{cases} \quad (20-18)$$

可以看出，在场矢量变换中，与速度 $\vec{v}$ 平行的分量保持不变，只有与速度 $\vec{v}$ 垂直的分量发生变化，这一点与空间坐标的变换的恰好相反。

I $\bar{L}_6$ 的性质

(1) $\bar{L}_6^T = \bar{L}_6$ ，即 $\bar{L}_6$ 为对称矩阵

证：根据(20-12)，有

$$\bar{L}_6^T = g \begin{bmatrix} (a^{-1})^T & -b^T \\ b^T & (a^{-1})^T \end{bmatrix}$$

由于 $(a^{-1})^T = a^{-1}$ ， $b^T = -b$ ，所以 $\bar{L}_6^T = \bar{L}_6$ 。

$$(2) \quad \bar{L}_6^{-1} = g \begin{bmatrix} a^{-1} & -b^T \\ b^T & a^{-1} \end{bmatrix} = L_6(-\vec{b})$$

上式说明，场矢量的 Lorentz 变换的逆变换等效于改变速度的方向。换句话说，惯性系 S' 相对于 S 系以速度 $\mathbf{v}$ 运动，则 S 系相对于 S' 系就以速度 $-\mathbf{v}$ 运动。

$$(3) \quad \bar{L}_6^T \cdot \begin{bmatrix} \bar{I} & \bar{0} \\ \bar{0} & -\bar{I} \end{bmatrix} \cdot \bar{L}_6 = \begin{bmatrix} \bar{I} & \bar{0} \\ \bar{0} & -\bar{I} \end{bmatrix}, \quad L_6^T \cdot \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{I} \\ \bar{I} & \bar{0} \end{bmatrix} \cdot L_6 = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{I} \\ \bar{I} & \bar{0} \end{bmatrix}$$

[例 20-1] 设一静电荷 q 在 S 系中以匀速 $\mathbf{v}$ 运动，求 S 系中 $t=0$ 时刻的电场和磁场。

解：取 S' 系与电荷 q 一起运动，且电荷 q 位于 S' 系的原点，所以， $t=0$ 时刻电荷 q 亦位于 S 系

的原点。在 S' 系中静电电荷产生的场为

$$\begin{cases} \mathbf{E}' = \frac{q\mathbf{r}'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}'|^3} \\ \mathbf{B}' = 0 \end{cases}$$

在 $t=0$ 时刻，由矢径的 Lorentz 变换式，得

$$\mathbf{r}' = \bar{a} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} + \frac{g-1}{b^2} \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) = g \mathbf{r}_p + \mathbf{r}_n$$

所以， $|\mathbf{r}'|^3 = (|\mathbf{r}'|^2)^{\frac{3}{2}} = (g^2 r_p^2 + |\mathbf{r}_n|^2)^{\frac{3}{2}} = g^3 [r_p^2 + (1-b^2)|\mathbf{r}_n|^2]^{\frac{3}{2}} = (gb)^3$

式中，

$$b = [r_p^2 + (1-b^2)|\mathbf{r}_n|^2]^{\frac{1}{2}} = [r^2 \cos^2 q + (1-b^2)r^2 \sin^2 q]^{\frac{1}{2}} = g[1-b^2 \sin^2 q]^{\frac{1}{2}} q \text{ 为矢径 } \mathbf{r} \text{ 与速度 } \mathbf{v} \text{ 之间的夹角。}$$

利用场矢量的 Lorentz 变换，可得

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= g \bar{a}^{-1} \cdot \mathbf{E}' - gb \times c \mathbf{B}' = g \left(\bar{I} + \frac{1-g}{gb^2} \mathbf{v} \mathbf{v} \right) \cdot \frac{q(g\mathbf{r}_p + \mathbf{r}_n)}{4\pi\epsilon_0(rb)^3} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 b^3} [g \mathbf{r}_p + \mathbf{r}_n + (1-g)\mathbf{r}_p] = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2 b^3} \\ \mathbf{B} &= g \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{E}'}{c^2} = \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2 b^3} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \end{aligned}$$

由上述公式可以看出，匀速运动的点电荷的电场 $\mathbf{E}$ 是由点电荷瞬时位置径向发出，其磁场 $\mathbf{B}$ 与电场 $\mathbf{E}$ 和运动方向垂直，而且磁力线是绕运动方向的圆。事实上，运动的电荷是电流， $\mathbf{B}$ 就是电流产生的磁场。

20.2 电磁波的相位不变性

设 S 系中有一均匀平面波，其电场为 $\mathbf{E} = \bar{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ 。设 S' 系相对于 S 系以速度 $\mathbf{v}$ 运动，在 S' 系中设均匀平面波的电场为 $\mathbf{E}' = \bar{E}'_0 \cos(\omega' t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}')$ 。根据场矢量的变换式 $\mathbf{E}'_p = \bar{E}'_p$ ，可得

$$\bar{E}'_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \bar{E}'_0 \cos(\omega' t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}')$$

由于 $t=0$ ， $\mathbf{r}'=0$ 时 $t'=0$ ， $\mathbf{r}'=0$ ，所以， $\bar{E}'_0 = \bar{E}_0$ ，于是

$$\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \omega' t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' \quad (20-19)$$

也就是说，在 Lorentz 变换下，相位 $\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ 是不变量。

利用相位不变性，可以导出频率 ω 和波矢量 $\mathbf{k}$ 的 Lorentz 变换式。根据时空坐标的 Lorentz 变换式可得

$$\begin{aligned} \omega' t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' &= \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \\ &= \frac{\omega}{c} (ct' + \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}') - \mathbf{k} \cdot (\bar{a} \cdot \mathbf{r}' + gbct') \\ &= g(\omega - ck \cdot \mathbf{b})t' + \left(\frac{\omega}{c} gb - \mathbf{k} \cdot \bar{a}\right) \cdot \mathbf{r}' \end{aligned}$$

因为 $\vec{k} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{k}$ ，所以由上式可得 $\vec{k}' = \vec{a} \cdot \vec{k} - gb \frac{\vec{v}}{c} w$ ， $\frac{w'}{c} = g(\frac{w}{c} - b \cdot \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{\vec{v}}{c})$

即

$$\begin{bmatrix} \vec{k}' \\ \frac{jw'}{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a} & jgb \frac{\vec{v}}{c} \\ -jgb \frac{\vec{v}}{c} & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{k} \\ \frac{jw}{c} \end{bmatrix} = \vec{L} \begin{bmatrix} \vec{k} \\ \frac{jw}{c} \end{bmatrix} \quad (20-20)$$

变换矩阵又是 Lorentz 矩阵 $\vec{L}$ 。利用上式可以解释多普勒效应和光行差问题。

I 多普勒效应

设一发射频率为 w 的发射机连结于 S 系，接收机连结于 S' 系，则由(20-20)，接收 w' 满足

$$w' = g(w - \vec{v} \cdot \vec{k}) = gw(1 - b \cos q) \quad (20-21)$$

式中， q 为 $\vec{k}$ 与 $\vec{v}$ 之间的夹角， $k = w/c$ 。

所以，接收频率 w' 将不同于发射频率 w ，这便是多普勒效应。当 $\vec{v}$ 与 $\vec{k}$ 同方向时，即接收机沿波的传播方向离开发射机时， $q = 0$ ，则

$$w' = gw(1 - b) = w \sqrt{\frac{1-b}{1+b}}$$

可见：此时接收频率比发射频率低，即频率向下偏移，称为红移。

当 $\vec{v}$ 与 $\vec{k}$ 方向相反时，即接收机逆着波的传播方向向着发射机运动时， $q = \pi$ ，则

$$w' = gw(1 + b) = w \sqrt{\frac{1+b}{1-b}}$$

这时接收频率比发射频率高，即频率向上偏移，称为紫移。

当 $\vec{v}$ 与 $\vec{k}$ 垂直时，即接收机在垂直于波的传播方向运动时， $q = \pi/2$ ，则 $w' = gw$ ，此时接收频率仍比发射频率高，称为横向多普勒效应。

I 光行差问题

设离地球很远的恒星发射的光线垂直投射到地球绕太阳转动的轨道平面上，现用望远镜观察该恒星，下面求望远镜应倾斜的夹角 d 。

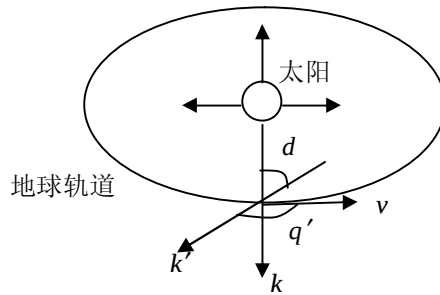


图 20-1 地球绕太阳转动

设 $\vec{v}$ 为地球绕太阳转动的线速度， S' 系固定于地球上，恒星在 S 系中静止。如图 20-1 所示。根据 $\vec{k}$ 的变换式，可得

$$\begin{cases} \vec{k}'_n = \vec{k}_n \\ \vec{k}'_p = g(\vec{k}_p - \frac{w}{c} \frac{\vec{v}}{c}) \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} k' \sin q' = k \sin q \\ k' \cos q' = gk(\cos q - b) \end{cases}$$

于是

$$\tan q' = \frac{\sin q}{g(\cos q - b)}$$

因为 $\vec{v}$ 与 $\vec{k}$ 垂直， $q = \pi/2$ ，所以， $\tan q' = -\frac{1}{rb} = -\frac{\sqrt{1-b^2}}{b}$ ，根据图 20-1 所示的角度关系 $q' = \frac{\pi}{2} + d$ ，

可得, $-ctgd = -\frac{\sqrt{1-b^2}}{b}$, 于是, $tg d = \frac{b}{\sqrt{1-b^2}}$, 即 $d = tg^{-1} \frac{b}{\sqrt{1-b^2}}$ 。

由于地球绕太阳公转在不同位置的速度 $\vec{v}$ 的方向不同, 因而倾斜角 d 也随之改变, 好像恒星相对于地球作圆周运动。这就是著名的光行差问题。

习题 20

20-1 利用 Maxwell 方程和 Lorentz 变换公式

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, & \begin{bmatrix} \nabla \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} = L^{-1} \begin{bmatrix} \nabla \\ \frac{\partial}{\partial ct'} \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} \vec{J}' \\ cr' \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} \vec{J} \\ cr \end{bmatrix} \\ \nabla \cdot \vec{D} = r \end{cases}$$

证明场矢量 $\vec{H}$ 和 $\vec{D}$ 的 Lorentz 变换公式为

$$\begin{bmatrix} c\vec{D}' \\ \vec{H}' \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} \overline{a}^{-1} & -\overline{b} \\ -\overline{b} & \overline{a}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\vec{D} \\ \vec{H} \end{bmatrix}$$

20-2 证明在 Lorentz 变换下, $|\vec{E}|^2 - |c\vec{B}|^2$ 和 $|\vec{E} \cdot \vec{B}|$ 为 Lorentz 不变量, 即

$$|\vec{E}'| - |c\vec{B}'|^2 = |\vec{E}|^2 - |c\vec{B}|^2, \quad |\vec{E}' \cdot \vec{B}'| = |\vec{E} \cdot \vec{B}|$$

◆◆

第 21 讲 运动媒质的 Lorentz 变换和 Minkovski 四维空间

21.1 本构关系的变换

设媒质在惯性系 S' 中静止，在 S 系中以速度 $\mathbf{v}$ 运动。在 S' 中静止媒质的本构方程为

$$\begin{bmatrix} c\mathbf{D}' \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{H}' \end{bmatrix} = \bar{\bar{C}}_{EB}' \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E}' \\ \mathbf{r} \\ c\mathbf{B}' \end{bmatrix} \quad (21-1)$$

式中， $\bar{\bar{C}}_{EB}' = \begin{bmatrix} \bar{P}' & \bar{L}' \\ \bar{M}' & \bar{Q}' \end{bmatrix}$ 。根据场矢量的 Lorentz 变换式 $\begin{bmatrix} c\mathbf{D}' \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{H}' \end{bmatrix} = \bar{L}_6 \cdot \begin{bmatrix} c\mathbf{D} \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} \mathbf{E}' \\ \mathbf{r} \\ c\mathbf{B}' \end{bmatrix} = \bar{L}_6 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{r} \\ c\mathbf{B} \end{bmatrix}$ ，可得

S 系中媒质即运动媒质的本构方程为

$$\begin{bmatrix} c\mathbf{D} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = \bar{\bar{C}}_{EB} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{v} \\ c\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (21-2)$$

式中， $\bar{\bar{C}}_{EB} = \begin{bmatrix} \bar{P} & \bar{L} \\ \bar{M} & \bar{Q} \end{bmatrix} = \bar{L}_6^{-1} \cdot \bar{\bar{C}}_{EB}' \cdot \bar{L}_6$ ，即

$$\begin{cases} \bar{P} = g^2 (\bar{a}^{-1} \cdot \bar{P}' \cdot \bar{a}^{-1} - \bar{b} \cdot \bar{M}' \cdot \bar{a}^{-1} - \bar{a}^{-1} \cdot \bar{L}' \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{Q}' \cdot \bar{b}) \\ \bar{L} = g^2 (\bar{a}^{-1} \cdot \bar{P}' \cdot \bar{b} - \bar{b} \cdot \bar{M}' \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{L}' \cdot \bar{a}^{-1} - \bar{b} \cdot \bar{Q}' \cdot \bar{a}^{-1}) \\ \bar{M} = g^2 (\bar{b} \cdot \bar{P}' \cdot \bar{a}^{-1} + \bar{a} \cdot \bar{M}' \cdot \bar{a}^{-1} - \bar{b} \cdot \bar{L}' \cdot \bar{b} - \bar{a} \cdot \bar{Q}' \cdot \bar{b}) \\ \bar{Q} = g^2 (\bar{b} \cdot \bar{P}' \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{M}' \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{L}' \cdot \bar{a}^{-1} + \bar{a} \cdot \bar{Q}' \cdot \bar{a}^{-1}) \end{cases} \quad (21-3)$$

对于各向同性媒质，设在惯性系 S' 中媒质静止，本构方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{D}' &= \epsilon \mathbf{E}' \\ \mathbf{B}' &= \mu \mathbf{H}' \end{aligned}$$

所以， S' 系中的本构矩阵 $\bar{\bar{C}}_{EB}'$ 为

$$\bar{\bar{C}}_{EB}' = \begin{bmatrix} \epsilon \bar{I} & \bar{0} \\ \bar{0} & \frac{1}{\mu} \bar{I} \end{bmatrix} \quad (21-4)$$

当媒质在惯性系 S 中以速度 $\mathbf{v}$ 运动时，应用(21-3)可得本构矩阵 $\bar{\bar{C}}_{EB}$ 为

$$\bar{\bar{C}}_{EB} = g^2 \begin{bmatrix} ce' \bar{a} \cdot \bar{a} + \frac{1}{cm'} \bar{b} \cdot \bar{b} & ce' \bar{a} \cdot \bar{b} - \frac{1}{cm'} \bar{b} \cdot \bar{a} \\ ce' \bar{b} \cdot \bar{a} - \frac{1}{cm'} \bar{a} \cdot \bar{b} & ce' \bar{b} \cdot \bar{b} + \frac{1}{cm'} \bar{a} \cdot \bar{a} \end{bmatrix} \quad (21-5)$$

利用公式 $\bar{a} \cdot \bar{a} = I - bb$, $\bar{b} \cdot \bar{b} = bb - b^2 I$, $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a} = b$, 可得

$$\bar{\bar{C}}_{EB} = \frac{g^2}{cm'} \begin{bmatrix} (n^2 - b^2) \bar{I} - (n^2 - 1) bb & (n^2 - 1) \bar{b} \\ (n^2 - 1) \bar{b} & (1 - n^2 b^2) \bar{I} + (n^2 - 1) bb \end{bmatrix} \quad (21-6)$$

式中, $n^2 = c^2 e' m'$, n 为 S' 系中媒质的折射率。对于真空, $e' = e_0$, $m' = m_0$, $n^2 = 1$, 则

$$\bar{\bar{C}}_{EB} = \frac{1}{cm_0} \begin{bmatrix} \bar{I} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{I} \end{bmatrix} \quad (21-7)$$

于是

$$\begin{aligned} \bar{D} &= e_0 \bar{E} \\ \bar{B} &= m_0 \bar{H} \end{aligned} \quad (21-8)$$

由(21-6)和(21-8)可以看出, 一般情况下, S' 系中静止的各向同性媒质在 S 系中以速度 $\bar{v}$ 运动时变成了双各向异性媒质。但对于真空, 运动媒质仍为各向同性, 真空介电常数 e_0 和磁导率 m_0 为 Lorentz 不变量。

21.2 极化矢量和磁化矢量的变换

设媒质在 S' 系中是静止的, 极化矢量 $\bar{P}'$ 和磁化矢量 $\bar{M}'$ 满足

$$\bar{P}' = \bar{D}' - e_0 \bar{E}' \quad (21-9)$$

$$\bar{M}' = \frac{\bar{B}'}{m_0} - \bar{H}' \quad (21-10)$$

由于真空介电常数 e_0 和磁导率 m_0 为 Lorentz 不变量, 在 S 系中当媒质以速度 $\bar{v}$ 运动时, 极化矢量 $\bar{P}$ 和磁化矢量 $\bar{M}$ 满足与(21-9)和(21-10)相同形式的方程

$$\bar{P} = \bar{D} - e_0 \bar{E} \quad (21-11)$$

$$\bar{M} = \frac{\bar{B}}{m_0} - \bar{H} \quad (21-12)$$

利用 $\bar{D}$ 和 $\bar{E}$ 、 $\bar{B}$ 和 $\bar{H}$ 的 Lorentz 变换式, 并考虑到(21-9)和(21-10), 可得

$$\begin{bmatrix} \bar{cP} \\ \bar{v} \\ \bar{M} \end{bmatrix} = L_6 \cdot \begin{bmatrix} \bar{cP}' \\ \bar{v}' \\ \bar{M}' \end{bmatrix} \quad (21-13)$$

21.3 Minkovski 四维空间电磁场方程

1907 年, Minkovski 在相对论创立三周年后, 把通常的三维空间再加上时间作为一个整体, 提出了四维空间的概念。四维空间的建立使相对论电动力学的公式简单、形式优美, 使我们对时空的认识达到了更深的层次。

1. 四维空间的基本量与 Lorentz 变换

设 (x, y, z) 为三维空间坐标, Minkovski 所提出了四维空间 (x_1, x_2, x_3, x_4) 的概念就是在三维空间基础上, 令 jct 为第四坐标, 即

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \\ x_4 = jct \end{cases} \quad (21-14)$$

于是, 可以定义四维空间的矢径 $\mathbf{r}_4$ 、微分算子 ∇_4 , 电流源 $\mathbf{J}_4$ 和波矢量 $\mathbf{k}_4$ 为

$$\mathbf{r}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ jct \end{bmatrix}, \quad \nabla_4 = \begin{bmatrix} \nabla \\ \frac{1}{jct} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ jcr \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{k} \\ j\frac{w}{c} \end{bmatrix} \quad (21-15)$$

根据前面几讲的分析, 在惯性系中这些量均满足 Lorentz 变换。即

$$\mathbf{r}'_4 = \bar{\bar{L}} \mathbf{r}_4, \quad \nabla'_4 = \bar{\bar{L}} \nabla_4, \quad \mathbf{J}'_4 = \bar{\bar{L}} \mathbf{J}_4, \quad \mathbf{k}'_4 = \bar{\bar{L}} \mathbf{k}_4$$

式中, 带撇的量与不带撇的量分别对应于惯性系 S 和相对于 S 系以速度 $\mathbf{v}$ 运动的惯性系 S' 。 $\bar{\bar{L}}$ 为 Lorentz 变换矩阵

$$\bar{\bar{L}} = \begin{bmatrix} \bar{a} & jgb \\ -jgb^T & g \end{bmatrix} \quad (21-16)$$

【定理】四维空间中 Lorentz 变换为正交变换。

证明:

$$\bar{\bar{L}}^T \bar{\bar{L}} = \begin{bmatrix} \bar{a}^T & -jgb^T \\ jgb^T & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a} & jgb \\ -jgb^T & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}^T \bar{a} - g^2 b b^T & jg \bar{a}^T b - jg^2 b^T \\ (jg \bar{a}^T b - jg^2 b^T)^T & g^2 (1 - b^2) \end{bmatrix}$$

利用 $\bar{a}^T \bar{a} = \bar{I} + g^2 b b^T$, $\bar{a}^T b = b^T \bar{a} = gb$, $g = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$, 得 $\bar{\bar{L}}^T \bar{\bar{L}} = \bar{\bar{I}}_4$, 即 $\bar{\bar{L}}$ 为正交矩阵。所以, Lorentz

变换是正交变换。

在坐标变换中, 正交变换对应于坐标旋转。所以, 在四维空间中 Lorentz 变换对应于四维坐标的旋转。

【推论】四维空间的矢径 $\mathbf{r}_4$ 、微分算子 ∇_4 、电流源 $\mathbf{J}_4$ 和波矢量 $\mathbf{k}_4$ 的模值是 Lorentz 不变量。

证明：由 $\mathbf{r}'_4 = \mathbf{L} \mathbf{r}_4$ ，有 $\mathbf{r}'_4{}^T \mathbf{r}'_4 = \mathbf{r}_4{}^T \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{r}_4 = \mathbf{r}_4{}^T \mathbf{r}_4$ ，即矢径的模值是 Lorentz 不变量。展开为

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

其本质就是光速不变原理。同理，可证微分算子 ∇_4 、电流源 $\mathbf{J}_4$ 和波矢量 $\mathbf{k}_4$ 的模值也是 Lorentz 不变量。微分算子 ∇_4 的模值就是达朗贝尔算子，所以，达朗贝尔算子是 Lorentz 不变量，即

$$\nabla'^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (21-17)$$

2. 四维空间的电磁场定律

I 电流连续性方程

电流连续性方程 $\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ，即

$$\left[\nabla^T \quad \frac{\partial}{\partial t} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \rho \end{bmatrix} = 0$$

用四维空间微分算子可表示为

$$\nabla_4 \cdot \mathbf{J}_4 = 0 \quad (21-18)$$

I Maxwell 方程

令

$$\overline{\overline{\mathbf{E}}} = \begin{bmatrix} 0 & -E_z & E_y \\ E_z & 0 & -E_x \\ -E_y & E_x & 0 \end{bmatrix} \quad \overline{\overline{\mathbf{H}}} = \begin{bmatrix} 0 & -H_z & H_y \\ H_z & 0 & -H_x \\ -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix} \quad (21-19)$$

以及

$$\overline{\overline{\mathbf{EB}}} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{\mathbf{E}}} & -jc\mathbf{B} \\ jc\mathbf{B}^T & 0 \end{bmatrix} \quad \overline{\overline{\mathbf{HD}}} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{\mathbf{H}}} & jc\mathbf{D} \\ -jc\mathbf{D}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (21-20)$$

则 $\nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{E}}} = \nabla \times \mathbf{B}$, $\nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{H}}} = \nabla \times \mathbf{D}$ 。于是，Maxwell 方程

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad (21-21)$$

和

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \end{cases} \quad (21-22)$$

在四维空间可分别表示为

$$\nabla_4 \cdot \overline{\overline{\mathbf{EB}}} = 0 \quad (21-23)$$

和
$$\nabla_4 \cdot \overline{HD} = J_4^{\mathbf{r}} \quad (21-24)$$

I Poynting 定律和动量定律

Poynting 定律为 $\nabla \cdot \overline{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$ ，动量定律为 $\nabla \cdot \overline{\Phi} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = 0$ 。引入张量

$$\overline{p} = \begin{bmatrix} \overline{\Phi} & -j \frac{\overline{S}}{c} \\ j c \mathbf{g} & w \end{bmatrix} \quad (21-25)$$

则 Poynting 定律和动量定律可统一地表示为

$$\nabla_4 \cdot \overline{p} = 0 \quad (21-26)$$

21.4 运动边界的边界条件

设在惯性系 S' 中有一静止的介质分界面 s ， $\hat{n}'$ 为 s 面从介质 1 指向介质 2 的单位法向矢量。惯性系 S' 相对于惯性系 S 以速度 $\mathbf{v}$ 运动，如图 21-1 所示。

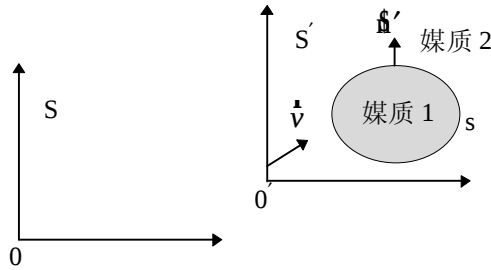


图 21-1 运动的介质分界面

在 S' 系中，静止的介质分界面 s 的边界条件为

$$\begin{cases} \hat{n}' \times (\overline{E}_2' - \overline{E}_1') = \hat{n}' \times \Delta \overline{E}' = 0 \\ \hat{n}' \cdot (\overline{B}_2' - \overline{B}_1') = \hat{n}' \cdot \Delta \overline{B}' = 0 \end{cases} \quad (21-27)$$

$$\begin{cases} \hat{n}' \times (\overline{H}_2' - \overline{H}_1') = \hat{n}' \times \Delta \overline{H}' = \mathbf{J}_2' \\ \hat{n}' \times (\overline{D}_2' - \overline{D}_1') = \hat{n}' \times \Delta \overline{D}' = \mathbf{r}_s' \end{cases} \quad (21-28)$$

引入四维空间矢量

$$\tilde{n}_4' = \begin{bmatrix} \hat{n}' \\ m' \end{bmatrix}, \quad \tilde{n}_4 = \begin{bmatrix} \tilde{n} \\ m \end{bmatrix} \quad (21-29)$$

式中， m 和 m' 为待定数。 $\tilde{n}_4'$ 、 $\tilde{n}_4$ 之间满足 Lorentz 变换，即

$$\tilde{n}_4' = \overline{L} \tilde{n}_4 \quad (21-30)$$

于是，在四维空间 S' 系中静止的介质分界面 s 的边界条件(21-27)和(21-28)可分别写为

$$\tilde{n}_4'^T \overline{\Delta EB}' = 0 \quad (21-31)$$

$$\tilde{n}_4'^T \overline{\Delta HD}' = J_{4s}'^T \quad (21-32)$$

式中, $\overline{\Delta EB}' = \begin{bmatrix} \overline{\Delta E}' & -jc\Delta b' \mathbf{r}' \\ jc\Delta b'^T & 0 \end{bmatrix}$, $\overline{\Delta HD}' = \begin{bmatrix} \overline{\Delta H}' & jc\Delta D' \mathbf{r}' \\ -jc\Delta D'^T & 0 \end{bmatrix}$, $J_{4s}' = \begin{bmatrix} \mathbf{r}'_s \\ J'_s \\ jcr'_s \end{bmatrix}$ 。将(21-31)、(21-32)与

(21-27)、(21-28)比较可知, $m' = 0$ (21-33)
将上式代入(21-30), 得

$$\begin{aligned} \hat{n}' &= \frac{=T}{a} \hat{n} + jgbm \mathbf{r}' \\ 0 &= -jgb \mathbf{r}'^T \hat{n} + gm \end{aligned} \quad (21-34)$$

于是, $m = j\mathbf{b}^T \hat{n}$

(21-35)

根据相对性原理, 在 S 系中边界条件应具有相同的形式,

$$\hat{n}_4'^T \overline{\Delta EB} = 0 \quad (21-36)$$

$$\hat{n}_4'^T \overline{\Delta HD} = J_{4s}'^T \quad (21-37)$$

用矢量形式表示为

$$\begin{cases} \tilde{n} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) - (\mathbf{v} \cdot \tilde{n})(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \\ \tilde{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \\ \tilde{n} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) + (\mathbf{v} \cdot \tilde{n})(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = J_s \\ \tilde{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = r_s \end{cases}$$

由(21-34)可以得到

$$\begin{aligned} \tilde{n} &= \frac{=T}{a} \hat{n}' - jgbm' \mathbf{r}' = \hat{n}' + \frac{r-1}{b^2} \mathbf{r}' \mathbf{r}'^T \hat{n}' \\ |\tilde{n}|^2 &= \tilde{n}^T \tilde{n} = |\hat{n}'|^2 + g^2 (\mathbf{b}^T \hat{n}')^2 \geq |\hat{n}'|^2 = 1 \end{aligned}$$

可以看出, 除非运动方向与 $\hat{n}'$ 垂直, 否则 S 系中的 $\tilde{n}$ 不再是法向单位矢量。 $\tilde{n}$ 的长度大于 1。

习题 21

21-1 试推导极化矢量 $\dot{\mathbf{P}}$ 和磁化矢量 $\dot{\mathbf{M}}$ 的 Lorentz 变换式。

21-2 试导出真空中矢位 $\dot{\mathbf{A}}$ 和标位 j 所满足的波动方程

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \dot{\mathbf{A}} &= -m_0 \mathbf{J} \\ (\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) j &= -r/e_0 \end{aligned}$$

以及 Lorentz 规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

在 Minkovski 四维空间的形式。