

第 8 章

磁场导论

8.1 引言.....	2
8.2 磁场定义.....	3
8.3 载流导线的磁力.....	4
例8.1 半圆环上的磁力.....	6
8.4 载流线圈上的转矩.....	7
8.4.1 偶极子上的磁力.....	9
动画 8.1: 均匀磁场中偶极子受到的转矩.....	10
8.5 均匀磁场中的带电粒子.....	11
动画 8.2: 带电粒子在均匀磁场中的运动.....	12
8.6 应用.....	13
8.6.1 速度选择器.....	13
8.6.2 质谱仪.....	14
8.7 小结.....	15
8.8 解题技巧.....	15
8.9 题解.....	16
8.9.1 导轨上滑动的导电棒.....	16
8.9.2 悬挂着的导电棒.....	17
8.9.3 磁场中的带电粒子.....	18
8.9.4 磁棒的非均匀磁场中.....	19
8.10 思考题.....	19
8.11 附加题.....	20
8.11.1 磁场施加的力.....	20
8.11.2 载流导线受到的力.....	20
8.11.3 滑动棒.....	20
8.11.4 粒子轨迹.....	20
8.11.5 磁场中的粒子轨道.....	21
8.11.6 载流导体环受到力和转矩.....	21
8.11.7 导线上的受力.....	21
8.11.8 浮动的导线.....	21

磁场导论

8.1 引言

我们已经看到，带电体会产生出在任何空间位置上都能感受到的电场 $\vec{E}$ 。同样地，磁棒是磁场 $\vec{B}$ 的源。这一点通过在磁场附近移动小磁针很快就能看清楚。如图 8.1.1 所示，小磁针的取向总是沿着磁铁产生的磁场方向。

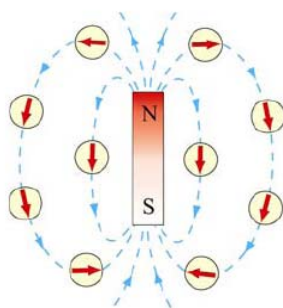


图 8.1.1 磁棒产生的磁场

我们注意到，磁棒有两极，分别定义为北极 (N) 和南极 (S)。在极点附近磁场最强。磁力线总是从北极出来到南极汇聚。当两个磁棒相互接近时，相同的两极将相互排斥，而相异的两极相互吸引 (图 8.1.2)。

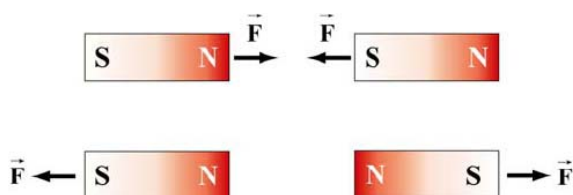


图 8.1.2 磁体之间的吸引和排斥

不像电荷可以单独存在，两个磁极总是成对出现。当你断开一个磁体，得到的将是新的两个新的磁体，每个都有南极和北极 (图 8.1.3)。换句话说，磁“单极子”不可能独立存在，虽然这个问题在理论上很有意思。



图 8.1.3 磁“单极子”不可能独立存在

那么我们怎么来定义磁场 $\vec{B}$ 呢？在电场 $\vec{E}$ 情形下，我们已经看到，场是通过单位电荷上受的力来定义的：

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q} \quad (8.1.1)$$

但由于不存在磁单极子， $\vec{B}$ 必须以另一种方式定义。

8.2 磁场的定义

为了定义某一点上的磁场，考虑一个以速度 $\vec{v}$ 运动的带电粒子 q 。实验上我们有如下观察结果：

- (1) 作用在带电粒子上的力 $\vec{F}_B$ 的大小正比于 v 和 q 。
- (2) $\vec{F}_B$ 的方向取决于 $\vec{v}$ 和 $\vec{B}$ 。
- (3) 当 $\vec{v}$ 平行于 $\vec{B}$ 时，磁力 $\vec{F}_B$ 为零。但当 $\vec{v}$ 与 $\vec{B}$ 的夹角为 θ 时， $\vec{F}_B$ 的大小正比于 $\sin \theta$ 。
- (4) 当带电粒子的电荷符号变号时，磁力的方向亦反向。

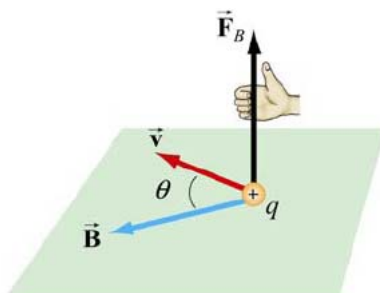


图 8.2.1 磁力的方向

上述观察可总结为如下方程：

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (8.2.1)$$

这个方程可看作是空间某一点磁场的实用定义。 $\vec{F}_B$ 的大小由下式给出：

$$F_B = |q| v B \sin \theta \quad (8.2.2)$$

在国际单位制下，磁场的单位是特斯拉 (T)：

$$1 \text{ 特斯拉} = 1 \text{ T} = 1 \frac{\text{牛顿}}{(\text{库仑})(\text{米/秒})} = 1 \frac{\text{N}}{\text{C} \cdot \text{m/s}} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

$\vec{B}$ 的另一种常用的非国际单位制是**高斯** (G)，这里 $1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}$ 。

注意， $\vec{F}_B$ 总是垂直于 $\vec{v}$ 和 $\vec{B}$ ，因此它不可能改变粒子的速度 v (从而也不可能改变粒子的动能)。

换言之，磁力不可能使粒子加速或减速。由此可知， $\vec{F}_B$ 不对粒子做功：

$$dW = \vec{F}_B \cdot d\vec{s} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = q(\vec{v} \times \vec{v}) \cdot \vec{B} dt = 0 \quad (8.2.3)$$

但正如下面我们将看到的，磁力可以改变 $\vec{v}$ 的方向。

8.3 载流导线的磁力

我们看到，穿越磁场的带电粒子将受到磁力 $\vec{F}_B$ 的作用。既然电流是由带电粒子集合的运动形成的，因此在有磁场的情形下，载流导线也将经受磁力。

考虑在两磁极之间区域的一根长直载流导线。磁场指向纸外，用点 ($\bullet$) 来表示。我们立刻可见，当向下的电流一通过，电线就会向左偏斜。但当电流向上时，则导线向右偏斜，如图 8.3.1。

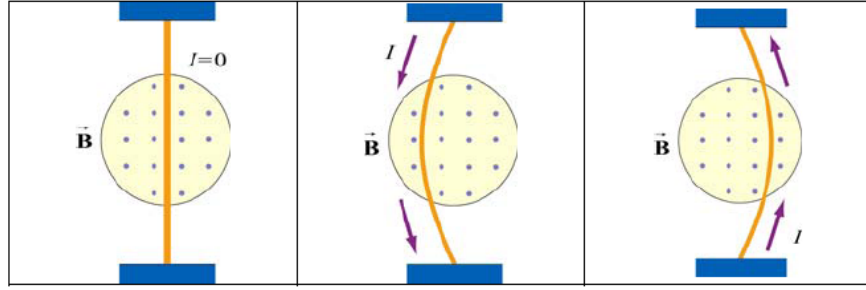


图 8.3.1 磁力引起的载流导线的偏斜

为了计算作用在导线上的力，考虑一段长 l 截面积 A 的载流导线，如图 8.3.2 所示。磁场指向纸内，用叉表示 ($\times$)。

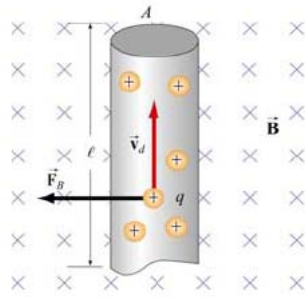


图 8.3.2 作用在载流导线的磁力

假定电荷的平均漂移速度为 $\vec{v}_d$ 。由于这段导线里总的电荷量是 $Q_{\text{tot}} = q(nAl)$ ，其中 n 是单位体积电荷数，于是该段导线总的受力为

$$\vec{F}_B = Q_{\text{tot}} \vec{v}_d \times \vec{B} = qnAl(\vec{v}_d \times \vec{B}) = I(\vec{\ell} \times \vec{B}) \quad (8.3.1)$$

其中 $I = nqv_d A$ ， $\vec{\ell}$ 是大小为 l 的长度矢量，其方向沿电流方向。

对于任意形状的导线，其所受的磁力大小可通过积分来求得。令导线微元为 $d\vec{s}$ （图 8.3.3）。作用在这段导线上的磁力为

$$d\vec{F}_B = I d\vec{s} \times \vec{B} \quad (8.3.2)$$

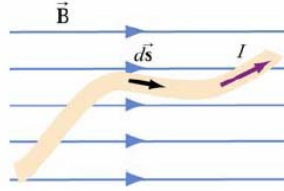


图 8.3.3 磁场中的载流导线

因此总的磁力为

$$\vec{F}_B = I \int_a^b d\vec{s} \times \vec{B} \quad (8.3.3)$$

其中 a 和 b 表示这段导线的两个端点。

作为一个例子，我们来考虑均匀磁场 $\vec{B}$ 中一段弯曲的通有电流 I 的载流导线，如图 8.3.4。由方程 (8.3.3)，作用在这段导线上的磁力为

$$\vec{F}_B = I \left(\int_a^b d\vec{s} \right) \times \vec{B} = I \vec{\ell} \times \vec{B} \quad (8.3.4)$$

其中 $\vec{\ell}$ 是由 a 指向 b 的长度矢量。但如果导线形成任意形状的闭合线圈（图 8.3.5），则该闭环上

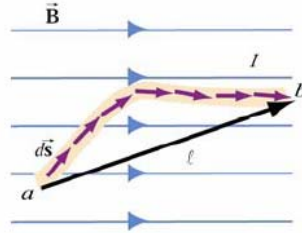


图 8.3.4 磁场中一段弯曲的通有电流 I 的载流导线

受到的力变成

$$\vec{F}_B = I \left(\oint d\vec{s} \right) \times \vec{B} \quad (8.3.5)$$

由于所有长度微元 $d\vec{s}$ 形成一个闭合多边形，它们的矢量和为零，即 $\oint d\vec{s} = 0$ 。所以作用在闭环上的净磁力 $\vec{F}_B = \vec{0}$ 。

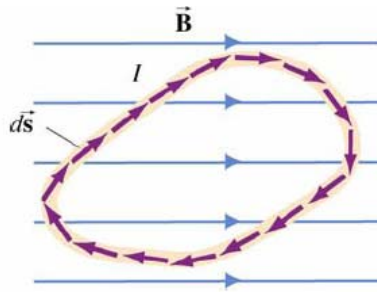


图 8.3.5 均匀磁场中的通有电流 I 的闭合导线

例 8.1：半圆环上的磁力

考虑一个处于 xy 平面上闭合的半圆形线圈，其中通有逆时针方向的电流 I ，如图 8.3.6 所示。均匀磁场指向 $+y$ 方向。试求分别作用在直线段和圆弧段上的磁力。

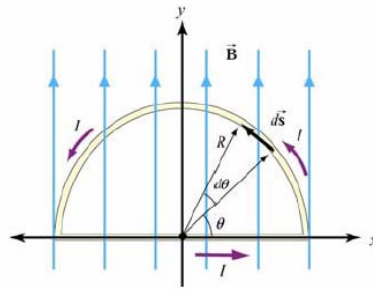


图 8.3.5 载有电流 I 的半圆形闭环

解：

令 $\vec{B} = B\hat{j}$ ， $\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}_2$ 分别是作用在直线段和圆弧段上的磁力。由方程 (8.3.3)，并注意到直线段长度为 $2R$ ，故有

$$\vec{F}_1 = I(2R\hat{i}) \times (B\hat{j}) = 2IRB\hat{k}$$

其中 $\hat{k}$ 指向纸外。

要求 $\vec{F}_2$ ，我们注意到半圆弧上的长度微元 $d\vec{s}$ 可以写成 $d\vec{s} = ds\hat{\theta} = R d\theta(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j})$ 。于是作用在这段微元 $d\vec{s}$ 上的磁力为

$$d\vec{F}_2 = Id\vec{s} \times \vec{B} = IR d\theta(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}) \times (B\hat{j}) = -IBR \sin\theta d\theta \hat{k}$$

从这里我们看到， $d\vec{F}_2$ 指向纸内。沿整个半圆弧积分，得到

$$\vec{F}_2 = -IBR\hat{k} \int_0^\pi \sin\theta d\theta = -2IBR\hat{k}$$

因此作用在整个闭合半圆形线圈上的净磁力为

$$\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

这个结论与我们原先所说的作用在载流闭环上的总磁力为零的判断是一致的。

8.4 载流线圈上的转矩

当我们将电流 I 的矩形线圈置于 xy 平面，均匀磁场 $\vec{B} = B\hat{j}$ 的方向平行于线圈平面，如图 8.4.1(a) 所示，这时线圈会有什么样的运动呢？

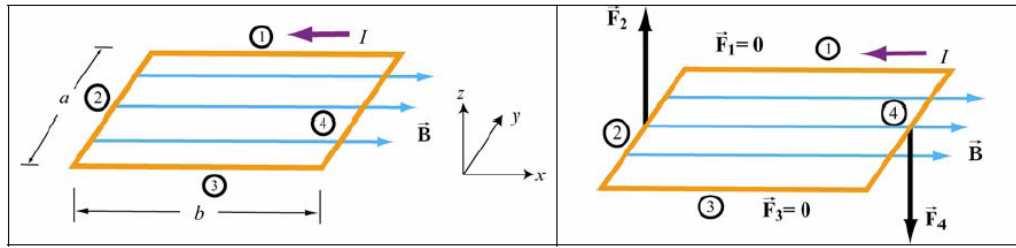


图 8.4.1 (a) 矩形载流线圈置于均匀磁场中。(b) 磁力作用在 2 和 4 边上。

从方程(8.4.1)可知，作用在 1 和 3 边上的磁力为零，因为长度矢量 $\vec{l}_1 = -b\hat{i}$ 和 $\vec{l}_3 = b\hat{i}$ 平行且反平行于 $\vec{B}$ ，它们的叉积为零。另一方面，作用在 2 和 4 边上的磁力则不为零：

$$\begin{cases} \vec{F}_2 = I(-a\hat{j}) \times (B\hat{i}) = IaB\hat{k} \\ \vec{F}_4 = I(a\hat{j}) \times (B\hat{i}) = -IaB\hat{k} \end{cases} \quad (8.4.1)$$

这里 $\vec{F}_2$ 指向纸外， $\vec{F}_4$ 指向纸内。因此，作用在整个矩形线圈上的净力为

$$\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0} \quad (8.4.2)$$

与预想的一致。虽然作用在整个矩形线圈上的净力为零，但力 $\vec{F}_2$ 和 $\vec{F}_4$ 却形成一个转矩，它将使线圈绕 y 轴转动（图 8.4.2）。关于线圈中心的这个转矩为

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \left(-\frac{b}{2}\hat{i}\right) \times \vec{F}_2 + \left(\frac{b}{2}\hat{i}\right) \times \vec{F}_4 = \left(-\frac{b}{2}\hat{i}\right) \times (IaB\hat{k}) + \left(\frac{b}{2}\hat{i}\right) \times (-IaB\hat{k}) \\ &= \left(\frac{IabB}{2} + \frac{IabB}{2}\right)\hat{j} = IabB\hat{j} = IAB\hat{j} \end{aligned} \quad (8.4.3)$$

其中 $A = ab$ 表示线圈面积，正号表示线圈平面绕 y 轴作顺时针转动。引入面积矢量 $\vec{A} = A\hat{n}$ 来表示这些内容是方便的，这里 $\hat{n}$ 是线圈平面法向的单位矢量。 $\hat{n}$ 的正方向由约定的右手法则确定。在这个例子中， $\hat{n} = +\hat{k}$ 。于是上述转矩可写成

$$\vec{\tau} = I\vec{A} \times \vec{B} \quad (8.4.4)$$

注意：转矩的大小在 $\vec{\mathbf{B}}$ 平行于线圈平面（或垂直于 $\vec{\mathbf{A}}$ ）时最大。

现在我们来考虑线圈平面（或面积矢量 $\vec{\mathbf{A}}$ ）与磁场方向有一夹角 θ 的一般情形。

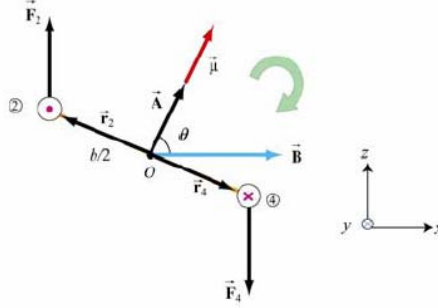


图 8.4.2 矩形线圈的转动

从图 8.4.2 可见，转动臂可表示为：

$$\vec{\mathbf{r}}_2 = \frac{b}{2}(-\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}}) = -\vec{\mathbf{r}}_4 \quad (8.4.5)$$

这样净转矩变成

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{\tau}} &= \vec{\mathbf{r}}_2 \times \vec{\mathbf{F}}_2 + \vec{\mathbf{r}}_4 \times \vec{\mathbf{F}}_4 = 2\vec{\mathbf{r}}_2 \times \vec{\mathbf{F}}_2 = 2 \cdot \frac{b}{2}(-\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}}) \times (IaB\hat{\mathbf{k}}) \\ &= IabB \sin \theta \hat{\mathbf{j}} = I\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} \end{aligned} \quad (8.4.6)$$

对于有 N 匝的线圈，转矩的大小为

$$\tau = NIAB \sin \theta \quad (8.4.7)$$

量 $NI\vec{\mathbf{A}}$ 称为磁偶极矩 $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ ：

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{\mu}} = NI\vec{\mathbf{A}}} \quad (8.4.8)$$

$\vec{\boldsymbol{\mu}}$ 的方向同面积矢量 $\vec{\mathbf{A}}$ （垂直于线圈平面），亦由右手法则确定（图 8.4.3）。在国际单位之下，磁偶极矩的单位是安培·米²（A·m²）。利用 $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ 的表示式，作用在载流线圈上的转矩可写成：

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{\mu}} \times \vec{\mathbf{B}}} \quad (8.4.9)$$

这个方程与方程 (2.8.3) 的 $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}}$ 相似，后者表示的是电偶极子 $\vec{\mathbf{p}}$ 在电场 $\vec{\mathbf{E}}$ 中的转矩。我们知道电偶极子的势能是 $U = -\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{E}}$ （见方程(2.8.7)），那么在磁场情形下是否会有类似的表达式呢？外力在将磁偶极子由 θ_0 转动到 θ 时所做的功为

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= \int_{\theta_0}^{\theta} \tau d\theta' = \int_{\theta_0}^{\theta} (\mu B \sin \theta') d\theta' = \mu B (\cos \theta_0 - \cos \theta) \\ &= \Delta U = U - U_0 \end{aligned} \quad (8.4.10)$$

我们再次看到， $W_{\text{ext}} = -W$ ，这里 W 是磁场做的功。取在 $\theta_0 = \pi/2$ 处 $U_0 = 0$ ，则磁偶极子在外场中具有势能

$$U = -\mu B \cos \theta = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (8.4.11)$$

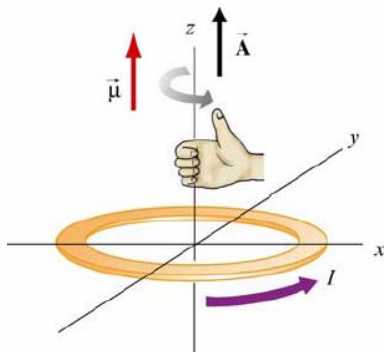


图 8.4.3 $\vec{\mu}$ 的方向由右手法则确定

当 $\vec{\mu}$ 的方向与 $\vec{B}$ 平行且同向时，线圈的位形处于稳定平衡状态，此时 U 达到最小值 $U_{\min} = -\mu B$ 。但如果 $\vec{\mu}$ 与 $\vec{B}$ 反平行，则 $U_{\max} = +\mu B$ 达到最大，且系统是不稳定的。

8.4.1 偶极子上的磁力

正如我们在上面看到的，置于均匀磁场中的载流矩形线圈受到的力为零。那么如果磁场是非均匀的又将发生什么变化呢？这时磁偶极子上就会有净力出现。

下面考虑这样一种情形：将小磁偶极子 $\vec{\mu}$ 置于磁棒对称轴的延长线上，如图 8.4.4 所示。

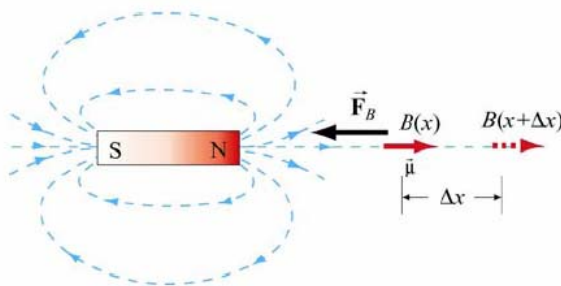


图 8.4.4 磁棒附近的磁偶极子

磁偶极子将受到非均匀磁场的吸引力。因此必有一个外在的力使偶极子向右偏转。使偶极子移动距离 Δx 的外力大小由下式给出：

$$F_{\text{ext}} \Delta x = W_{\text{ext}} = \Delta U = -\mu B(x + \Delta x) + \mu B(x) = -\mu [B(x + \Delta x) - B(x)] \quad (8.4.12)$$

其中我们用到了方程(8.4.11)。对于小 Δx ，外力可简化为

$$F_{\text{ext}} = -\mu \frac{[B(x + \Delta x) - B(x)]}{\Delta x} = -\mu \frac{dB}{dx} \quad (8.4.13)$$

当 $dB/dx < 0$ ，即磁场随 x 增大而减小时，这个力是正的。它就是用来克服磁棒吸引力的那个力。因此我们有

$$F_B = \mu \frac{dB}{dx} = \frac{d}{dx} (\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \quad (8.4.14)$$

更一般地，在非均匀磁场 $\vec{B}$ 中的磁偶极子 $\vec{\mu}$ 受到的力可写成

$$\vec{F}_B = \nabla (\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \quad (8.4.15)$$

其中

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \quad (8.4.16)$$

是梯度算符。

动画 8.1：均匀磁场中偶极子受到的转矩

“。。。要理解这一点，我们只能认为（罗盘）磁针在振荡着收拢，这是因为它的磁性条件、极化倾向以及一定强度的力线使然，要不然它不可能横越其所在的空间。。。 ”

米切尔·法拉第 [1855]

考虑一个均匀背景场下的磁偶极子。从历史上看，我们注意到法拉第理解的罗盘磁针振荡其实就是我们下面要描述的情形，见图 8.4.5。它表示一个差不多处于波士顿纬度位置的在地磁场中振荡的“磁倾仪指针”的磁偶极子。如演示所示，该纬度上的地磁场主要是向下和向北的。

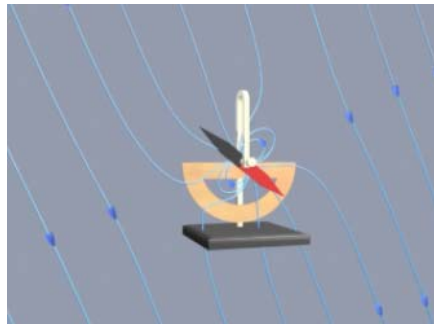


图 8.4.5 作为磁倾仪指针的磁偶极子在地磁场中的振荡

为了解释这个演示中的运动，我们假定磁偶极子矢量最初沿着地磁场方向作顺时针转动。当偶极子转动时，磁场线被压缩和拉长。磁场线压缩和拉长所造成的张力和压力导致偶极子受

到一个电磁转矩，它减缓偶极子的顺时针转动，并使其最终停下来。但逆时针转矩依然存在，于是偶极子开始作逆时针转动，并再次越过与地磁场平行的状态（此时转矩为零）。

随着偶极子持续做逆时针转动，磁场线在相反方向被压缩和拉长。电磁转矩亦反向，现在它减缓偶极子的那时针转动，并使其最终停下来再度开始顺时针转动。如果系统不存在阻尼，这种运动将无休止地持续下去。

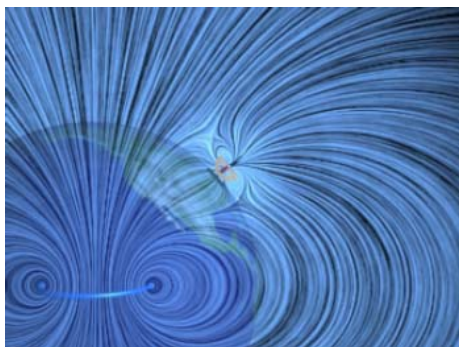


图 8.4.6 作为磁倾仪指针的磁偶极子在地磁场中旋转振荡。图中画出了产生电磁场的电流。

在此情形下，角动量守恒能够得以保持吗？图 8.4.6 显示了磁倾仪指针的场线和地心深处产生的地磁场场线的总的图像。如果你检测一下这个演示中地磁场和磁倾仪指针磁场之间传递的应力，你就会确信，作用在磁倾仪指针上的顺时针转矩总是与作用在产生地磁场的电流上的逆时针转矩相伴的。磁针与地心电流之间相等且相反的角动量的交换使得总角动量守恒。

8.5 均匀磁场中的带电粒子

如果一个质量 m 的粒子以恒定速度 v 作半径为 r 的圆周运动，那么作用在粒子上的将是大小为 $F = mv^2/r$ 的径向力，它总是指向圆心并且与粒子速度相垂直。

在 8.2 节，我们曾说明了磁力 $\vec{F}_B$ 总是指向与带电粒子运动速度 $\vec{v}$ 和磁场 $\vec{B}$ 相垂直的方向。由于 $\vec{F}_B$ 不做功，因此它只能改变 $\vec{v}$ 的方向而不能改变其大小。如果带电粒子以垂直于 $\vec{B}$ 的初始速度 $\vec{v}$ 通过均匀磁场 $\vec{B}$ ，情形将如何呢？为简单起见，我们令粒子的电荷为 $+q$ ， $\vec{B}$ 的方向指向书页纸内。显然 $\vec{F}_B$ 将起着向心力的作用，粒子将以逆时针方向作圆周运动，如图 8.5.1 所示。

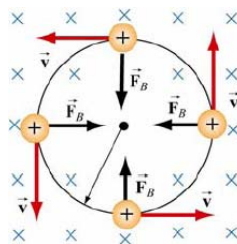


图 8.5.1 带电粒子以垂直于 $\vec{B}$ 的初始速度 $\vec{v}$ 在均匀磁场 $\vec{B}$ 中运动的轨迹。

由

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \quad (8.5.1)$$

知，圆的半径为

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (8.5.2)$$

周期 T （粒子旋转一周所需时间）为

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{v} \frac{mv}{qB} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (8.5.3)$$

类似地，粒子的角速度（回旋频率） ω 为

$$\omega = 2\pi f = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} \quad (8.5.4)$$

如果带电粒子的初始速度有平行于磁场 $\vec{B}$ 的分量，则轨迹不是圆，而是如图 8.5.2 所示的螺旋线：

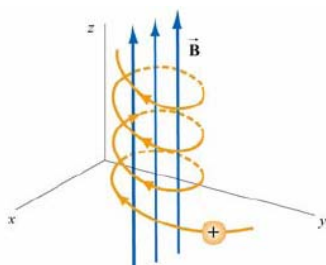


图 8.5.2 带电粒子在外磁场中的螺旋运动轨迹。粒子速度在沿着磁场 $\vec{B}$ 的方向上有非零分量。

动画 8.2：带电粒子在均匀磁场中的运动

图 8.5.3 显示的是一个电荷向着垂直磁场运动的情形。当电荷进入外磁场非零的区域，它就会沿着既垂直于磁场又垂直于进入磁场瞬时的速度的方向偏转。由此造成电荷走过一段圆弧，直到粒子离开非零磁场区。我们以动画形式显示了外磁场与运动电荷磁场之和的总磁场（见第 9 章）：

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \quad (8.5.5)$$

在粒子被推入磁场的相反方向上磁场有一个凸起，这是由于该边缘区出现磁压强所致。正是这个磁压强使得带电粒子作圆周运动。

最后，我们来考虑动量守恒。图 8.5.3 中电荷的运动方向在出射时与入射时相比改变了 90° 。这个过程是如何保持动量守恒的？我们说这里动量是守恒的，是因为这里运动电荷的动量被传

递到了产生均匀外磁场的电流上。图 8.5.3 的磁场位形是合理的。将运动电荷推向一边的磁场应力总是伴随着在相反方向上拉动电流源的张力。为了看清这一点，我们不妨贴近观测一下外场线进入该区域时的磁场应力，此处产生磁场的电流未表示出来，但我们知道磁场的表现就如同它在平行自身方向上施加一个张力一样。运动电荷损失的动量正是以这种方式转移到了产生均匀磁场的电流上。

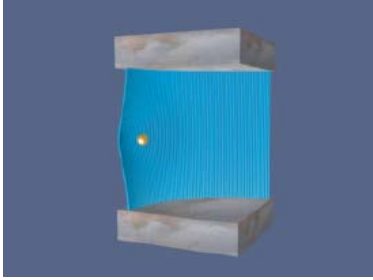


图 8.5.3 带电粒子在非零扇形磁场区域中的运动。外磁场的方向竖直向上。

8.6 应用

带电粒子在均匀磁场中的运动有许多应用。

8.6.1 速度选择器

在同时具有电场 $\vec{E}$ 和磁场 $\vec{B}$ 的情形下，带电粒子上的总的力为

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (8.6.1)$$

这就是著名的洛伦茨力。两个场的组合使得以特定速度运动的粒子被选择出来。这既是 J. J. 汤姆逊用来测量电子荷质比的原理。图 8.6.1 描述了汤姆逊仪器的示意图。

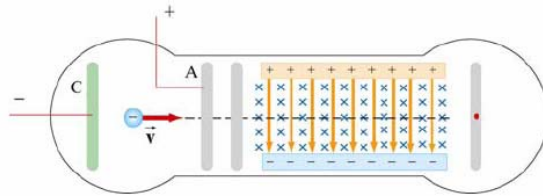


图 8.6.1 汤姆逊仪器

电荷为 $q = -e$ 质量为 m 的电子从阴极 C 发射出来，然后被加速穿过狭缝 A。令 A 与 C 之间的电势差为 $V_A - V_C = \Delta V$ 。势能的变化等于外力在加速电子时做的功： $\Delta U = W_{\text{ext}} = q \Delta V = -e \Delta V$ 。由能量守恒，所获得的动能为 $\Delta K = -\Delta U = mv^2/2$ 。因此，电子获得的速度为

$$v = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m}} \quad (8.6.2)$$

如果电子接着通过一段垂直向下的均匀电场区域，由于带负电，电子将向上偏转。然而，如果此处除了电场之外，还有方向指向纸内的磁场，则电子将受到一个额外的向下的磁力 $-e\vec{v} \times \vec{B}$ 。当两个力正好抵消时，电子将作直线运动。从方程 8.6.1 可知，这两个力抵消的条件是 $eE = evB$ ，这意味着

$$v = \frac{E}{B} \quad (8.6.3)$$

换句话说，只有以 $v = E/B$ 速度运动的粒子才能够做直线运动。联立上述两方程，我们有

$$\frac{e}{m} = \frac{E^2}{2(\Delta V)B^2} \quad (8.6.4)$$

通过测量 E 、 ΔV 和 B ，粒子的荷质比即可迅速确定。电子荷质比的最新精确值为 $e/m = 1.758820174(71) \times 10^{11} \text{ C/kg}$ 。

8.6.2 质谱仪

原子的质量测量可以有多种方法，其中之一是利用质谱仪。班布里奇 (Bainbridge) 质谱仪的基本架构如图 8.6.2 所示。携电荷 $+q$ 的粒子先通过一个速度选择器。

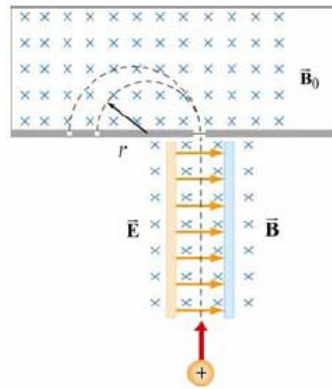


图 8.6.2 班布里奇质谱仪

所用的电场和磁场满足关系 $E = vB$ ，故粒子轨道是一直线。一旦粒子进入指向纸内的第二个磁场 $\vec{B}_0$ 区域，粒子将做半径为 r 的圆周运动，并最终打到照相底版上。由方程 8.5.2 我们有

$$r = \frac{mv}{qB_0} \quad (8.6.5)$$

由于 $v = E/B$ ，故粒子质量可写成

$$m = \frac{qB_0 r}{v} = \frac{qB_0 B r}{E} \quad (8.6.6)$$

8.7 小结

- 作用在带电 q 以速度 $\mathbf{v}$ 在磁场 $\mathbf{B}$ 中运动的粒子上的**磁力**为：

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

- 作用在通以稳恒电流 I 的长度 l 的导线在磁场 $\mathbf{B}$ 中受到的**磁力**为：

$$\mathbf{F}_B = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

- 由电流 I 长度 $d\mathbf{s}$ 的一段导线在磁场 $\mathbf{B}$ 中产生的**磁力** $d\mathbf{F}_B$ 为：

$$d\mathbf{F}_B = Id\mathbf{s} \times \mathbf{B}$$

- 作用在均匀磁场 $\mathbf{B}$ 中的电流 I 、面积 A 的闭环上的**转矩** $\mathbf{\tau}$ 为：

$$\mathbf{\tau} = I\mathbf{\bar{A}} \times \mathbf{B}$$

这里 $\mathbf{\bar{A}}$ 是矢量，其大小为 A ，方向垂直于闭环平面。

- 电流 I 、面积 A 的闭环的**磁偶极矩** $\mathbf{\bar{\mu}}$ 为：

$$\mathbf{\bar{\mu}} = I\mathbf{\bar{A}}$$

- 外磁场 $\mathbf{B}$ 中的磁偶极子 $\mathbf{\bar{\mu}}$ 受到的**转矩** $\mathbf{\tau}$ 为：

$$\mathbf{\tau} = \mathbf{\bar{\mu}} \times \mathbf{B}$$

- 磁场 $\mathbf{B}$ 中的磁偶极子 $\mathbf{\bar{\mu}}$ 具有的**势能**为：

$$U = -\mathbf{\bar{\mu}} \cdot \mathbf{B}$$

- 如果带电 q 质量 m 的粒子以垂直于磁场的速度 $\mathbf{v}$ 进入磁场 $\mathbf{B}$ 中，则粒子作圆周运动的半径为：

$$r = \frac{mv}{|q|B}$$

粒子的角速度为

$$\omega = \frac{|q|B}{m}$$

8.8 解题技巧

本章中，我们说明了在既有磁场 $\mathbf{B}$ 又有电场 $\mathbf{E}$ 的情形下，运动电荷 q 受到的总的力为 $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_B = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ，这里 $\mathbf{v}$ 是粒子的速度。 $\mathbf{F}_B$ 的方向为 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{B}$ 的叉积，按右手法则而定。在笛卡儿坐标系中，单位矢量为 $\hat{\mathbf{i}}$ 、 $\hat{\mathbf{j}}$ 和 $\hat{\mathbf{k}}$ ，它们具有如下性质：

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}, \quad \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}, \quad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}}, \quad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}}, \quad \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}}$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0$$

对于 $\vec{\mathbf{v}} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} + v_z \hat{\mathbf{k}}$ 和 $\vec{\mathbf{B}} = B_x \hat{\mathbf{i}} + B_y \hat{\mathbf{j}} + B_z \hat{\mathbf{k}}$ ，二者的叉积为

$$\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (v_y B_z - v_z B_y) \hat{\mathbf{i}} + (v_z B_x - v_x B_z) \hat{\mathbf{j}} + (v_x B_y - v_y B_x) \hat{\mathbf{k}}$$

如果只有磁场，且 $\vec{\mathbf{v}}$ 垂直于 $\vec{\mathbf{B}}$ ，则粒子的轨道为半径 $r = mv / |q|B$ 的圆，其角速度为 $\omega = |q|B/m$ 。当涉及到更复杂的情形时，最好用力的每个分量形式。例如：

$$F_x = ma_x = qE_x + q(v_y B_z - v_z B_y)$$

8.9 题解

8.9.1 导轨上滑动的导电棒

质量 m 半径 R 的导电棒架在两根长 a 相距 l 的平行导轨上（图 8.9.1）。棒中通以 I 的电流，且在导轨上作无滑动滚动。整个装置处于指向纸内的均匀磁场 $\vec{\mathbf{B}}$ 中。如果开始时棒为静止状态，则它离开导轨时的速度是多大？

解：

取如右图的坐标系，则作用在棒上的磁力为

$$\vec{\mathbf{F}}_B = I \vec{\ell} \times \vec{\mathbf{B}} = I(\ell \hat{\mathbf{i}}) \times (-B \hat{\mathbf{k}}) = I \ell B \hat{\mathbf{j}} \quad (8.9.1)$$

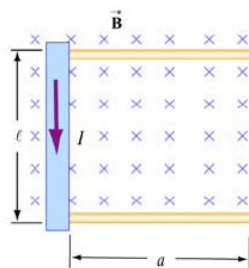
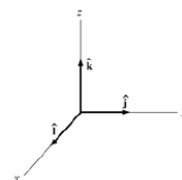


图 8.9.1 均匀磁场中滚动的棒

棒在导轨上运动时磁力做的总功为

$$W = \int \vec{\mathbf{F}}_B \cdot d\vec{\mathbf{s}} = F_B a = (I \ell B) a \quad (8.9.2)$$

由功能原理， W 必等于棒的动能的改变量：

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (8.9.3)$$

这里包括了平动动能和滚动动能。由于初始时刻棒的转动惯量为 $I = mR^2/2$ ，且无滑动滚动条件意味着 $\omega = v/R$ ，于是我们有

$$I\ell Ba = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mR^2}{2}\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 = \frac{3}{4}mv^2 \quad (8.9.4)$$

因此，棒在离开多轨时的速度为

$$v = \sqrt{\frac{4I\ell Ba}{3m}} \quad (8.9.5)$$

8.9.2 悬挂着的导电棒

质量密度为 λ 的导电棒由两根柔软的电线的悬挂在均匀磁场 $\vec{\mathbf{B}}$ 中。磁场方向指向纸外，如图 8.9.2 所示。如果柔软导线的张力为零，请确定棒中通过的电流的大小和方向。

解：

为使导线的张力为零，作用在棒上的磁力 $\vec{\mathbf{F}}_B = I\vec{\ell} \times \vec{\mathbf{B}}$ 必须严格抵消垂直向下的重力 $\vec{\mathbf{F}}_g = -mg\hat{\mathbf{k}}$ 。

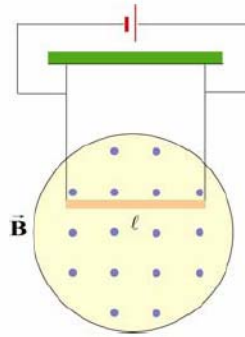


图 8.9.2 悬挂在均匀磁场中的导电棒

因为 $\vec{\mathbf{F}}_B$ 指向 $+z$ 方向，故必有 $\vec{\ell} = -\ell\hat{\mathbf{j}}$ ，即棒中电流从右流向左，于是

$$\vec{\mathbf{F}}_B = I\vec{\ell} \times \vec{\mathbf{B}} = I(-\ell\hat{\mathbf{j}}) \times (B\hat{\mathbf{i}}) = -I\ell B(\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}}) = +I\ell B\hat{\mathbf{k}} \quad (8.9.6)$$

电流的大小为

$$I\ell B = mg \quad (8.9.7)$$

或

$$I = \frac{mg}{B\ell} = \frac{\lambda g}{B} \quad (8.9.8)$$

8.9.3 磁场中的带电粒子

电荷 q 质量 m_A 的粒子 A 和电荷 $2q$ 质量 m_B 的粒子 B 由静止开始被电势差 ΔV 加速，同时受到均匀磁场的作用而偏转走过半圆路径。A 和 B 的轨道半径分别为 R 和 $2R$ 。磁场方向垂直于粒子速度。试问：二者的质量比是多少？

解：

粒子获得的动能为

$$\frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V \quad (8.9.9)$$

由此得到

$$v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} \quad (8.9.10)$$

粒子作圆周运动，因为磁力沿径向，提供了向心力：

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \quad (8.9.11)$$

圆的半径立即可得为：

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{m}{qB} \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m\Delta V}{q}} \quad (8.9.12)$$

它说明 r 正比于 $(m/q)^{1/2}$ 。由

$$\frac{r_A}{r_B} = \frac{(m_A/q_A)^{1/2}}{(m_B/q_B)^{1/2}} \Rightarrow \frac{R}{2R} = \frac{(m_A/q)^{1/2}}{(m_B/2q)^{1/2}} \quad (8.9.13)$$

即可得到质量比：

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{1}{8} \quad (8.9.14)$$

8.9.4 磁棒的非均匀磁场

如图 8.9.3 所示，磁棒的北极沿着水平导电圆环的对称轴，环中电流为 I 。在环位置处，磁场与竖直方向成 θ 角。试求环所受到的力。

解：

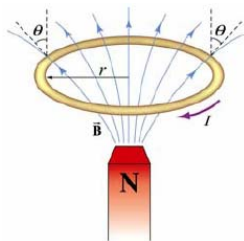


图 8.9.3 磁棒趋近导电圆环

作用在圆环的微分电流元 $I d\vec{s}$ 上的磁力为 $d\vec{F}_B = I d\vec{s} \times \vec{B}$ ，其中 $\vec{B}$ 为磁棒的磁场。利用如图 8.9.4 的柱坐标系 $(\hat{r}, \hat{\phi}, \hat{z})$ ，我们有

$$d\vec{F}_B = I(-ds \hat{\phi}) \times (B \sin \theta \hat{r} + B \cos \theta \hat{z}) = (IBds) \sin \theta \hat{z} - (IBds) \cos \theta \hat{r} \quad (8.9.15)$$

由于轴对称，力的径向分量相互抵消，于是只剩下 z 分量。

这样，作用在圆环上的总的力变成

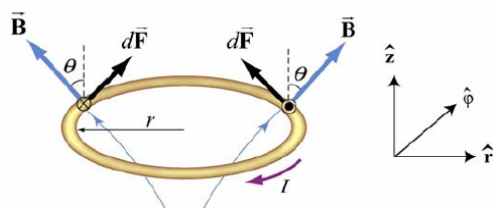


图 8.9.4 作用在导电圆环上的磁力

$$\vec{F}_B = (IB \sin \theta) \hat{z} \oint ds = (2\pi r IB \sin \theta) \hat{z} \quad (8.9.16)$$

力的方向沿 $+z$ 方向，因此是排斥力。

8.10 概念题

1. 带电粒子可否在均匀磁场中运动而不受力？为什么？
2. 如果磁场对带电粒子不做功，则粒子的运动状态会受到磁场的何种影响？
3. 假定带电粒子在电场和磁场的作用下运动。这两种场对粒子的作用如何鉴别？
4. 哪种磁场能够对磁偶极子施加一个力？这个力是排斥力还是吸引力？
5. 如果在均匀磁场中放入一个磁针，磁针会受到净磁力吗？是否存在净的转矩？

8.11 附加题

8.11.1 磁场施加的力

电视机显像管中电子束的电子能量为 12 keV ($1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$)。电子运动呈从南到北的水平运动。在 MIT, 地磁场主要呈垂直向下指向 (即忽略了指向磁北极的分量), 大小为 $5 \times 10^{-5} \text{ T}$ 。

- (a) 电子束向哪个方向偏转?
- (b) 电子偏转时的加速度是多少? [答案: $\sim 10^{-15} \text{ m/s}^2$]
- (c) 运动了 0.2 米 后电子束偏离原初直线有多远?

8.11.2 载流导线受到的力

边长 $l = 0.1 \text{ 米}$ 的矩形线圈质量 50 克 , 可绕水平边 AA' 为轴转动, 如图 8.11.1 所示。线圈所在区域充满了场强 500 高斯 竖直向下的均匀磁场, 线圈中电流 I 使其平衡时倾角为 $\theta = 20^\circ$ 。

- (a) 考虑每边的单独受力情形, 求出平衡 (倾角 20°)

时线圈中的电流方向。

- (b) 计算这些力对轴的转矩。
- (c) 试求 (关于轴的) 总转矩为零时线圈中的电流。(提示: 分别考虑四条边每边的重力作用)
- [答案: $I \sim 20 \text{ A}$]
- (d) 确定作用在转轴上的力的大小和方向。
- (e) 利用磁偶极子定义重新计算 (b) 中内容。

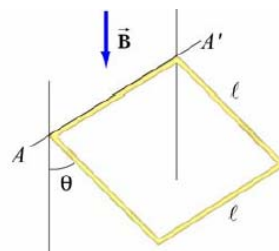


图 8.11.1 作用在通电线圈上的磁力

8.11.3 滑动棒

长 l 的导电棒置于一无摩擦斜面上, 斜面倾角 θ , 如图 8.11.2。斜面所在区域有向上的均匀磁场。为避免导电棒下滑, 棒的两端接有电压源使棒通有电流。确定使棒保持静止的该电流的大小和方向。

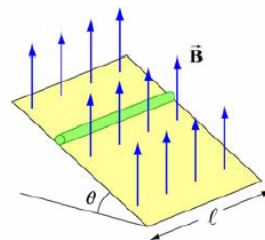


图 8.11.2 作用在导电棒上的磁力

8.11.4 粒子轨迹

带电 $-q$ 的粒子以 $\vec{v}$ 速度进入两平板之间区域。板间有指向纸内的均匀磁场, 如图 8.11.3 所示。

- (a) 粒子的径迹是向上偏转还是向下偏转?
- (b) 计算粒子打到平板上时距左端口的距离。

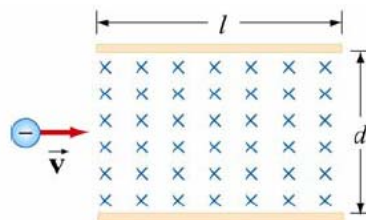


图 8.11.3 带电粒子在磁场中运动

8.11.5 磁场中的粒子轨道

假定整个右半 x - y 平面充满了指向纸外的均匀磁场 $\vec{B}$ ，如图 8.11.4 所示。两个带电粒子从负 x 轴沿正 x 轴方向射入磁场区，两个粒子的速度为 v ，且均从 O 点射入。二者的电荷相同，均为 q ，但质量不同，分别为 m_1 和 m_2 。在磁场中他们的轨道为同方向但半径不同的半圆，粒子 2 的轨道半径是粒子 1 的两倍。

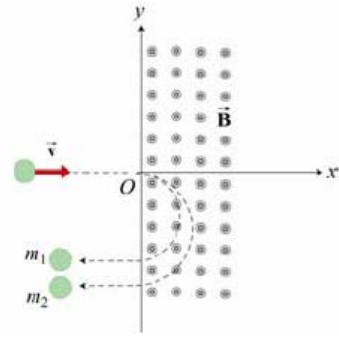


图 8.11.4

- 这两个粒子所带电荷是正($q > 0$)还是负的($q < 0$)?
- 由 q, v, B 和 m_1 导出粒子 1 的半圆轨道半径。
- 质量比 m_1 / m_2 是多少?
- 可否在 $x > 0$ 区域加一电场 $\vec{E}$ 使两粒子在进入 $x > 0$ 区域后均沿直线运动? 如果可以, 请由给定量给出该电场的大小和方向; 如否, 指出为什么。

8.11.6 载流导体环受到力和转矩

载流线圈由一个半径为 R 的半圆和两根长 l 夹角 θ 的直线组成。整个线圈置于指向右方的均匀磁场中, 如图 8.11.5 所示。

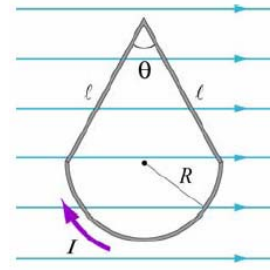


图 8.11.5 均匀磁场中的电流环

- 求线圈上的净力。
- 求线圈上的净转矩。

8.11.7 导线上的受力

长 0.2 米的直导线上通以 7.0 A 的电流, 导线置于 0.1 T 的均匀磁场中, 磁场方向与电流方向成 20° 夹角。

- 导线的受力方向? 画图表示你的答案。
- 力的大小是多少? [答: ~ 0.05 N]
- 如果不改变场或电流, 如何使受力最大化?

8.11.8 浮动的导线

直径 d 的铜导线通以电流密度 $\vec{J}$ 的电流, 该导线处于地球赤道上, 此处地磁场指向北, 呈水平状, 大小为 $B = 0.5 \times 10^{-4}$ T。导线以东西向放在一个平行于地球表面的平面上。铜的密度和电阻率分别为 $\rho_m = 8.9 \times 10^3$ kg/m³ 和 $\rho = 1.7 \times 10^{-8}$ $\Omega \cdot m$ 。

- $\vec{J}$ 必须多大、取什么方向才能使导线悬浮起来? 取 $g = 9.8$ m/s²。
- 当导线悬浮时, 单位立方厘米耗散的功率是多大?