



麻省理工学院

A.V. 奥本海姆等

# 信号与系统

SIGNALS & SYSTEMS

ALAN V. OPPENHEIM

ALAN S. WILLSKY

WITH S. HAMID NAWAB

刘树棠 译

“信号和系统”是一门重要的技术基础课，为后续的“数字信号处理”、“现代控制理论”课程打一个基础。

本课程主要介绍：一些基本信号和基本系统的性质，及分析这些信号和系统的基本理论和方法。

这是因为：任何一个复杂的信号都可以看作由一些基本信号组成；同样，一个复杂的系统也可看作是由一些简单的子系统组成。

具体内容：

书中按连续时间信号与系统和离散时间信号与系统来分别进行阐述。

### 1、连续时间信号与系统：

自变量的变换、卷积积分、傅立叶级数、傅立叶变换、拉普拉斯变换、采样

### 2、离散时间信号与系统：

自变量的变换、卷积和、傅立叶级数、傅立叶变换、Z变换、重建

从而了解信号与系统的时域特性和频域特性，以及系统的稳定性等判定方法。

打算:(以这本教材为主,附加一些相关的知识)

## 一、删除

第8章——通信系统(全部)

第9章——拉普拉斯变换

二、参考书:《信号与系统》 于慧敏 主编 化学工业出版社 2002年

三、考核成绩:平时成绩(作业、实验)占15%左右。

## 四、实验(0.5学分)

1、时间: 后半学期开始

2、工具软件: MATLAB 6.5版

## 五、联系方式:

1、Tel:87951228(o)

丁振荣

13157184950

2、E-mail: [dxl2002@hzcnc.com](mailto:dxl2002@hzcnc.com)

3、生仪学院[FTP 10.12.41.6](ftp://10.12.41.6) 80G硬盘内 “丁振荣信号与系统”文件夹

# 第一章

# 信号与系统

# 1.0 引言

## 一、信号和系统的基本概念

- 1、信号——广义地说，信号是随时间和空间变化的某种物理量，是信息的载体。（声、光、电等信号）。

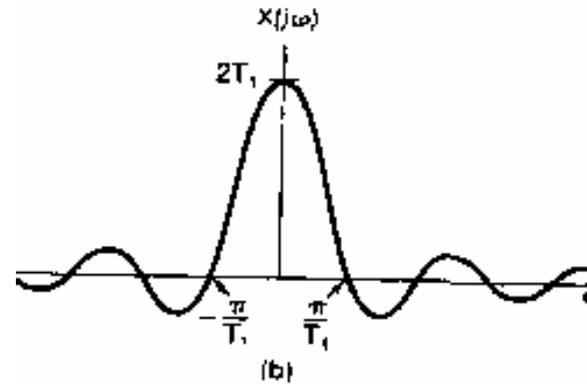
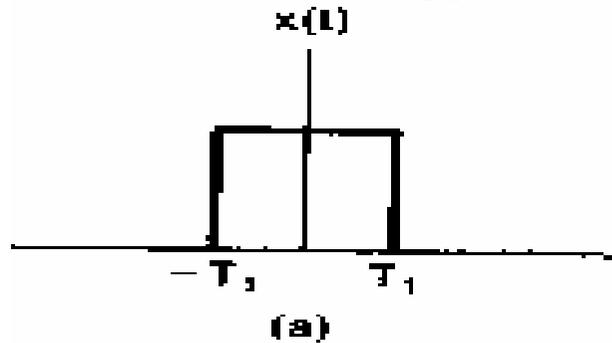
信号的特性可从两个方面来描述：

时域——自变量为： $t$

频域——自变量为： $\omega$

- 1)、时间特性——波形、幅度、相位、重复周期及信号变化的快慢等。

- 2)、频率特性——指振幅频谱和相位频谱。即从频域来研究信号的变化情况。



- 2、系统——能够对信号完成某种变换或运算的集合体称为系统。

(系统可大可小)

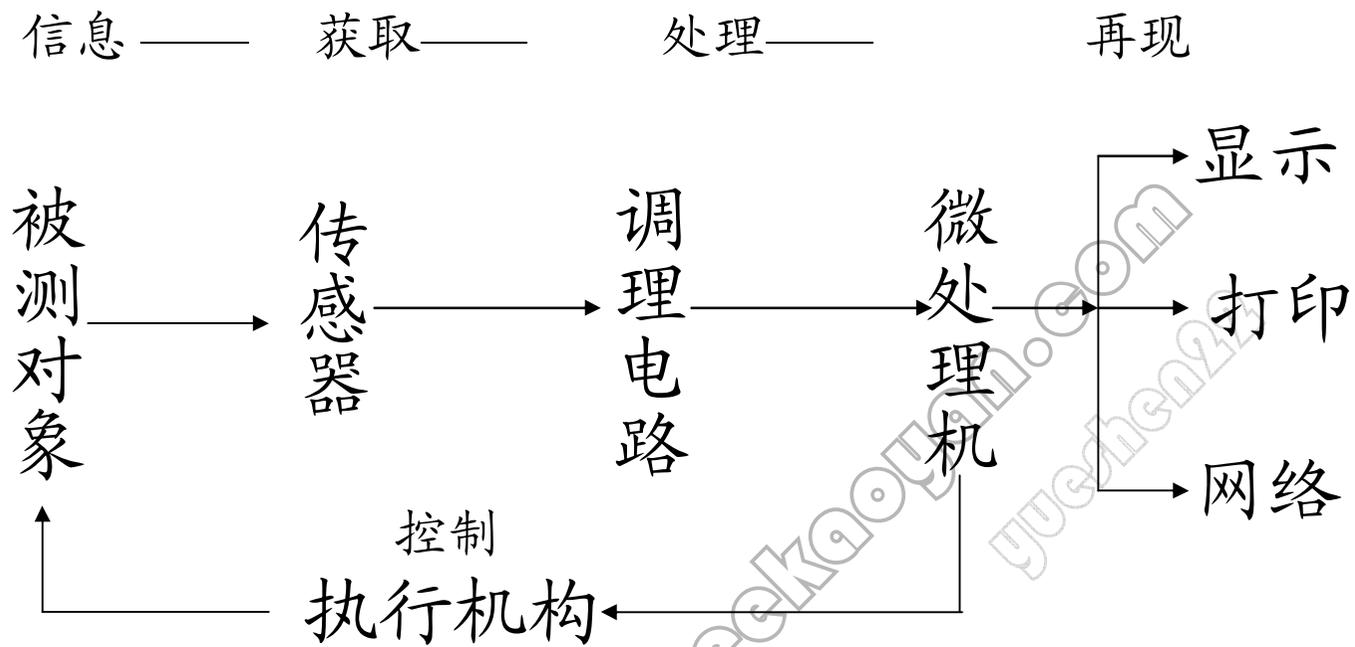


图 1 《控制系统》

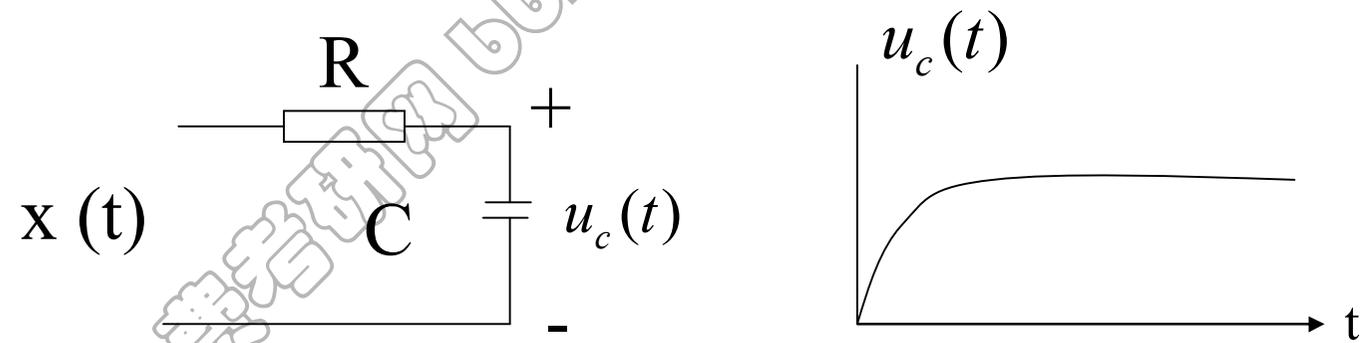


图 2 《RC电路》

## 二、信号的分类

信号的分类方法很多。

### 1、确定性信号与随机信号

按信号与时间的函数关系来分，信号可分为确定性信号与随机信号。

1)、确定性信号——指能够表示为确定的时间函数的信号。

当给定某一时间值时，信号有确定的数值。

例如：正弦信号、指数信号和各种周期信号等。

2)、随机信号——不是时间 $t$ 的确定函数的信号。

它在每一个确定时刻的分布值是不确定的。

例如：电器元件中的热噪声等。

## 2、周期信号与非周期信号

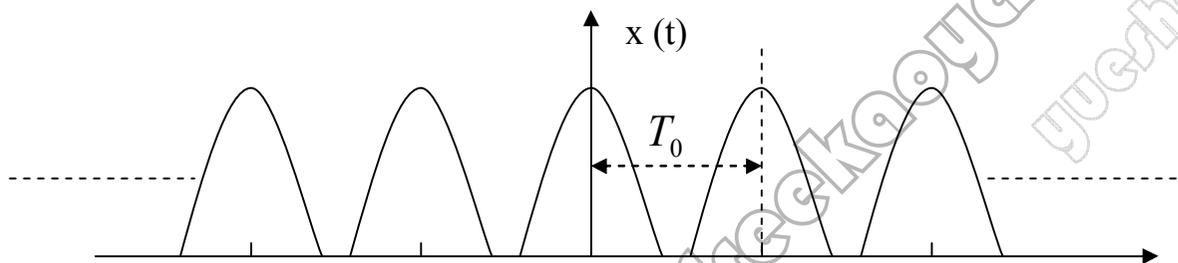
按信号随时间变量  $t$  (或  $n$ ) 变化的规律来分, 可分为周期信号与非周期信号。

### 1) 周期信号

● 连续周期信号可表示为:

$$x(t) = x(t + mT), \quad \text{其中: } m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

把能使上式成立的最小正值  $T$ , 称为  $x(t)$  的基波周期  $T_0$ 。

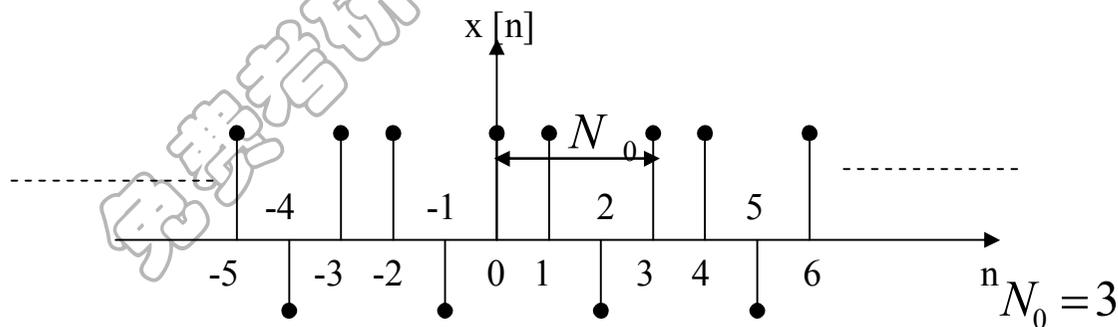


● 离散周期信号可表示为:

$$x[n] = x[n + mN], \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

其中:  $N$  为正整数。

把能使上式成立的最小正整数  $N$ , 称为  $x[n]$  的基波周期  $N_0$ 。



2)、不满足上述关系的信号则称为非周期信号。

### 3、奇信号与偶信号

按信号是**关于原点对称**或**关于坐标纵轴对称**来分，又可分为奇信号与偶信号

1)、奇信号

$$x(t) = -x(-t)$$

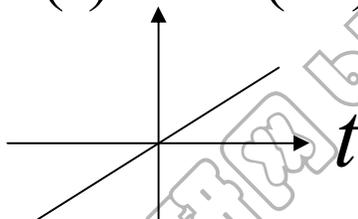
或  $x[n] = -x[-n]$

2)、偶信号

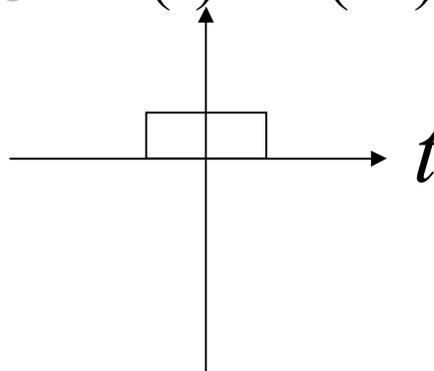
$$x(t) = x(-t)$$

或  $x[n] = x[-n]$ 。

$$x(t) = -x(-t)$$



$$x(t) = x(-t)$$



#### 4、能量信号和功率信号

一个信号的能量和功率是这样定义的：

设信号电压或电流为  $x(t)$ ，则它在电阻为  $1\Omega$  上的瞬时功率为

$$p(t) = |x(t)|^2$$

在  $t_1 \leq t \leq t_2$  内消耗的总能量为  $E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$

$$\text{总平均功率为 } P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

当  $T = (t_2 - t_1) \rightarrow \infty$  时，总能量  $E$  和平均功率  $P$  变为

$$E_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt, \quad P_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

1)、能量信号

信号的能量  $E$  满足：  $0 < E_\infty < \infty$  ，而  $P_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_\infty}{2T} = 0$

2)、功率信号

信号的平均功率满足：  $0 < P_\infty < \infty$  ，而  $E_\infty = \infty$

例1: 已知信号为  $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ , 试问是能量信号还是功率信号。

解: 因为  $x[n] = e^{j\omega_0 n} = \cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n$

则有  $|e^{j\omega_0 n}| = 1$

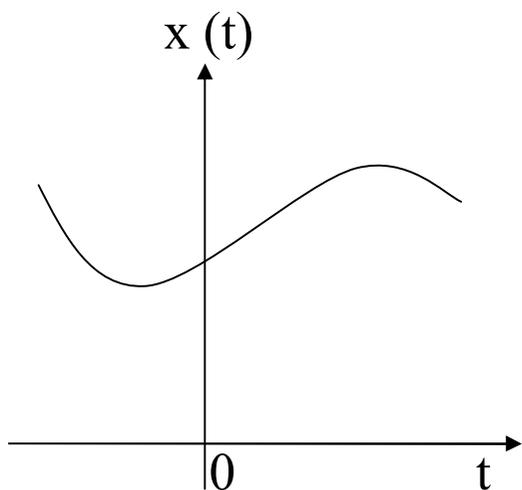
$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 = \infty$$

$$P_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \times (2N+1) = 1$$

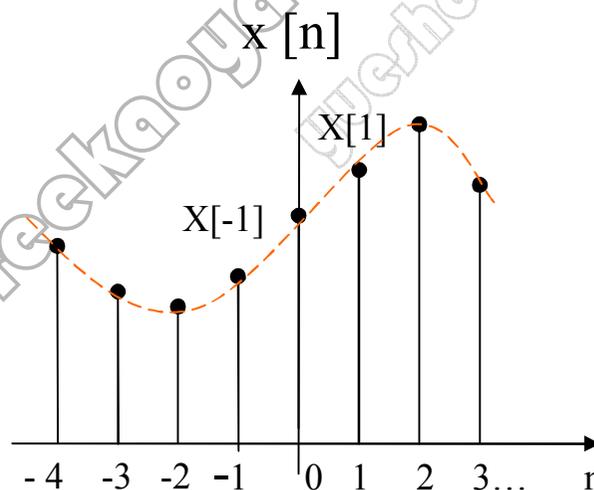
所以是功率信号

## 5、连续时间信号和离散时间信号——按自变量的取值是否连续来分。

1、连续时间信号——自变量是连续可变的，因此信号在自变量的连续值上都有定义。我们用 $t$ 表示连续时间变量，用圆括号 $(\cdot)$ 把自变量括在里面。例如图一的 $x(t)$ 。



图一 连续时间信号



图二 离散时间信号

2、离散时间信号——自变量仅取在一组离散值上。我们用 $n$ 表示离散时间变量，用方括号 $[\cdot]$ 来表示，例如图二的 $x[n]$ 。

**注意：**信号 $x[n]$  总是在 $n$ 的整数值上有定义。

<在本书中是按“连续时间信号和离散时间信号”来分的。>

## 1.2 自变量的变换 ——在信号与系统分析中是极为有用的。

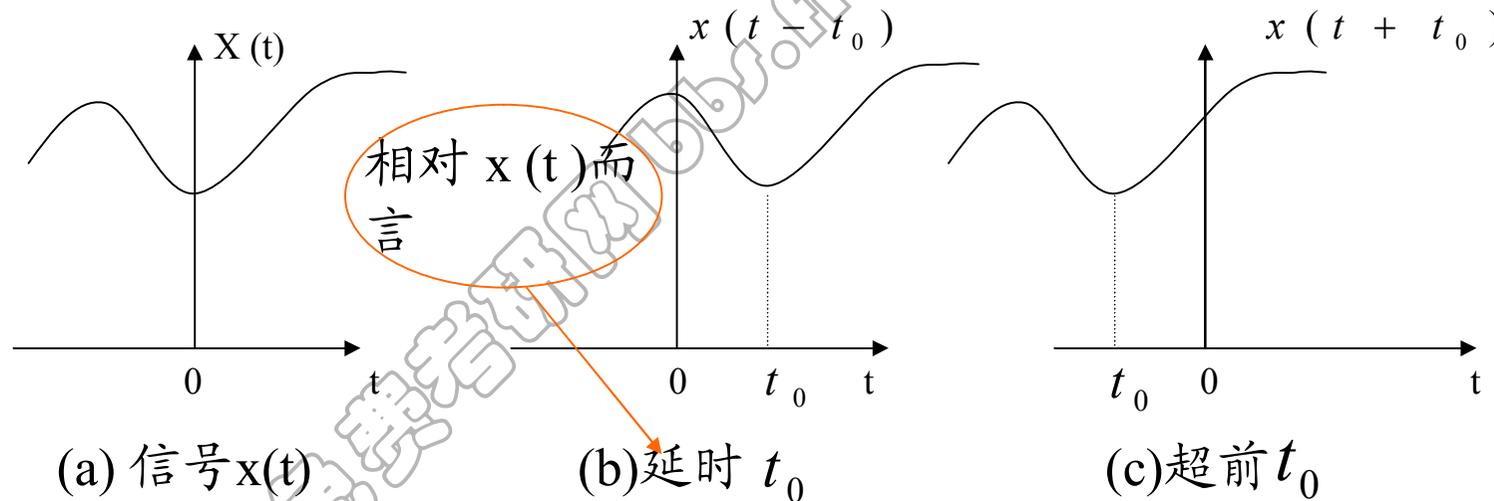
本节讨论的变换只涉及自变量的简单变换（即时间轴的变换）：实现信号的时移、反转、展缩。

一、时移（信号的平移）——即信号的波形沿x轴左右平行移动，但波的形状不变。

1、设连续信号 $x(t)$ 的波形如图(a)所示，今将 $x(t)$ 沿t轴平移 $t_0$ ，即得平移信号 $x(t-t_0)$ ， $t_0$ 为实常数。

当 $t_0 > 0$ 时，信号沿t轴正方向移动 $t_0$ （右移），如图三(b)所示。

当 $t_0 < 0$ 时，信号沿t轴负方向移动 $t_0$ （左移），如图三(c)所示。

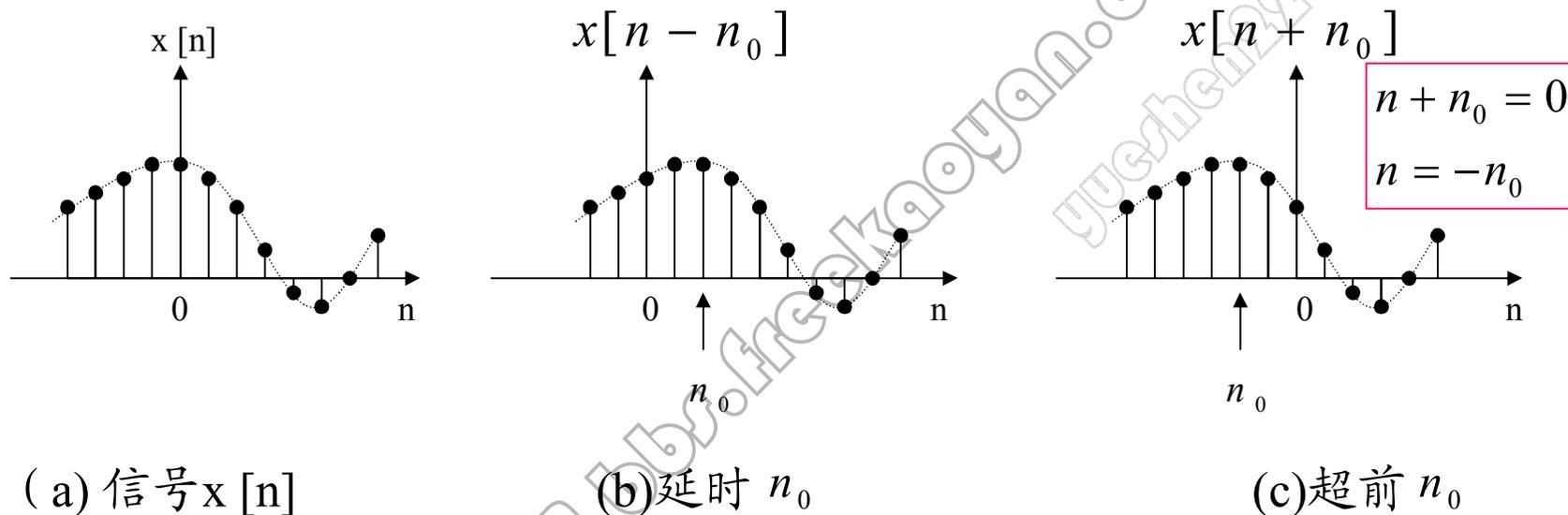


图三 连续信号的平移

2、对离散信号 $x[n]$ ，（设 $n_0$ 为**正整数**）

则 $x[n-n_0]$ 是将 $x[n]$ 沿 $n$ 轴正方向平移 $n_0$ 个序号，如图四(b)所示。

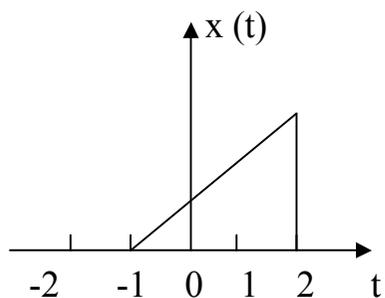
$x[n+n_0]$ 是将 $x[n]$ 沿 $n$ 轴负方向平移 $n_0$ 个序号，如图四(c)所示。



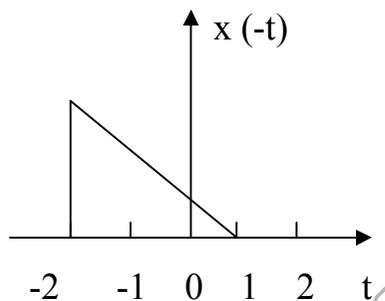
图四 离散信号的平移

二、时间反转（信号的反褶）——就是将信号的波形以纵轴为轴翻转 $180^\circ$ 。

（即自变量由原来的  $t \rightarrow -t$ ，由原来的  $n \rightarrow -n$ ）

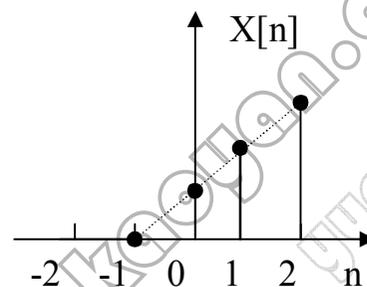


(a)

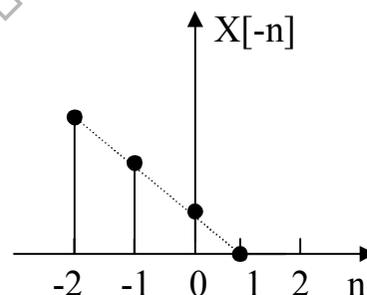


(b)

图五 连续信号的反转



(a)



(b)

图六 离散信号的反转

三、尺度变换（信号的展缩）——将信号在时间轴上线性展宽或压缩，但纵轴上的值不变。

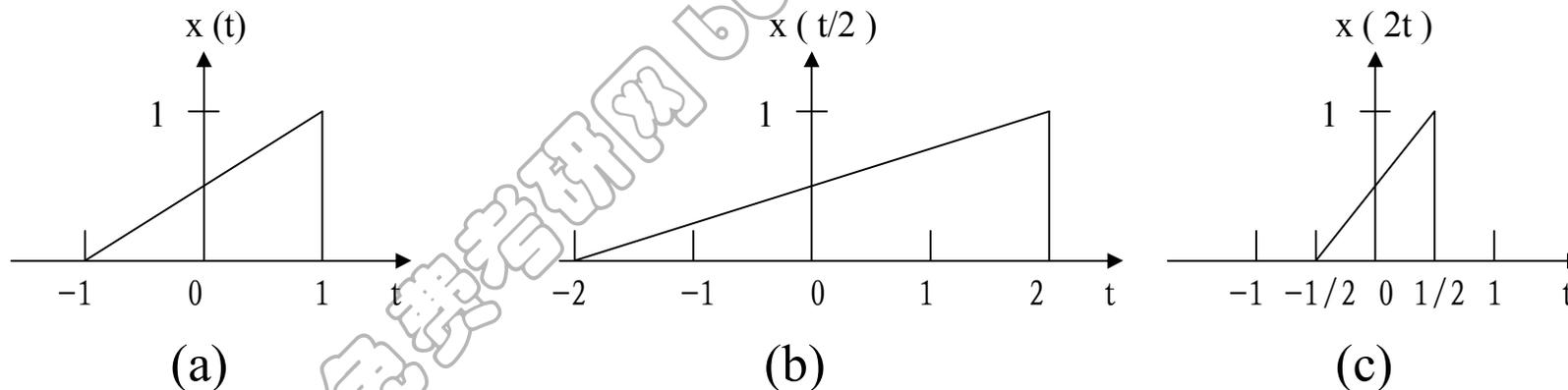
设连续信号 $x(t)$ 的波形如图七（a）所示，若用 $at$  置换 $x(t)$ 中的 $t$ ，所得的信号 $x(at)$ 即为信号 $x(t)$ 的尺度变换信号（设 $a$ 为正的实常数）。

1、若  $0 < a < 1$ ，则 $x(at)$ 是将 $x(t)$ 在时间轴线性展宽 $a$ 倍。（使变化减慢）

例如：若取 $a=1/2$ ，则得 $x(t/2)$ 。此时原函数 $x(t)$ 中 $t=1$  时的值，等于在 $x(t/2)$ 中  $t =2$ 的值，即 $x(2*1/2) = x(1)$ 。如图(b)所示；

2、若  $a > 1$ ，则 $x(at)$ 是将 $x(t)$ 在时间轴线性压缩 $a$ 倍。（使变化加速）

例如：若取  $a=2$ ，则得 $x(2t)$ 。此时原函数 $x(t)$ 中 $t=1$  时的值，等于在 $x(2t)$ 中  $t =1/2$ 的值，即 $x(2*1/2) = x(1)$ 。如图(c)所示；



图七 信号的尺度变换

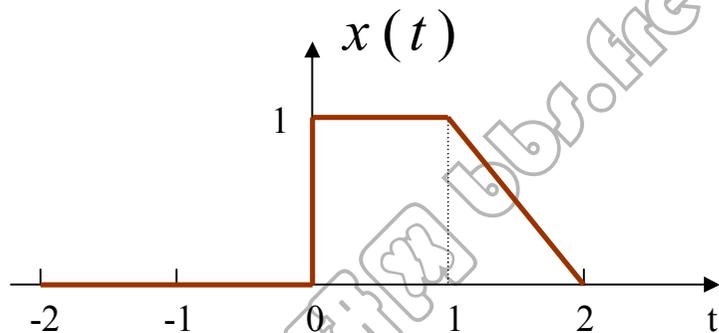
当已知 $x(t)$ ，求 $x(at+b)$ 的波形时，一般可先根据 $b$ 的值将 $x(t)$ 平移，得 $x(t+b)$ ；然后再根据 $a$ 的值对 $x(t+b)$ 进行尺度变换和/或时间反转。

但由于 $x(at+b)$ 可写成 $x[a(t+b/a)]$ 形式。所以也可先根据 $a$ 值进行尺度变换（压缩因子为 $1/a$ ），然后再平移 $b/a$ 。

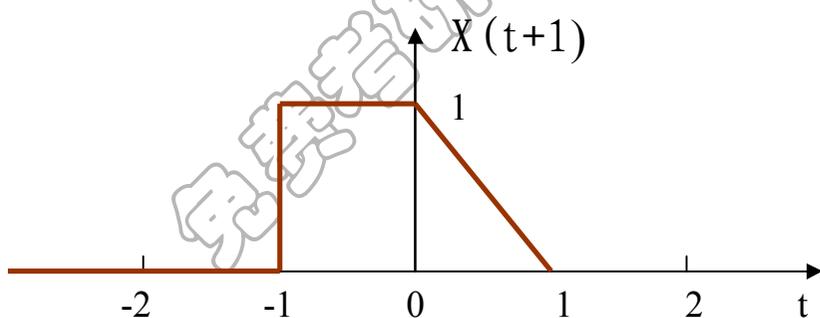
**例1.1** 已知信号 $x(t)$  如图所示，画出 $x(t+1)$ 、 $x(-t+1)$ 、 $x(3t/2)$ 、 $x(3t/2+1)$ 的波形。

P 8

解：1）、 $x(t+1)$ 就是 $x(t)$ 沿 $t$ 轴左移1。



(a) 信号  $x(t)$

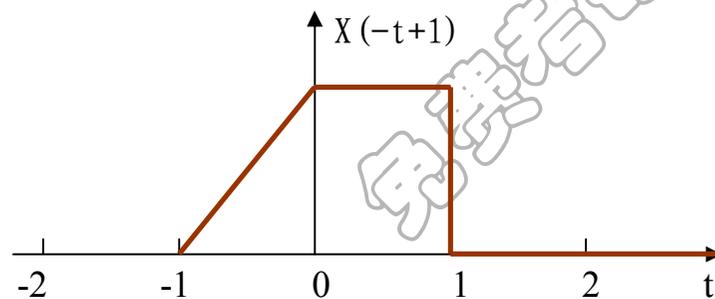
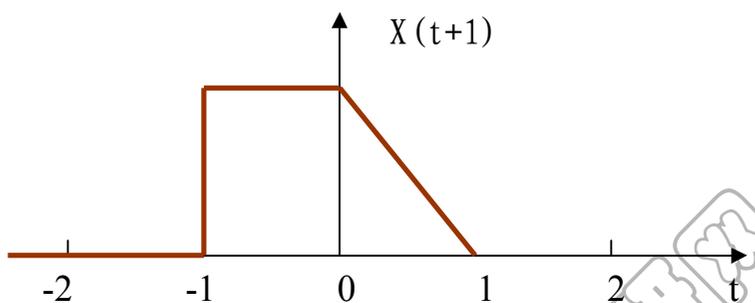
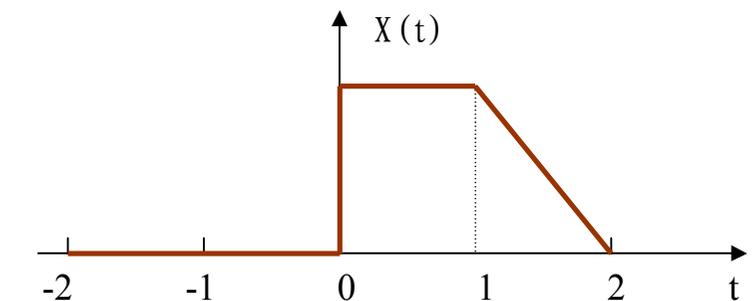


(b)  $x(t)$ 左移1后

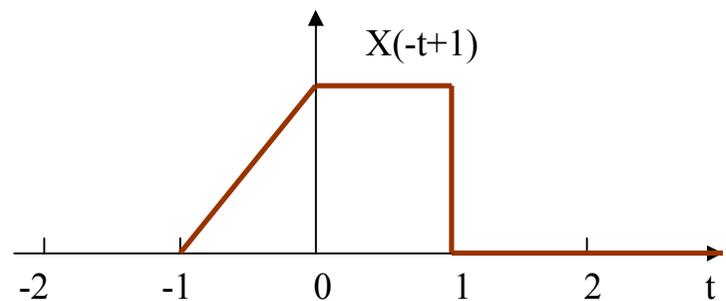
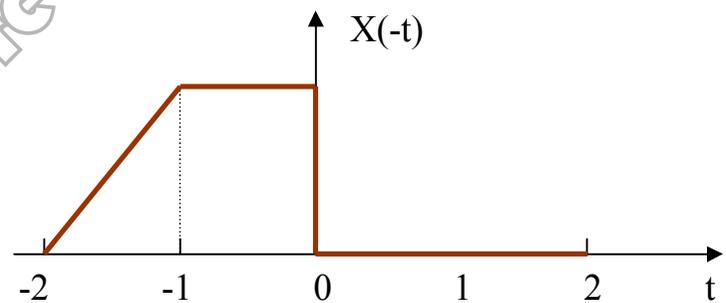
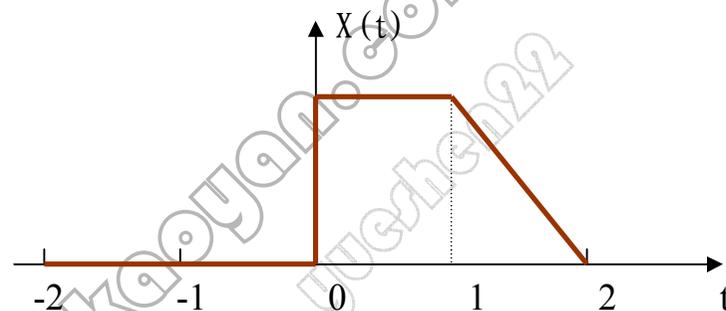
2)、画 $x(-t+1)$ 的波形有两条路径:

a、 $x(t)$ ——左时移1得 $x(t+1)$ ——再反转得 $x(-t+1)$ ;

b、 $x(t)$ ——先反转得 $x(-t)$ ——再右时移1得 $x[-(t-1)]=x(-t+1)$ 。

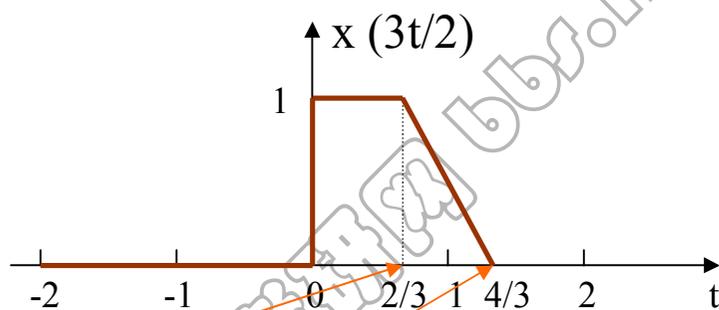
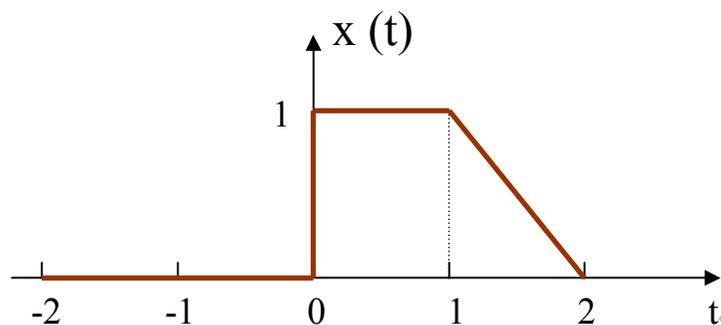


路径 a



路径 b

3)、画 $x(3t/2)$ 的波形。因为 $3/2 > 1$ , 所以信号 $x(3t/2)$ 的波形可通过对 $x(t)$ 作 $2/3$ 线性压缩而得到。



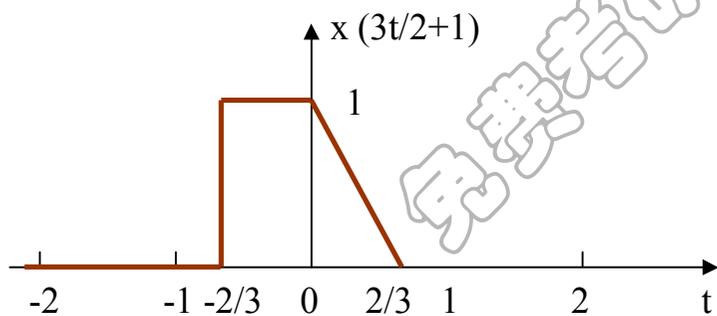
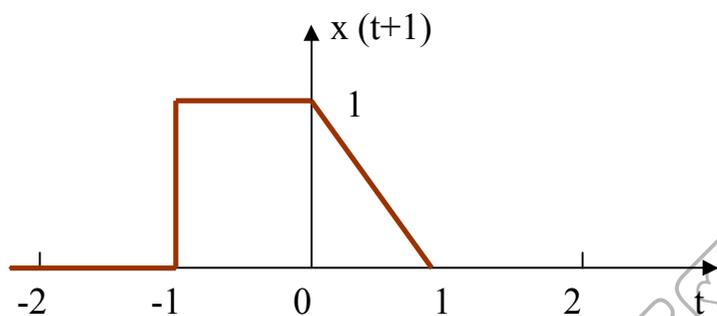
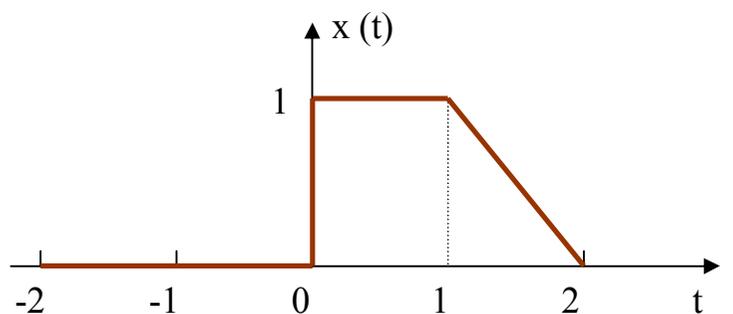
$x(3/2 * 2/3) = x(1)$  即 $x(3t/2)$ 中 $t = 2/3$ 时所对应的值与 $x(t)$ 中 $t = 1$ 时的值相等。

$x(3/2 * 4/3) = x(2)$  即 $x(3t/2)$ 中 $t = 4/3$ 时所对应的值与 $x(t)$ 中 $t = 2$ 时的值相等。

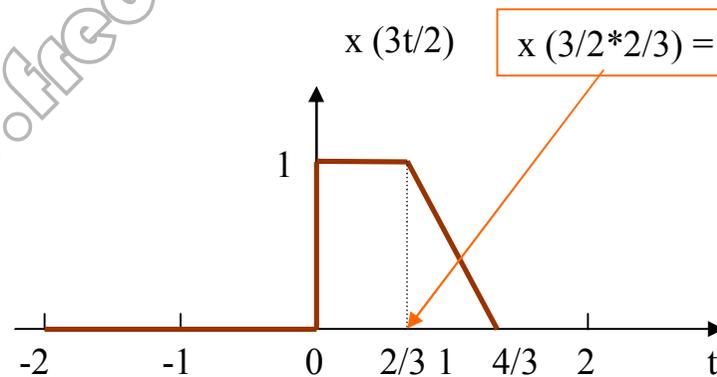
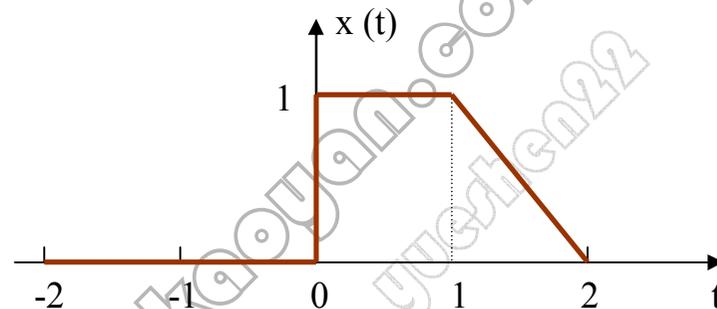
4)、画  $x(3t/2+1)$  的波形。因为  $x(3t/2+1) = x[3/2(t+2/3)]$ ，所以有两条路径。

a)、 $x(t)$  ——先左时移1得  $x(t+1)$  ——再压缩  $2/3$  得  $x(3t/2+1)$ 。见P9例1.3

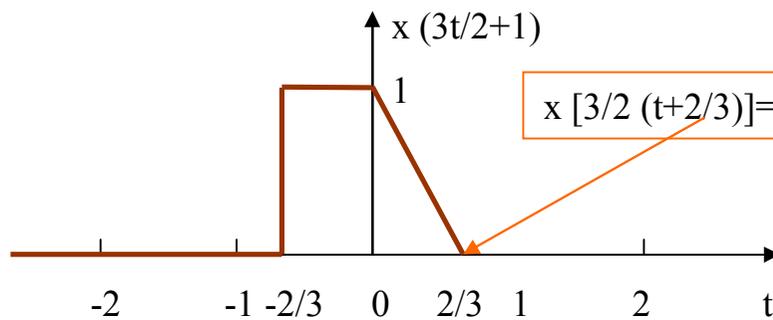
b)、 $x(t)$  ——先压缩  $2/3$  得  $x(3t/2)$  ——再左时移  $2/3$  得  $x(3t/2+1)$ 。



路径(a)



$$x(3/2 * 2/3) = x(1)$$



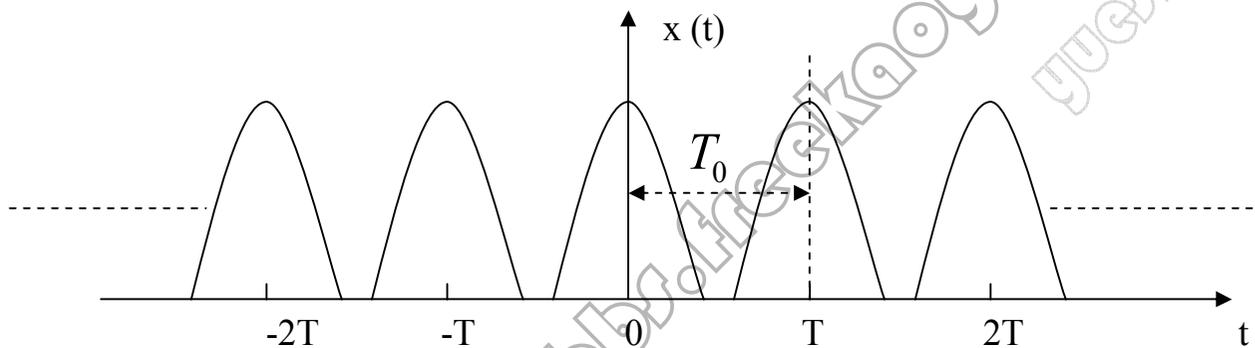
$$x[3/2(t+2/3)] = x(3t/2+1)$$

路径 (b)

### 1.2.2 周期信号

- 1、连续时间周期信号——
- 1.  $t$  的定义域为  $(-\infty \sim +\infty)$ ;
  - 2. 各周期内信号波形完全一样.

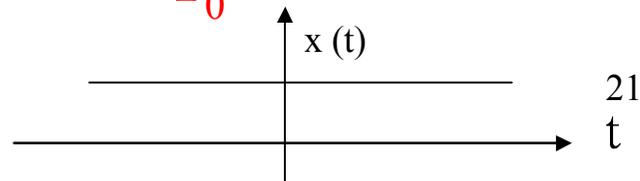
$$\text{即 } x(t) = x(t + mT) \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (1.11)$$



图九 连续时间周期信号

由图可见：如果  $x(t)$  是周期信号 (周期为  $T$ )，那么对全部  $t$  和任意整数  $m$  来说就有  $x(t+mT) = x(t)$ ，即  $x(t)$  对于周期  $2T$ 、 $3T$ 、 $4T$ 、..... 等等都是周期的。使 (1.11) 式成立的最小正值  $T$  称为  $x(t)$  的基波周期  $T_0$ 。当  $x(t)$  为一常数时，基波周期无定义。

不满足上述条件的信号为非周期信号。



例1: 确定以下信号是否为周期信号?

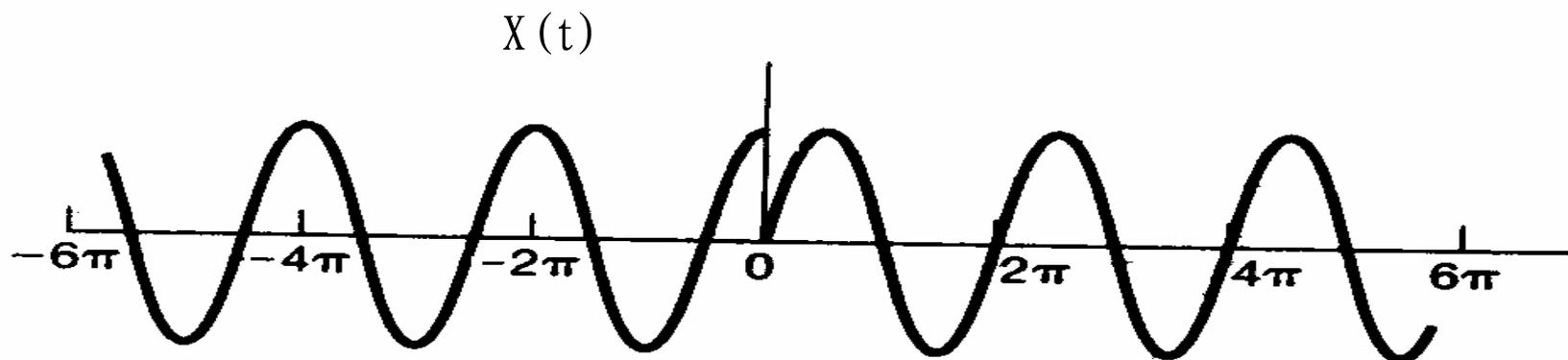
$$x(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{如果 } t < 0 \\ \sin(t) & \text{如果 } t \geq 0 \end{cases}$$

解:

因为  $\cos(t+2\pi) = \cos(t)$

$$\sin(t+2\pi) = \sin(t)$$

可见每个函数都以 $2\pi$ 重复, 但 $x(t)$ 在原点有一个不连续点, 且这个不连续点并不在其它地方重现, 所以该信号不是周期的。



例2: 判断下列信号是否为周期信号? 若是周期信号, 则周期为多大?

$$x(t) = \cos 2t + \sin 3t$$

解: 若是周期信号, 则应满足

$$x_1(t) = x_1(t + m_1 T_1) \quad m_1 = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$x_2(t) = x_2(t + m_2 T_2) \quad m_2 = 0, 1, 2, 3, \dots$$

而对信号  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ , 只有当  $T = m_1 T_1 = m_2 T_2$  时,  $x(t)$  才是周期的。即要求

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

$\cos \omega t$

为不可约的整数时,  $x(t)$  才为周期信号。

本题中  $x_1(t) = \cos 2t$  即:  $\omega_1 = 2\pi / T_1 = 2$        $T_1 = 2\pi / \omega_1 = 2\pi / 2 = \pi$

$x_2(t) = \sin 3t$        $\omega_2 = 2\pi / T_2 = 3$        $T_2 = 2\pi / \omega_2 = 2\pi / 3$

得:  $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{2\pi/3} = \frac{3}{2}$        $T = 2T_1 = 3T_2 = 2\pi$

结论:  $x(t)$  信号是周期的, 周期为  $2\pi$ 。

例3: 判断下列信号是否为周期信号? 若是周期信号, 则周期为多大?

1、  $x(t) = e^{j(\pi t + 1)}$

2、  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(t-3n)^2}$

$$T_1 = 2\pi / \omega_1 = 2\pi / \pi = 2$$

$$T_2 = 2\pi / \omega_2 = 2\pi / \pi = 2$$

$$T_1 / T_2 = 2 / 2 = 1$$

$$T = T_1 = T_2 = 2$$

解: 1)  $\because x(t) = e^{j(\pi t + 1)} = \cos(\pi t + 1) + j \sin(\pi t + 1)$

可见  $\omega = \pi$  , 所以  $T = 2\pi / \omega = 2\pi / \pi = 2$  ——是周期信号

2) 若是周期的, 则有  $x(t + T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(t+T-3n)^2}$

设  $T = 3k$ , 则  $x(t + 3k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-[t-3(n-k)]^2}$

改变求和的范围得  $x(t + 3k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-(t-3m)^2} = x(t)$

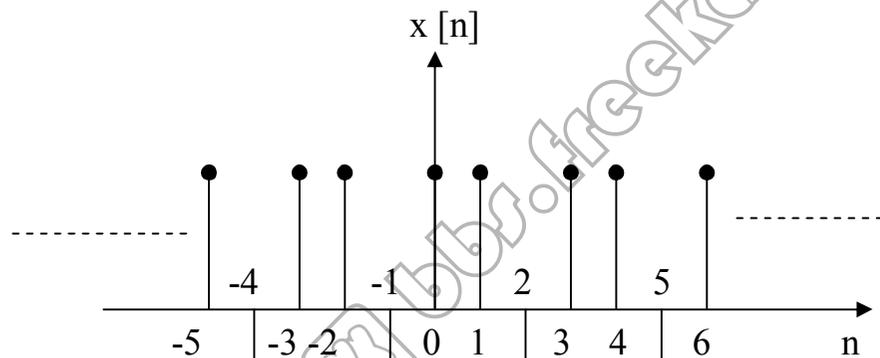
所以, 它是基波周期为,  $T_0 = 3$

## 2、离散时间周期信号

如果一个离散时间信号  $x[n]$  时移一个  $N$  后，其值不变，即对全部  $n$  值有

$$x[n] = x[n+mN] \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.12)$$

若 (1.12) 式成立，那么  $x[n]$  对于周期  $2N$ 、 $3N$ 、 $4N$ 、 $\dots$  也都是周期的。其中使 (1.12) 式成立的最小正值  $N$  就是它的基波周期  $N_0$ 。下图示出一个基波周期  $N_0=3$  的离散时间周期信号的例子。



图十 离散时间周期信号

例1: 判断下列信号是否为周期信号? 若是周期信号, 则周期为多大?

1、  $x[n] = \cos(8\pi n / 7 + 2)$

2、  $x[n] = e^{j(n/8+\pi)}$

3、  $x[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{\delta[n-3m] - \delta[n-1-3m]\}$

解: 1)  $\because x[n+N] = \cos[8\pi(n+N)/7 + 2] = \cos(8\pi n / 7 + 2 + 8\pi N / 7)$

若  $\frac{8\pi}{7} N = 2\pi m$  则  $x[n]$  为周期信号, 即  $\frac{N}{m} = \frac{2\pi}{8\pi/7} = \frac{7}{4}$

所以  $N = \frac{2\pi \times 7}{8\pi} m = \frac{7}{4} m$

不可约的整数

得  $m = 4$   $N = 7$  ——是周期信号

2)  $\because x[n+N] = e^{j[(n+N)/8+\pi]} = e^{j(n/8+\pi)} e^{jN/8}$

若  $N/8 = 2\pi m$ , 则  $e^{jN/8} = e^{j2\pi m} = 1$ ,  $x[n]$  为周期信号。

得  $N = 16\pi m$ ,  $\frac{N}{m} = 16\pi$  ——不是有理数。所以是非周期的。

$$\begin{aligned}
 3) \quad \because x[n+3k] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{\delta[n+3k-3m] - \delta[n+3k-1-3m]\} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{\delta[n-3(m-k)] - \delta[n-1-3(m-k)]\} \\
 \text{改变求和范围得} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{\delta[n-3m] - \delta[n-1-3m]\} = x[n]
 \end{aligned}$$

所以，是周期信号； $T = 3$

### 1.2.3 偶信号与奇信号

1、如果一个信号 $x(t)$ 或 $x[n]$ ,以纵坐标为轴反转后不变,则为偶信号。可写为:

对连续信号有  $x(-t) = x(t)$

对离散信号有  $x[-n] = x[n]$

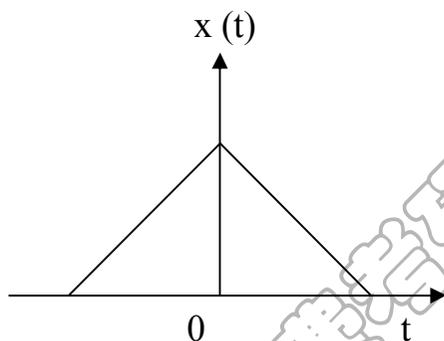
2、如果一个信号 $x(t)$ 或 $x[n]$ ,以纵坐标为轴反转后有

$x(-t) = -x(t)$

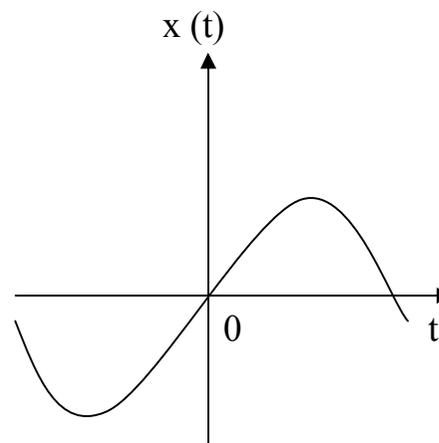
$x[-n] = -x[n]$

则为奇信号。一个奇信号在 $t=0$ 或 $n=0$ 时其值必须为0。

下图 (a) 为偶信号; (b) 为奇信号。



(a) 偶连续时间信号



(b) 奇连续时间信号

任何信号均可分解为奇、偶信号之和, 即

$$x(t) = o_d \{x(t)\} + \varepsilon_u \{x(t)\} = x_o(t) + x_e(t)$$

其中:  $x_o(t) = o_d \{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$  ——奇部是奇信号 (1式)

$x_e(t) = \varepsilon_u \{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$  ——偶部是偶信号 (2式)

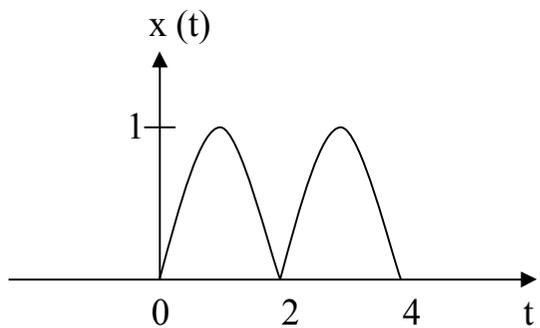
证明如下:

$$\begin{aligned} \text{因 } x(t) &= 1/2 [x(t) + x(t) + x(-t) - x(-t)] \\ &= 1/2 [x(t) + x(-t)] + 1/2 [x(t) - x(-t)] \\ &= \varepsilon_u \{x(t)\} + o_d \{x(t)\} \end{aligned}$$

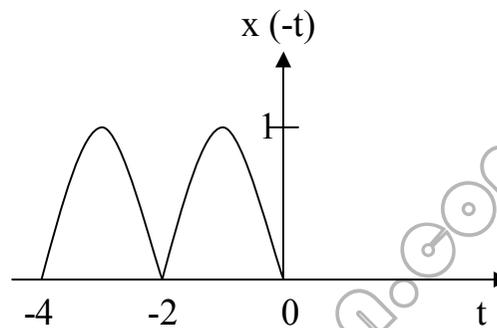
例 1、已知信号如图 (A) 所示, 试画出奇部和偶部的波形。

解: 画的方法:

- 1、首先画出  $x(-t)$  的波形, 如图 (b) 所示;
- 2、再根据式 1、2, 用图解法进行波形合成, 即可画出奇部和偶部的波形。

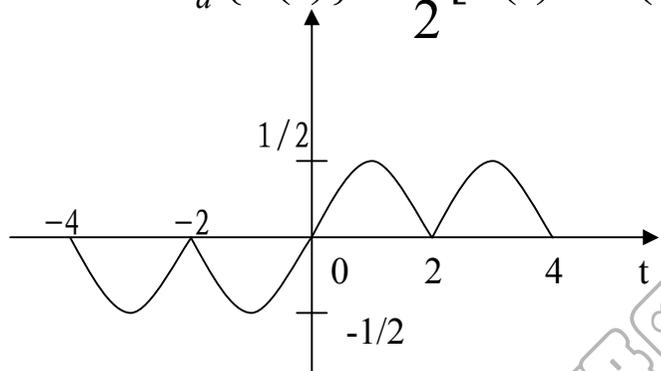


(a)



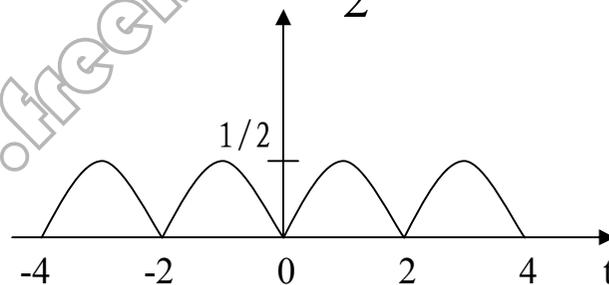
(b)

$$o_d \{x(t)\} = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]$$



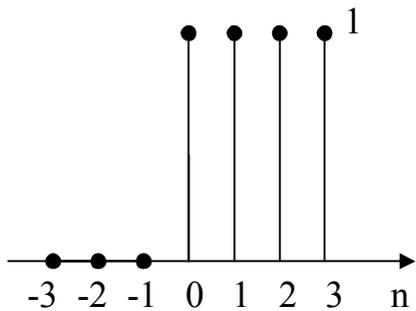
(c)

$$\varepsilon_u \{x(t)\} = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$$

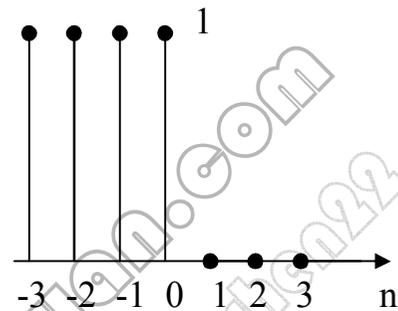


(d)

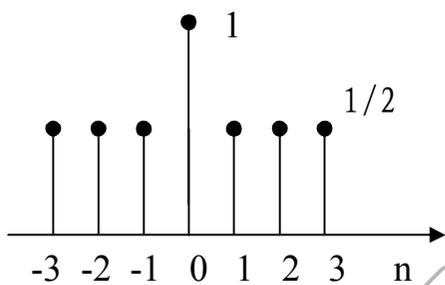
图12 连续信号 $x(t)$ 的奇偶分解



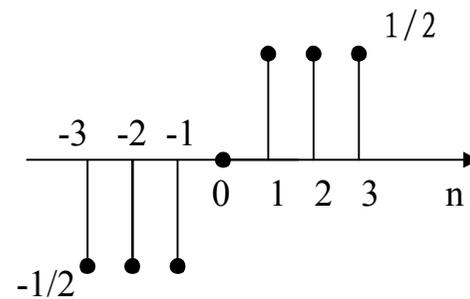
(a)  $x[n]$



(b)  $x[-n]$



(c)  $\varepsilon_u\{x[n]\} = x_e[n]$



(d)  $o_d\{x[n]\} = x_o[n]$

图13 离散信号的奇偶分解

例2、 P47中1.34题——是奇、偶信号的几个性质：

1) 证明：若  $x[n]$  是奇信号，则  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = 0$

解：因为  $x[n]$  是奇信号，则

$$x[-n] = -x[n] \quad , \quad x[0] = 0$$

所以 
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = x[0] + \sum_{n=1}^{\infty} \{x[n] + x[-n]\} = 0$$

2)  $x[n]$  为一任意信号，证明  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2[n]$

解： 
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{x_e[n] + x_o[n]\}^2$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2[n] + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e[n] x_o[n]$$

这项为奇函数

所以等于0

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2[n]$$

### 1.3、指数信号与正弦信号

#### 1.3.1 连续时间复指数信号与正弦信号

##### 一、连续时间复指数信号

$$x(t) = ce^{at}$$

其中： $c$  和  $a$  一般为复数，即  $a = \sigma + j\omega_0$ 。

1、实指数信号—— $c$ 和 $a$ 均为实数，即  $\omega = 0, a = \sigma$ ，这时  $x(t)$  称为实指数信号。

1)、若  $a$  为正实数（即  $\sigma > 0$ ），则  $x(t)$  随  $t$  指数增长。

2)、若  $a$  为负实数（即  $\sigma < 0$ ），则  $x(t)$  随  $t$  的指数增加而指数衰减。

3)、若  $a=0$ （即  $\sigma = 0$ ），则  $x(t)$  为一常数。

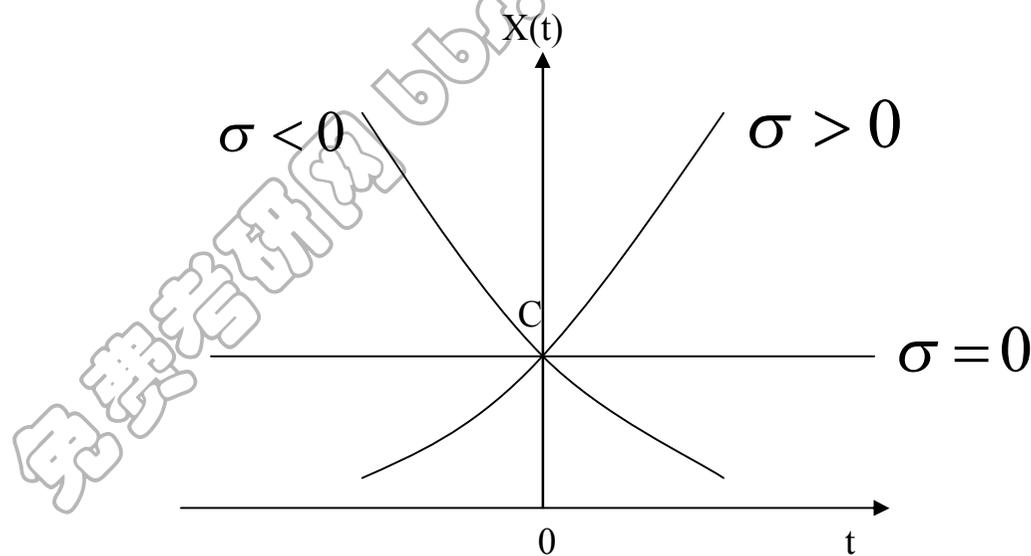


图 14

2、周期复指数信号——当  $c=1$ ,  $a = j\omega_0$  , 为纯虚数时, 即  $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ , 这时  $x(t)$  为周期复指数信号。

证明: 由周期信号定义可知, 周期信号必须为:  $x(t) = x(t+T)$ , 即

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T)} = e^{j\omega_0 t} \cdot e^{j\omega_0 T}$$

可见, 要求使  $e^{j\omega_0 T} = 1$ ,  $x(t)$  就是周期信号。

1) 若  $\omega_0 = 0$ ,  $x(t) = 1$ , 这时对任何  $T$  值都是周期的——但无意义;

2) 若  $\omega_0 \neq 0$ , 则必须使  $\omega_0 T = 2n\pi$ , 因为 (据欧拉公式) 有:

$$e^{j\omega_0 T} = \cos \omega_0 T + j \sin \omega_0 T = \cos 2n\pi + j \sin 2n\pi = 1$$

使上式成立的最小正  $T$  值, 称基波周期  $T_0$ :  $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$ ,  $\omega_0$  为基波频率。

可见,  $e^{j\omega_0 t}$  和  $e^{-j\omega_0 t}$  都具有同一基波周期的周期信号。

同样, 正弦信号也能用复指数信号来表示

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \quad , \quad \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

因此:

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 t} = A \operatorname{Re}\{e^{j(\omega_0 t + \phi)}\}$$

$$A \sin(\omega_0 t + \phi) = A \operatorname{Im}\{e^{j(\omega_0 t + \phi)}\}$$

[ 因为

$$A e^{j(\omega_0 t + \phi)} = A \cos(\omega_0 t + \phi) + jA \sin(\omega_0 t + \phi) ]$$

↑ 实部
↑ 虚部

以后我们会看到，**周期复指数信号是构成复杂信号的基本单元**。因此在信号或系统的分析中是十分有用的。

3、**成谐波关系的复指数信号**——即周期复指数信号的集合。该集合内的全部信号都是周期的，且有一个公共周期  $T_0$ 。

因为复指数信号  $e^{j\omega t}$  要成为具有周期为  $T_0$  的周期信号的必要条件是:  $e^{j\omega T_0} = 1$

这意味着  $\omega T_0 = 2\pi k$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  (1.34)

由此，若定义  $\omega_0 = 2\pi / T_0$ , 则有  $\omega = 2\pi k / T_0 = \omega_0 k$

从而得出: 为满足(1.34)式,  $\omega$  必须是  $\omega_0$  的整数倍。这就是说: **一个成谐波关系的复指数信号的集合就是一组其基波频率是某一正频率  $\omega_0$  的整数倍的复指数信号, 即**

$$\varphi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

1) 当  $k=0$  ,  $\varphi_k(t)$  是一个常数;

2) 当  $k \neq 0$  ,  $\varphi_k(t)$  是周期的, 其基波频率为  $|k|\omega_0$  , 基波周期为

$$T_k = \frac{2\pi}{|k|\omega_0} = \frac{2\pi}{|k|2\pi/T_0} = \frac{T_0}{|k|}$$

4、一般复指数信号——即当  $c$ 、 $a$  均为复数时。

$$x(t) = ce^{at}$$

当  $C$  用极坐标表示,  $a$  用直角坐标表示时, 有

$$c = |c|e^{j\theta}$$

$$a = r + j\omega_0$$

$$ce^{at} = |c|e^{j\theta} e^{(r+j\omega_0)t} = |c|e^{rt} e^{j(\omega_0 t + \theta)}$$

利用欧拉公式可进一步展开为

$$ce^{at} = |c|e^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta) + j|c|e^{rt} \sin(\omega_0 t + \theta)$$

由此可见, 若  $r=0$  则复指数信号其实部和虚部都是正弦型的。

若  $r>0$ , 则其实部和虚部是一个振幅为指数增长的 (见图 (a))。

若  $r<0$ , 则为振幅成指数衰减的正弦信号 (见图 (b))。

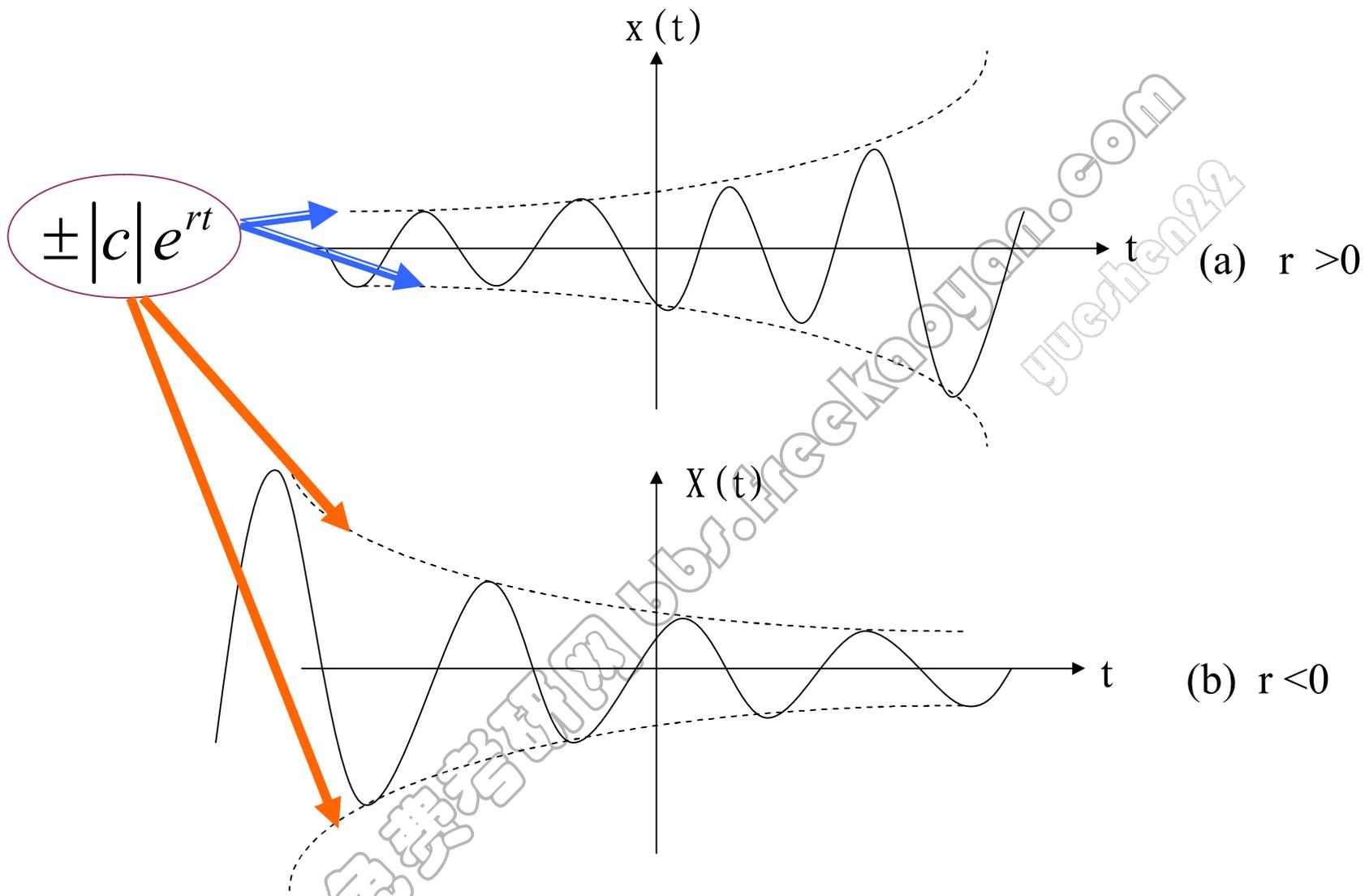


图 15

### 1.3.2 离散时间复指数信号与正弦信号

离散时间复指数信号定义为：
$$x[n] = Ca^n \quad (1.44),$$

其中：**C和a均为复数。**

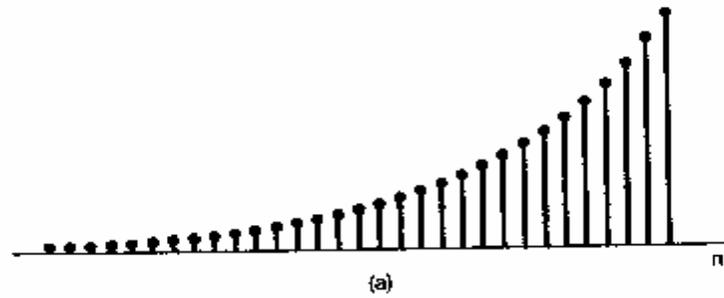
若令  $a = e^\beta$ ，则可写成另一种表示形式

$$x[n] = Ce^{\beta n} \quad (1.45)$$

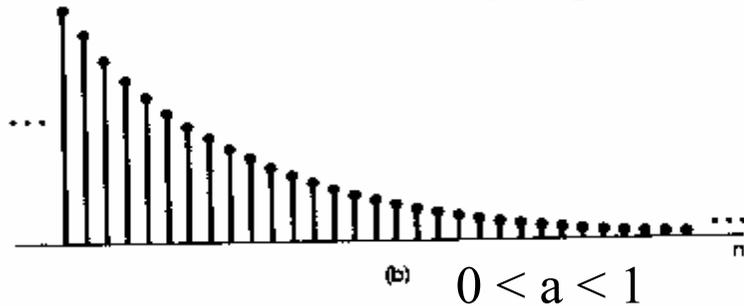
虽然(1.45)式类似于连续时间的复指数信号的表示形式，但式(1.44)更方便、更实用。

#### 1、实指数信号——**C和a都是实数。**

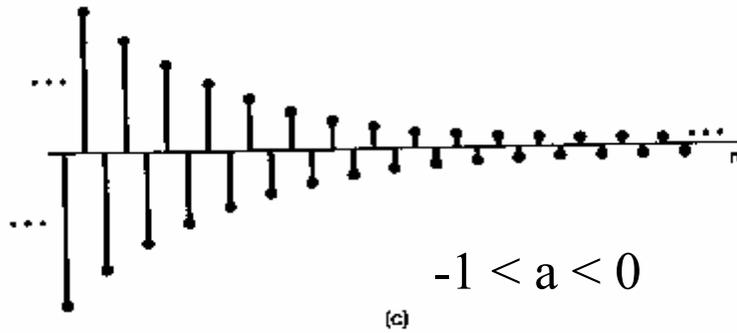
- 1)、若  $|a| > 1$ ，则信号随n指数增长；（见图1.24(a)、(d)）
- 2)、若  $0 < |a| < 1$ ，则信号随n指数衰减；（见图1.24(b)、(c)）
- 3)、若 a 为正，则  $Ca^n$  的全部值都具有相同符号；（见图1.24(a)、(b)）
- 4)、当 a 为负时，则  $x[n]$  值的符号交替变化；（见图1.24(c)、(d)）
- 5)、当 a=1 时， $x[n]$  为一常数；（见图(e)）
- 6)、当 a=-1 时， $x[n]$  的值在+C和-C之间交替变化。（见图(f)）



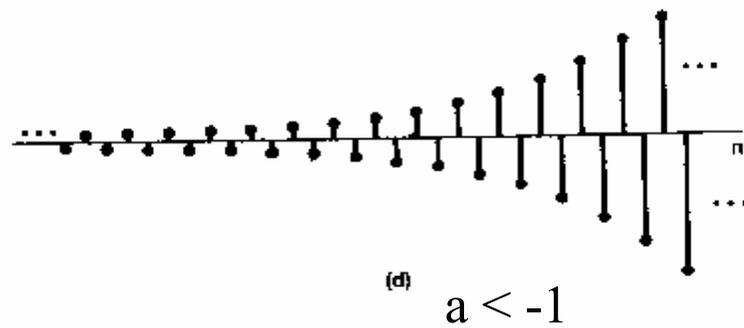
$$a > 1$$



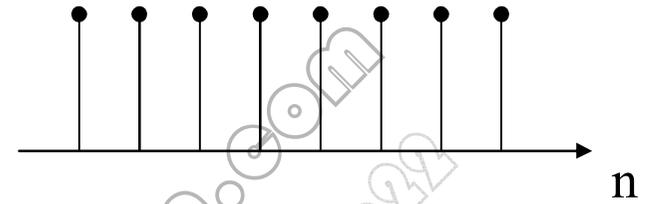
$$0 < a < 1$$



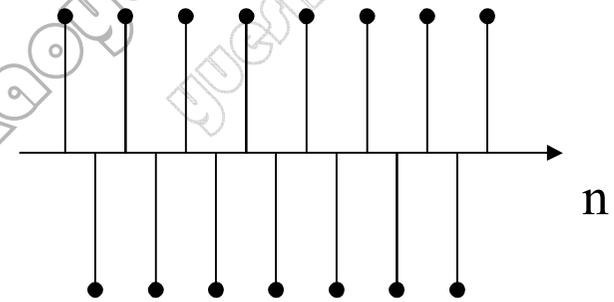
$$-1 < a < 0$$



$$a < -1$$



$$a = 1$$



$$a = -1$$

图16 实指数信号

$$x[n] = Ca^n$$

## 2、正弦信号

C=1

若令式  $x[n] = Ca^n = Ce^{\beta n}$  中的  $\beta$  为纯虚数  $j\omega_0$ ，就可得到

另一个重要的复指数序列  $x[n] = e^{j\omega_0 n}$  (1.46)

再利用欧拉公式，可将复指数和正弦序列联系起来，即

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} = \cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n$$

因为  $e^{j\omega_0 n}$  的模  $|e^{j\omega_0 n}| = 1$ ，所以式(1.46)中信号的每个样本在信号能量中的

贡献都是1。因此在  $-\infty < n < \infty$  内的总能量为无穷大；而在每单位时刻点上的

平均功率等于1。

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 = \infty$$

$$P_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \times (2N+1) = 1$$

离散时间情况下的正弦信号一般表示式为：

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n} \quad 40$$

### 3、一般复指数信号——**C和a均为复数**

将C和a均以极坐标形式给出，即  $C = |C|e^{j\theta}$ ， $a = |a|e^{j\omega_0}$

则有 
$$x[n] = Ca^n = |C||a|^n e^{j(\omega_0 n + \theta)}$$
$$= |C||a|^n [\cos(\omega_0 n + \theta) + j \sin(\omega_0 n + \theta)]$$

1)、当  $|a|=1$  时， $x[n]$  为

$$x[n] = |C| \cos(\omega_0 n + \theta) + j |C| \sin(\omega_0 n + \theta)$$

可见，此时复指数序列的**实部和虚部都是正弦序列**；

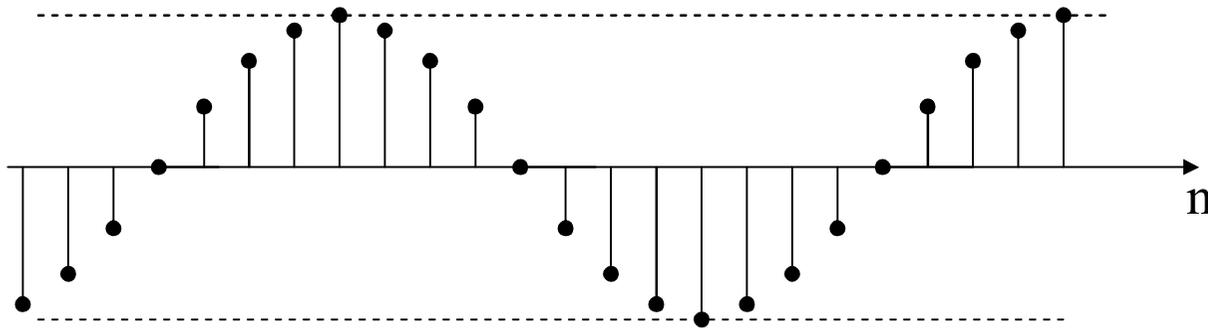
2)、当  $|a| < 1$  时， $x[n]$  的实部和虚部为正弦序列乘以一个**按指数衰减的序列**。

即：
$$x[n] = |C||a|^n [\cos(\omega_0 n + \theta) + j \sin(\omega_0 n + \theta)]$$

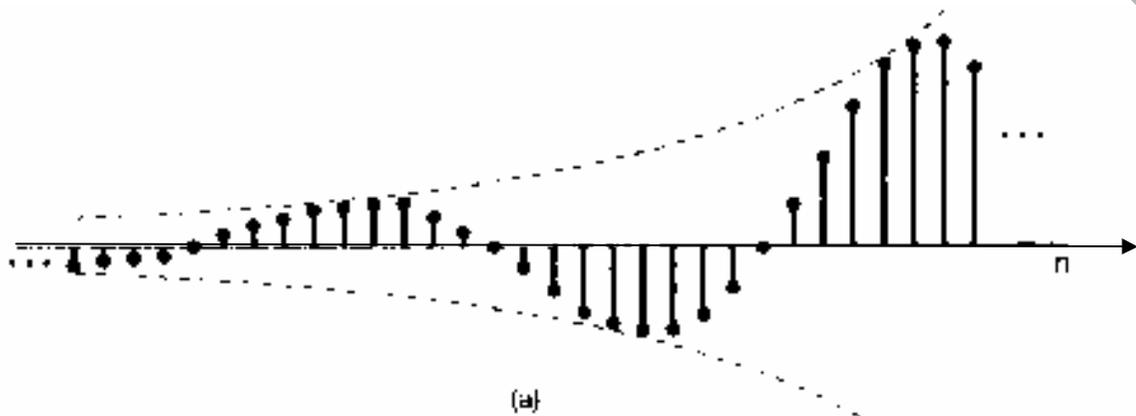
3)、当  $|a| > 1$  时， $x[n]$  的实部和虚部为正弦序列乘以一个**按指数增长的序列**。

$$x[n] = |C||a|^n [\cos(\omega_0 n + \theta) + j \sin(\omega_0 n + \theta)]$$

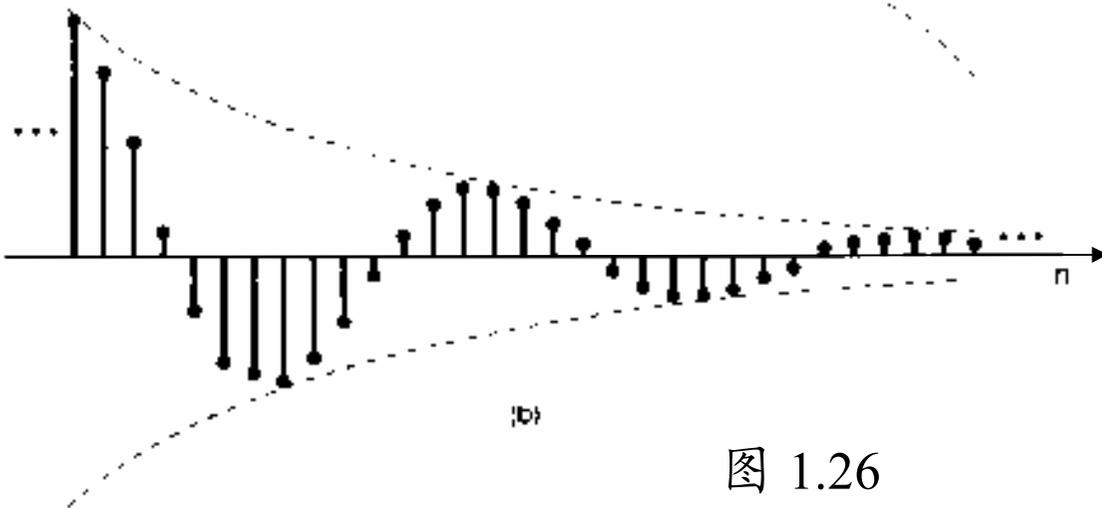
图1.26示出了这些信号的例子。



(a)  $|a| = 1$



(b)  $|a| > 1$



(c)  $|a| < 1$

图 1.26

第一次#

- 1、信号和系统的定义
- 2、信号的分类
- 3、自变量的变换——掌握时移、反转、展缩
- 4、周期信号——判别及确定信号的周期（注意定义域）
- 5、偶信号与奇信号——用奇、偶信号来表示任意一个信号。
- 6、指数信号与正弦信号

连续时间复指数信号与正弦信号  $x(t) = ce^{at}$

离散时间复指数信号与正弦信号  $x[n] = Ca^n = Ce^{\beta n}$

要求：了解不同的C、a值对函数的影响

能求基波频率或基波周期

### 1.3.3 离散时间复指数序列的周期性质

连续时间信号与离散时间信号之间有许多相似点，但也存在一些重要的差别：

1、连续时间信号  $e^{j\omega_0 t}$  具有以下两个性质：

1)、 $\omega_0$  愈大，信号振荡的速率就愈高；

2)、 $e^{j\omega_0 t}$  对任何  $\omega_0$  值都是周期的。

$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

## 2、离散时间复指数信号 $e^{j\omega_0 n}$

1)、当频率变为  $\omega_0 + 2\pi$  时

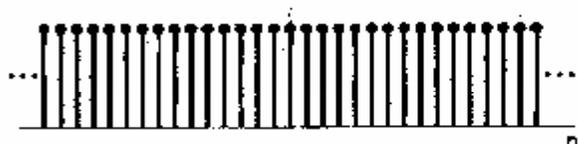
$$e^{j(\omega_0 + 2\pi)n} = e^{j2\pi n} e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n}$$

即离散时间复指数信号在  $\omega_0 + 2\pi$  时的值与频率为  $\omega_0$  时的值是完全一样的。所以，在考虑这种离散时间复指数信号时，仅仅需要在某个  $2\pi$  间隔内选择  $\omega_0$  就行了。

(大多数情况下取  $0 \leq \omega_0 < 2\pi$  , 或  $-\pi \leq \omega_0 < \pi$  )

即:  $e^{j\omega_0 n}$  不具有随  $\omega_0$  的增加而增加振荡速率的特性。事实上, 随着  $\omega_0$  从0开始增加, 其振荡速率愈来愈快, 直到  $\omega_0 = \pi$  为止。若继续增加  $\omega_0$ , 其振荡速率下降直到  $\omega_0 = 2\pi$  为止, 这时又得到与  $\omega_0 = 0$  时相同的结果。(见图1.27)。

$$x[n] = \cos(0 \cdot n) = 1$$



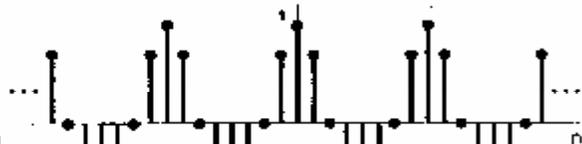
(a)

$$x[n] = \cos(\pi n / 8)$$



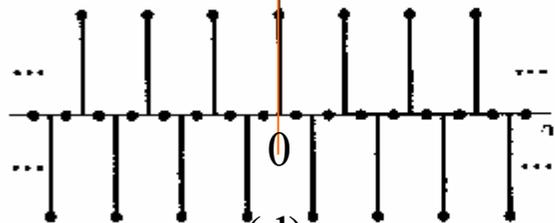
(b)

$$x[n] = \cos(\pi n / 4)$$



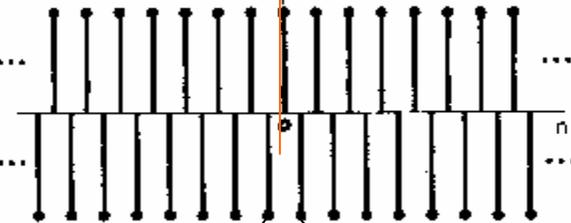
(c)

$$x[n] = \cos(\pi n / 2)$$



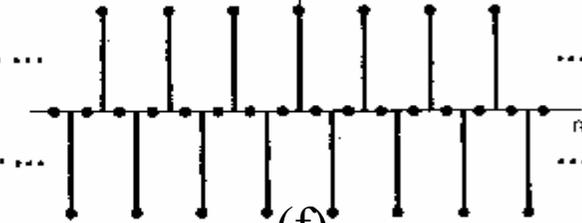
(d)

$$x[n] = \cos \pi n$$



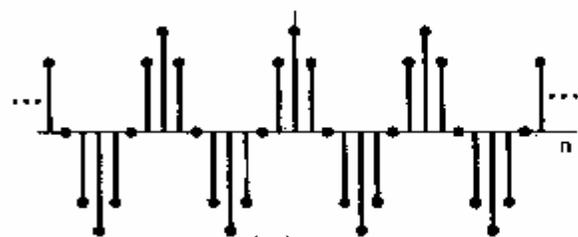
(e)

$$x[n] = \cos(3\pi n / 2)$$

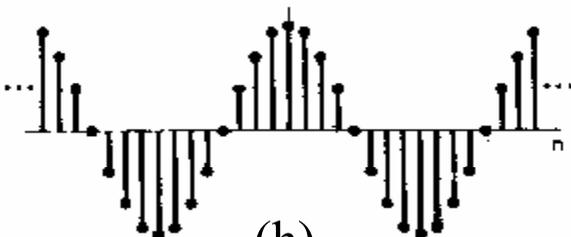


(f)

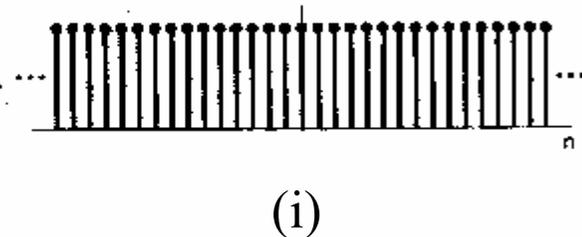
高频部分在  $\omega_0 = \pm \pi$  及  $\pi$  的奇数倍值



(g)



(h)



(i)

低频部分在  $\omega_0 = 0$  及  $\pi$  的偶数倍

$$x[n] = \cos(7\pi n / 4)$$

$$x[n] = \cos(15\pi n / 8)$$

$$x[n] = \cos(2\pi n)$$

图 1.27

由图可见离散时间复指数信号的低频部分是在  $\omega_0 = 0$  及  $\pi$  的偶数倍值附近。而高频部分是在  $\omega_0 = \pm \pi$  及  $\pi$  的奇数倍值附近。

注意：在  $\omega_0 = \pi$  及  $\pi$  的奇数倍值处有

$$e^{j\omega_0 n} = e^{j\pi n} = (e^{j\pi})^n = (-1)^n$$

以致于信号在每一点上都改变符号，产生剧烈振荡。

## 2)、离散时间复指数信号的周期性问题

若信号  $e^{j\omega_0 n}$  是周期的，就必须有

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n} e^{j\omega_0 N} = e^{j\omega_0 n}$$

这就要求  $e^{j\omega_0 N} = 1$

为此  $\omega_0 N$  必须是  $2\pi$  的整数倍，即

$$\omega_0 N = 2\pi m, \text{ 或 } \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}, \text{ 或 } \frac{2\pi}{N} = \frac{\omega_0}{m}, \quad N = m \frac{2\pi}{\omega_0}$$

若  $\omega_0 / 2\pi$  为有理数，则是周期的；否则就不是周期的。

例如下图 (a) 和 (b) 的信号是周期的，而图 (c) 的信号不是周期的。

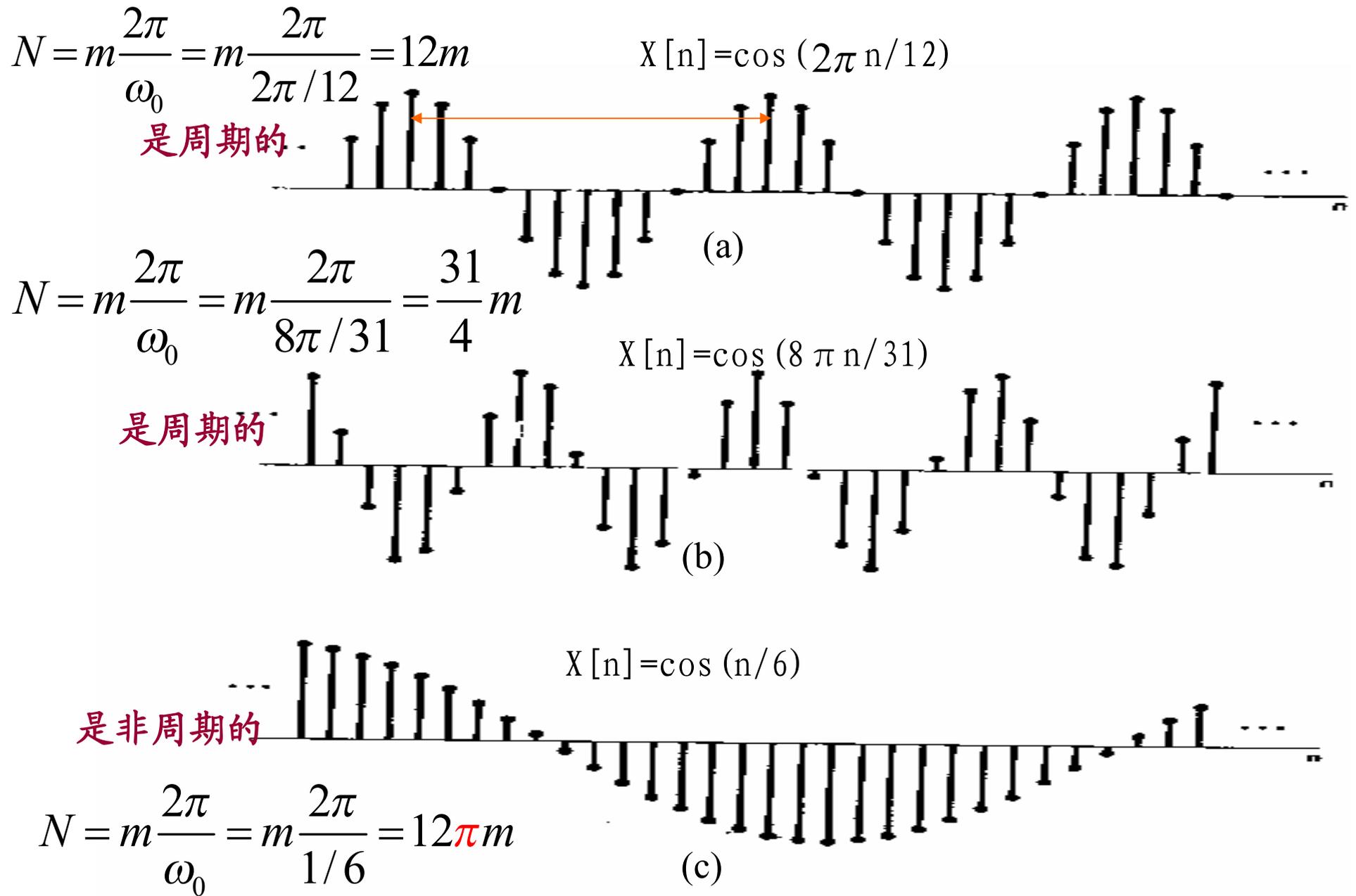


图1.25 离散时间振弦信号

根据上述讨论，**可求得离散时间复指数信号的基波周期为**

$$N = m(2\pi / \omega_0) = \frac{2\pi}{\omega_0 / m} \quad (1.58)$$

**这种表示方法显然与连续时间信号中的表示不同。**

表1.1列出了  $e^{j\omega_0 t}$  和  $e^{j\omega_0 n}$  的一些不同点。

表1.1 信号  $e^{j\omega_0 t}$  和  $e^{j\omega_0 n}$  的比较

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
$\omega_0$ 不同，信号也不同	频率相差 $2\pi$ 的整数，信号相同
对任何 $\omega_0$ 值都是周期的	仅当 $\omega_0 / 2\pi = m / N$ 为有理数时才是周期的。这里 $N$ 和 $m$ 均为整数
基波频率为 $\omega_0$	基波频率为 $(\omega_0 / m) = 2\pi / N$
基波周期: $\omega_0 = 0$ , 无定义 $\omega_0 \neq 0, T = 2\pi / \omega_0$	基波周期: $\omega_0 = 0$ , 无定义 $\omega_0 \neq 0, N = m(2\pi / \omega_0)$

例: 求如下信号的基波周期  $x[n] = e^{j(2\pi/3)n} + e^{j(3\pi/4)n}$

解:  $x_1[n] = e^{j(2\pi/3)n}$ ,  $\omega_1 = 2\pi/3$ ,  $N_1 = m \frac{2\pi}{2\pi/3} = 3m$

$x_2[n] = e^{j(3\pi/4)n}$ ,  $\omega_2 = 3\pi/4$ ,  $N_2 = m \frac{2\pi}{3\pi/4} = \frac{8}{3}m$

是有理数—是周期的

可见:

$x_1[n]$  的基波周期为3,  $x_2[n]$  的基波周期8。其**最小公倍数**为24, 即  $x[n]$  的基波周期为  $N_0 = 24$ 。

### 3、成谐波关系的信号

1)、在连续时间情况下, 这些成谐波关系的信号为:

$$\phi_k(t) = e^{jk(2\pi/T)t},$$

当  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  时都各不相同;

2)、在离散时间情况下, 这些成谐波关系的信号为:

$$\phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

当是第 $k+N$ 个谐波时，即

$$\begin{aligned}\phi_{k+N}[n] &= e^{j(k+N)(2\pi/N)n} \\ &= e^{jk(2\pi/N)n} \underbrace{e^{j2\pi n}}_{=1} = \phi_k[n]\end{aligned}$$

这意味着，由  $\phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}$  给出的一组信号中，

仅有 $N$ 个互不相同的周期复指数信号。例如：

$$\phi_0[n]=1, \quad \phi_1[n]=e^{j2\pi n/N}, \quad \phi_2[n]=e^{j4\pi n/N}, \quad \dots, \quad \phi_{N-1}[n]=e^{j2\pi(N-1)n/N}$$

而任何其它的  $\phi_k[n]$  都与上列中的某一个相同。例如，

$$\phi_N[n] = \phi_0[n] \quad \text{和} \quad \phi_{-1}[n] = \phi_{N-1}[n]$$

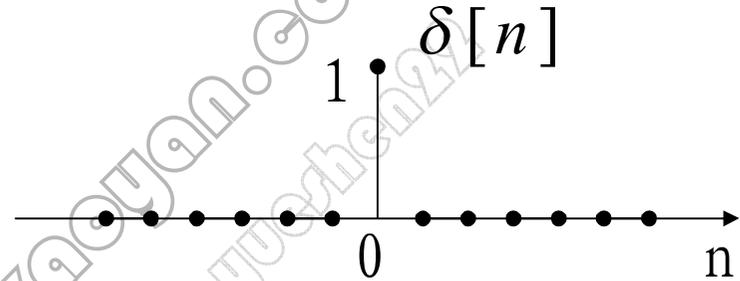
## 1.4 单位冲激、单位阶跃函数

### 1.4.1 离散时间单位脉冲和单位阶跃序列

#### 1、单位脉冲(也称单位样本)

- 定义为:

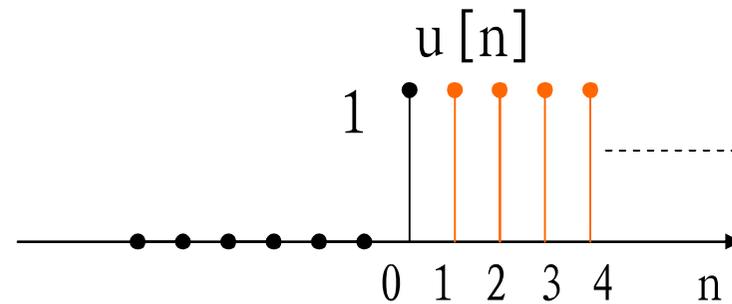
$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases} \quad (1.63)$$



#### 2、单位阶跃

- 定义为:

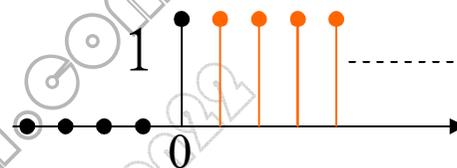
$$u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$



### 3、离散时间单位脉冲和单位阶跃之间的关系

1)、离散时间单位脉冲是离散时间单位阶跃的一次差分, 即

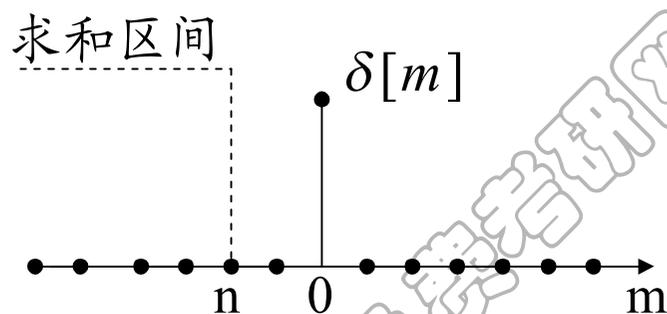
$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$



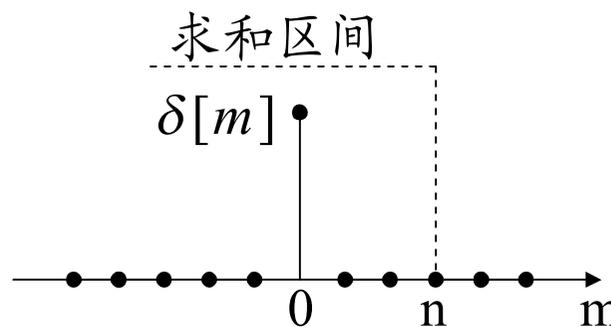
2)、离散时间单位阶跃是离散时间单位脉冲的求和函数, 即

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m] \quad (1.66)$$

因为单位样本仅在 $n=0$ 时有值, 其余均为0。所以当对 $n < 0$ 求和, 值为0; 当对  $n \geq 0$  求和, 值为1。



(a)  $n < 0$



(b)  $n \geq 0$

图1.3 求和  $u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m]$

若将求和变量从  $m$  改为  $k = n - m$  后，离散时间单位阶跃也可用单位样本表示成：

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^0 \delta[n-k] \quad \text{或} \quad u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \quad (1.67)$$

这时， $\delta[n-k]$  在  $k = n$  时有值，所以当  $n < 0$  时，式(1.67)求和值为0；而当  $n \geq 0$  时，求和值为1。

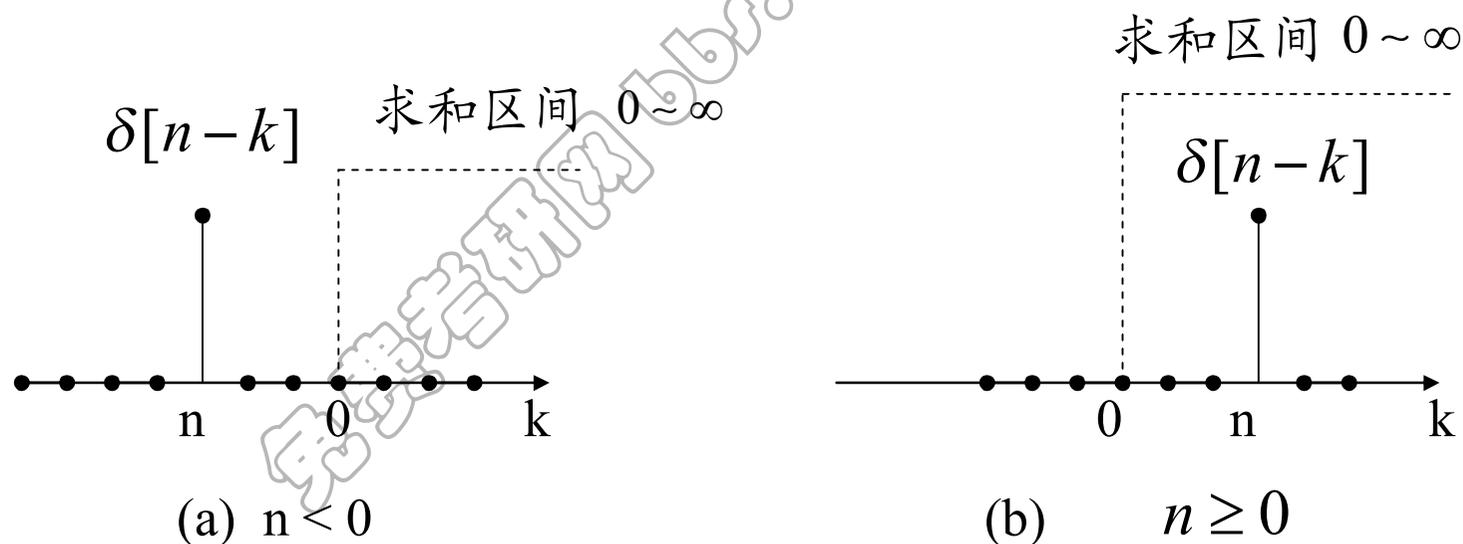


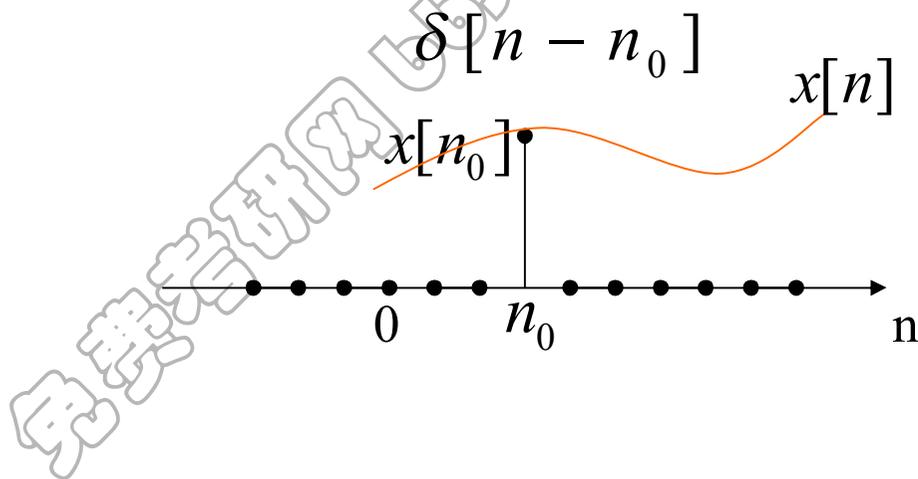
图 1.31

注：单位脉冲序列可以用于对一个信号在  $n = 0$  时的值采样，即

$$X[n] \delta[n] = x[0] \delta[n]$$

更一般的情况是，考虑发生在  $n = n_0$  处的值的采样，即

$$x[n] \delta[n - n_0] = x[n_0] \delta[n - n_0]$$



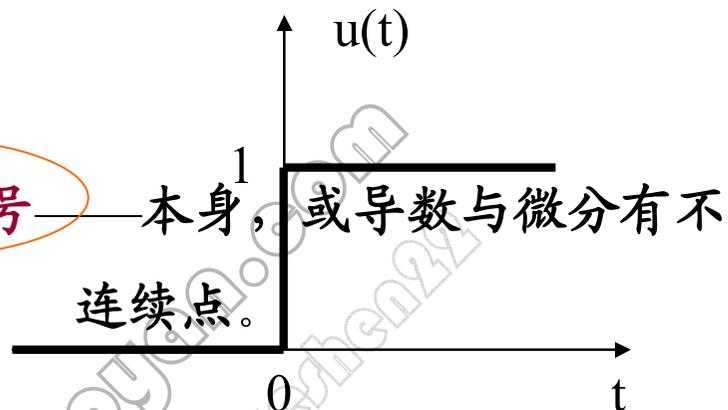
## 1.4.2 连续时间单位阶跃和单位冲激函数 (注意: 有补充内容)

### 1、连续时间单位阶跃函数

• 定义

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

亦称奇异信号



注意: 单位阶跃在  $t=0$  处是不连续的。

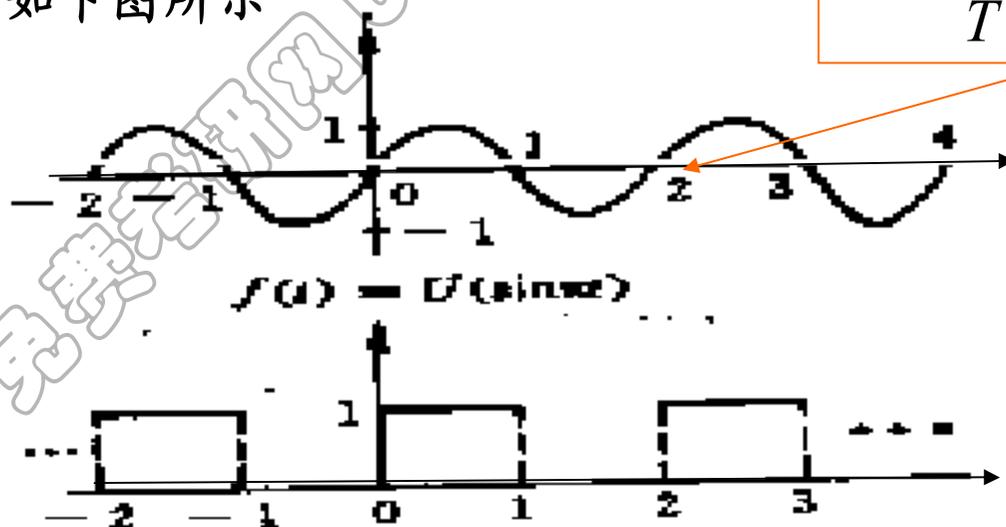
例: 画出  $x(t) = u(\sin \pi t)$  的波形。

解:

$$\because x(t) = u(\sin \pi t) = \begin{cases} 1 & \sin \pi t > 0 \\ 0 & \sin \pi t < 0 \end{cases}$$

故得  $x(t)$  的波形如下图所示

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi, T = 2$$



## 2、单位冲激函数

定义  $\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$

称冲激强度

且  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_0^{\Delta} \frac{1}{\Delta} dt = 1$

推广:

1)、设  $t_0$  为正实常数, 则有

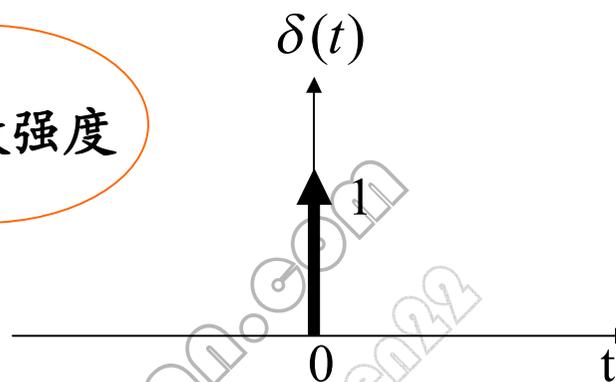
$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & t = t_0 \\ 0 & t \neq t_0 \end{cases}$$

且  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = \int_{t_0-}^{t_0+} \delta(t - t_0) dt = 1$

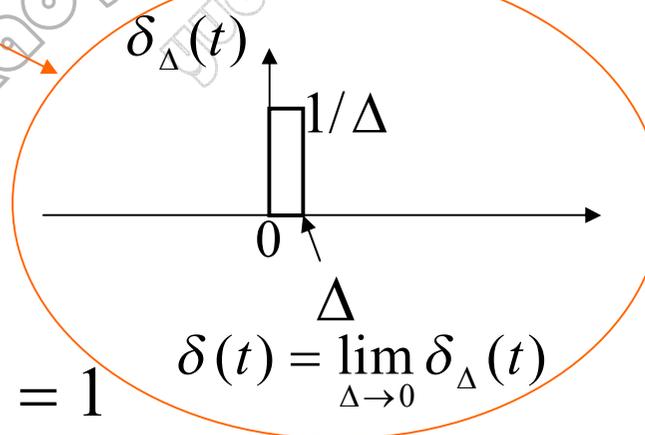
2)、若冲激函数图形下的面积为A, 则有

$$A\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & t = t_0 \\ 0 & t \neq t_0 \end{cases}$$

且  $\int_{-\infty}^{\infty} A\delta(t - t_0) dt = A \int_{t_0-}^{t_0+} \delta(t - t_0) dt = A$



连续时间单位冲激



性质:

1)、设  $x(t)$  为任意有界函数, 且在  $t=0$  与  $t=t_0$  时刻连续, 其函数值分别为  $x(0)$  与  $x(t_0)$ , 则有

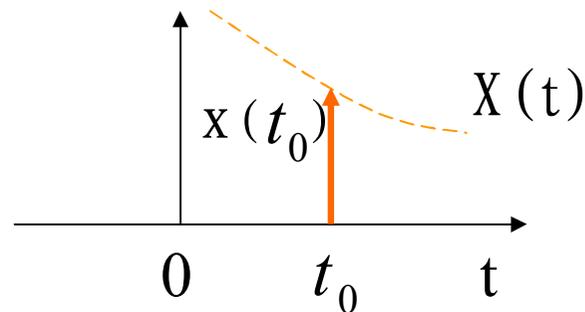
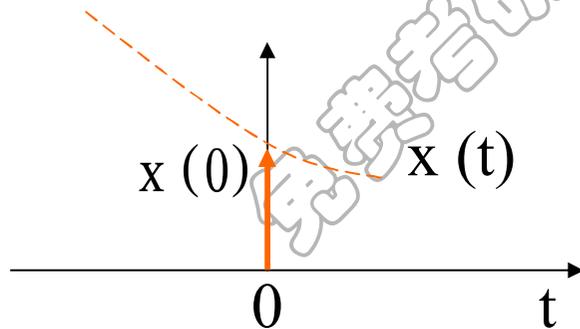
$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

且  $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$

2)、抽样性

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(0)\delta(t)dt = x(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = x(0)$$

且  $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = x(t_0)$



3)、为偶函数, 即有  $\delta(-t) = \delta(t)$

$$-t = t'$$

证明: 给上式等号两边同乘以  $x(t)$  并进行积分, 即

$$\begin{aligned} \text{左式} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(-t)x(t)dt = \int_{\infty}^{-\infty} \delta(t')x(-t')d(-t') = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t')x(-t')dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t')x(0)dt = x(0) \end{aligned}$$

$$\text{右式} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x(0)dt = x(0)$$

故得  $\delta(-t) = \delta(t)$

同理可得  $\delta(t-t_0) = \delta[-(t-t_0)]$

4)、  $\delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t)$  (a为大于零的实常数)

证明:

设  $t' = at$ , 则  $t = \frac{1}{a}t'$ ,  $dt = \frac{1}{a}dt'$ ; 故有

$$\text{左式} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(at) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t') \frac{1}{a} dt' = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t') dt' = \frac{1}{a}$$

$$\text{右式} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} \delta(t) dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \frac{1}{a}$$

故得

$$\delta(at) = \frac{1}{a} \delta(t)$$

推广

$$1) 、 \delta(at - t_0) = \delta\left[a\left(t - \frac{t_0}{a}\right)\right] = \frac{1}{a} \delta\left(t - \frac{t_0}{a}\right)$$

$$2) 、 \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(at) dt = \frac{1}{a} x(0)$$

$$3) 、 \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(at - t_0) dt = \frac{1}{a} x\left(\frac{t_0}{a}\right)$$

### 3、连续时间单位冲激函数与单位阶跃之间的关系

#### 1)、连续时间单位阶跃是单位冲激的积分函数

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

注意定义域

证明:

- 当  $t < 0$  时, 有  $\delta(t) = 0$ , 故有

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t 0 \times d\tau = 0$$

- 当  $t > 0$  时, 有  $\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^0 0 \times d\tau + \int_0^{0^+} \delta(\tau) d\tau + \int_{0^+}^t 0 \times d\tau = 0 + 1 + 0 = 1$

故得

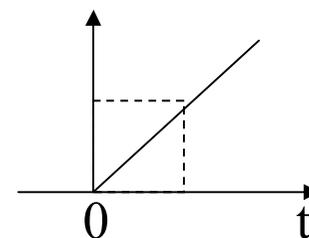
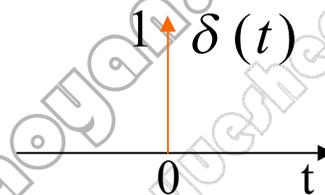
$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} = u(t)$$

如果对  $\delta(t)$  二次积分, 可得

$$u_{-2}(t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\tau} \delta(\lambda) d\lambda d\tau = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = tu(t)$$

为斜坡函数

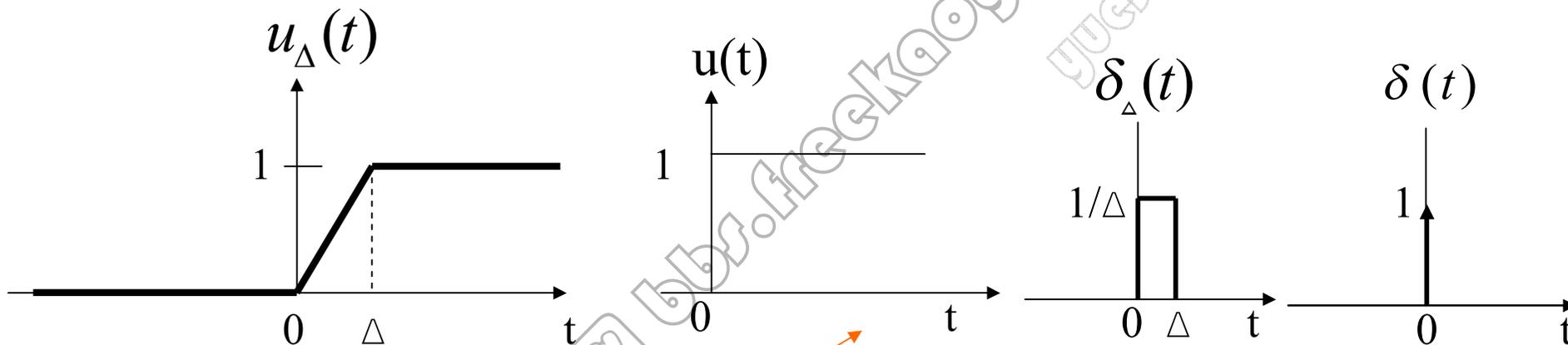
证毕 #3



2)、连续时间单位冲激可看作连续时间单位阶跃的一次微分, 即

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

严格地说, 由于 $u(t)$ 在 $t=0$ 时是**不连续**的, 因此是不可微的。然而可把 $u(t)$ 解释成**斜平信号**  $u_{\Delta}(t)$  的一种近似。因为  $u_{\Delta}(t)$  **是一个连续信号, 所以可求导。**



所以,  $u(t)$ 是 $\Delta \rightarrow 0$ 时,  $u_{\Delta}(t)$  的极限。即

$$u(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} u_{\Delta}(t)$$

$$\delta_{\Delta}(t) = \frac{du_{\Delta}(t)}{dt}$$

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t)$$

$u_{\Delta}(t)$  的导数  
连续时间单  
位冲激

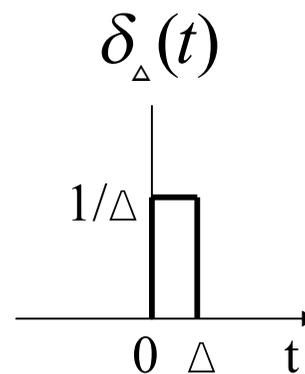
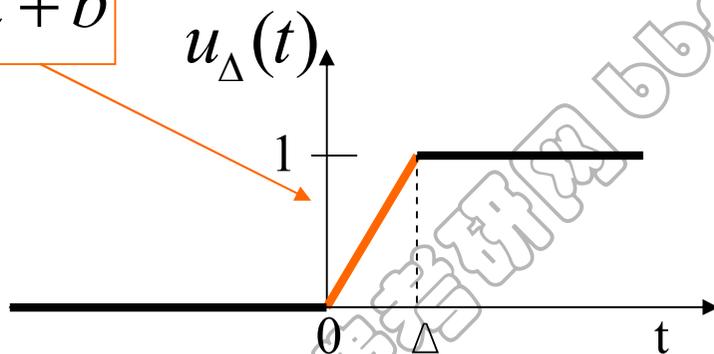
说明: 
$$u_{\Delta}(t) = \frac{t}{\Delta}[u(t) - u(t - \Delta)] + u(t - \Delta)$$

$$\delta_{\Delta}(t) = \frac{d}{dt}u_{\Delta}(t) = \frac{1}{\Delta}[u(t) - u(t - \Delta)] + \frac{t}{\Delta}[\delta(t) - \delta(t - \Delta)] + \delta(t - \Delta)$$

$$= \frac{1}{\Delta}[u(t) - u(t - \Delta)] + \frac{0}{\Delta}\delta(t) - \frac{\Delta}{\Delta}\delta(t - \Delta) + \delta(t - \Delta)$$

$$= \frac{1}{\Delta}[u(t) - u(t - \Delta)]$$

$y = ax + b$



得 
$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t)$$

冲激强度为 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_0^{\Delta} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} (\Delta - 0) = 1$$

注意: 定义域. 例如:

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

### 1.4.3 其它信号(注意: 这是补充内容)

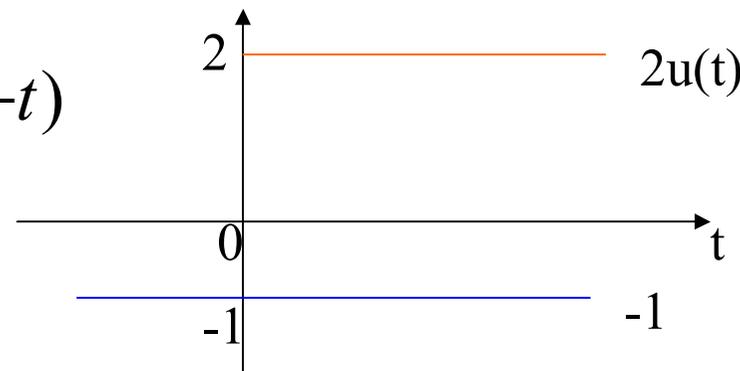
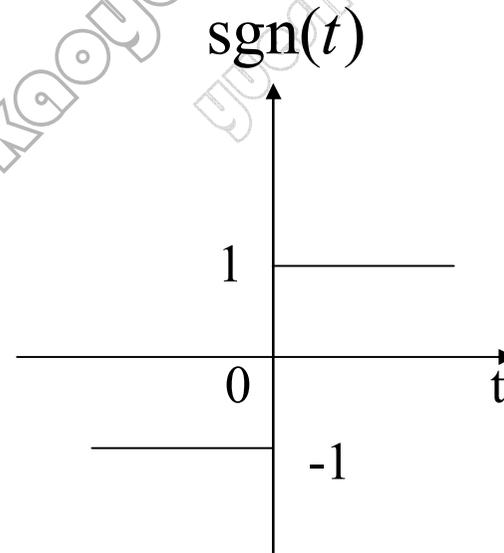
1、符号函数 亦属奇异信号

定义: 
$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ -1 & , t < 0 \end{cases}$$

可用  $u(t)$  表示为

$$\text{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$$

$$\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1$$

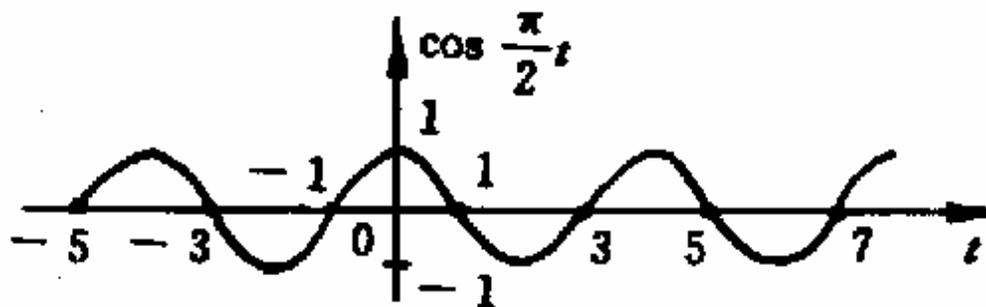


例：试画出函数  $f(t) = \text{sgn}(\cos \frac{\pi}{2}t)$  的波形。

$$\text{解： } f(t) = \text{sgn}(\cos \frac{\pi}{2}t) = \begin{cases} 1 & , \cos \pi t / 2 > 0 \\ -1 & , \cos \pi t / 2 < 0 \end{cases}$$

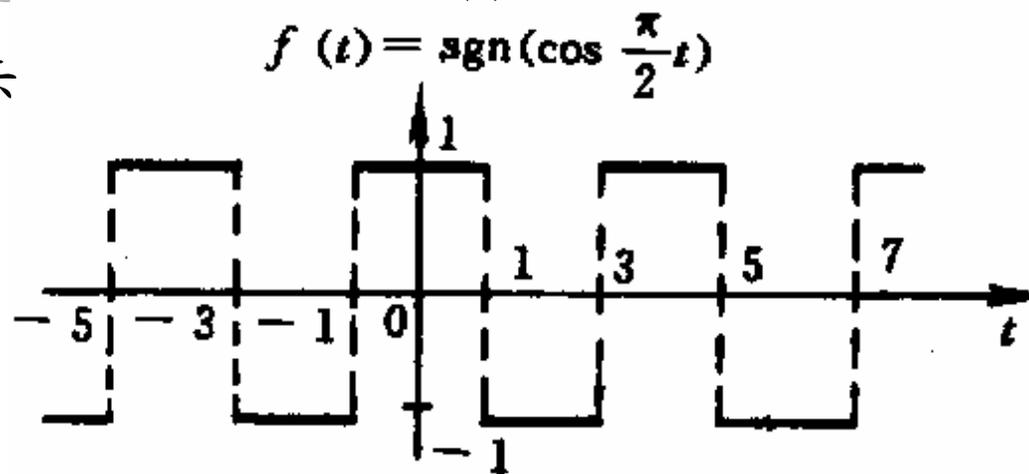
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4$$

$\therefore \cos \pi t / 2$  如图(a)所示



(a)

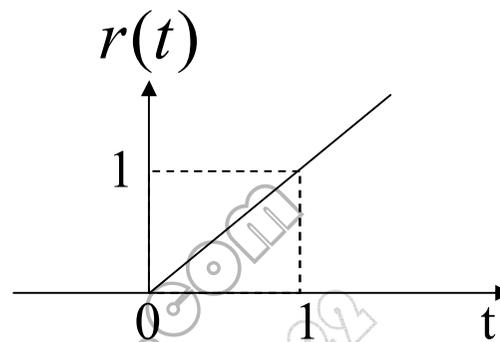
由此可得  $f(t)$  的波形如图(b)所示



(b)

## 2、单位斜坡函数

$$\text{定义: } r(t) = tu(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ t & , t \geq 0 \end{cases}$$



单位斜坡信号与 $u(t)$ 、 $\delta(t)$ 有如下关系:

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau, \quad \frac{dr(t)}{dt} = u(t)$$

$$r(t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau d\tau, \quad \frac{d^2 r(t)}{dt^2} = \delta(t)$$

单位斜坡信号 $r(t)$ 的一次积分是抛物线, 即

$$\int_{-\infty}^t r(\tau) d\tau = \int_0^t \tau d\tau = \frac{1}{2} t^2 u(t)$$

### 3、抽样函数

定义:  $Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$

其波形如图所示。由图可见

- 1、它是一个偶函数;
- 2、当  $t = \pm\pi, \pm2\pi, \dots, \pm n\pi$  时, 函数值等于零。

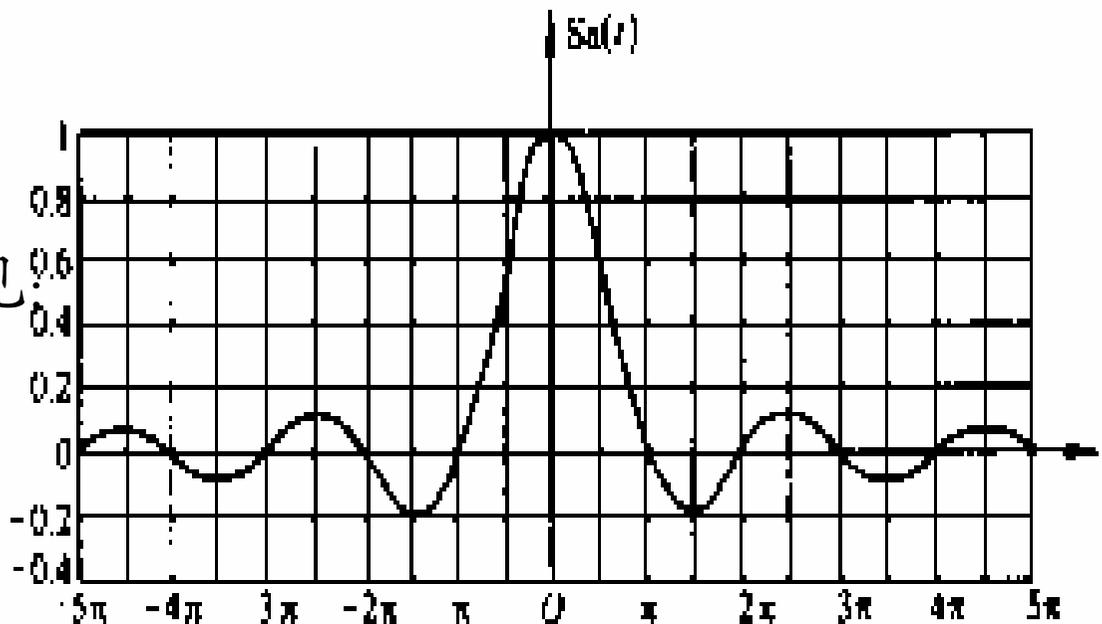


图  $Sa(t)$  波形

- 3、振幅沿  $t$  正、负两方向逐渐衰减。

$Sa(t)$  函数还具有以下性质:  $\int_0^{\infty} Sa(t) dt = \frac{\pi}{2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} Sa(t) dt = \pi$$

抽样函数的另一种表示是  $\text{sinc}(t)$  函数。表示式为:  $\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$

#### 1.4.4、信号的运算（注意：这是补充内容）

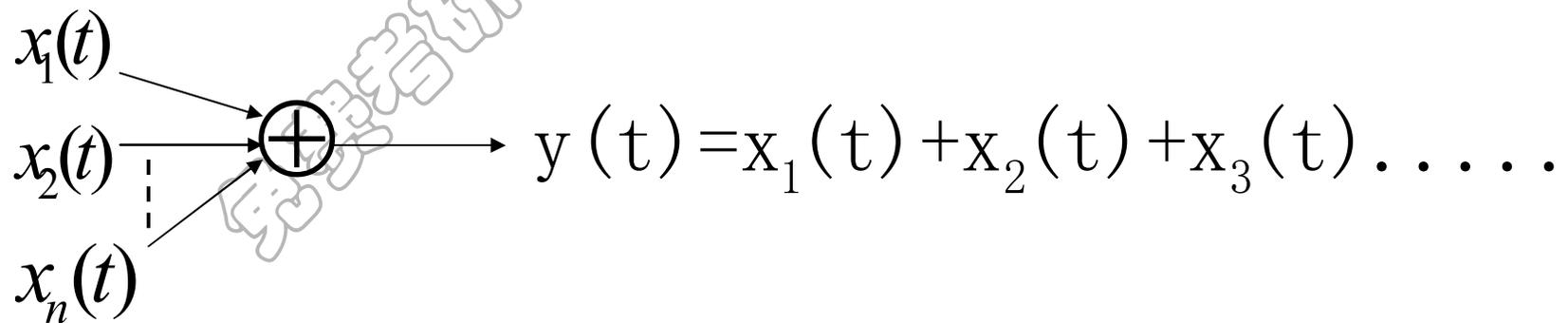
在实际工程应用时,常需分析信号的组成,而将其分解成基本的时间信号;同时也需要将某些信号变换成便于应用的形式,或构成其它形式的信号。这就需要对信号进行处理或运算。这里主要讨论一些基本运算。

##### 1、信号相加

将n个信号  $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots$  相加, 得相加信号  $y(t)$ , 即

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + \dots$$

信号相加用加法器实现, 如下图所示

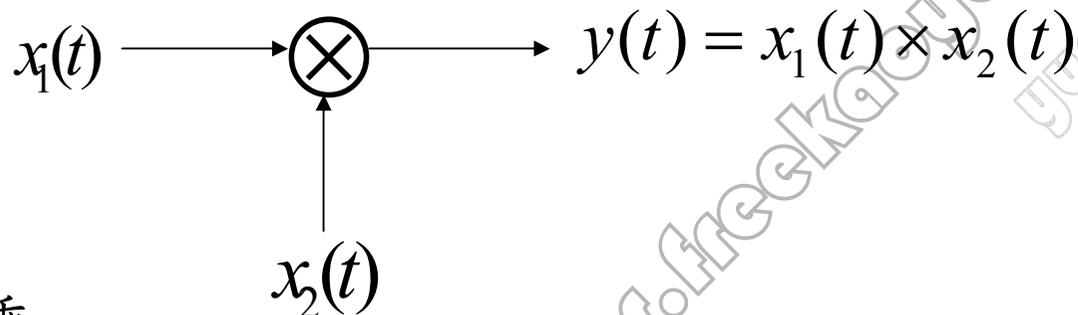


## 2、信号相乘

将两个信号  $x_1(t)$ ， $x_2(t)$  相乘，得相乘信号  $y(t)$ 。即

$$y(t) = x_1(t) \times x_2(t)$$

相乘运算用乘法器实现，如下图所示

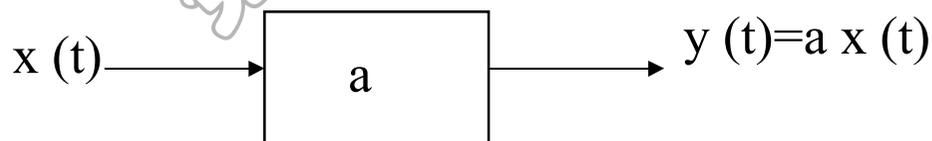


## 3、数乘

将信号乘以实常数  $a$ ，称为对信号  $x(t)$  进行数乘运算，即

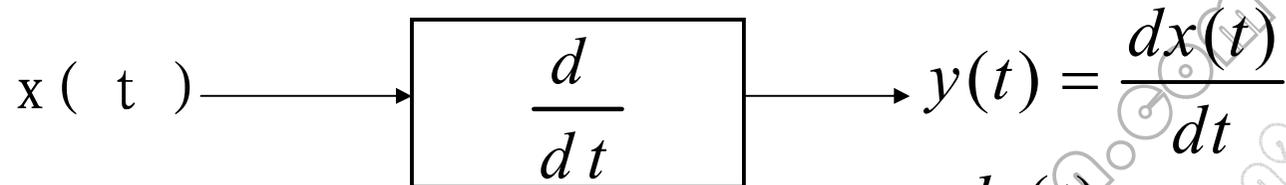
$$y(t) = a x(t)$$

信号的数乘运算用数乘器实现，如下图所示



#### 4、信号的微分运算

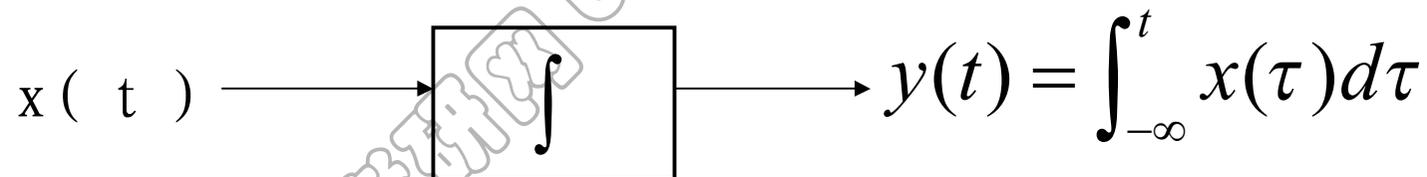
信号的微分运算用微分器实现，即



**注意：当  $x(t)$  中含有间断点时，则  $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$  中在间断点上将有冲激函数存在，其冲激强度为间断点处函数  $x(t)$  跳变的幅度值。**

#### 5、信号的积分运算

信号的积分运算用积分器实现，即



例1：已知  $x(t)$  为半波正弦信号，

1)、求  $x''(t)$ ，并画出其波形。

2)、求  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

解: 1)、

$$\because x(t) = \sin t [u(t) - u(t - \pi)]$$

= 0

$$\text{故 } x'(t) = \cos t [u(t) - u(t - \pi)] + \sin t [\delta(t) - \delta(t - \pi)] = \cos [u(t) - u(t - \pi)]$$

$$\begin{aligned} x''(t) &= -\sin t [u(t) - u(t - \pi)] + \cos t [\delta(t) - \delta(t - \pi)] \\ &= -\sin t [u(t) - u(t - \pi)] + \delta(t) + \delta(t - \pi) \end{aligned}$$



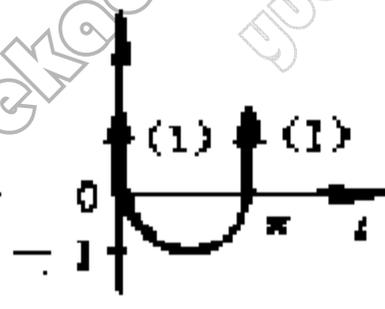
(a)

$x(t)$



(b)

$x'(t)$



(c)

$x''(t)$

2)、当  $t < 0$  时,  $x(t) = 0$ , 故

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = 0$$

当  $0 < t < \pi$  时,  $x(t) = \sin t$ , 故

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^0 x(t) d\tau + \int_0^t x(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 d\tau + \int_0^t \sin \tau d\tau$$

$$= 0 + [-\cos \tau]_0^t = 1 - \cos t$$

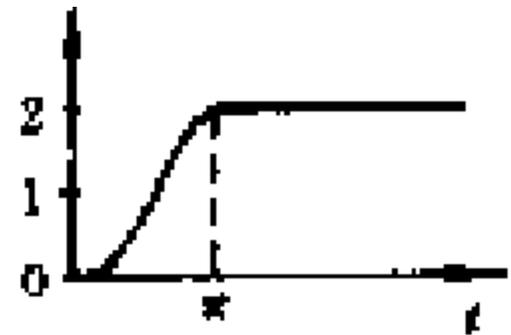
当  $t > \pi$  时,  $x(t) = 0$ , 故

$$\int_{-\infty}^t x(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 d\tau + \int_0^{\pi} \sin \tau d\tau + \int_{\pi}^t 0 d\tau$$

$$= 0 + [-\cos \tau]_0^{\pi} + 0 = 2$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - \cos t & 0 < t < \pi \\ 2 & t \geq \pi \end{cases}$$

其波形如 (d) 所示。



~~第2次~~

(d) 74

## 1.5 连续时间和离散时间系统

**系统——能够对信号完成某种变换或运算的集合体称为系统。**

### 1、连续时间系统



可用符号表示为  $x(t) \longrightarrow y(t)$

### 2、离散时间系统



可用符号表示为  $x[n] \longrightarrow y[n]$

P29页

1、RC电路 (1.82)

2、汽车 (1.85)

3、银行户头 (1.87)

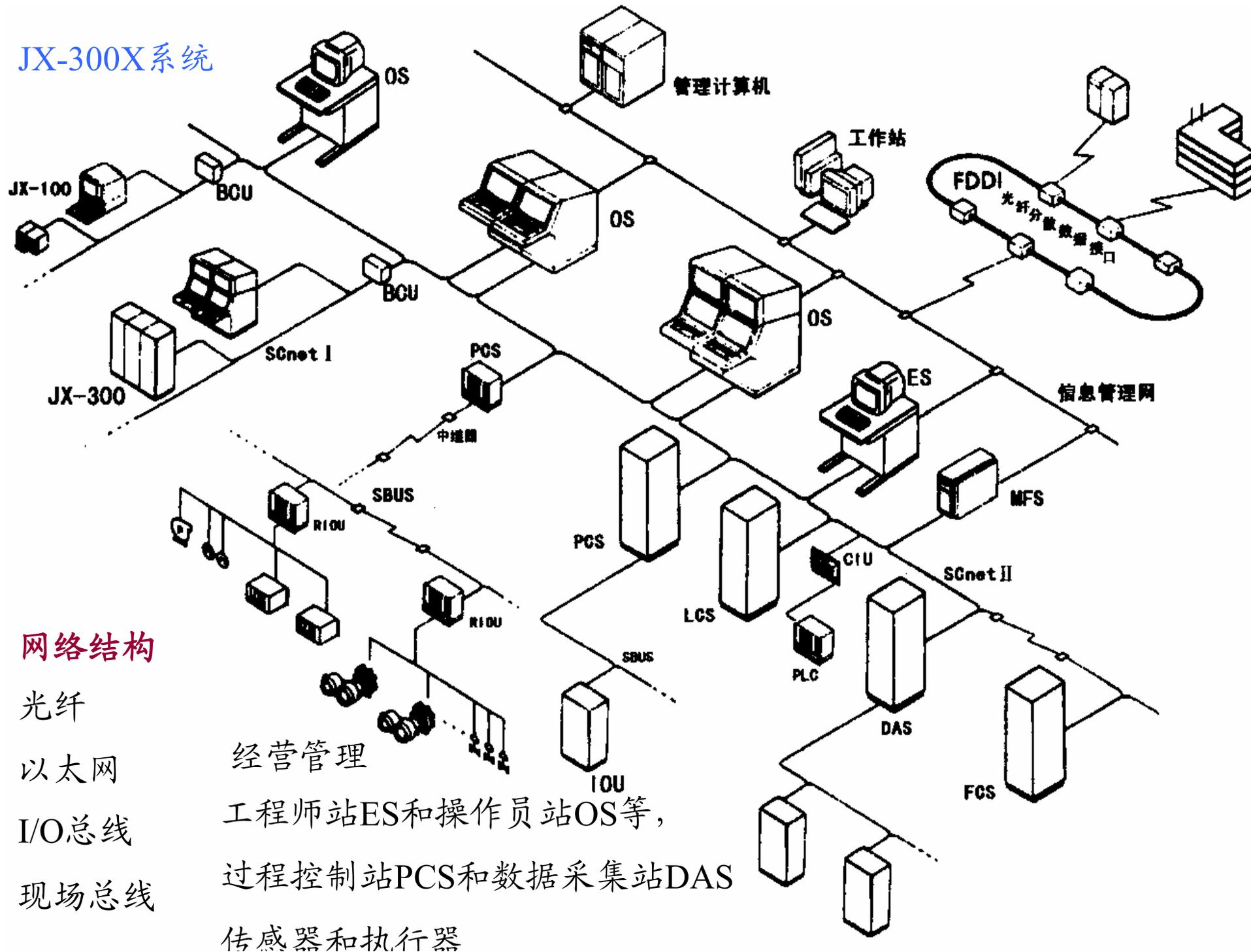
4、数字方真 (1.89)

### 1.5.1 简单系统

1、很多不同应用场合的系统都具有非常类似的数学描述形式（书中举了几个例子说明了这一点）。

2、一个复杂的系统可以分解成一些基本系统（例如，DCS系统）

# JX-300X系统



## 网络结构

光纤

以太网

I/O总线

现场总线

经营管理

工程师站ES和操作员站OS等,

过程控制站PCS和数据采集站DAS

传感器和执行器

## 1.5.2 系统的互联

一个复杂的系统，可看作是几个子系统互联构成。

系统的互联通常有以下几种基本形式：

### 1、串联（或级联）

几个子系统首尾相接，前一个系统的输出便是后一个系统的输入。如下图所示。

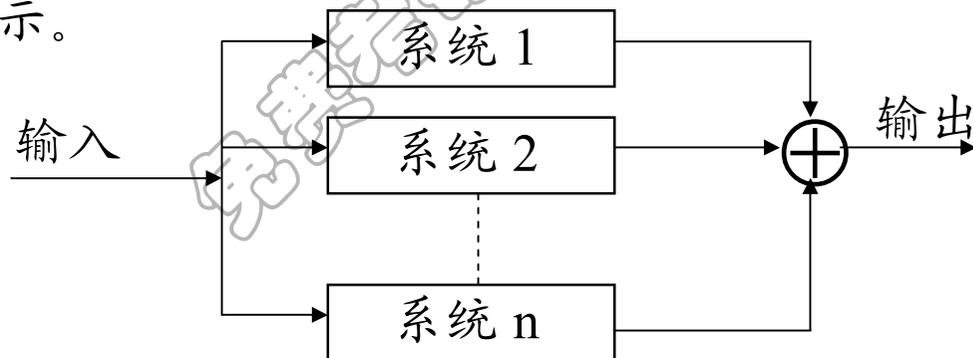
(例如：多级放大  $A=A_1 * A_2 * \dots * A_n$ )



级联

### 2、并联

系统 1 和系统 2 有相同的输入，并联后的输出是系统 1 和系统 2 的输出之和。如下图所示。

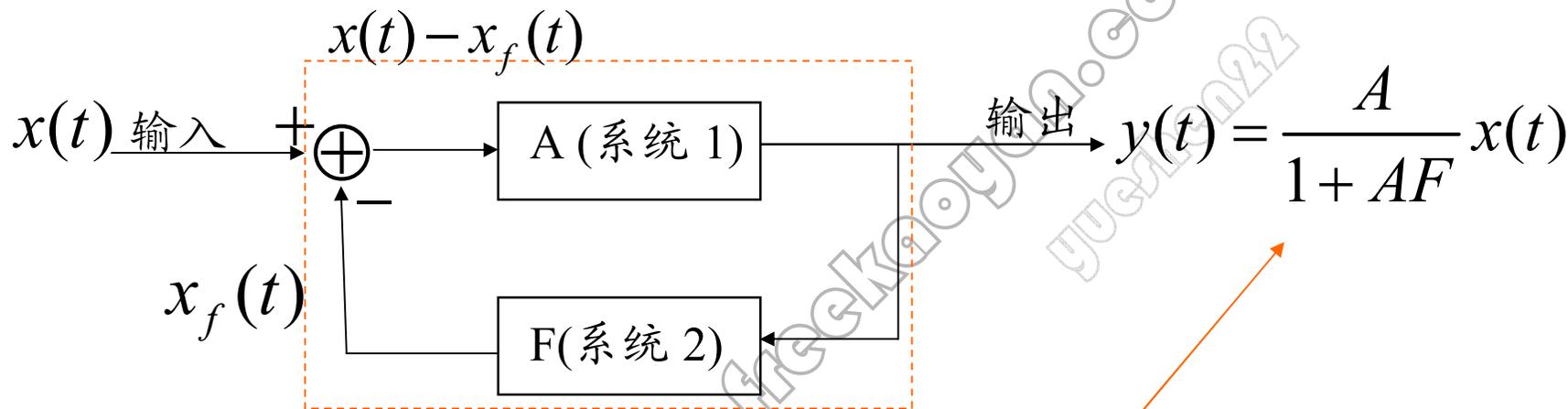


(例如：PID)

并联

### 3、反馈联接

系统 1 的输出是系统 2 的输入，而系统 2 的输出又反馈回来与外加的输入信号一起组成系统 1 的真正输入。如下图所示



反馈联接

$$y(t) = A[x(t) - x_f(t)] = Ax(t) - Ay(t)F$$
$$y(t) = \frac{A}{1 + AF} x(t)$$

### 1.6 基本系统性质

#### 1.6.1 记忆系统与无记忆系统

1、无记忆系统——如果系统的输出仅仅决定于该时刻的输入，则这个系统就称为无记忆系统。

例如： $y[n] = (2x[n] - x^2[n])^2$

——无记忆系统

一种特别简单的无记忆系统是恒等系统。即

$$y(t) = x(t)$$

或

$$y[n] = x[n]$$

2、记忆系统——系统的输出不仅与当前的输入有关，而且还与以前的输入有关，这样的系统称为记忆系统。

例如1: 累加器(或相加器)是一个记忆系统。

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] + x[n]$$

例如2: 延迟单元也是一个记忆系统

$$y[n] = x[n-1] \quad \text{—— 因为输出值还取决于以前的输入 } x[n-1]。$$

例如3: 积分系统也是一个记忆系统

$$y(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

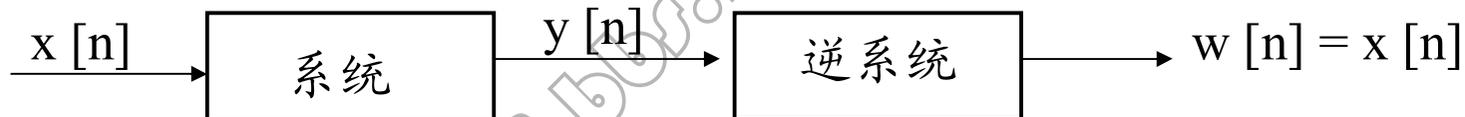
## 1.6.2 可逆性与可逆系统

1、一个系统如果在不同的输入下，有不同的输出，则称该系统为可逆系统。它满足一一对应关系。

如果一个系统分别对两个或两个以上不同的输入，能产生相同的输出，则这个系统是**不可逆系统**。

例如： $y(t) = x^2(t)$  就是一个不可逆系统

2、如果一个系统是**可逆的**，那么就有一个**逆系统存在**，当该逆系统与原系统级联后，就会产生一个输出 $w[n]$ 等于第一个系统的输入 $x[n]$ ，如下图所示



一般的可逆系统

例1: 设可逆系统的输出为  $y(t) = 2x(t)$ ，则该可逆系统的逆系统是

$$w(t) = 1/2 y(t) = x(t)$$

例2:  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$  是可逆系统(该系统任意两个相邻的输出之差

就是最后的输入值)，故其逆系统为  $w[n] = y[n] - y[n-1] = x[n]$

### 1.6.3 因果性

1. **因果系统**——如果一个系统在**任何时刻的输出**只决定于**现在以及过去的输入**。而与系统以后的输入无关，则该系统为因果系统（它满足先因后果）。因为系统的输出无法预测未来的输入值，所以这样的系统**也称为不可预测的系统**。

例如

- 1)  $y(t) = 2x(t)$  就具有因果关系。——所有无记忆系统都是因果的。
- 2)  $y[n] = x[n] - x[n+1]$  和  $y(t) = x(t+1)$  **是非因果的**（因为它们的输出还与将来的输入有关）。

#### 2、系统的判别

- 1)、检验一个系统的因果性，重要的是要仔细看一下系统的输入-输出关系。
- 2)、要把**输入信号的影响**仔细地与系统中**其它函数的影响区分开来**。

例1: 已知系统为  $y[n] = x[-n]$  , 试判别因果性。

解: 设  $n = -4$ , 则  $y[-4] = x[4]$ , 所以在这一时刻的输出与将来的输入有关。

故 **为非因果系统**。

不能用  $n = 4$

例2: 已知系统为  $y(t) = x(t) \cos(t + 1)$

解: 在这个系统中, 任何时刻  $t$  的输出  $y(t)$  等于在同一时刻的输入  $x(t)$  乘以一个**随时间变化的数**  $\cos(t+1)$ 。——所以该系统是**因果的**。

#### 1.6.4 稳定性

系统稳定性定义—— 一个系统, 若其输入是有界的 (即输入的幅度不是无限增长的), 则系统的输出也必须是**有界的**, 因此不可能发散。则称系统是**稳定的**;

如系统对有界输入产生的响应是无界的, 则称**不稳定系统**。

例1: 若输入到累加器是单位阶跃  $u[n]$ , 则输出就是

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n u[k] = (n + 1)u[n]$$

即  $y[0] = 1, y[1] = 2, y[3] = 3 \dots$ ,  $y[n]$  无限增长。——为**不稳定系统**。

例2:  $y(t) = x(t-1)$  ——是一个**稳定系统** (因为输出只是输入的延时, 形状不变)

**说明: 稳定性的另一种定义是建立在系统函数及其收敛域的特性上。**

例1.13 检验以下系统的稳定性  $S_1$  :  $y(t) = tx(t)$

$S_2$  :  $y(t) = e^{x(t)}$

判别系统稳定性的实用方法是:

1、如果怀疑某一系统是不稳定的,那么找一个特别的有界输入(例如一个常数或阶跃输入等这类有界输入)看是否会导致一个无界的输出。

对  $S_1$  系统,可用  $x(t)=1$  代入,这时得  $y(t)=t$ , 可见  $S_1$  系统是不稳定的。  
(因为不管取什么样的常数为界,  $|y(t)|$  在某个  $t$  时总会超过这个界)。

对  $S_2$  系统,我们找不到一个有界的输入而产生无界的输出。所以这时就得

2、按在所有有界输入下都产生有界输出的办法来确认它。令  $B$  为一任意正数,并令  $x(t)$  是被  $B$  所界定的某任意信号,

$$\text{即 } |x(t)| < B \text{ 或 } -B < x(t) < B$$

则有  $e^{-B} < |y(t)| < e^B$  —— 即  $S_2$  的任何输入是被任一正数  $B$

所界定。所以系统是稳定的。

### 1.6.5 时不变性

1、系统的时不变性——指系统的行为特性不随时间而变。

这就是说，如果输入信号有一个时移，则在输出信号中将产生同样的时移。即

$$\text{如果 } x[n] \rightarrow y[n] \quad \text{则 } x[n - n_0] \rightarrow y[n - n_0]$$

$$\text{或 } x(t) \rightarrow y(t) \quad \text{则 } x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0)$$

2、时不变性系统的判定方法

1)、令  $x_1(t)$  是系统的任一输入，此时其输出为  $y_1(t)$ ；改变输入为  $x_2(t) = x_1(t - t_0)$ ，分析相应的输出  $y_2(t)$  是否为  $y_1(t - t_0)$

如是，则系统为时不变系统；如不是，则系统为时变系统。

例1：设  $y(t) = \sin[x(t)]$ ，判定它是否是时不变系统。

解：因为  $x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \sin[x_1(t)]$  (1.115)

从输入角度考虑  $\rightarrow$  现有  $x_2(t) = x_1(t - t_0)$  (1.116)

则  $y_2(t) = \sin[x_2(t)] = \sin[x_1(t - t_0)]$  (1.117)

据 (1.115) 有  $y_1(t - t_0) = \sin[x_1(t - t_0)] = y_2(t)$  (1.118)

从时移角度考虑  $\rightarrow$  即是时不变系统。

2)、当怀疑一个系统是时变的时候,通常采用的办法是找一个反例(即根据直观认识,找一个输入信号让时不变系统是时变的)。

例:已知  $y[n] = n x[n]$ , 试判别系统的时不变性。

解: 设  $x_1[n] = \delta[n]$ , 则  $y_1[n] = 0$  ( $\because n\delta[n] = 0$ )

然而当  $x_2[n] = \delta[n - 1]$  时, 输出为

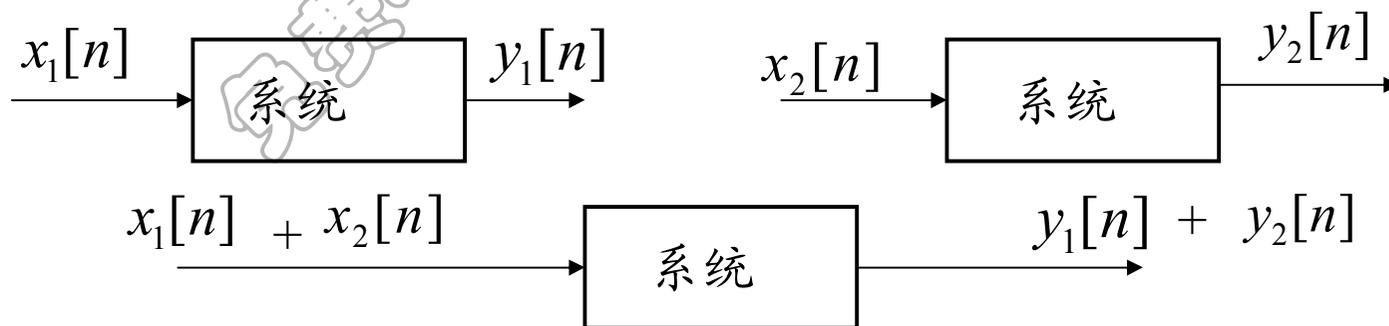
$$y_2[n] = n\delta[n - 1] = \delta[n - 1]$$

因此,当  $x_2[n]$  是  $x_1[n]$  的时移时,  $y_2[n]$  并不是  $y_1[n]$  的时移,即该系统为时变系统。

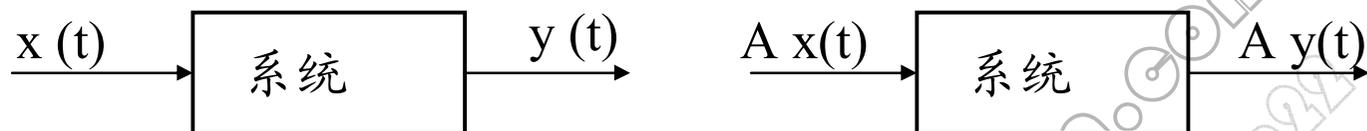
### 1.6.6 线性

线性系统有两个重要性质: 即叠加性和齐次性。

1、叠加性——如果某一个输入是由几个信号的加权和组成的话,那么输出就是系统对这组信号中每一个的响应的加权和。即



2、齐次性——如果某一个输入加权后输入系统，则系统的输出就是原输出的加权。



其中， $A$ 为任意复常数

3、线性系统——同时满足叠加性和齐次性的系统称为线性系统。即

连续时间：若  $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$        $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$

则  $ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$

离散时间：若  $x_1[n] \rightarrow y_1[n]$        $x_2[n] \rightarrow y_2[n]$

则  $ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow ay_1[n] + by_2[n]$

在检验一个系统的线性时，要牢记：系统必须同时满足可加性和齐次性，而信号和任何比例常数都可以是复数。

例1.17 考虑一个系统 S,其输入  $x(t)$  和输出  $y(t)$  的关系为:  $y(t) = tx(t)$

试判断S是否为线性系统。

解:

1、先考虑如下两个任意输入

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = tx_1(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = tx_2(t)$$

2、令  $x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$  其中 a、b 为任意常数,

则

$$\begin{aligned} x_3(t) \rightarrow y_3(t) &= tx_3(t) = t[ax_1(t) + bx_2(t)] \\ &= atx_1(t) + btx_2(t) = ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

结论: S是线性的。

例：设系统为  $y[n] = \Re\{x[n]\}$ ，试判断线性性。

解：令  $x_1[n] = r[n] + js[n]$ ，是一个任意复输入，响应的输出应为

$$y_1[n] = r[n]$$

现把  $x_1[n]$  乘以一个复数  $a=j$ ，也即考虑输入为

$$\begin{aligned} x_2[n] &= jx_1[n] = j(r[n] + js[n]) \\ &= -s[n] + jr[n] \end{aligned}$$

对应的输出为  $y_2[n] = \Re\{x_2[n]\} = -s[n]$

即  $y_2[n] \neq jr[n]$

即，该系统不满足齐次性，所以不是线性的。

### 例1.20

考虑系统为  $y[n] = 2x[n] + 3$  , 试判断该系统是否线性。

解: 有多种方法可用来证明它不是线性的。

1、设  $x_1[n] = 2$  ,  $x_2[n] = 3$

则  $x_1[n] \rightarrow y_1[n] = 2x_1[n] + 3 = 7$

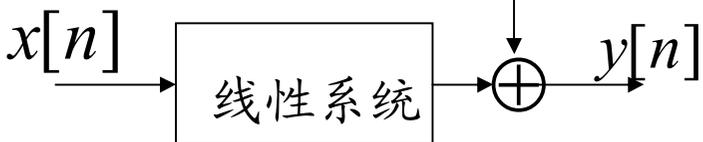
$x_2[n] \rightarrow y_2[n] = 2x_2[n] + 3 = 9$

然而, 对  $x_3[n] = x_1[n] + x_2[n] \rightarrow 2(x_1[n] + x_2[n]) + 3 = 13$

它不等于  $y_1[n] + y_2[n] = 16$  所以不是线性的。

2、另一种证明方法如下:

若  $x[n] = 0$  , 则  $y[n] = 3$  —— 它不满足“零输入/零输出”的性质。所以不是线性的。

再仔细分析该系统, 可发现它是一个增量线性系统: 

因为这个系统的输出可看作有两部分组成:

1、一为线性系统的输出, 即  $x[n] \rightarrow 2x[n]$

2、为系统的零输入响应，即  $y_0[n] = 3$

即：系统的总输出由一个线性系统的响应与一个零输入响应的叠加组成。其响应对输入中的变化是线性的。换句话说：对增量系统而言，对任意两个输入的响应的差是两个输入差的线性函数。即

$$\begin{aligned}y_1[n] - y_2[n] &= 2x_1[n] + 3 - \{2x_2[n] + 3\} \\ &= 2\{x_1[n] - x_2[n]\}\end{aligned}$$

## 1.7 小结

本章讨论了有关连续时间与离散时间信号与系统的一些基本概念。

要求掌握：

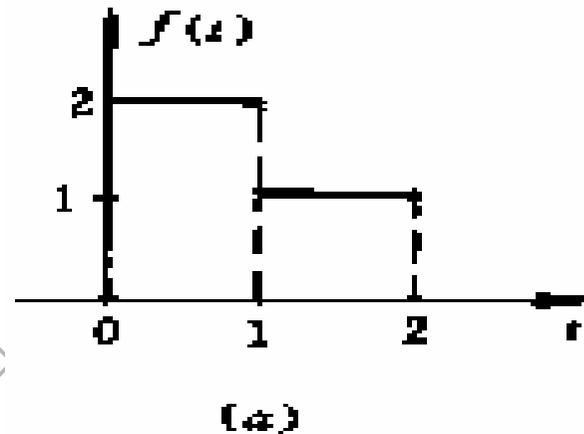
- 1、自变量的变换
- 2、基本信号的性质
- 3、信号的运算
- 4、基本系统的性质及判别

作业:

1、已知信号  $x(t)$  的波形如图(a)所示,

1) 求积分  $\int_{-\infty}^t f(6-2\tau)d\tau$  , 并画出波形;

2) 求微分  $\frac{d}{dt}[f(6-2t)]$  , 并画出波形。



2、习题1.9 (d)

3、习题1.10

免费考研网 [bbs.freekejian.com](http://bbs.freekejian.com)

# 第二章

## 线性时不变系统

# 基本系统性质

1、 记忆系统与无记忆系统

2、 可逆性与可逆系统

3、 因果性

4、 稳定性

5、 时不变性

6、 线性系统

•很多物理过程都具有这两个性质；利用这两个性质可以对LTI系统进行详细的分析。

这一章研究LTI系统的一些很重要的表示：

1、把离散时间信号表示成一组**移位的单位脉冲**的加权和，并据此导出对离散时间LTI系统响应的**卷积和**表示。

2、把连续时间信号表示成**移位单位冲激函数**的加权积分，并据此导出对连续时间LTI系统响应的**卷积积分**表示。

**这些表示方法极为重要**，因为这样可利用系统的单位冲激响应来计算系统对任何输入信号的响应。还可利用卷积分析LTI系统的性质

线性时不变系统——即具有**线性和时不变特性**的系统(LTI系统)

1、系统的时不变性——指系统的行为特性不随时间而变。

2、线性系统——满足叠加性和齐次性的系统。

如果能将LTI系统的输入用一组基本信号的**线性组合**来表示，就可以根据该系统对这些基本信号的响应，然后利用叠加性质求得整个系统的输出。为此，我们想到了冲激函数这个基本函数，它具有以下特性：(即采样性质)

$$x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]$$

$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

## 2.1.1 用脉冲表示离散时间信号

图2.1 (a) 是一个离散时间信号  $x[n]$  。

图 (b) ~ (f) 分别为  $n = -2$ 、 $-1$ 、 $0$ 、 $1$ 、 $2$  时的一组移位并加权了的单位脉冲序列, 每个脉冲的大小与  $x[n]$  所对应的时刻序列值相等。即

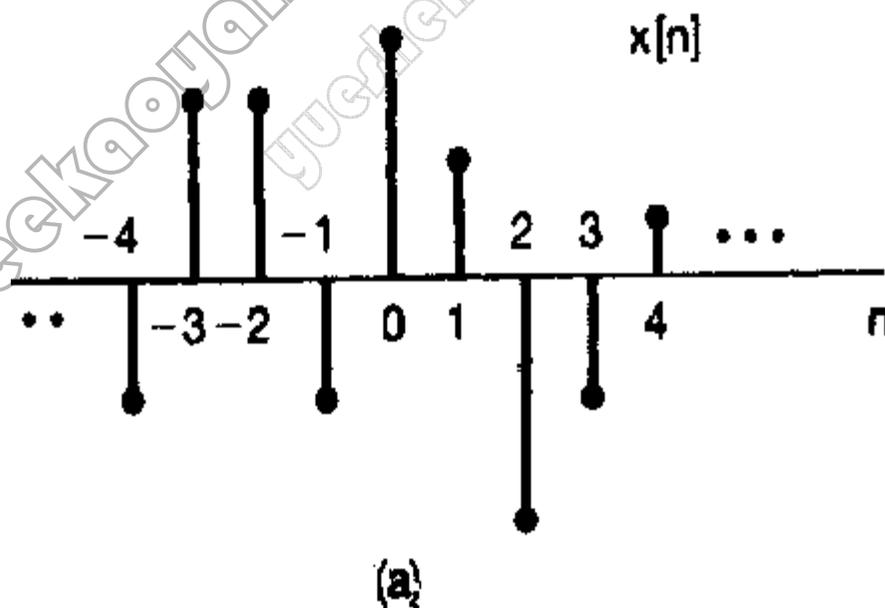
$$x[-2]\delta[n+2] = \begin{cases} x[-2], & n = -2 \\ 0 & n \neq -2 \end{cases}$$

$$x[-1]\delta[n+1] = \begin{cases} x[-1], & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

$$x[0]\delta[n] = \begin{cases} x[0] & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$x[1]\delta[n-1] = \begin{cases} x[1] & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

$$x[2]\delta[n-2] = \begin{cases} x[2] & n = 2 \\ 0 & n \neq 2 \end{cases}$$



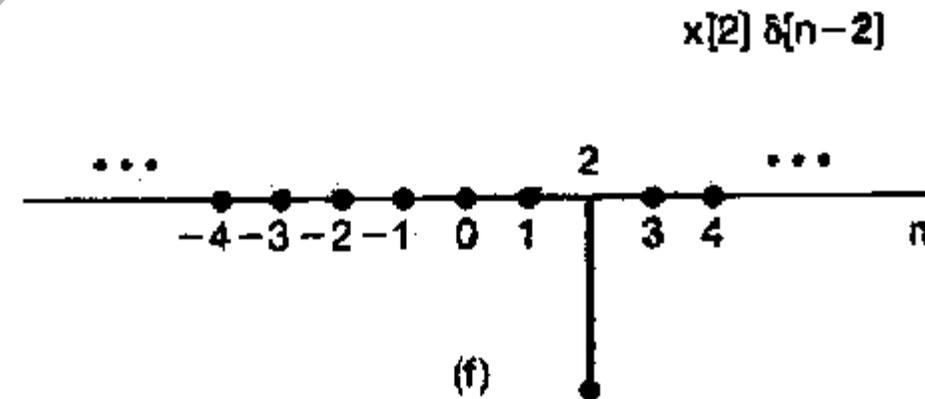
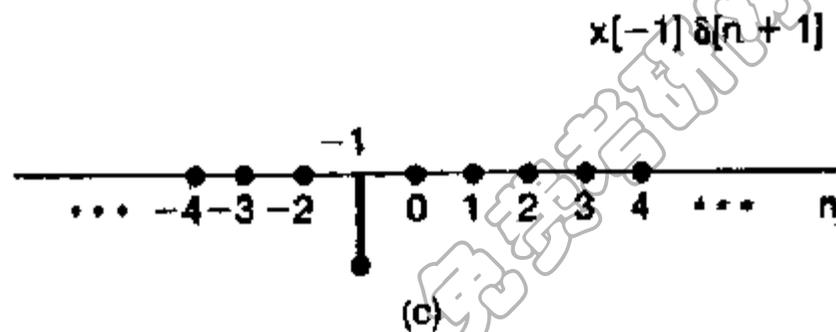
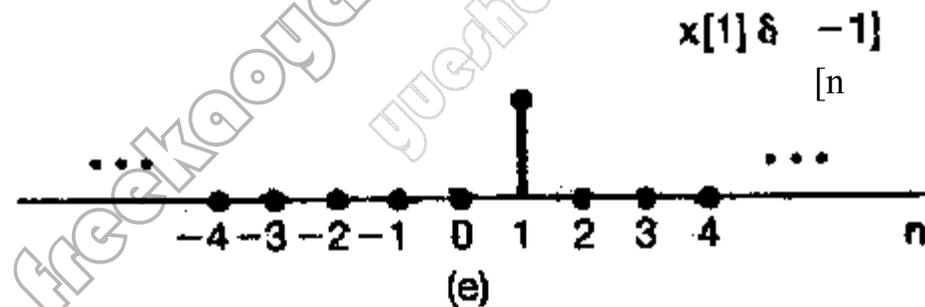
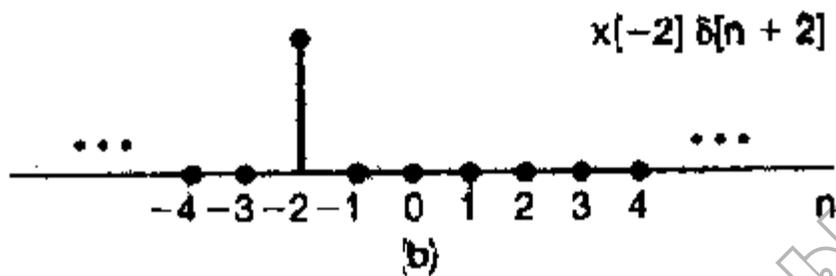
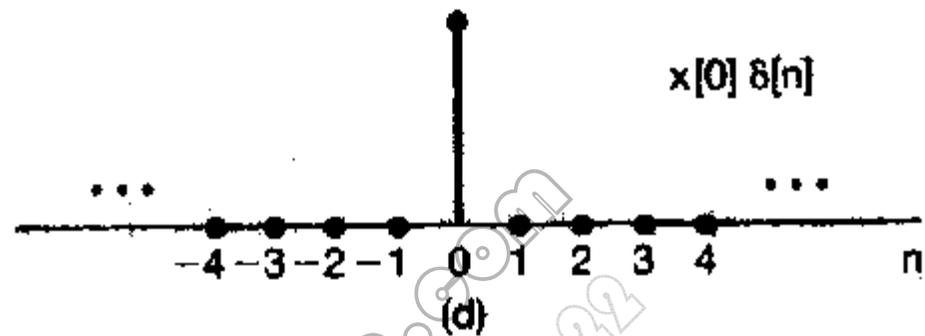
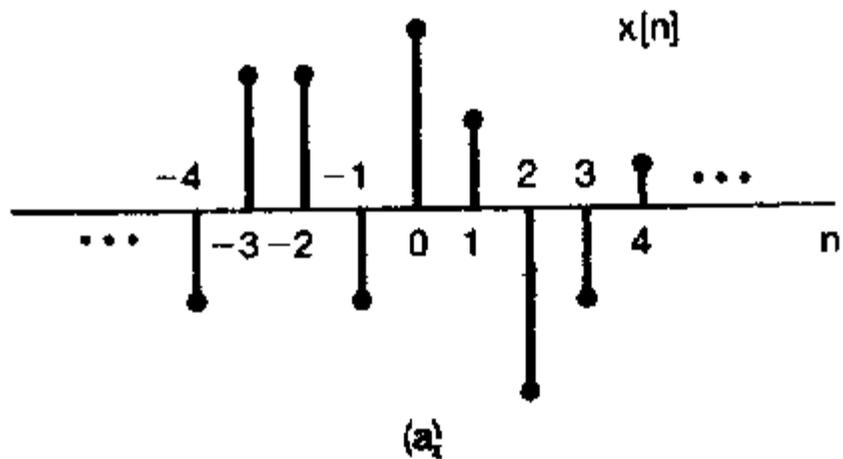


图2.1 一个离散时间信号分解为一组加权的移位脉冲之和

因此  $x[n]$  可表示为

$$\begin{aligned} x[n] &= \cdots + x[-3]\delta[n+3] + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] \\ &\quad + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + x[3]\delta[n-3] + \cdots \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \end{aligned} \quad (2.2)$$

上式表明，可以把任意一个序列表示成一串移位的单位脉冲序列的线性组合，而这个组合式中的权因子就是  $x[k]$ 。

由于

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n-k] = x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k] = x[n]$$

即仅当  $k=n$  时有值 (注意: 这里的变量是  $k$ , 而  $n$  是定值.)

因此，式 (2.2) 称为离散时间单位脉冲序列的筛选性质。

## 2.1.2 离散时间LTI系统的单位脉冲响应及卷积和

筛选性质的重要性在于它把 $x[n]$ 表示成一组加权的基本函数的叠加,这个基本函数就是移位单位脉冲 $\delta[n-k]$ ,只有当 $k = n$ 时才有值。

一个线性系统对 $x[n]$ 的响应就是系统对这些移位脉冲中的每一个的响应加权后的叠加;再者,时不变性又意味着一个时不变系统对移位单位脉冲的响应就是未被移位的单位脉冲响应的移位。将这两点结合起来就可得到具有线性和时不变性的离散时间系统的卷积和表示。

具体地说,若令 $\delta[n] \longrightarrow$ 线性时不变系统  $\longrightarrow h[n]$  单位脉冲响应

$$\delta[n-k] \longrightarrow \text{线性时不变系统} \xrightarrow{\text{时不变性}} h[n-k]$$

$$x[k]\delta[n-k] \longrightarrow \text{线性时不变系统} \xrightarrow{\text{奇次性}} x[k]h[n-k]$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \longrightarrow \text{线性时不变系统} \xrightarrow{\text{叠加性}} y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$$= x[n] * \delta[n]$$

$$= x[n] * h[n]$$

即:  $x[n]$  的响应就变为

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

称  $x[n]$  和  $h[n]$  的卷积;  $y[n]$  为卷积和,

先反转, 再时移  $n$

记为  $y[n] = x[n] * h[n]$

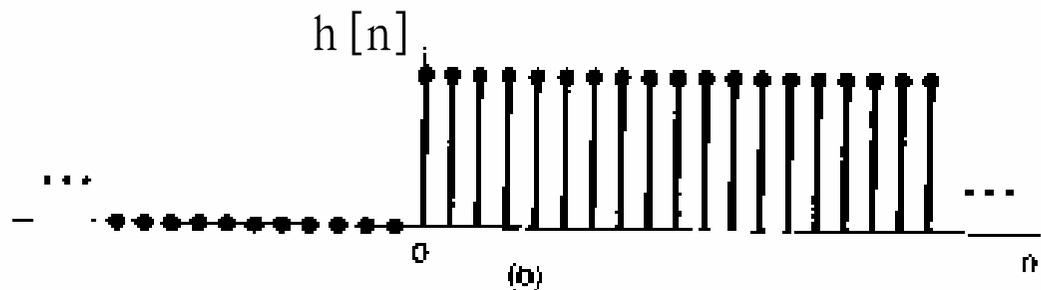
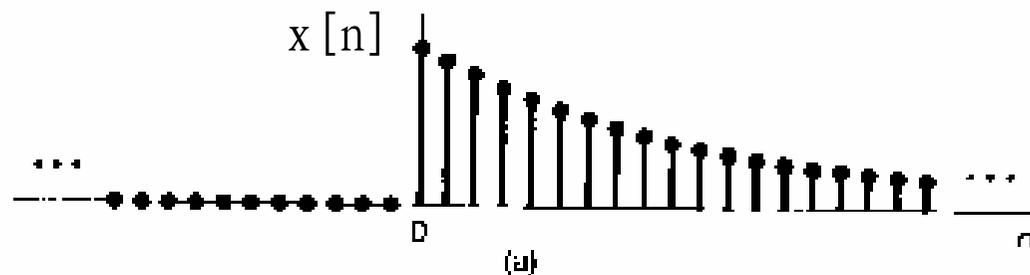
既然一个LTI系统对任何输入的响应可用系统对单位脉冲的响应来表示, 那么LTI系统的单位脉冲响应  $h[n]$  就刻画了系统的特性.

例 2.3 已知输入信号  $x[n]$  和系统的单位脉冲响应  $h[n]$  为

$$x[n] = a^n u[n]$$

$$h[n] = u[n]$$

其中:  $0 < a < 1$



则有 
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k]u[n-k]$$

$x[k] = a^k u[k]$

$h[-k] = u[-k]$

$h[-1-k] = u[-(k+1)]$

$h[1-k] = u[-(k-1)]$

$h[n-k] \quad n > 0$

$h[n-k] \quad n < 0$

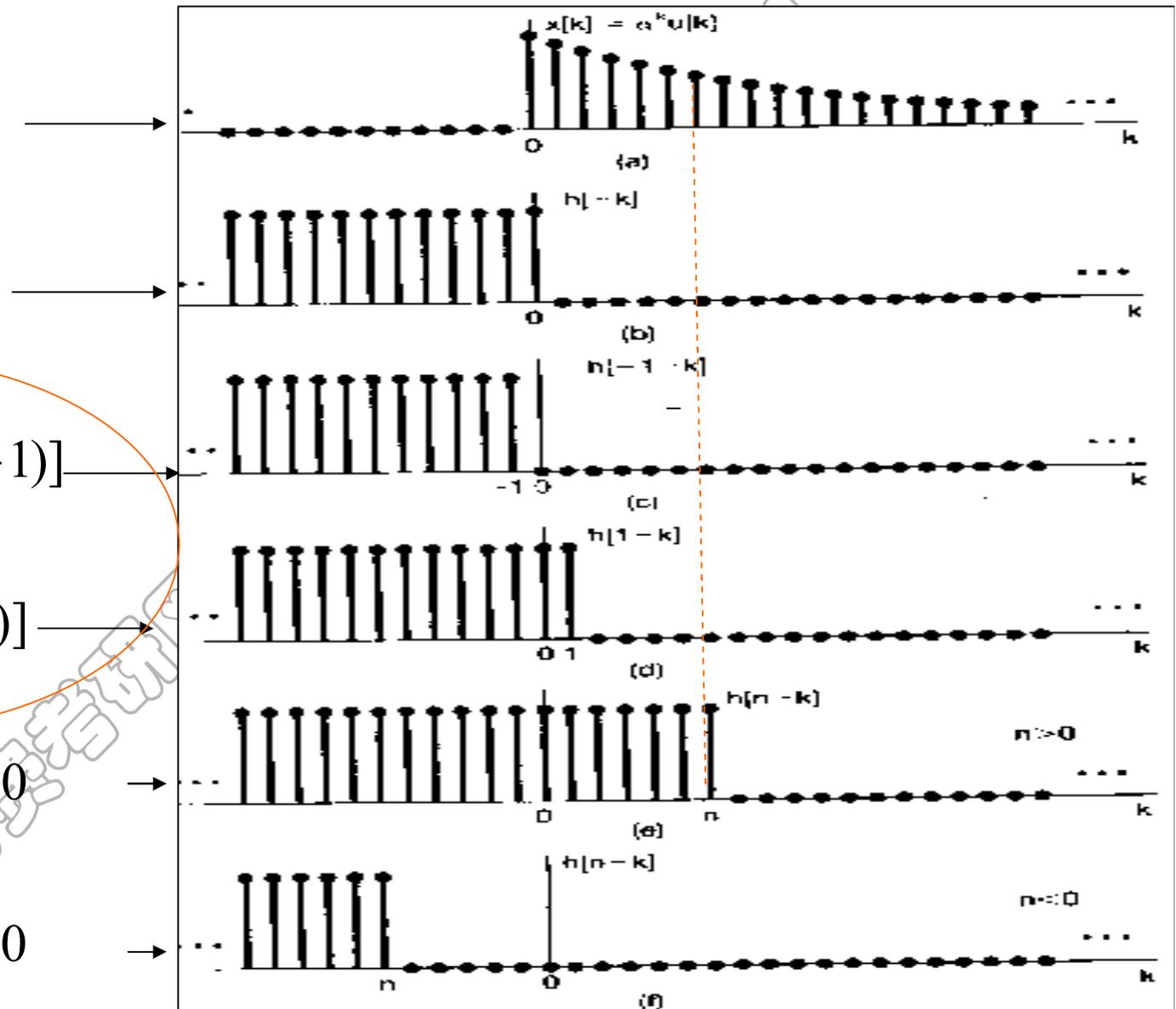


图 2.6 计算例 2.3 卷积和的图解说明

由上图可见: 若  $n < 0$  ,  $x[k]h[n-k]$  对于全部  $k$  值都为零,  $y[n]=0$

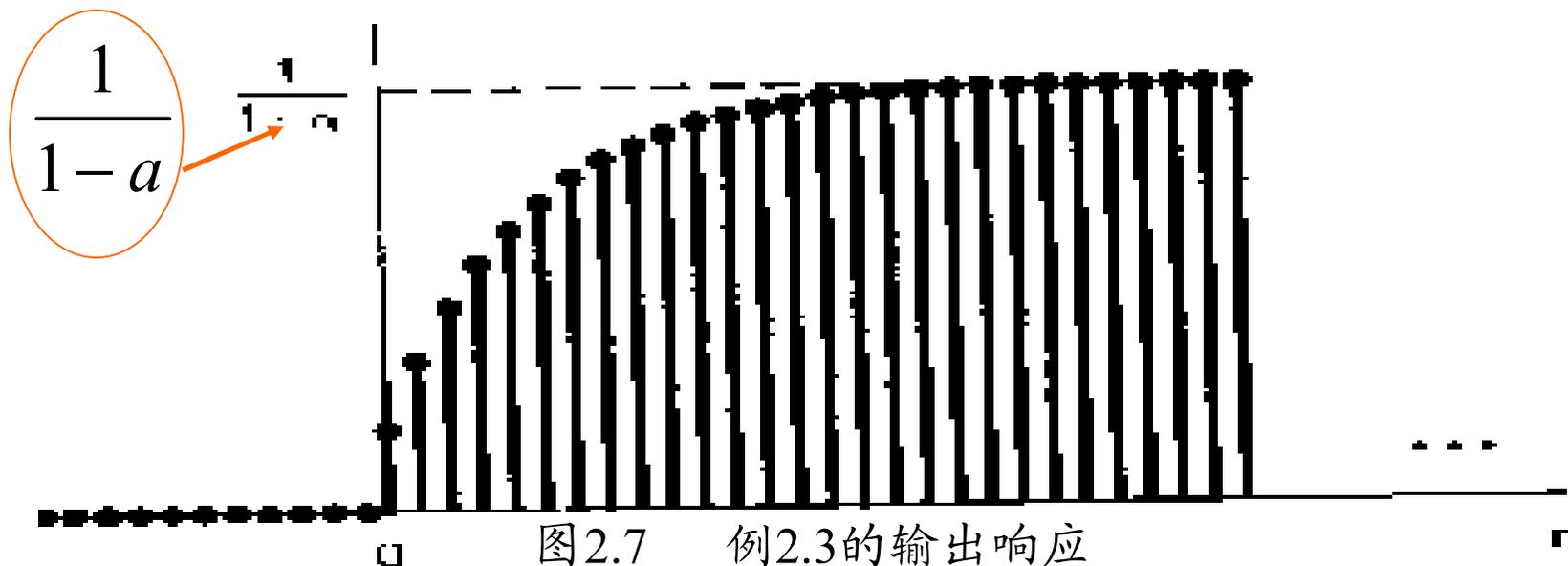
若  $n \geq 0$  , 则有

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} a^k & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{其余 } k \end{cases}$$

见P54 题1.54a  
有限项和公式

因此, 对于  $n \geq 0$  :  $y[n] = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad n \geq 0$

对于全部  $n$  :  $y[n] = \left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right)u[n]$



例2.5 一个LTI系统,其输入 $x[n]$ 和单位脉冲响应 $h[n]$ 如下:

$$x[n] = 2^n u[-n] \quad h[n] = u[n]$$

$$\text{则 } y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k u[-k]u[n-k]$$

由图可见,当 $k > 0$ 时, $x[k] = 0$ ;而 $h[n-k]$ 在 $k > n$ 时是零。同时还能看到,无论 $n$ 为何值,序列 $x[k]h[n-k]$ 沿 $k$ 轴

总有非零的样本值.因此

1、当  $n \geq 0$  就有:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^0 2^k$$

这是一个无穷项的和式

可用无限项求和公式求

得.

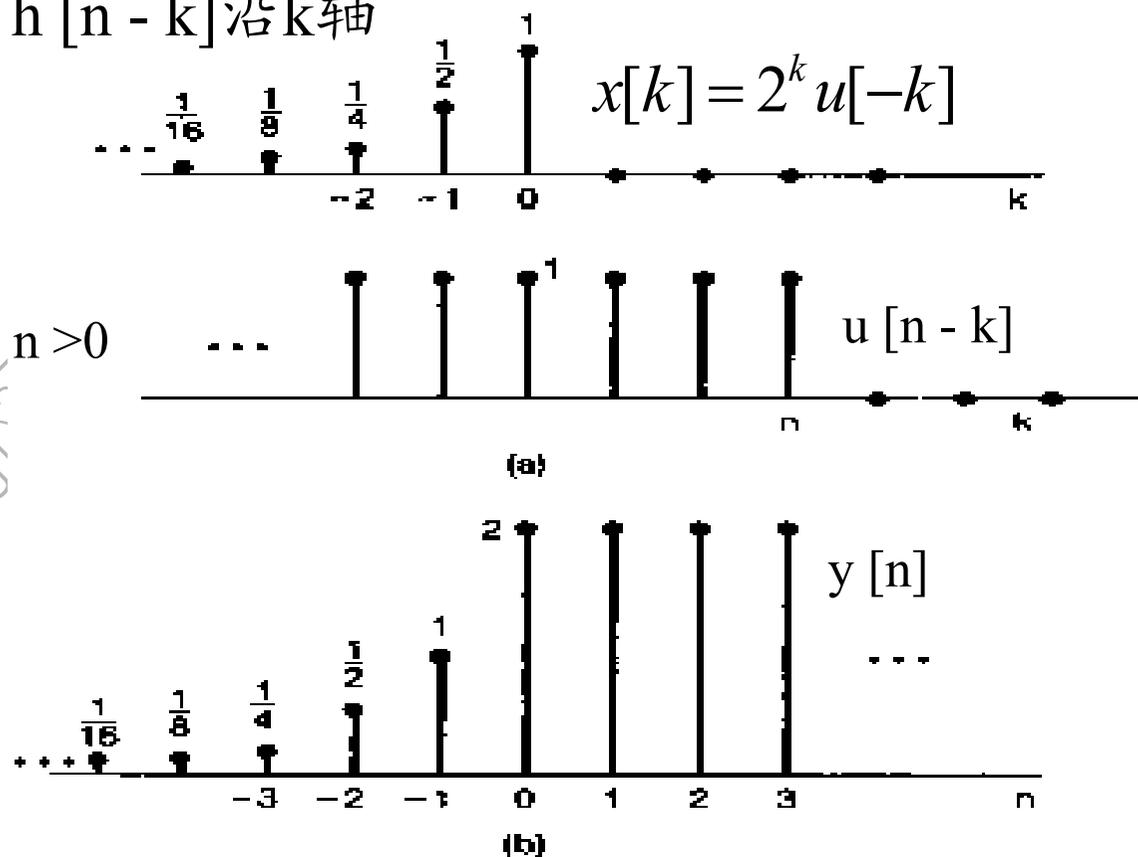


图2.11

无限求和公式为 
$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \quad 0 < |a| < 1$$

若将变量k置换成 $r = -k$ ,则可得 
$$\sum_{k=-\infty}^0 2^k = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^r = \frac{1}{1-(1/2)} = 2$$

即,对  $n \geq 0$  ,  $y[n] = 2$   $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

2、当 $n < 0$  时,对于 $k \leq n$  ,  $x[k] h[n-k]$  有非零值,因此对 $n < 0$ 有

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n 2^k$$

以  $l = -k$  和  $m = l + n$  作变量置换,再次利用无限求和公式来求上式,可得:

目的是把 $y[n]$ 化成无限求和公式的形式

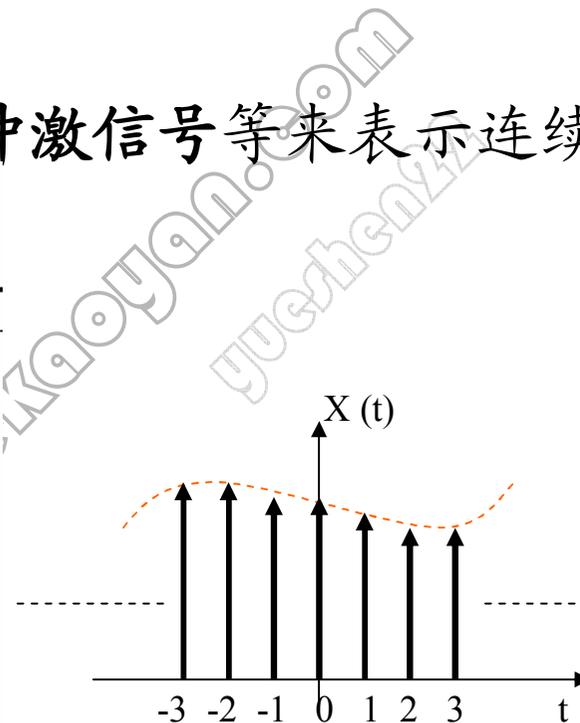
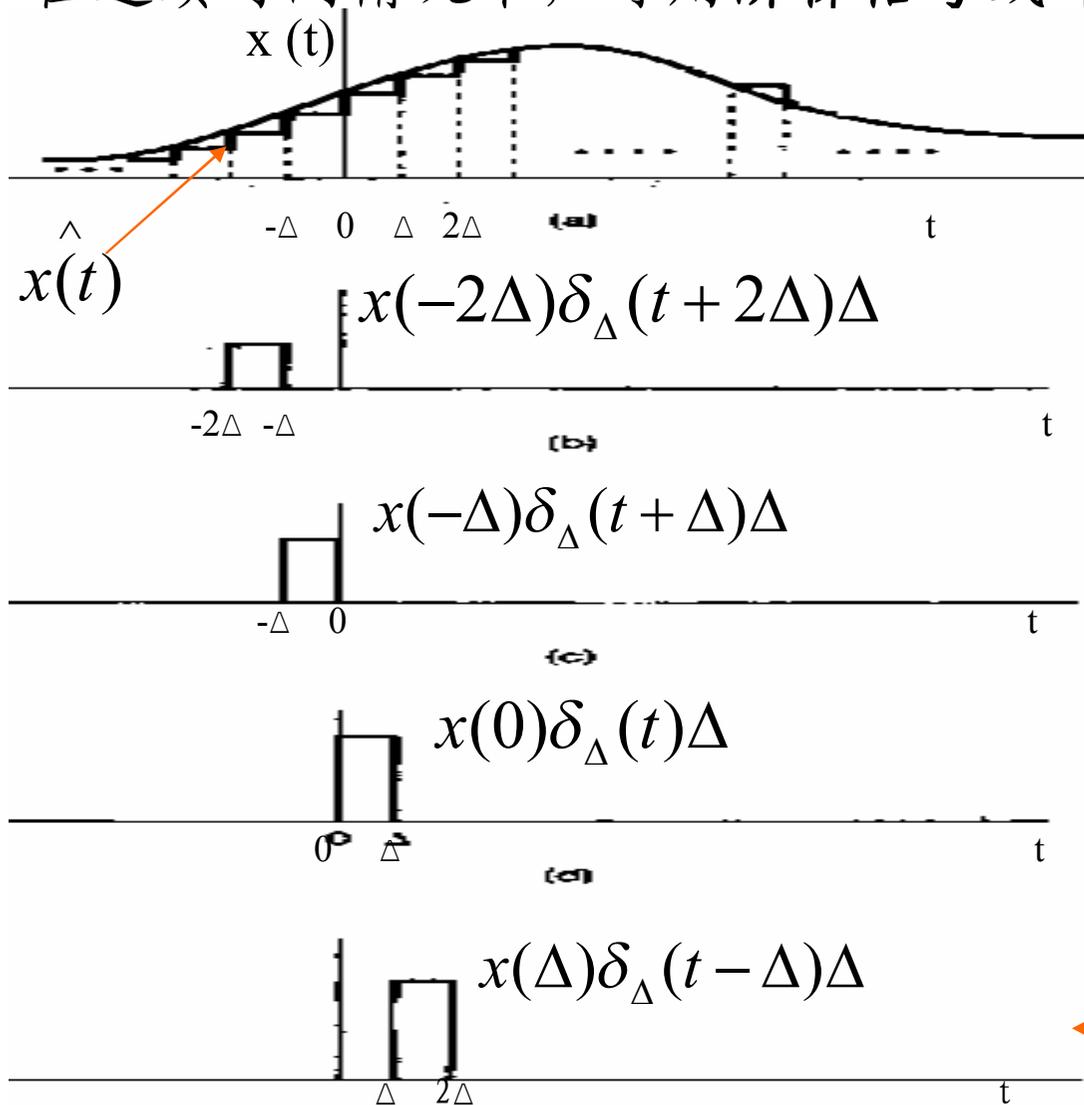
$$y[n] = \sum_{l=-n}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^l = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$$

3、整个 $y[n]$ 序列如上图(b)所示.

## 2.2 连续时间LTI系统: 卷积积分

在离散时间情况下, 导出卷积和的关键是离散时间单位脉冲的筛选性质。

在连续时间情况下, 可用阶梯信号或冲激信号等来表示连续信号。



← (a) 用阶梯信号表示

一、用阶梯信号  $\hat{x}(t)$  来近似  $x(t)$

如上图 (a) 所示, 若定义矩形脉冲为:

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0 \leq t \leq \Delta \\ 0 & \text{其余 } t \end{cases}$$

是一个微小变量  $\tau$

由于  $\delta_{\Delta}(t)\Delta = 1$  则  $\hat{x}(t)$  可表示为

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta$$

随着  $\Delta$  趋近于零,  $\hat{x}(t)$  将愈来愈近似  $x(t)$ , 最后极限就是  $x(t)$ , 即

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta$$

由于  $\Delta \rightarrow 0$  时,  $\delta_{\Delta}(t)$  的极限就是单位冲激函数  $\delta(t)$ 。当  $\Delta$  趋于无穷小时, 即  $\Delta \rightarrow d\tau$  时,  $k\Delta \rightarrow \tau$ , 求和变为积分。因此可得  $x(t)$  的精确表达式为:

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

上式表明：任意连续时间信号  $x(t)$  可用无穷多个单位冲激函数的移位、加权之“和”（即积分）来表示。这是连续时间冲激函数的筛选性质。

其实，我们可直接用冲激函数的性质来导出连续时间冲激函数的筛选性质。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(\tau - t) d\tau = x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t) d\tau = x(t)$$

但上面的推导强调了与离散时间情况的类似性；特别是把  $x(t)$  表示成一个加权的移位冲激函数的“和”（即积分）。

## 2.2.2 连续时间LTI系统的单位冲激响应及卷积积分表示

$$\begin{aligned}\delta(t) &\longrightarrow \text{线性时不变系统} \longrightarrow h(t) \text{ 单位冲激响应} \\ \delta(t-\tau) &\longrightarrow \text{线性时不变系统} \longrightarrow h(t-\tau) \\ x(\tau)\delta(t-\tau) &\longrightarrow \text{线性时不变系统} \longrightarrow x(\tau)h(t-\tau) \\ x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau &\longrightarrow \text{线性时不变系统} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= x(t)*\delta(t) \qquad \qquad \qquad = x(t)*h(t)\end{aligned}$$

可见与离散时间情况相同,一个**连续时间LTI系统的特性可用它的单位冲激响应 $h(t)$ 来表征。**

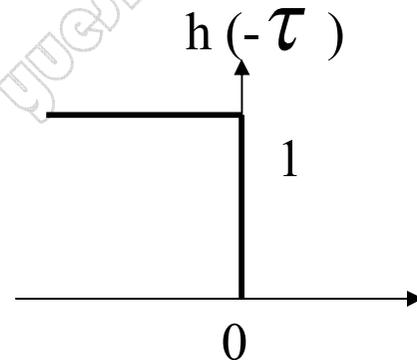
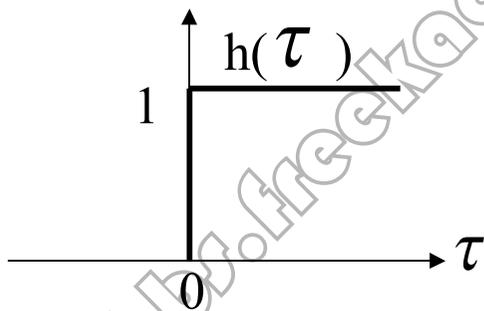
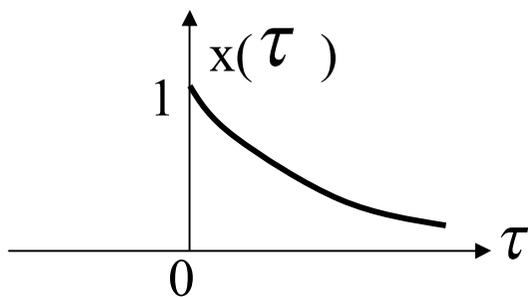
求解卷积积分的步骤与求卷积和是十分相似的。因此,为了求出对某一给定 $t$ 时的积分值,**首先**需要得到  $h(t-\tau)$ 。 $h(t-\tau)$  是 $\tau$ 的函数,其中 $t$ 可看作是某一固值。 $\because h(t-\tau) = h[-(\tau-t)]$  所以可利用  $h(\tau)$  的反转再加上平移就可求得  $h(t-\tau)$ 。**然后**将 $x(\tau)$ 与  $h(t-\tau)$  相乘,**再将**乘积在  $-\infty \leq \tau \leq +\infty$  区间内积分就可得到  $y(t)$

例2.6 设LTI系统的输入为 $x(t)$ , 其单位冲激响应为 $h(t)$ , 求 $y(t)$

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad a > 0; \quad h(t) = u(t)$$

解: 因为  $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

分别画出 $x(\tau)$ ,  $h(\tau)$  及对应于某一个 $t < 0$ 和 $t > 0$ 的 $h(t-\tau)$ 。

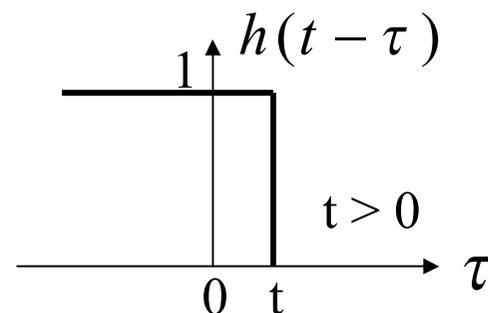
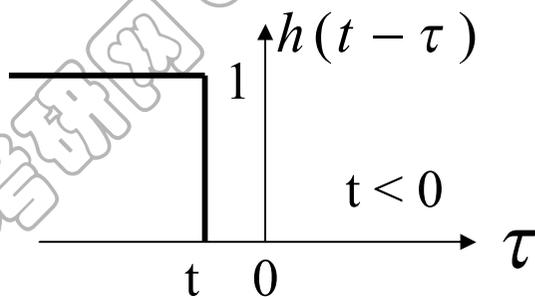


由图可见:

1、当 $t < 0$ 时,

$$x(\tau)h(t-\tau) = 0$$

所以  $y(t) = 0$ ;



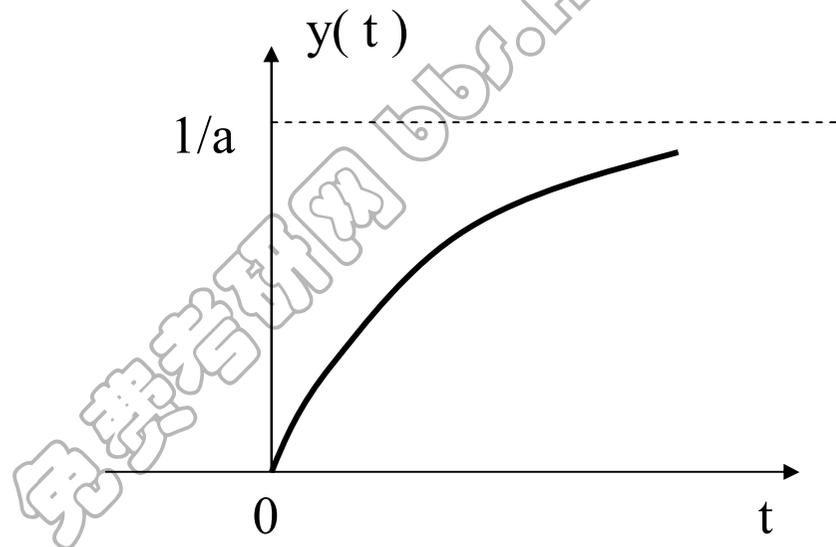
2、当 $t > 0$ 时有  $x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-a\tau} & 0 < \tau < t \\ 0 & \text{其余 } \tau \text{ 值} \end{cases}$

此时可算出 $t > 0$  时

$$y(t) = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\frac{1}{a} e^{-a\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{a} (1 - e^{-at})$$

因此，对于全部 $t$ ,  $y(t)$  为

$$y(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at}) u(t)$$



(c) 系统响应 $y(t)$

## 2.3 线性时不变系统的性质

$$\text{因为, } y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n] \quad (2.39)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t) \quad (2.40)$$

所以, LTI系统的特性可以完全由它的单位冲激响应  $h[n]$  来决定。

### 2.3.1 交换律性质

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \quad (2.43)$$

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (2.44)$$

该性质的证明,可通过变量置换,由式(2.39)和(2.40)直接得到。

1、证明式(2.44)成立: 令  $\lambda = t - \tau$  并代入(2.40)式, 可得

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{+\infty}^{-\infty} x(t-\lambda)h(\lambda)d(-\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda = h(t) * x(t) \end{aligned}$$

证毕

2、证明 (2.43) 式成立:

$$\because y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

令  $r = n - k$ , 可得  $k = n - r$ 。代入上式可得

$$y[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n-r]h[r] = h[n] * x[n]$$

证毕

交换律告诉我们:求卷积时,也可先将 $x[k]$ 反转和位移,然后再将 $x[n-k]$ 与 $h[k]$ 相乘,最后对全部 $k$ 将乘积相加来完成卷积和的计算。

### 2.3.2 分配律性质

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] \quad (2.46)$$

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \quad (2.47)$$

证明: 式(2.47)成立。

$$\begin{aligned} x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)[h_1(t-\tau) + h_2(t-\tau)]d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h_1(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h_2(t-\tau)d\tau = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \end{aligned}$$

证毕<sup>12</sup>

分配律性质表明:

- 1、 并联LTI系统对输入 $x(t)$ 的响应等于各子系统对 $x(t)$ 的响应之和
- 2、 LTI系统的并联可以用一个单一的LTI系统来替代, 而该系统的单位冲激响应就是在并联联结中各个单位冲激的**和**。

上述性质也可用图解说明如下

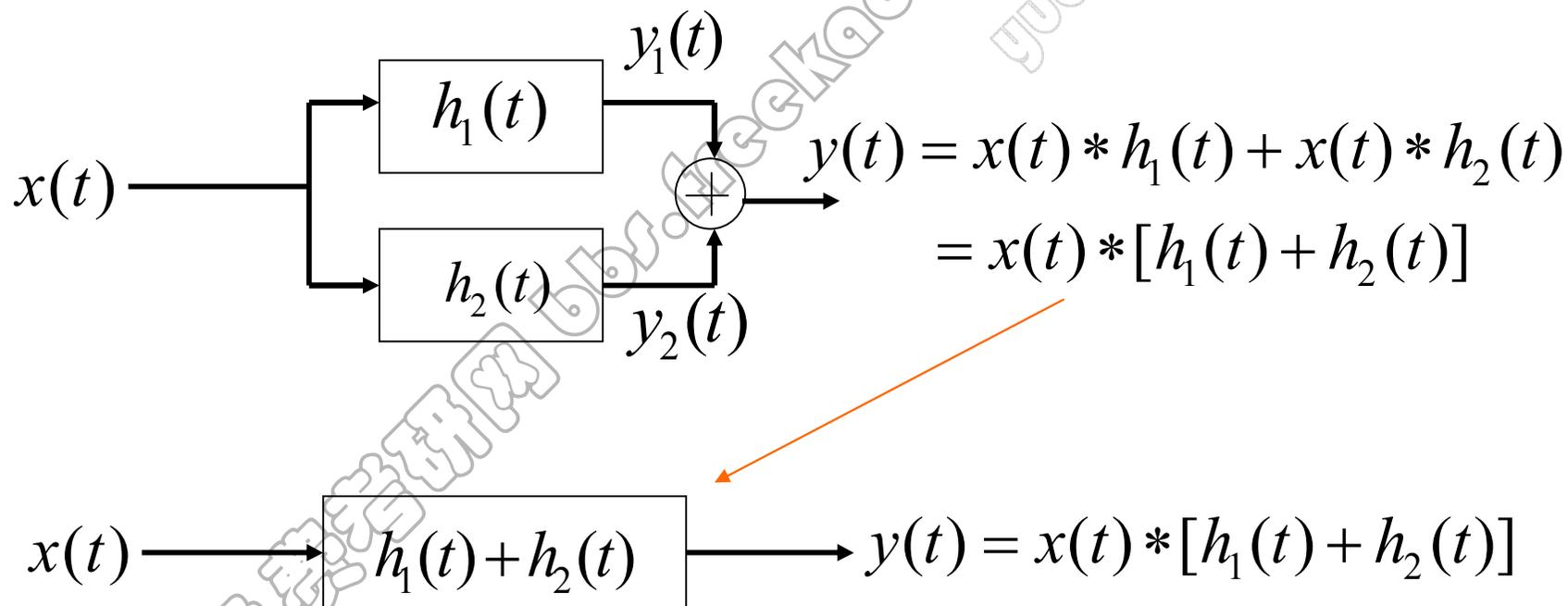


图2.23

LTI系统并联中卷积分配律的说明

3、利用分配律还可得

$$[x_1[n] + x_2[n]] * h[n] = x_1[n] * h[n] + x_2[n] * h[n]$$

$$[x_1(t) + x_2(t)] * h(t) = x_1(t) * h(t) + x_2(t) * h(t)$$

这说明：LTI系统对两个输入和的响应一定等于系统对单个输入响应的和。可见，由于卷积的分配律，可将一个复杂的卷积分为几个较简单的卷积来作。

例 2.10 令  $y[n]$  为下面两个序列的卷积：

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2^n u[-n] \quad ; \quad h[n] = u[n]$$

注意：沿整个时间轴，序列  $x[n]$  都为非零，因此直接求这个卷积有些繁琐，可用分配律性质把  $y[n]$  表示为两个较为简单的卷积之和来解

为此令：  $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$

其中：  $x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$        $x_2[n] = 2^n u[-n]$

则有

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n]$$

见例2.3 P61

$$y_1[n] = x_1[n] * h[n] = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right) * u[n] = \left(\frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - (1/2)}\right) u[n]$$

$$y_2[n] = x_2[n] * h[n] = (2^n u[-n]) * u[n] = \begin{cases} 2 & n \geq 0 \\ 2^{n+1} & n < 0 \end{cases}$$

见例2.5 P65

它们的和如图2.24所示

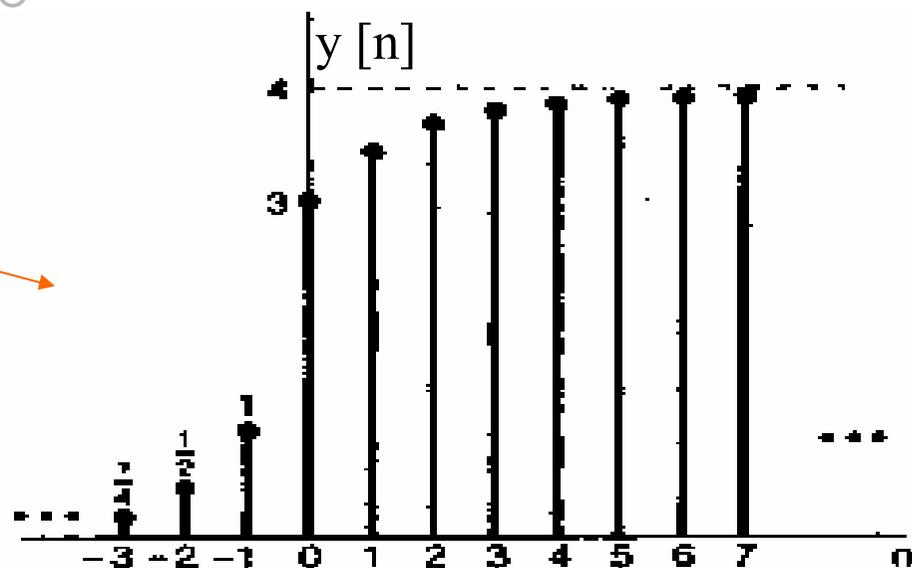


图 2.24 例 2.10 的  $y[n] = x[n] * h[n]$

### 2.3.3 结合律性质

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] \quad (2.58)$$

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) \quad (2.59)$$

证明式(2.59)成立:

$$\begin{aligned} \therefore [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h_1(\lambda - \tau) d\tau \right] h_2(t - \lambda) d\lambda \\ (\text{交换积分顺序}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\lambda - \tau) h_2(t - \lambda) d\lambda \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(z) h_2(t - \tau - z) dz \right] d\tau \quad (\text{设 } \lambda = \tau + z) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t) \end{aligned}$$

其中:

$$h(t - \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(z) h_2(t - \tau - z) dz$$

则有

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(z) h_2(t - z) dz = h_1(t) * h_2(t)$$

$$\therefore [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)]$$

结合律性质告诉我们:

- 1、对LTI系统来说,总系统响应与系统级联次序无关。
- 2、两个级联(串联)系统可等效为一个总的系统,其单位冲激响应 $h(t)$ 等于其子系统单位冲激响应的卷积。

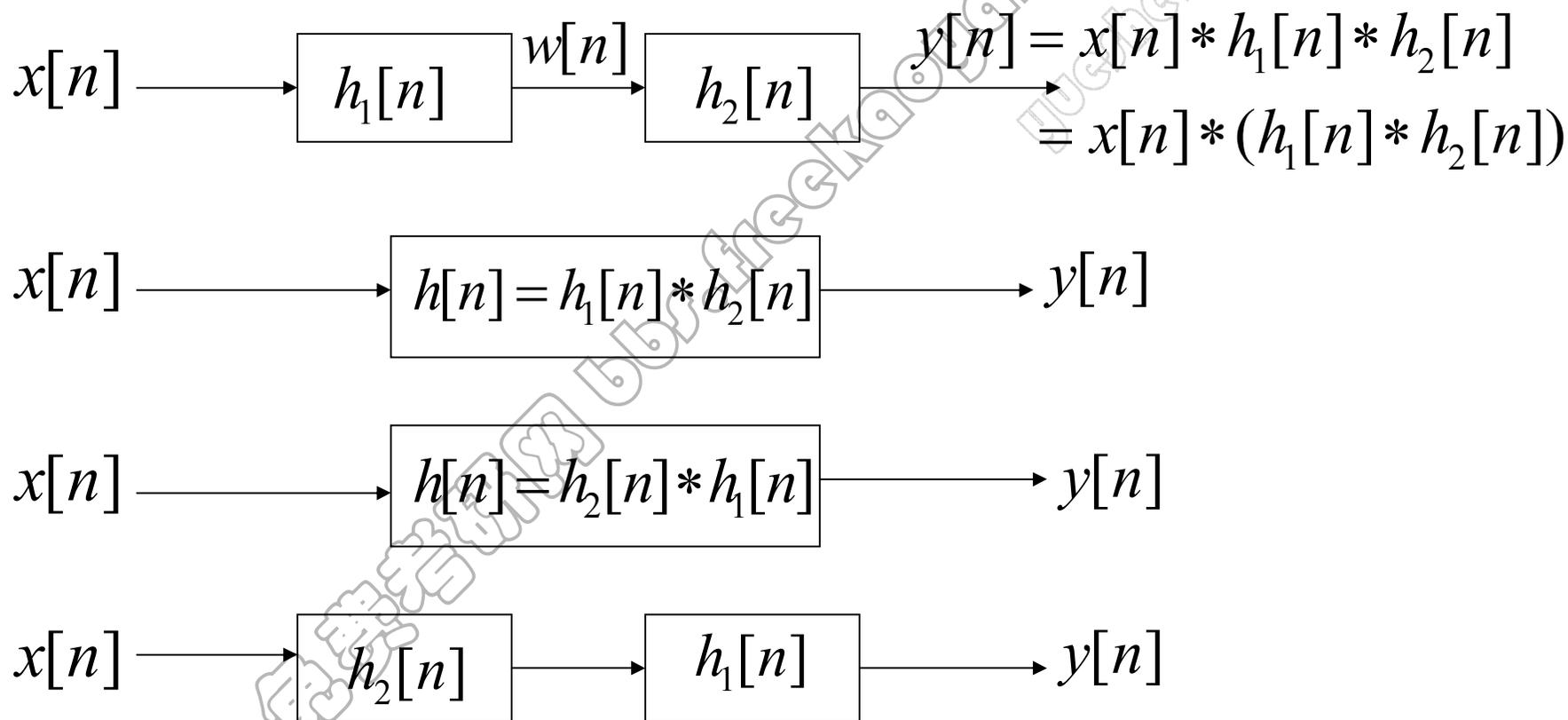


图2.25 卷积的结合律与交换律性质对LTI系统级联的意味

注：卷积的一些其它重要性质

1、卷积的微分性质——两个函数卷积后的微分等于其中一个函数微分后与另一个函数的卷积。即

$$\frac{d}{dt}[x(t) * h(t)] = \frac{dx(t)}{dt} * h(t) = x(t) * \frac{dh(t)}{dt}$$

证明：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[x(t) * h(t)] &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \frac{d}{dt}h(t-\tau)d\tau = x(t) * \frac{d}{dt}h(t)\end{aligned}$$

根据交换律，用类似的方法可以证明

$$\frac{d}{dt}[x(t) * h(t)] = \frac{dx(t)}{dt} * h(t)$$

2、卷积的积分性质——两个函数卷积后的积分等于其中一个函数积分后与另一个函数的卷积。即

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^t [x(\lambda) * h(\lambda)] d\lambda &= \left[ \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda \right] * h(t) \\ &= x(t) * \int_{-\infty}^t h(\lambda) d\lambda\end{aligned}$$

证明:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^t [x(\lambda) * h(\lambda)] d\lambda &= \int_{-\infty}^t \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(\lambda - \tau) d\tau \right] d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left[ \int_{-\infty}^t h(\lambda - \tau) d\lambda \right] d\tau \\ &= x(t) * \left[ \int_{-\infty}^t h(\lambda) d\lambda \right]\end{aligned}$$

根据交换律，同样可以证明

$$\int_{-\infty}^t [x(\lambda) * h(\lambda)] d\lambda = \left[ \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda \right] * h(t)$$

根据卷积的微分和积分性质。可得

$$\begin{aligned}y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \frac{dx(t)}{dt} * \left[ \int_{-\infty}^t h(\lambda) d\lambda \right] = \left[ \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda \right] * \frac{dh(t)}{dt}\end{aligned}$$

### 3、函数与 $\delta(t)$ 的卷积

根据卷积的定义和冲激函数的性质，可有

$$1) \quad x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t)$$

$$\begin{aligned}2) \quad x(t) * \delta(t - t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - t_0 - \tau) d\tau \\ &= x(t - t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0 - \tau) d\tau = x(t - t_0)\end{aligned}$$

### 3) 时移性

设  $y(t) = x(t) * h(t)$  ,则有

$$\begin{aligned}x(t-t_1) * h(t-t_2) &= [x(t) * \delta(t-t_1)] * [h(t) * \delta(t-t_2)] \\&= [x(t) * h(t)] * [\delta(t-t_1) * \delta(t-t_2)] \\&= y(t) * \delta(t-t_1-t_2) = y(t-t_1-t_2)\end{aligned}$$

$$4) \quad x(t) * \delta'(t) = x'(t) * \delta(t) = x'(t)$$

推论  $x(t) * \delta^n(t) = x^n(t)$

$$x(t) * \delta^n(t-t_0) = x^n(t-t_0)$$

### 4、函数 $x(t)$ 与 $u(t)$ 的卷积

$$\begin{aligned}x(t) * u(t) &= x(t) * \left[ \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \right] \\&= \left[ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right] * \delta(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\end{aligned}$$

## 2.3.4 有记忆和无记忆LTI系统

1、离散时间LTI系统输出为：

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

输入

若为无记忆系统，则  $y[n]$  只能与  $n$  时刻的  $x[n]$  有关。因而在上式中，唯一能使这一点成立的就只有当： $k=n$  时  $y[n]$  有值；当  $k \neq n$  时， $y[n]=0$ 。由于  $x[n]$  总是有值的，所以只有在  $k \neq n$  时  $h[n-k]=0$ 。即  $h[n]$  只能是一个加权的单位脉冲。即当  $n \neq 0$  时， $h[n]=0$

结论：无记忆离散时间LTI系统的单位脉冲响应  $h[n]$  只能是一个加权的单位脉冲，即  $h[n]=k\delta[n]$ 。其中  $k=h[0]$  是一个常数。

于是该系统为： $y[n] = x[n] * k\delta[n] = kx[n]$

上式可见，此时输出只与同一时刻的输入值有关，即为无记忆LTI系统；

若它的单位脉冲响应对于  $n \neq 0$  不是全为零，则这个系统为有记忆系统。

2、对连续时间LTI系统可得出同样的结论：即无记忆系统的单位冲激响应  $h(t)$  只能是一个加权的单位冲激函数。即

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

$$h(t) = k\delta(t) \quad \text{其中 } k=h(0) \quad \text{为常数}$$

系统可表示为  $y(t) = x(t) * k\delta(t) = kx(t)$

由上式可见，此时输出只与同一时刻的输入值有关，即为无记忆LTI系统；

若它的单位冲激响应  $h(t)$  对于  $t \neq 0$  不是全为零，则这个系统为有记忆系统。

注意：若  $k=1$ ，则这个系统就变为恒等系统，其输出等于输入，单位冲激响应  $h(t)$  等于单位冲激  $\delta(t)$ 。这时，卷积和、卷积积分公式为：

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * \delta[n] = x[n] \\ y(t) &= x(t) * \delta(t) = x(t) \end{aligned}$$

上式就是离散时间和连续时间单位冲激函数的筛选性质，即

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k]$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$$

### 2.3.5 LTI系统的可逆性

一个系统如果在不同的输入下,导致不同的输出,就称该系统是可逆的。如果一个系统是可逆的,

那么就有一个逆系统存在,当该逆系统与原系统级联后,就会产生一个等于  $x(t)$  的输出。

其中:

- $h(t)$  —— 系统的单位冲激响应
- $h_1(t)$  —— 逆系统的单位冲激响应;
- $w(t)$  —— 逆系统的输出。

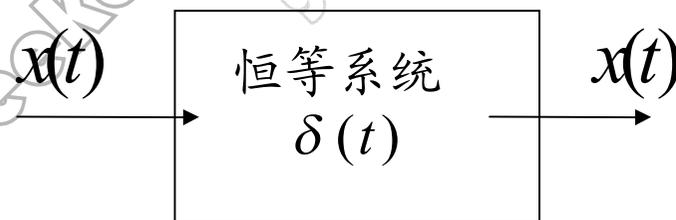
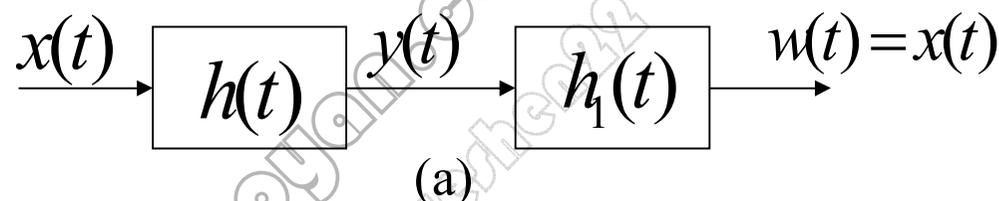


图2.26 连续时间LTI系统的逆系统

$$w(t) = [x(t) * h(t)] * h_1(t) = x(t) * [h(t) * h_1(t)]$$

为了使  $w(t) = x(t)$  , 则必须满足

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$

同样, 在离散时间情况下, 也必须满足

$$h[n] * h_1[n] = \delta[n]$$

例2.11 考虑一个纯时移组成的LTI系统

$$y(t) = x(t - t_0) \quad (2.68) \quad \text{——求逆系统}$$

解：首先应求出系统的单位冲击响应 $h(t)$ ：

令输入 $x(t)$ 为 $\delta(t)$ ，可得(2.68)式系统的单位冲激响应

$$h(t) = \delta(t - t_0)$$

这时  $y(t) = x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$

即，一个信号与一个移位冲激的卷积就是该信号的移位。

为了从输出中恢复输入，即必须接入一个逆系统，其单位冲激响应为

$$h_1(t) = \delta(t + t_0)$$

这是因为  $h(t) * h_1(t) = \delta(t - t_0) * \delta(t + t_0) = \delta(t)$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\delta(t - t_0) * \delta(t + t_0) = \delta(t)} \longrightarrow w(t) = x(t)$$

从而得  $w(t) = x(t) * \delta(t) = x(t)$  ——从输出中恢复<sup>126</sup>输入

### 2.3.6 LTI系统的因果性

如果一个系统在任何时刻的输出只决定于现在的输入以及过去的输入,该系统就称为**因果系统**。

若离散时间LTI系统是**因果的**, $y[n]$ 就必须与 **$k > n$ 的  $x[k]$  无关**,由式(2.39)可知

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]h[n-k] + \sum_{k=n+1}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

式中的**第一项**仅与 $n$ 及 $n$ 以前时刻有关,而**第二项**与 $n$ 时刻后的所有时间  $[n+1, \infty]$  的输入有关。

因此只有使**第二项等于零**,即在  $k > n$  ( $n-k < 0$ ) 时, $h[n-k]=0$  才能保证其输出与将来的输入无关。由此可得离散时间LTI系统的因果性的充要条件是:

其单位冲激响应  $h[n]$  必须满足:

$$h[n] = 0, \quad n < 0 \quad (2.77)$$

式(2.77)告诉我们:

- 1、一个LTI系统的单位冲激响应在冲激出现之前必须为零。
- 2、一个因果的离散时间LTI系统,其卷积和变为

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]h[n-k]$$

或

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

- 同理,若  $h(t)=0$ ,  $t < 0$  一个连续时间LTI系统就是因果的,这时卷积积分由下式给出:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

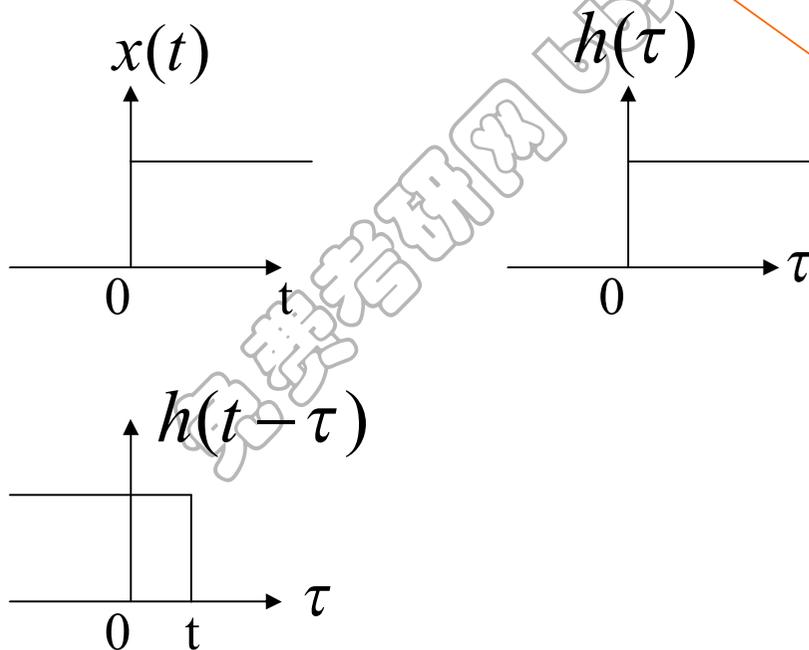
注意：卷积积分上下限的确定：

由定义可知，卷积的上下限为  $-\infty \sim \infty$ ，即

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

但在具体计算时，可根据  $x(t)$  和  $h(t)$  的特性而作些简化。

1、若  $x(t)$  和  $h(t)$  均为因果信号，则积分的上下限可写为  $(0^-, t)$

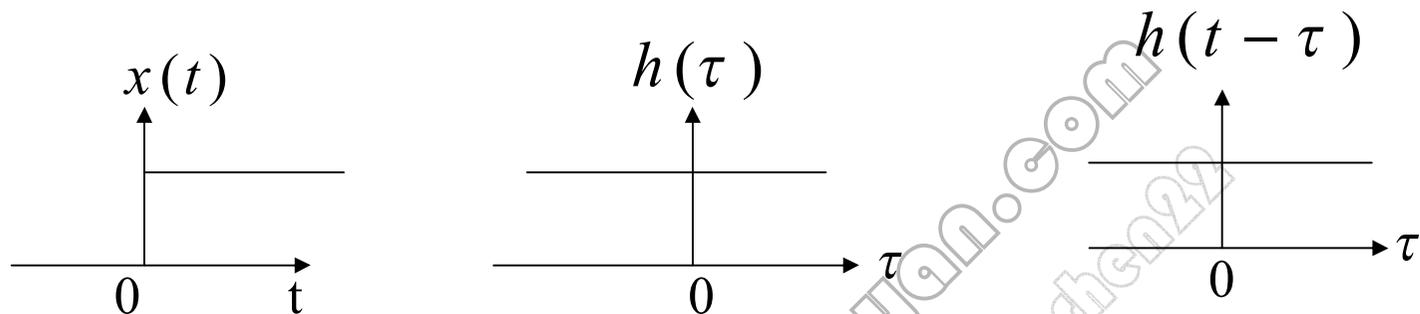


若  $t < 0$  时,  $x(t) = 0$  ;

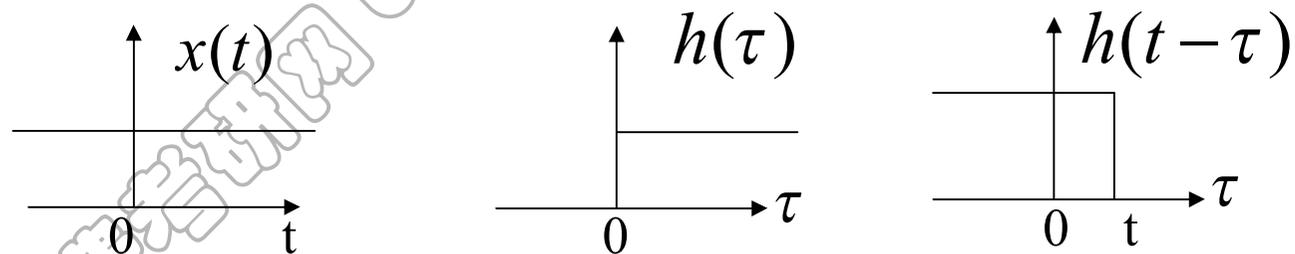
$t > 0$  时,  $x(t) \neq 0$

则该信号为因果信号。

2、若 $x(t)$ 为因果信号， $h(t)$ 为无时限信号，则积分的上下限可写为  
 $(0^-, \infty)$



3、若 $x(t)$ 为无时限信号， $h(t)$ 为因果信号，则积分的上下限可写为  
 $(-\infty, t)$



4、 $x(t)$ 、 $h(t)$ 均为无时限，此时积分上下限为  $(-\infty, \infty)$

## 第二章 线性时不变系统

### 1、 用脉冲表示离散时间信号

离散时间LTI系统的单位脉冲响应及卷积和表示

### 2、 用阶梯信号 来近似 $x(t)$

连续时间LTI系统的单位冲激响应及卷积积分表示

### 3、 线性时不变系统的性质

交换律性质

分配律性质

结合律性质

### 4、 补充： 卷积的一些其它重要性质

卷积的积分性质

函数与  $\delta(t)$  的卷积

时移性

函数与  $u(t)$  的卷积

$$n \neq 0 \quad h[n] = 0$$

## 5、有记忆和无记忆LTI系统

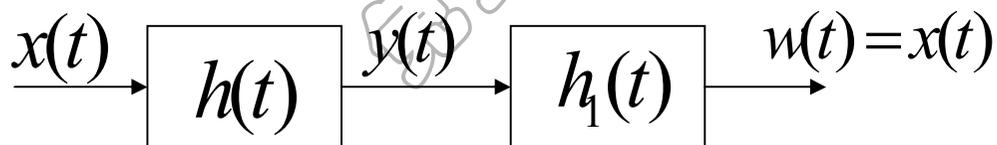
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

- 无记忆系统:  $y[n]$  只能与  $n$  时刻的  $x[n]$  有关。  
唯一能使这一点成立的就只有当:  $k=n$  时  $y[n]$  有值,  
 $k \neq n$  时  $y[n] = 0$
- 由于  $x[n]$  总是有值的, 所以只有在  $k \neq n$  时  $h[n-k] = 0$   
即当  $n \neq 0$  时,  $h[n] = 0$

结论: 无记忆离散时间LTI系统的单位脉冲响应  $h[n]$  只能是一个加权的单位脉冲。

## 6、LTI系统的可逆性

- 一个系统如果在不同的输入下, 导致不同的输出, 就称该系统是可逆的。
- 如果一个系统是可逆的, 那么就有一个逆系统存在,



$$w(t) = [x(t) * h(t)] * h_1(t) = x(t) * [h(t) * h_1(t)] \quad \text{要求: } h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$

## 7、LTI系统的因果性

- 如果一个系统在任何时刻的输出只决定于现在的输入以及过去的输入,该系统就称为因果系统。

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]h[n-k] + \sum_{k=n+1}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

即:  $k > n$  ( $n-k < 0$ ) 则  $h[n-k] = 0$

- 由此可得离散时间LTI系统的因果性的充要条件是:

其单位冲激响应 $h[n]$ 必须满足:  $h[n] = 0$  ,  $n < 0$

## 2.3.7 LTI系统的稳定性

如果一个系统对于每一个有界的输入,其输出都是有界的,就说该系统是稳定的.

### 1、稳定系统应具备的条件

设: 一输入是有界的, 即  $|x[n]| < B$  (对所有的 $n$ )

LTI系统的单位脉冲响应为  $h[n]$

则按卷积和公式, 输出响应的绝对值为

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \right|$$

$$\therefore |y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| |x[n-k]|$$

$$\therefore \sum_{-\infty}^{+\infty} |a \times b| \leq \sum_{-\infty}^{+\infty} |a| \times |b|$$

因为对所有的  $n$  有  $|x[n]| < B$  , 所以  $|x[n-k]| < B$  。 即有

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n]x[n-k] \right| \leq B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| \quad (\text{对所有 } n)$$

由上式可得出: 如果单位脉冲响应是绝对可和的, 即

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty \quad (2.86)$$

那么  $y[n]$  就是有界的, 因此系统是稳定的。

式(2.86)是保证一个离散时间LTI系统稳定性的充要条件。

同样, 在连续时间情况下, 若对全部  $t$  , 有  $|x(t)| < B$  , 则有

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau \leq B \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau$$

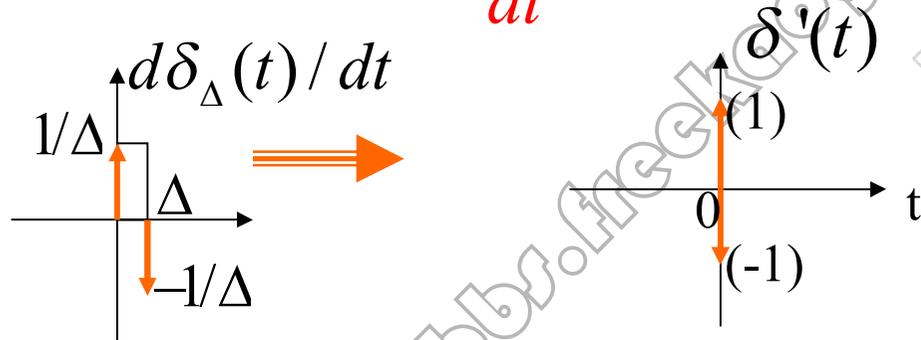
因此, 若单位冲激响应是绝对可积的, 即  $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty$  则该系统是稳定的。

习题1.27

(g)  $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$  请判别系统的稳定性。

解：若系统稳定，则  $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$

$x(t) = \delta(t) \rightarrow y(t) = h(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} = \delta'(t)$  称单位冲激偶



因为单位冲激偶的面积为零  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta(t)}{dt} dt = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 0$

所以：  $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta'(\tau)| d\tau < \infty$

即：系统是稳定的。

## 2.3.8 LTI系统的单位阶跃响应

LTI系统对单位阶跃信号 $u(t)$ 或 $u[n]$ 的响应称为LTI系统的单位阶跃响应,记为 $s(t)$ 或 $s[n]$ 。

除了单位冲激响应外,单位阶跃响应 $s[n]$ 或 $s(t)$ 也常用来描述一个LTI系统的特性,在信号与系统分析中有着重要应用(常用于描述系统的时域特性)。

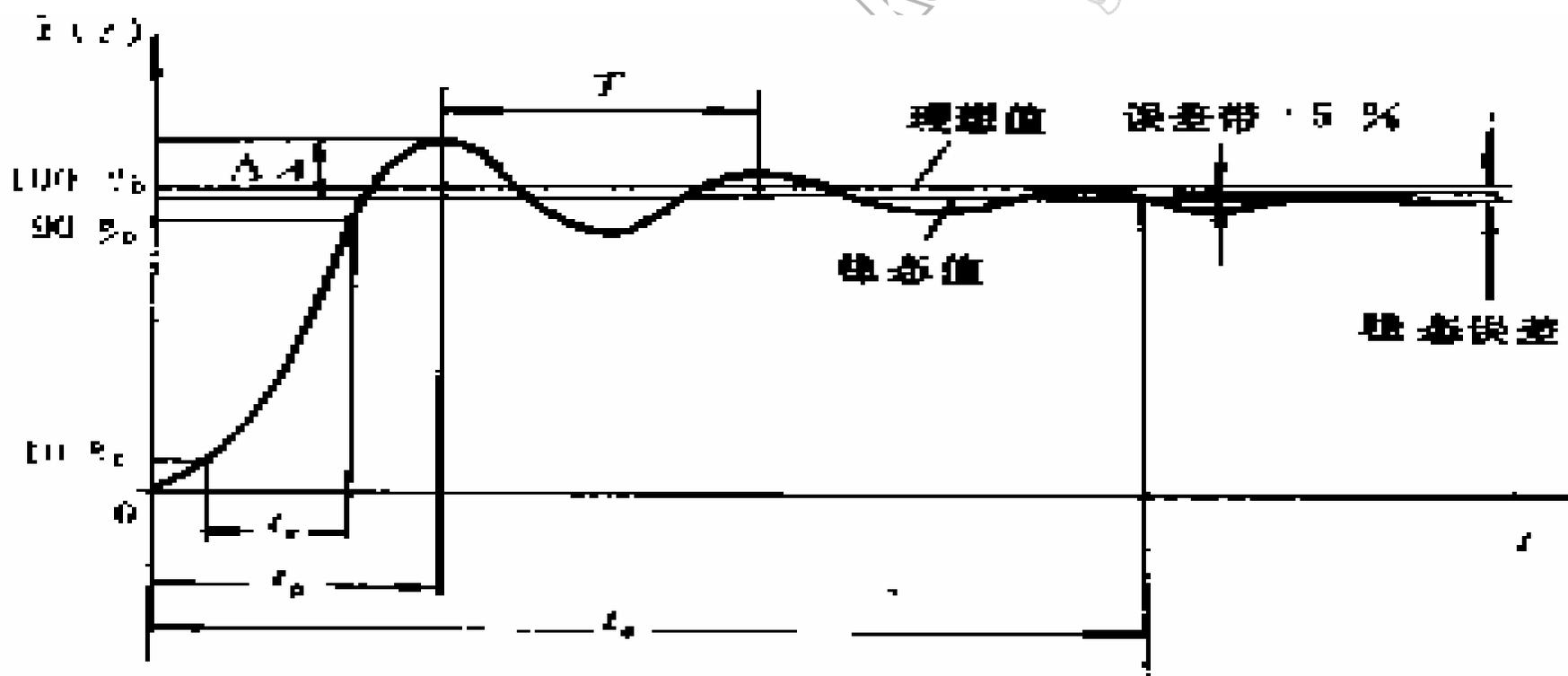


图 1-18 二阶传感器表示动态性能指标的阶跃响应曲线

1、对一离散时间LTI系统，其单位阶跃响应为

$$s[n] = u[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] u[n-k]$$

- 因为，当  $n-k < 0$  时， $u[n-k]=0$ ；而当  $n-k \geq 0$  时， $u[n-k]=1$ 。

所以上式变为

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$$

即  $k > n$  时

- 由上式可见，一个离散LTI系统的单位阶跃响应是  $s[n]$  是其单位脉冲响应  $h[n]$  的求和函数。

- 显然， $h[n]$  可根据  $h[n] = s[n] - s[n-1]$ ，从  $s[n]$  中求出来。

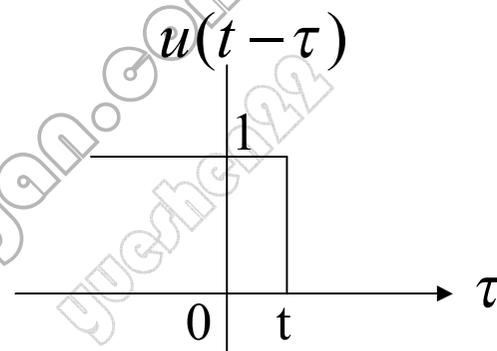
即：一个离散时间LTI系统的单位脉冲响应  $h[n]$  就是它的单位阶跃响应  $s[n]$  的一次差分。

2、同理，在连续时间情况下，LTI系统的单位阶跃响应 $s(t)$ 为

$$s(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

• 因为当  $t-\tau < 0$  时,  $u(t-\tau) = 0$  ;

而当  $t-\tau \geq 0$  时,  $u(t-\tau) = 1$



• 所以上式变为  $s(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau)d\tau$

上式表明:

1、 一个连续时间LTI系统的单位阶跃响应 $s(t)$ 是它的单位冲激响应 $h(t)$ 的积分函数。

2、 单位冲激响应 $h(t)$ 是其单位阶跃响应 $s(t)$ 的一阶导数, 即

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = s'(t)$$

## 2.4 用微分和差分方程描述的因果LTI系统

通常可用微分方程来描述连续时间系统;用差分方程来描述离散时间系统。

### 2.4.1 线性常系数微分方程

一般而言, 设连续LTI系统的激励信号为 $x(t)$ , 系统响应为 $y(t)$  则系统可以用一高阶的微分方程表示

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) \\ & = b_m \frac{d^m}{dt^m} x(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} x(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} x(t) + b_0 x(t) \end{aligned}$$

或缩写为

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) \quad (a)$$

式中  $a_k$  和  $b_k$  均为常数。

• 求解微分方程的方法：（在时域）

1、用时域经典法来求解：

完全解=齐次解+特解

2、用零输入响应与零状态响应来解：

系统全响应=零输入响应+零状态响应

（利用求齐次解的方法得到零输入响应，利用卷积求零状态响应。辅以算子符号）

- 由时域经典法可知，方程的全解由两部分组成：  
齐次解  $y_h(t)$  和特解  $y_p(t)$  。

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

### 1、齐次解 —— 自然响应

齐次解,就是满足方程

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = 0$$

的解。(c)式的特征方程为: (一般  $a_n = 1$  )

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

也称自然响应

其n个根  $\lambda_k$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) 称为微分方程的特征根。齐次解的函数形式由特征根确定, 见下表。其中A, C和  $\theta$  是待定常数。

表一、不同特征根所对应的齐次解的函数形式

特征根 $\lambda_i$	各特征根 $\lambda_i$ 在齐次解 $y_h(t)$ 中的函数形式
单实根 (无重根)	$C_i e^{\lambda_i(t)}$
K重根	$(C_1 t^{k-1} + C_2 t^{k-2} + \dots + C_{k-1} t + C_k) e^{\lambda_i(t)}$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2} = a \pm j\beta$	$e^{at} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$ 或 $Ae^{at} \cos(\beta t - \theta), Ae^{j\theta} = C_1 + jC_2$
K重共轭复根	$C_1 t^{k-1} e^{at} \cos(\beta t + \theta_1) + C_2 t^{k-2} e^{at} \cos(\beta t + \theta_2) + \dots + C_k e^{at} \cos(\beta t + \theta_k)$

## 2、特解——受迫响应

特解的函数形式与激励信号的函数形式有关，通常将激励 $x(t)$ 代入方程式 (a) 的右端。化简后，根据方程右端函数形式选定特解的函数形式，代入方程后求得特解函数式中的待定系数，即可给出特解

表二列出了几种常见的激励信号所对应的特解的函数形式。

表二 几种典型激励信号所对应的特解的函数形式 (表中B、D为特定系数)

激励信号 $x(t)$	响应函数 $y(t)$ 的特解 $y_p(t)$ 的函数形式
E (常数)	B
$t^m$	$B_1 t^m + B_2 t^{m-1} + \dots + B_m t + B_{m+1}$ 所有特征根不等于0 $t^r (B_1 t^m + B_2 t^{m-1} + \dots + B_m t + B_{m+1})$ 有r重等于0的特征根
$e^{at}$	$Be^{at}$ , a不等于特征根 $B_1 t^r e^{at} + B_2 t^{r-1} e^{at} + \dots + B_r t e^{at} + B_{r+1} e^{at}$ a等于r重特征根, r=1时为单根
$\cos \beta t$ 或 $\sin \beta t$	$B_1 \cos \beta t + B_2 \sin \beta t$ 或 $A \cos(\beta t - \theta)$ , $Ae^{j\theta} = B_1 + jB_2$ 所有特征根不等于 $\pm j\beta$
$t^m e^{at} \cos \beta t$ 或 $t^m e^{at} \sin \beta t$	$(B_1 t^m + \dots + B_m t + B_{m+1}) e^{at} \cos \beta t + (D_1 t^m + \dots + D_m t + D_{m+1}) e^{at} \sin \beta t$ 所有特征根不等于 $a \pm j\beta$

例2.14：已知某因果LTI系统的微分方程为：

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \quad (2.95)$$

求：当  $x(t) = Ke^{3t}u(t)$  时的解。（K为某一实数）

解：1）、求齐次解

齐次方程为：
$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$$

特征方程为：
$$\lambda + 2 = 0$$

其特征根为：
$$\lambda = -2$$
 是单实根

方程的齐次解为：
$$y_h(t) = C_i e^{\lambda_i(t)} = C e^{-2t}$$

2）、求特解

由表二可知，当输入  $x(t) = Ke^{3t}u(t)$  时，其特解可设为  $y_p(t) = Be^{3t}$

其一阶导数为:

$$\frac{dy_p(t)}{dt} = 3Be^{3t}$$

代入方程(2.95), 得  $3Be^{3t} + 2Be^{3t} = Ke^{3t} \quad t > 0$

假设  $t=0$ , 则  $3B + 2B = K$ ; 得  $B = \frac{K}{5}$

所以  $y_p(t) = \frac{K}{5}e^{3t}, \quad t > 0$

3)、求全解:  $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ce^{-2t} + \frac{K}{5}e^{3t} \quad t < 0$

对于一个因果系统, 若  $t \leq 0, x(t) = 0$ , 那么  $t \leq 0, y(t)$  必须等于0。所以当  $t=0$  时得:  $0 = C + \frac{K}{5} \quad C = -\frac{k}{5}$

即全解为:  $y(t) = \frac{K}{5}(e^{3t} - e^{-2t}) \quad t > 0$  147

## 2.4.2 线性常系数差分方程

离散LTI系统的数学模型,可表示为线性常系数差分方程,一般可描述

$$\text{为 } \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (\text{A})$$

• 求解差分方程的方法: (在时域)

1、用经典法来求解:

完全解=齐次解+特解

2、用卷积和法(零输入响应与零状态响应)来解:

系统全响应=零输入响应+零状态响应

3、迭代法

• 递归型差分方程 
$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] \right\}$$

$Y[n]$ 称无限脉冲响应(IIR)系统

• 非递归型差分方程 
$$y[n] = \sum_{k=0}^M \left( \frac{b_k}{a_0} \right) x[n-k] \quad (\text{当上式的} N=0 \text{时})$$

$Y[n]$ 称有限脉冲响应(FIR)系统

例2.15考虑如下差分方程  $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$  (2.118)

可写成:  $y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1]$  (2.119)

可见, 这是个递归方程。为了求出  $y[n]$ , 需要一个初始条件。

假设: 系统为初始松弛; 输入为  $x[n] = k\delta[n]$

初始松弛条件意味着:

$$\text{当 } n \leq -1 \text{ 时, } x[n] = 0 \rightarrow y[n] = 0$$

由此可得一个初始条件为:  $y[-1]=0$

从这个初始条件出发, 对  $n \geq 0$  的各个  $y[n]$  值解出如下:

$$y[0] = x[0] + \frac{1}{2} y[-1] = k$$

$$y[1] = x[1] + \frac{1}{2} y[0] = \frac{1}{2} k$$

$$y[2] = x[2] + \frac{1}{2} y[1] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 k$$

⋮

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2} y[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n k \quad n \geq 0$$

因为初始松弛条件2.118式表征的系统就是LTI的。因此它的输入输出特性是完全由它的单位脉冲响应 $h[n]$ 表征的。令 $k=1$ ,可得系统的单位脉冲响应为:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

**注意:** 例中的因果LTI系统其单位脉冲响应是无限长的。——称无限脉冲响应(IIR)系统。

本书大多数情况都是用递归差分方程来描述和分析线性、时不变性和因果<sup>150</sup>的系统

### 2.4.3 用微分和差分方程描述的一阶系统的方框图表示

#### 一、离散时间线性时不变系统的方框图表示

描述离散时间线性时不变系统的差分方程涉及相加、乘以系数和延迟（体现  $y[n]$  和  $y[n-1]$  之间的关系）这三种运算。因而，利用单位延迟、相加器和数乘器这三种基本运算单元，按照差分方程所表示的运算关系，可作出相应的系统方框图。

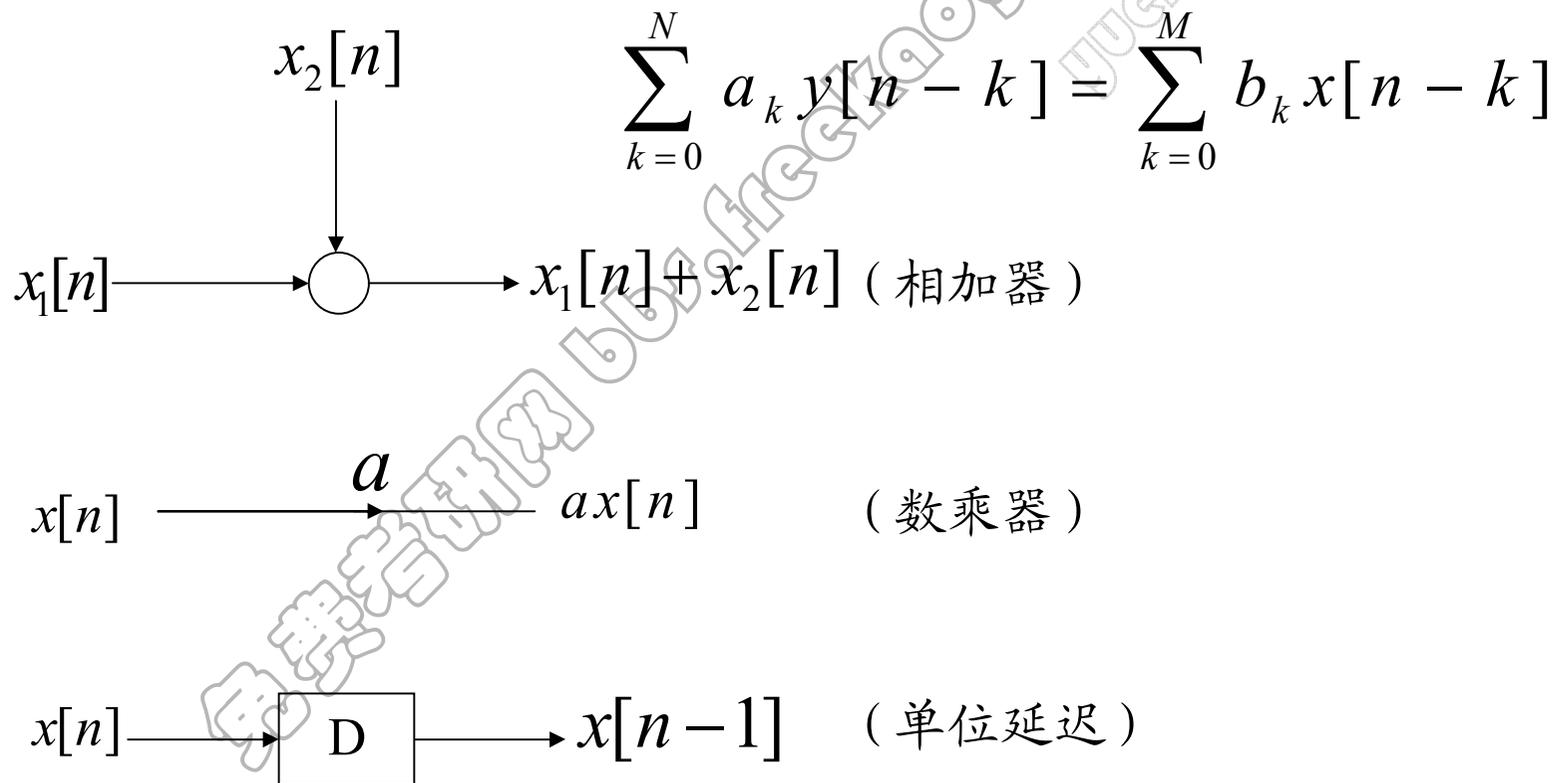
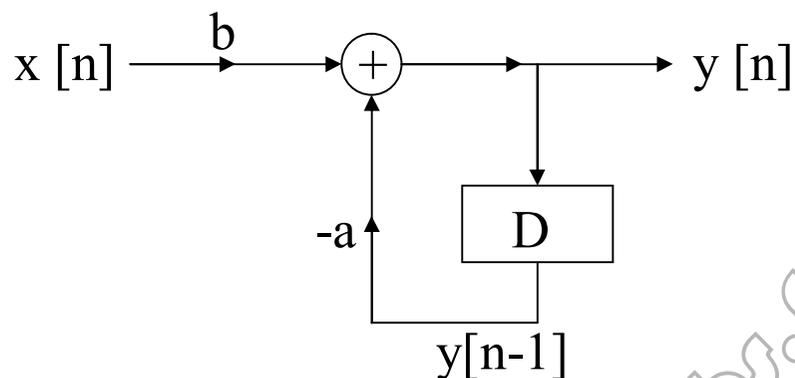


图2.27 三种基本运算单元

例：描述一阶LTI系统的差分方程为

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n]$$

该方程可改写为  $y[n] = -ay[n-1] + bx[n]$ ，这一方程的实现框图如下



图中， $y[n]$  经单位延迟后为  $y[n-1]$ ， $y[n-1]$  乘  $-a$  后与  $x[n]$  乘以  $b$  相加，即为上式所表示的运算关系。

上图表明：这个系统**要求有记忆**，这就需要初始条件。但如果所描述的系统是**初始松弛的**，则存储在该单元内的初始值就为零。

## 二、连续时间线性时不变系统的方框图表示

描述连续时间线性时不变系统的微分方程为：

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \longrightarrow \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

可见,只要将实现差分方程的方块图中的延迟器换为微分器即可得到连续时间线性时不变系统的实现框图。然而,由于微分器在实际中不易实现,故常用积分器来替代。为此,需要将微分方程换为积分方程。

现考虑由一阶微分方程描述的因果连续时间系统：
$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t) \quad (2.128)$$

先将方程改写为 
$$y(t) = -\frac{1}{a} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{b}{a} x(t)$$

由上式可见,它涉及三种基本运算:相加、乘以系数和微分。但由于微分器不仅实现困难,而且对误差和噪声又极为敏感。为此,将式(2.128)改为

$$\frac{dy(t)}{dt} = bx(t) - ay(t) \quad (2.130)$$

然后从  $-\infty \sim t$  积分。若所描述的系统是初始松弛的,则  $dy(t)/dt$

从  $-\infty \sim t$  的积分就是  $y(t)$ ，结果可得

$$y(t) = \int_{-\infty}^t [bx(\tau) - ay(\tau)]d\tau \quad (2.131)$$

这种形式的系统就可用方框图来表示(见下图)。

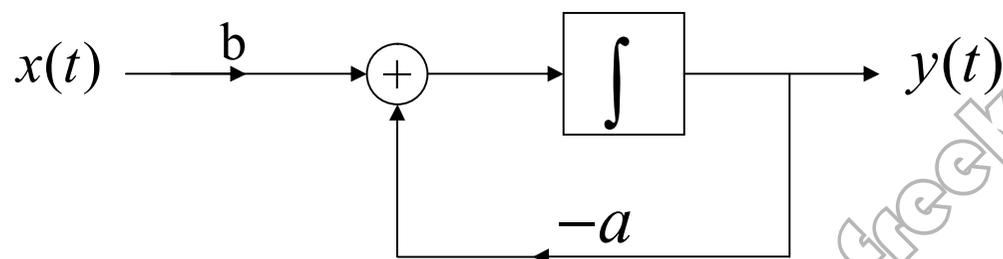


图2.32 (2.131)式系统方框图表示

**注意:**在连续时间情况下,积分器就代表了该系统的记忆存储单元,若(2.131)式的积分是从某一有限点  $t_0$  开始,这时为

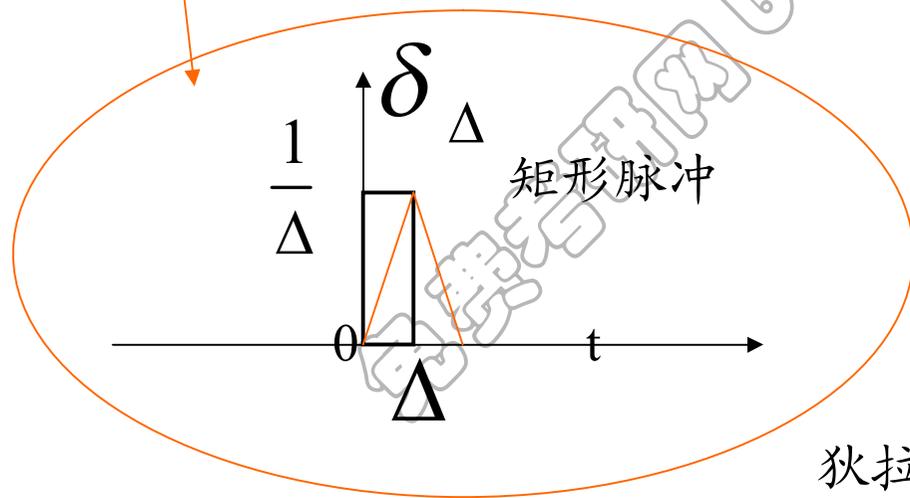
$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t [bx(\tau) - ay(\tau)]d\tau \quad (2.132)$$

上式表明: $y(t)$ 的表征要求有一个初始条件,即  $y(t_0)$  值,这个值就是积分器在时刻  $t_0$  存储的值。

## 2.5 奇异函数

按照对单位冲激信号的定义，我们会发现有许多完全不同的信号，当  $\Delta \rightarrow 0$  时，其宽度都趋于零，幅度趋于无穷大，其面积始终保持 1。即它们在极限条件下都满足冲激信号的定义。

诸如此类的信号还有许多。这表明关于  $\delta$  函数的定义是不严格的。之所以出现这种情况，是因为  $\delta$  这样的函数已经超出了常规函数的范畴，对这种函数的定义和运算都不能完全按常规的意义去理解。像  $\delta$  这样的非常规函数，通常被称为奇异函数或广义函数。需要利用广义函数或分配函数的理论对其作出严格的定义。



$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{array} \right.$$

狄拉克定义: 
$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \\ \delta(t) = 0 \quad t \neq 0 \end{array} \right. ^{155}$$

## 2.5.1 作为理想化短脉冲的单位冲激

如前所述,当 $\Delta \rightarrow 0$ 时, $\delta_{\Delta}(t)$  的极限就是单位冲激函数,

即 
$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t)$$

即: **由理想化短脉冲引出了单位冲激**。但事实上还有许多其它信号,当 $\Delta$ 足够小时,当作用于一个LTI系统时,其表现全像是冲激。所以就想到应该将单位冲激借助于一个LTI系统对它的响应如何来考虑。

## 2.5.2 通过卷积定义单位冲激

1、通常,一个信号总是用它在自变量每一点的值来定义。但是,单位冲激主要考虑的不是在每个  $t$  值它怎么样,而是在卷积的意义下它有何作为。因此,从线性系统分析的观点,可以将单位冲激定义为一个信号,其对任何  $x(t)$  有

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) x(t-\tau) d\tau \quad (2.138)$$

根据(2.138)的运算定义,可得到有关单位冲激的全部性质。

例如:若令  $x(t)=1$  (对全部  $t$ ), 则

$$1 = x(t) = x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau$$

所以单位冲激的面积为 1。

2、另一种完全等效的  $\delta(t)$  定义。

为了求得这另一种形式,取任意信号  $g(t)$ ,将其反转得到  $g(-t)$ ,然后再与  $\delta(t)$  卷积。即

$$g(-t) = g(-t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau - t) \delta(\tau) d\tau$$

当  $t=0$  , 得 
$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\delta(\tau)d\tau \quad (2.139)$$

令 
$$g(\tau) = x(t - \tau)$$

则有 
$$g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)\delta(\tau)d\tau = x(t)$$

这就是(2.138)式。因此 (2.139)式是单位冲激的一个等效运算定义;

即: 单位冲激是这样一种信号,当它与某一信号  $g(t)$ 相乘并在  $-\infty$  到  $+\infty$  上积分,其结果就是  $g(0)$ 。

例: 考虑信号  $f(t)\delta(t)$ 。则由 (2.139) 式可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)f(\tau)\delta(\tau)d\tau = g(0)f(0) \quad (2.140)$$

另一方面,若考虑信号  $f(0)\delta(t)$  可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)f(0)\delta(\tau)d\tau = g(0)f(0) \quad (2.141)$$

比较式(2.140)和式(2.141)可得

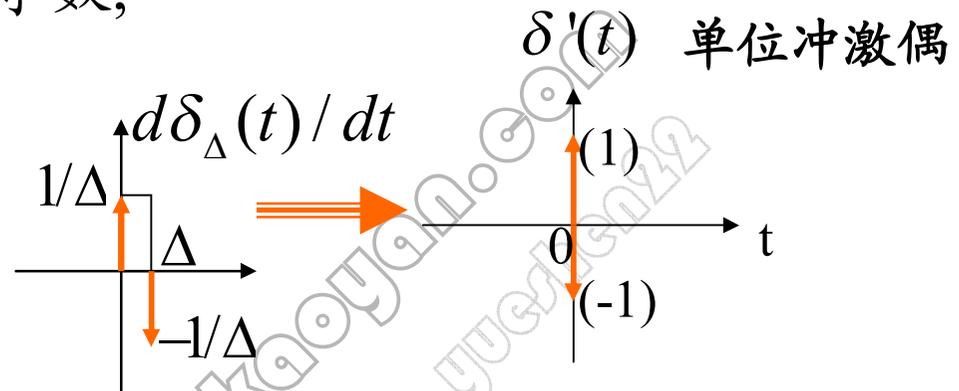
$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

### 2.5.3 单位冲激偶和其它的奇异函数

若LTI系统的输出是输入的导数,

即:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$



则系统的单位冲激响应  $h(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} = u_1(t)$  称之为单位冲激偶。  
用  $u_1(t)$  表示。

根据LTI的卷积表示,对任何信号  $x(t)$  应有

$$y(t) = x(t) * u_1(t) = \frac{dx(t)}{dt} * \delta(t)$$

同理，也能依次定义  $\delta(t)$  的二阶导数  $u_2(t)$  的LTI系统的冲激响应，即

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} * \delta(t) = \left[ \frac{dx(t)}{dt} * u_1(t) \right] * \delta(t) = x(t) * u_1(t) * u_1(t)$$

因此  $u_2(t) = u_1(t) * u_1(t)$

一般  $u_k(t) (k > 0)$  就是  $\delta(t)$  的  $k$  次导数，因此是一个取输入  $k$  次导数的系统的单位冲激响应。所以有  $u_k(t) = u_1(t) * u_1(t) \cdots * u_1(t)$  可用  $k$  个微分器级联得到。

单位冲激偶的性质:

### 1、单位冲激偶的面积为零

若考虑常数信号  $x(t)=1$ , 可得

$$0 = \frac{dx(t)}{dt} = x(t) * u_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(\tau)d\tau$$

### 2、若考虑信号 $g(-t)$ 与 $u_1(t)$ 卷积, 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau-t)u_1(\tau)d\tau = g(-t) * u_1(t) = \frac{dg(-t)}{dt} = -g'(-t)$$

### 3、单位冲激偶是奇函数

若  $x(t)$  是奇函数, 即  $x(t) = -x(-t)$ , 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta'(t)dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)\delta'(t)dt = -x'(0) \quad (A)$$

通过变量代换, 令  $-t = \tau$ , 则上式右边可改写为

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta'(-\tau)d\tau = -x'(0) \quad (B)$$

比较(A)和(B)式可得  $x(t)\delta'(t) = -x(t)\delta'(-t)$

$$\text{即, } \delta'(t) = -\delta'(-t)$$

这表明  $\delta'(t)$  是奇函数。

4、根据微分运算的法则及  $\delta(t)$  的性质, 有,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[x(t)\delta(t)] &= x'(t)\delta(t) + x(t)\delta'(t) \\ &= x'(0)\delta(t) + x(t)\delta'(t) \end{aligned}$$

而 
$$\frac{d}{dt}[x(t)\delta(t)] = \frac{d}{dt}[x(0)\delta(t)] = x(0)\delta'(t)$$

因此有

$$x(t)\delta'(t) = x(0)\delta'(t) - x'(0)\delta(t)$$

P121题2.69(b)

据此可以推出  $t\delta'(t) = -\delta(t)$

$$t^2\delta'(t) = 0$$

5、单位冲激函数的一次积分为单位阶跃函数，即

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad \text{可认为单位阶跃是一个积分器的单位冲激响应:}$$

性质: 1)  $x(t) * u(t) = x(t) * \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau * \delta(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

2)  $u_{-2}(t) = u(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$

因为  $t < 0, u(t) = 0; t > 0, u(t) = 1$ , 所以

$$u_{-2}(t) = \int_0^t 1 d\tau = (t - 0)u(t) = \underline{tu(t)} \longleftarrow \text{称单位斜坡函数}$$

用类似的方法可将  $\delta(t)$  的高阶积分定义为多个积分器级联的单位冲激响应:

$$u_{-k}(t) = \underbrace{u(t) * \dots * u(t)}_k = \int_{-\infty}^t u_{-(k-1)}(\tau) d\tau$$

$$u_{-k}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} u(t)$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad x(t) * u_{-2}(t) &= x(t) * u(t) * u(t) = \left( \int_{-\infty}^t x(\sigma) d\sigma \right) * u(t) \\
 &= \int_{-\infty}^t \left( \int_{-\infty}^{\tau} x(\sigma) d\sigma \right) d\tau
 \end{aligned}$$

对  $\delta(t)$  和  $u(t)$  也可用另一种符号,即

$$\delta(t) = u_0(t)$$

$$u(t) = u_{-1}(t)$$

利用这个符号:  $u_k(t)$ , 当  $k > 0$ , 表示  $k$  个微分器级联的单位冲激响应,  $u_0(t)$  就是恒等系统的单位冲激响应

当  $k < 0$ , 表示  $k$  个积分器级联的单位冲激响应.

因为微分器是积分器的逆系统, 所以有

$$u(t) * u_1(t) = \delta(t) \quad \text{或} \quad u_{-1}(t) * u_1(t) = u_0(t)$$

$$u_k(t) * u_r(t) = u_{k+r}(t)$$

表示  $k$  个微分器(或积分器)与  $r$  个微分器(或积分器)级联.

因此用在卷积意义下的特性来定义奇异函数,就能够相对容易地对它们进行运算,并直接运用LTI系统的意义来予以解说。——这是本书主要关注的问题。

## 2.6 小结

这一章研究了LTI系统的一些很重要的表示。

把离散时间信号表示成一组移位的单位脉冲的加权和,并据此导出对离散时间LTI系统响应的卷积和表示。

把连续时间信号表示成移位单位冲激函数的加权积分,并据此导出对连续时间LTI系统响应的卷积积分表示。

这些表示极为重要,因为这样可利用系统的单位冲激响应来计算系统对任何输入信号的响应。

作业:

题2.3    题2.32    题2.48    题2.61(c)

# 第三章

## 周期信号的傅里叶级数表示

### 3.0 引言

第二章是在时域中对信号和系统进行了分析。

1、将离散时间信号分解成移位单位脉冲的加权和；

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

2、将连续时间信号分解成移位单位冲激的加权积分。

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

3、利用LTI系统的线性与时不变特性，导出了卷积和与卷积积分。

从而解决了LTI系统在时域进行分析的方法问题。

这种方法的好处是：

1、使我们在**已知系统**单位冲激响应和给定系统输入的条件下，计算LTI系统的响应时变得十分方便。

2、揭示了LTI系统对任意输入信号的响应是由系统对构成输入信号的基本信号单元的响应组合而成的。

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad y(t) = x(t) * h(t)$$

因此，我们可以把系统的**性质与单位冲激响应的特性**相联系，并通过对单位冲激响应的研究来详细分析LTI系统的特性。

下面将讨论信号与系统的另一种分析方法——频域分析法。

**频域分析法的基本思想：**

设法将信号分解成一组基本信号单元的加权和或加权积分，进而利用LTI系统的线性和时不变性解决系统分析问题。

**与时域分析所不同的是：**

频域分析法中利用复指数信号作为分解信号的基本单元。

信号的这种表示就是连续时间和离散时间傅里叶级数与傅里叶变换。因此频域分析又称为傅里叶分析。

将会看到，这些表示法能用来构成范围相当广泛而有用的一类信号。

### 3.2 LTI系统对复指数信号的响应

在研究LTI系统时,将信号表示成基本信号的线性组合是很有利的,但这些基本信号应具有以下两个性质:

- 1、由这些基本信号能够构成相当广泛的一类有用信号;
- 2、LTI系统对每一个基本信号的响应应该十分简单,使得系统对任意输入信号的响应有一个很方便的表示式。

连续和离散时间复指数信号集都具有上述两个性质。(  $e^{st}$  ,  $z^n$  其中:  $s$  和  $z$  都是复数 )

$$x(t) = ce^{at} \quad x[n] = Ca^n$$

• 一个LTI系统对复指数信号的响应也同样是一个复指数信号,不同的只是在幅度上的变化;也就是说:

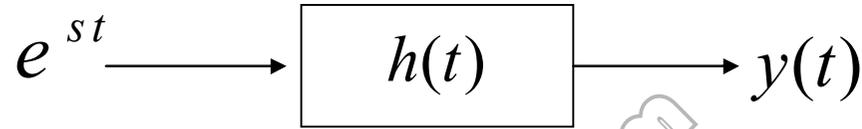
$$\text{连续时间: } e^{st} \rightarrow H(s)e^{st}$$

$$\text{离散时间: } z^n \rightarrow H(z)z^n$$

其中:  $H(s)$  或  $H(z)$  是一个复振幅因子——称特征值。

**特征函数**——若系统对一个信号的输出响应仅是一个常数(可能是复数)乘以输入,则该信号称为系统的特征函数。

为了证明复指数  $e^{st}$  确实是LTI系统的特征函数,设输入信号为  $x(t) = e^{st}$ , 系统的单位冲激响应为  $h(t)$ ,



则有

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{st}e^{-s\tau}d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \\ &= H(s)e^{st} \end{aligned}$$

其中假设  $H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$ ——若积分收敛, 其值即是一个由S确定的复常数.

这表明LTI系统对复指数信号的响应仍然是同样的复指数信号,系统所起的作用只是改变了复指数的幅度。

从而证明了复指数  $e^{st}$  是LTI系统的特征函数。

用同样的方法证明：复指数序列也是离散时间LTI系统的特征函数；

设LTI系统的单位脉冲响应为  $h[n]$ ，输入序列为  $x[n] = z^n$ ，式中  $z$  为某一复数。则系统的输出为

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k} = H(z)z^n$$

其中： $H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}$  ——其值由 $z$ 决定。

假设上式右边的求和收敛，则系统输出就是同一复指数乘以一个常数。所以，

输入的复指数信号就是离散时间LTI系统的特征函数；

- 如果令  $x(t)$  是三个复指数信号的线性组合，即

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + a_3 e^{s_3 t}$$

根据特征函数的性质，系统对每一个分量的响应分别是  $a_1 e^{s_1 t} \rightarrow a_1 H(s_1) e^{s_1 t}$

$$a_2 e^{s_2 t} \rightarrow a_2 H(s_2) e^{s_2 t}$$

$$a_3 e^{s_3 t} \rightarrow a_3 H(s_3) e^{s_3 t}$$

再根据叠加性质，系统的总响应就是各分量响应的和，因而

$$y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + a_3 H(s_3) e^{s_3 t}$$

结论：1、在连续时间情况下，若系统的输入可表示为复指数的线性组合，即

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t}$$

那么输出就一定是

$$y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

2、在离散时间情况下，若系统的输入可表示为复指数的线性组合，即

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n$$

那么输出就一定是

$$y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n$$

究竟有多大范围的信号可以用复指数的线性组合来表示呢？下面先看周期<sup>172</sup>信号。

### 3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

#### 3.3.1 成谐波关系的复指数信号的线性组合

由第一章可知，周期信号有  $x(t) = x(t + T)$  对全部  $t$

其中， $T$  是一个非零的正实数，满足上式的最小非零正值  $T_0$  称为该信号的基波周期。而  $\omega_0 = 2\pi / T$  称为该信号的基波频率。

同时也介绍了两个基本周期信号

$$\begin{cases} x(t) = \cos \omega_0 t & (1) \\ x(t) = e^{j\omega_0 t} & (2) \end{cases}$$

(基波频率均为  $\omega_0$ )

与 (2) 式有关的成谐波关系的复指数信号集为

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk(2\pi/T)t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

这个信号集中的每一个信号都是周期的，它们的频率都是  $\omega_0$  的整数倍，因此称它们是成谐波关系的。

1、如果把成谐波关系的复指数信号线性组合起来，构成一个连续时间信号

$x(t)$ , 即

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t} \quad (3.25)$$

那么， $x(t)$ 也一定是以 $T$ 为周期的。这表明完全可以用成谐波关系的复指数信号的线性组合来表示连续时间周期性信号。

式中， $k=0$ 这一项是一个常数，因而称直流分量；

$k=\pm 1$  这两项都有基波频率等于 $\omega_0$ ，因此合起来称为基波分量或一次谐波分量；

$k=\pm 2$  这两项频率都是基波频率的两倍，因此合起来称为二次谐波分量。

依此类推， $k=\pm N$ 的项就称为 $N$ 次谐波分量。

将连续时间周期信号表示为成谐波关系的复指数信号的线性组合，这就是连续时间傅里叶级数。由于这种形式的傅里叶级数是以复指数函数为基底的，所以也称为指数形式的傅里叶级数。

2、如果  $x(t)$  是实信号，则  $x^*(t) = x(t)$ ，于是有  $x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^*(t) e^{-jk\omega_0 t} = x(t)$

\*表示共轭  $a-jb$  与  $a+jb$

在上式中以  $-k$  代替  $k$ , 可得

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$$

(3.25)式为

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

将此式与(3.25)式比较,可得出  $a_k = a_{-k}^*$  或  $a_k^* = a_{-k}$ 。

这表明,对实数信号来说,其傅里叶级数中  $k = +N$  和  $k = -N$  这两项的系数总是互为共轭的。

• 如果将 (3.25)式写成如下形式  $x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t}]$

再利用  $a_k^* = a_{-k}$  的关系,可得  $x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\omega_0 t}]$

注意到上式括号内的两项互为共轭,所以有

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\Re_e \{ a_k e^{jk\omega_0 t} \} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} x &= a - jb \\ x^* &= a + jb \end{aligned}$$

3、将  $a_k$  以极坐标形式给出  $a_k = A_k e^{j\theta_k}$ , 则(3.30)式可写成

$$\begin{aligned}
 x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \Re_e \left\{ A_k e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)} \right\} \\
 &= a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k) \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

(3.31)式就是连续时间傅里叶级数的三角函数形式——余弦型

4、若将  $a_k$  以直角坐标形式表示，即  $a_k = B_k + jC_k$

这里  $B_k$  和  $C_k$  都是实数。则 (3.30)式可写为

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \Re_e \left\{ a_k e^{jk\omega_0 t} \right\}$$

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [B_k \cos k\omega_0 t - C_k \sin k\omega_0 t]$$

这就是傅里叶级数的另一种三角函数形式。

即:傅里叶级数有三种表示形式

尽管三角函数形式的傅里叶级数是最早产生的,也是最普遍采用的,但由于指数形式的傅里叶级数会对问题的讨论带来极大方便,因此,在以后的章节中都采用指数形式的傅里叶级数。

### 3.3.2 连续时间周期信号傅里叶级数表示的确定(系数的确定)

为了将周期信号表示为傅里叶级数形式,必须解决系数如何确定的问题。为此,

1、将(3.25)式两边各乘以  $e^{-jn\omega_0 t}$ , 可得

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}$$

2、对上式两边从0到  $T$  对  $t$  积分,有

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt$$

3、交换上式右边积分与求和的次序可得

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \left[ \int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt \right] \quad (3.34)$$

4、求上式右边括号内的积分。当  $k \neq n$  时, 由于  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ , 有

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \frac{1}{j(k-n)\omega_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} \Big|_0^T = \frac{1}{j(k-n)\omega_0} [e^{j(k-n)2\pi} - 1] = 0$$

当 $k=n$ 时，由于被积函数变为1，显然该积分等于 $T$ 。

于是

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \quad (A)$$

因此，(3.34)式变为

$$\int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = T a_n$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \left[ \int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt \right] \quad (3.36)$$

由此可得

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

该式给出了确定系数的关系式。

若  $\int_T$  表示在任何一个 $T$ 区间上的积分，则可表示为

$$a_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3.37)$$

上述过程可归纳为：如果 $x(t)$ 有一个傅里叶级数表示式[即 $x(t)$ 能表示成一组成谐波关系的复指数信号的线性组合，]那么傅里叶级数中的系数可由(3.37)式确定。

这一对关系式定义为一个周期连续时间信号的傅里叶级数。

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t} \quad (3.38)$$

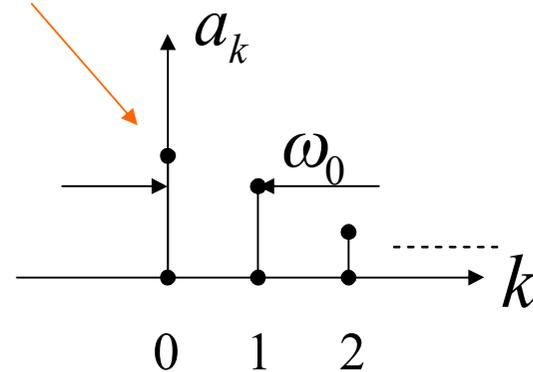
$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk(2\pi/T)t} dt \quad (3.39)$$

(3.38)式称为综合公式；(3.39)式则称为分析公式。

系数  $\{a_k\}$  称为  $x(t)$  的傅里叶级数系数或称为  $x(t)$  的频谱系数。

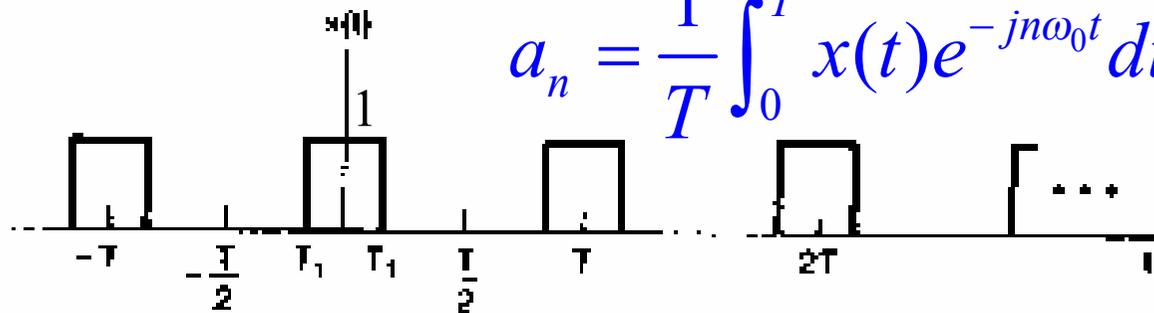
当  $k=0$  时，可得  $a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt$

这就是  $x(t)$  在一个周期内的平均值。



例3.5 图3.6示出一周期性方波,在一个周期内定义如下:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$



求: 傅里叶级数系数  $a_k$ 。

图 3.6 周期性方波

解: 由于  $x(t)$  对于  $t=0$  是对称的, 因此取积分区间为  $-T/2 \leq t < T/2$

1、对  $k=0$  有 
$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}$$

2、对  $k \neq 0$  有 
$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1}$$

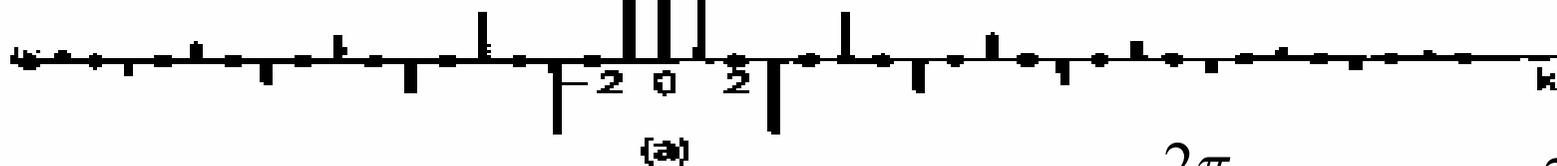
$$= \frac{2}{k\omega_0 T} \left[ \frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j} \right]$$

$$= \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} = \frac{\sin\left(k \frac{2\pi}{T} T_1\right)}{k\pi}$$

下图画出了在某一固定的  $T_1$  和几个不同的  $T$  下傅里叶级数系数的条线图

$$a_k = \frac{\sin(k \frac{2\pi}{T} T_1)}{k\pi}$$

(a)  $T = 4 T_1$



$$a_k = \frac{\sin(k \frac{2\pi}{4T_1} T_1)}{k\pi} = \frac{\sin(k \frac{2\pi}{4})}{k\pi}$$

(b)  $T = 8 T_1$



$$a_k = \frac{\sin(k \frac{2\pi}{8T_1} T_1)}{k\pi} = \frac{\sin(k \frac{2\pi}{8})}{k\pi}$$

(c)  $T = 16 T_1$



$$a_k = \frac{\sin(k \frac{2\pi}{16T_1} T_1)}{k\pi} = \frac{\sin(k \frac{2\pi}{16})}{k\pi}$$

### 3.4 傅里叶级数的收敛

这一节将讨论两个重要问题:

- 1、究竟有多大一类的周期信号可以表示为傅里叶级数形式, 即傅里叶级数的收敛问题。
- 2、如傅里叶级数收敛, 那么该傅里叶级数与原周期信号是在什么意义下的等效表示。即傅里叶级数表示的有效性问题。

先考虑第二个问题: 先研究周期信号 $x(t)$ 用有限项谐波指数信号的线性组合来近似的问题, 即用下列有限级数来近似 $x(t)$ 的问题。

令 
$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t}$$

则 
$$e_N(t) = x(t) - x_N(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^{+N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

为了确定近似程度，采用在一个周期内的误差能量  $E_N$  来度量

$$E_N = \int_T |e_N(t)|^2 dt$$

事实上，如果  $x(t)$  有一个傅里叶级数展开式的话，那么，随着  $N \rightarrow \infty$ ， $E_N$  的极限就是零。

$$\text{即 } \lim_{N \rightarrow \infty} E_N = 0$$

因此，傅里叶级数是在  $\lim_{N \rightarrow \infty} E_N = 0$  意义上，对其所对应的原周期信号的最佳表示。即并不意味着信号和它的傅里叶级数表示在每个  $t$  值上都相等，而只表示两者在能量上没有任何差别。

因为实际系统都是对信号能量作出响应，从这个观点出发， $x(t)$  和它的傅里叶级数表示就是不可区分的。

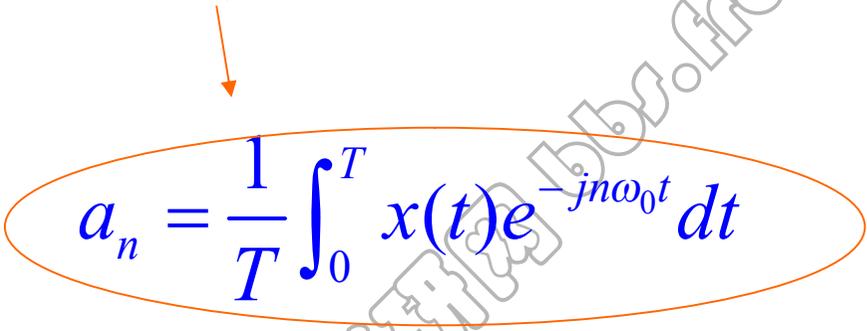
下面再看第一个问题:

关于傅里叶级数的收敛, 有两组稍有不同的条件:

1、如果周期信号  $x(t)$  在一个周期内的能量是有限的, 即

$$\int_T |x(t)|^2 dt < \infty$$

则其傅里叶级数表达式一定存在。这时就能保证由傅里叶系数公式求得的系数  $a_k$  是有限值。


$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

2、另一组条件是“狄里赫利条件”。它包含以下三点：

条件1： 在任何周期内， $x(t)$ 必须绝对可积，即

$$\int_T |x(t)| dt < \infty$$

与平方可积条件相同，这一条件保证了每一个系数  $a_k$  都是有限值。

这是因为  $|a_k| \leq \frac{1}{T} \int_T |x(t) e^{-jk\omega_0 t}| dt = \frac{1}{T} \int_T |x(t)| dt$

所以，若  $\int_T |x(t)| dt < \infty$  则，  $|a_k| < \infty$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

条件2: 在任何有限区间内,  $x(t)$ 只具有有限个起伏变化; 即在任  
何单个周期内,  $x(t)$ 的最大值和最小值的数目有限。

条件3: 在 $x(t)$ 的任何有限区间内, 只有有限个不连接点, 而且在这些不连续点上, 函数 $x(t)$ 为有限值。

说明:

一个不满足狄里赫利条件的信号, 一般来说在自然界中都是属于比较反常的信号, 结果在实际场合不会出现。因此, 傅立叶级数的收敛问题对本书要讨论的问题不具有特别重要的意义。

## 3.5 连续时间傅里叶级数性质

### 3.5.1 线性性质

令  $x(t)$  和  $y(t)$  为两个周期信号, 周期为  $T$ , 它们的傅里叶级数系数分别为  $a_k$  和  $b_k$

即:  $x(t) \xrightarrow{FS} a_k$        $y(t) \xrightarrow{FS} b_k$

则  $z(t) = Ax(t) + By(t) \xrightarrow{FS} C_k = Aa_k + Bb_k$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

证明::  $Ax(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Aa_k e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{FS} Aa_k$

$$By(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Bb_k e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{FS} Bb_k$$

$$Ax(t) + By(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Aa_k e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Bb_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (Aa_k + Bb_k) e^{jk\omega_0 t}$$

$$\therefore z(t) = Ax(t) + By(t) \xrightarrow{FS} C_k = Aa_k + Bb_k$$

### 3.5.2 时移性质

若  $x(t) \xrightarrow{FS} a_k$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

则  $x(t-t_0) \xrightarrow{FS} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k = e^{-jk(2\pi/T)t_0} a_k$

证明:

若  $x(t)$  为周期信号, 其周期为  $T$ 。时移  $t_0$  后, 所得信号  $y(t) = x(t-t_0)$  的

傅里叶级数系数为  $b_k = \frac{1}{T} \int_T x(t-t_0) e^{jk\omega_0 t} dt$

令  $\tau = t-t_0$ , 则可得

$$\frac{1}{T} \int_T x(\tau) e^{-jk\omega_0(\tau+t_0)} d\tau = e^{-jk\omega_0 t_0} \frac{1}{T} \int_T x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau = e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$$

式中  $a_k$  是  $x(t)$  的第  $k$  个傅里叶级数系数。

结论: 当一个周期信号在时间上移位时, 它的傅里叶级数系数的模保持不变, 即

$$|b_k| = |a_k|$$

### 3.5.3 时间反转

一个周期信号  $x(t)$  经过时间反转后,其周期  $T$  仍然保持不变。为了确定它的傅里叶级数系数,先看时间反转在综合公式所带来的影响:

$$y(t) = x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk2\pi t/T}$$
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

令  $k = -m$  得

$$y(t) = x(-t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{-m} e^{jm2\pi t/T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k} e^{jk2\pi t/T}$$

由上式可见,  $x(-t)$  的傅里叶级数系数为  $b_k = a_{-k}$

也就是说,若  $x(t) \xrightarrow{FS} a_k$  则  $x(-t) \xrightarrow{FS} a_{-k}$

**结论:** 若  $x(t)$  为偶函数, 即  $x(-t) = x(t)$ , 则其傅里叶级数系数也为偶, 即

$$a_{-k} = a_k$$

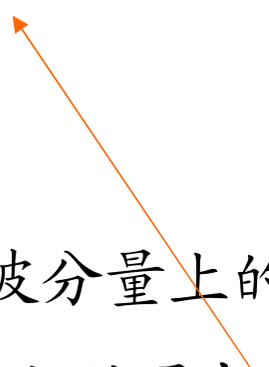
若  $x(t)$  为奇函数, 即  $x(-t) = -x(t)$ , 则其傅里叶级数系数也为奇, 即

$$a_{-k} = -a_k$$

### 3.5.4 时域尺度变换

时域尺度变换是一种运算，这种运算会改变信号的周期。

如果 $x(t)$ 是周期的（周期为 $T$ ），则 $x(at)$ 就是一个周期为 $T/a$ 或基波频率为 $a\omega_0$ 的周期信号。即

$$x(at) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(\omega_0 a)t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{T/a}\right)t}$$


因为时间尺度运算是直接加在 $x(t)$ 的每一次谐波分量上的，所以，对于这些谐波分量中每一个的傅里叶系数仍然是相同的。

要强调的是：虽然傅里叶系数仍然相同，但由于基波频率变化了，傅里叶级数表示也改变了。

### 3.5.5 相乘性质

假设  $x(t)$  和  $y(t)$  是两个周期为  $T$  的周期信号, 且有

$$x(t) \stackrel{FS}{\longleftrightarrow} a_k, \quad y(t) \stackrel{FS}{\longleftrightarrow} b_k$$

则

$$x(t)y(t) \stackrel{FS}{\longleftrightarrow} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

证明:  $x(t)y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l e^{jl\omega_0 t} b_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_l b_k e^{j\omega_0(k+l)t}$

令  $n=k+l$  得:  $= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_l b_{n-l} e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{n-l} \right] e^{jn\omega_0 t}$

令  $n=k$  得  $= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l} \right] e^{jk\omega_0 t}$

即：其傅里叶系数可用  $x(t)$  和  $y(t)$  的系数表示为

$$x(t)y(t) \xrightarrow{FS} h_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$$

上式右边的和式可看作是  $x(t)$  傅里叶系数序列与  $y(t)$  的傅里叶系数序列的离散时间卷积。

**结论：两个周期为  $T$  的连续时间信号的乘积，仍是一个周期为  $T$  的周期信号，它的傅里叶系数就是被乘的这两个信号的傅里叶系数序列的卷积。**

### 3.5.6 共轭及共轭对称性

将一个周期信号  $x(t)$  取它的复数共轭，在它的傅里叶级数系数上就会有复数共轭并作时间倒置的结果，

即若  $x(t) \xrightarrow{FS} a_k$  则有  $x^*(t) \xrightarrow{FS} a_{-k}^*$

证明:

$$\because x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

将上式两边各取复数共轭,得

$$x(t)^* = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{-m}^* e^{jm\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$$

即得

$$x^*(t) \xrightarrow{FS} a_{-k}^*$$

$$a - jb$$

$$a + jb$$

• 若  $x(t)$  为 **实函数**, 这时由于  $x(t) = x^*(t)$ , 傅里叶级数系数就一定是共轭对称的,

即

$$a_k = a_{-k}^* \quad \text{或} \quad a_{-k} = a_k^* \quad (3.66)$$

且有

$$|a_k| = |a_{-k}|$$

• 若  $x(t)$  为 **实** 且为 **偶函数**, 据 3.5.3 节  $a_k = a_{-k}$ 。然而, 根据 (3.66) 式又有

$$a_k^* = a_{-k} \quad \text{, 所以得} \quad a_k = a_k^*$$

这就是说, 若  $x(t)$  为实且为偶函数, 则它的傅里叶级数系数也为实且为偶函数。

类似地，若  $x(t)$  为实且为奇函数，则它的傅里叶级数系数为纯虚数且为奇函数。

### 3.5.7 连续时间周期信号的帕斯瓦尔定理

连续时间周期信号的帕斯瓦尔定理是

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

式中  $a_k$  ——是  $x(t)$  的傅里叶级数系数；

$T$  ——是信号的周期。

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$|e^{jk\omega_0 t}|^2 = \cos^2(k\omega_0 t) + \sin^2(k\omega_0 t) = 1$$

上式**左边**是信号  $x(t)$  在一个周期内的**平均功率**（也就是单位时间内的能量）。

而第  $k$  次谐波的平均功率为：

$$\frac{1}{T} \int_T |a_k e^{jk\omega_0 t}|^2 dt = \frac{1}{T} \int_T |a_k|^2 dt = |a_k|^2$$

所以  $|a_k|^2$  就是  $x(t)$  中第  $k$  次谐波的平均功率。

因此，帕斯瓦尔定理所说的就是：一个周期信号的总平均功率等于它的全部谐波分量的平均功率之和。

### 3.5.8 连续时间傅里叶级数性质列表——见P146页

性 质	节次	周期信号	傅里叶级数系数
		$x(t)$   周期为 $T$ ,	$a_k$
		$y(t)$   基本频率 $\omega_0 = 2\pi/T$	$b_k$
线性	3.5.1	$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
时移	3.5.2	$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk(2\pi/T)t_0}$
频移		$e^{jM\omega_0 t} x(t) = e^{jM(2\pi/T)t} x(t)$	$a_{k-M}$
共轭	3.5.6	$x^*(t)$	$a_{-k}^*$
时间反转	3.5.3	$x(-t)$	$a_{-k}$
时域尺度变换	3.5.4	$x(\alpha t), \alpha > 0$ (周期为 $T/\alpha$ )	$a_k$
周期卷积		$\int_T x(\tau)y(t - \tau)d\tau$	$Ta_k b_k$
相乘	3.5.5	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$
微分		$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k = jk \frac{2\pi}{T} a_k$
积分		$\int_{-\infty}^t x(t)dt$ (仅当 $a_0 = 0$ 才为有限值且为周期的)	$\left(\frac{1}{jk\omega_0}\right) a_k = \left(\frac{1}{jk(2\pi/T)}\right) a_k$
实信号的共轭对称性	3.5.6	$x(t)$ 为实信号	$\begin{cases} a_k = a_{-k}^* \\ \text{Re}\{a_k\} = \text{Re}\{a_{-k}\} \\ \text{Im}\{a_k\} = -\text{Im}\{a_{-k}\} \\  a_k  =  a_{-k}  \\ \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{cases}$
实、偶信号	3.5.6	$x(t)$ 为实、偶信号	$a_k$ 为实且偶
实、奇信号	3.5.6	$x(t)$ 为实、奇信号	$a_k$ 纯虚且为奇
实信号的奇偶分解		$\begin{cases} x_e(t) = \mathcal{E}_v\{x(t)\} [x(t) \text{ 为实}] \\ x_o(t) = \mathcal{O}_d\{x(t)\} [x(t) \text{ 为实}] \end{cases}$	$\begin{cases} \text{Re}\{a_k\} \\ j\text{Im}\{a_k\} \end{cases}$
		周期信号的帕斯瓦尔定理	
		$\frac{1}{T} \int_T  x(t) ^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}  a_k ^2$	

### 3.5.9 举例

**例 3.6 :** 有一信号  $g(t)$ , 基波周期是 4, 如图 3.10 所示。利用  $g(t)$  与例 3.5 中对称周期方波  $x(t)$  的关系来求  $g(t)$  的傅里叶系数。

解:

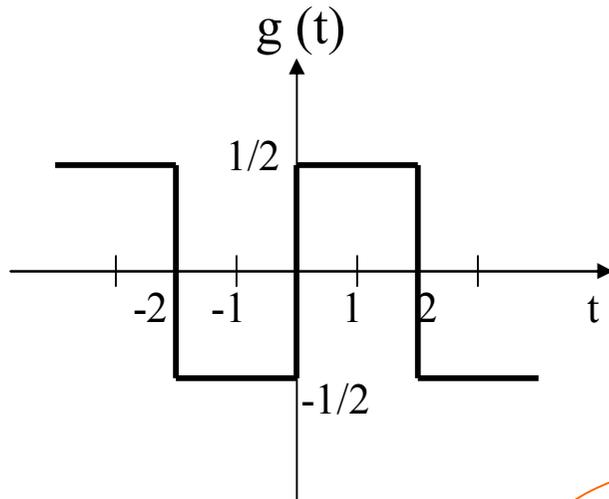
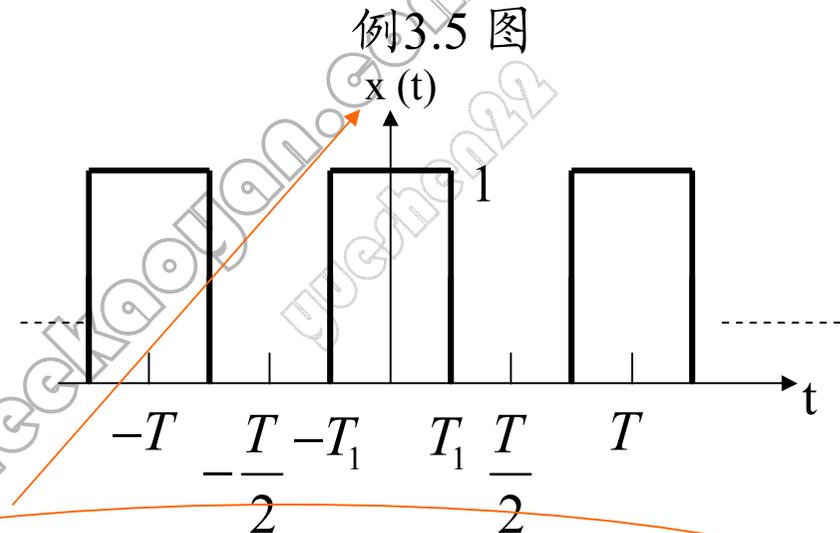


图 3.10



例 3.5 图

$$a_k = \frac{\sin(\pi k / 2)}{k\pi}, \quad a_0 = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 dt = 1/2$$

由例 3.5 图可见,  $T_1 = 1$ ,  $T = 4$ ; 而  $g(t) = x(t-1) - \frac{1}{2}$

由时移性质, 若  $x(t)$  的傅里叶级数系数记作  $a_k$ , 则  $x(t-1)$  的傅里叶系数  $b_k$  为

$$b_k = a_k e^{-jk(2\pi/T)t_0} = a_k e^{-jk\pi/2}$$

而  $g(t)$  的直流偏移 (即  $-1/2$  项) 的傅里叶系数为

$$\because C_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T -\frac{1}{2} e^{-jk\omega_0 t} dt$$

当  $k=0$  时

$$C_k = -\frac{1}{2}$$

当  $k \neq 0$  时

$$\begin{aligned} C_k &= -\frac{1}{2T} \frac{1}{(-jk\omega_0)} [e^{-jk\omega_0 T} - e^0] \\ &= -\frac{1}{2T} \frac{1}{(-jk\omega_0)} [1 - 1] = 0 \end{aligned}$$

即

$$C_k = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & k = 0 \end{cases}$$

利用线性性质可得 $g(t)$ 的傅里叶系数为

$$d_k = b_k + C_k = \begin{cases} a_k e^{-jk\pi/2} & , k \neq 0 \\ a_0 - \frac{1}{2} & , k = 0 \end{cases}$$

再将  $a_k$  和  $a_0$  代入,

可得

$$d_k = \begin{cases} \frac{\sin(\pi k / 2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2} & , k \neq 0 \\ 0 & , k = 0 \end{cases}$$

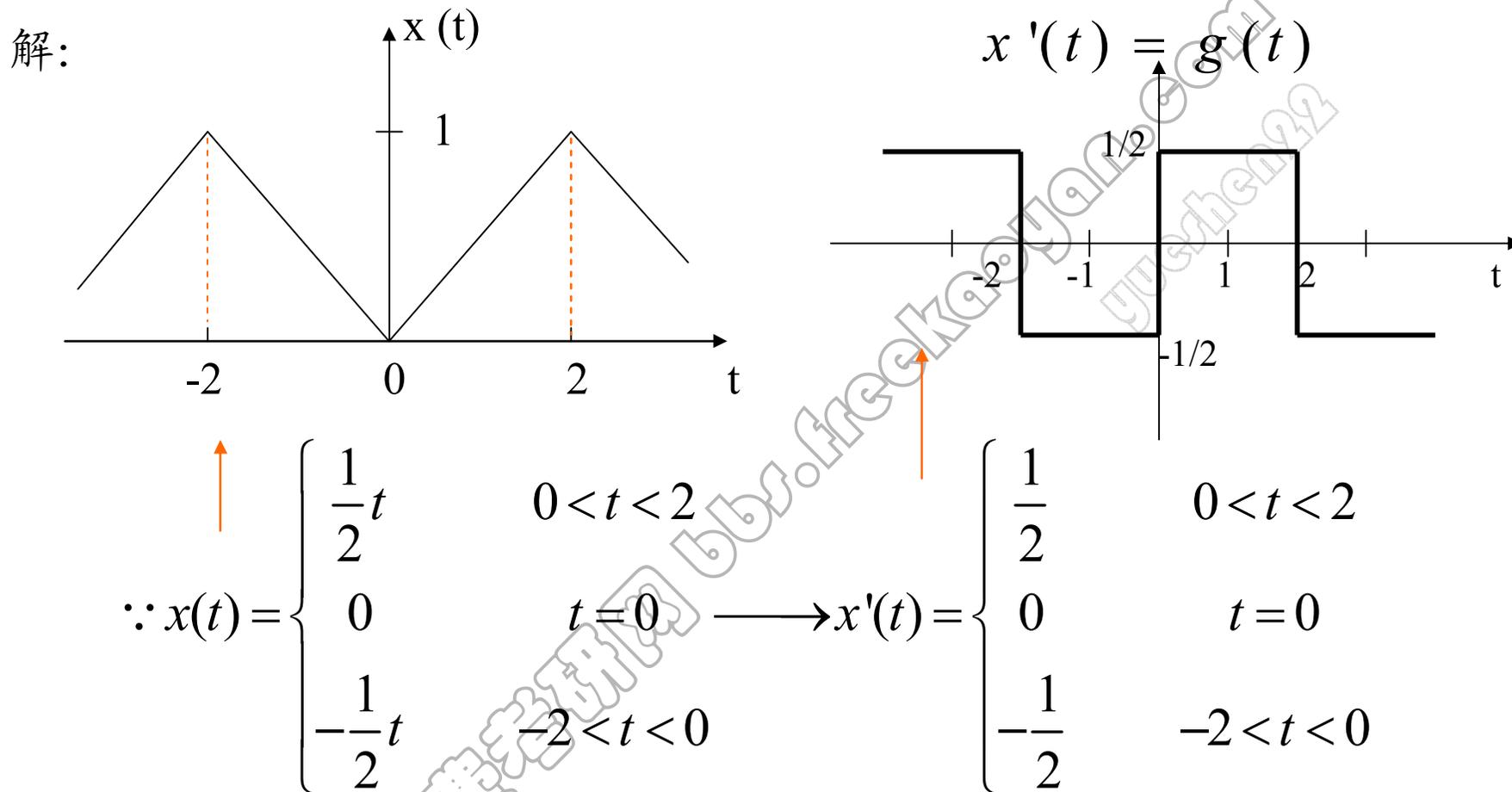
---

说明:  $a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} x(t) dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 dt = 1/2$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-1}^1 e^{-jk\omega_0 t} dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-1}^1$$

$$= \frac{2}{k\omega_0 T} \left[ \frac{e^{jk\omega_0} - e^{-jk\omega_0}}{2j} \right] = \frac{\sin k\omega_0}{2k\omega_0} = \frac{\sin k\pi / 2}{k\pi}$$

例3.7 考虑一周期为 $T=4$ 的三角波信号 $x(t)$ ,其基波频率  $\omega_0 = \pi/2$ ,波形如图3.11所示。求傅里叶系数



可见, 这个信号的导数就是例3.6中的 $g(t)$ 。设 $g(t)$ 的傅里叶系数为 $d_k$ ,  $x(t)$ 的傅里叶系数为 $e_k$ 。根据微分性质有

$$d_k = jk(2\pi/T)e_k = jk(\pi/2)e_k$$

$$\therefore d_k = \begin{cases} \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2}, & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

据微分性质  
若  $x(t) \xrightarrow{FS} a_k$   
则  $x'(t) \xrightarrow{FS} jk\omega_0 a_k$   
因为  $T=4$

1、当  $\therefore k \neq 0$  时

可得 
$$e_k = \frac{2}{jk\pi} d_k = \frac{2}{jk\pi} \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2} = \frac{2\sin(k\pi/2)}{j(k\pi)^2} e^{-jk\pi/2}$$

2、当  $k=0$  时，可利用公式求得

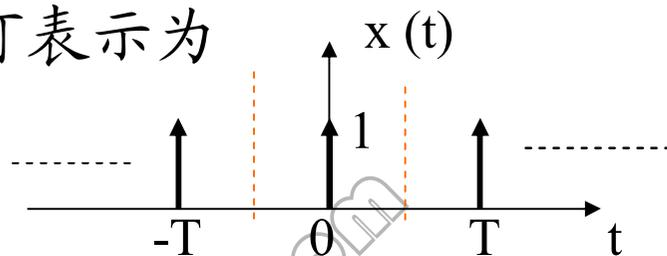
$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$e_0 = \frac{1}{T} \left[ \int_{-2}^0 -\frac{t}{2} dt + \int_0^2 \frac{t}{2} dt \right] = \frac{1}{4 \times 2} \left[ -\frac{t^2}{2} \Big|_{-2}^0 + \frac{t^2}{2} \Big|_0^2 \right]$$

$$= \frac{1}{16} [-(0-4) + (4-0)] = \frac{1}{2}$$

**例3.8:** 已知 $x(t)$ 是周期为 $T$ 的冲激串,可表示为

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$



求: 傅里叶系数  $a_k$ 。

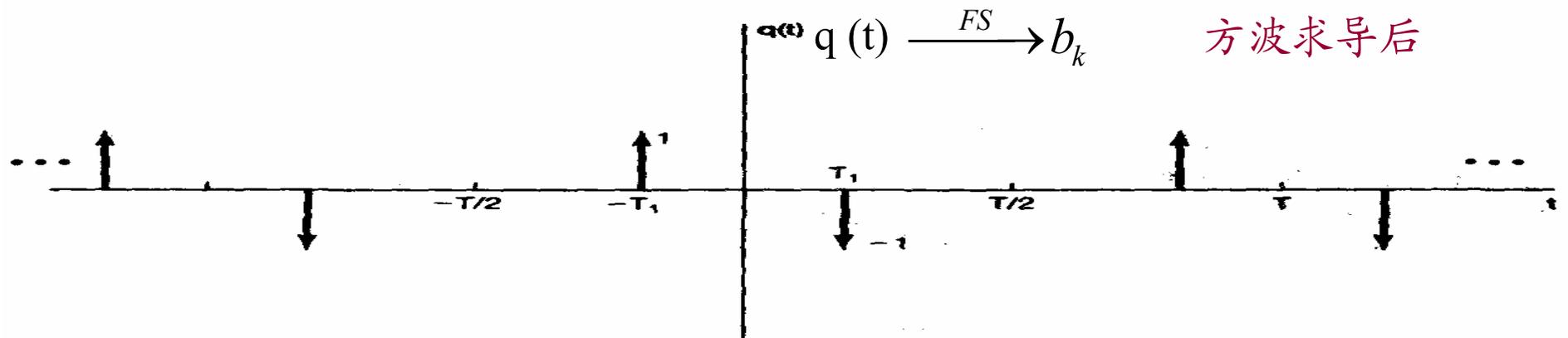
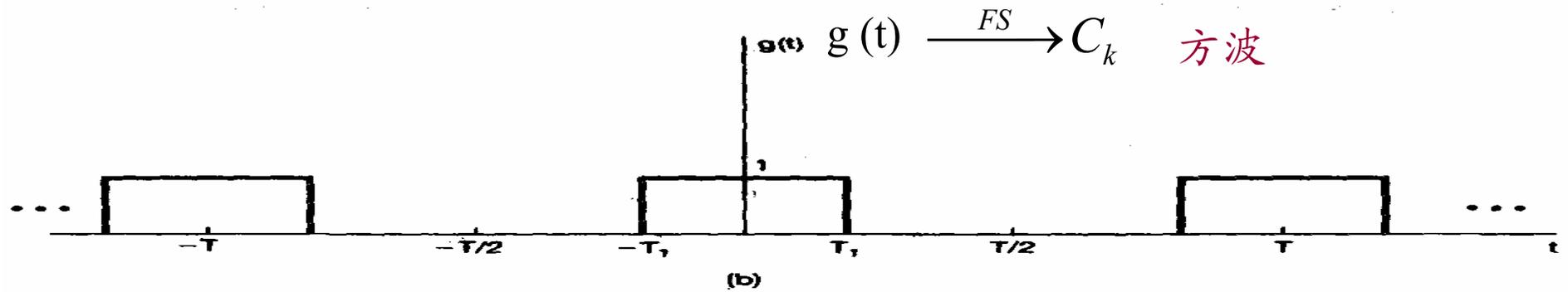
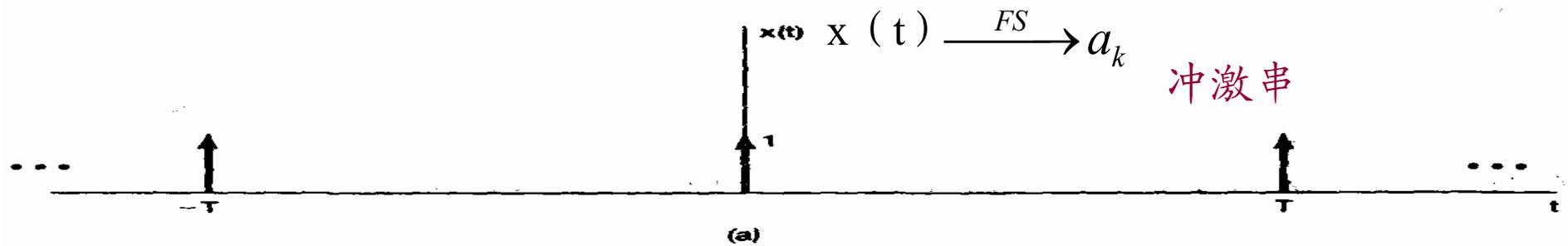
$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

解: 据 (3.39) 式, 并选积分区间为  $-T/2 \leq t \leq T/2$ , 以避免在积分上下限处发生冲激。可得

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk(2\pi/T)t} dt = \frac{1}{T} \quad (3.76)$$

上式表明: 该冲激串的傅里叶系数都是一样的, 并且都是实数。对于 $k$ 来说, 还是偶函数 (因为实偶信号的 $a_k$ 是实偶的)。

注意: 冲激串与方波信号还有一种直接的关系。这是因为方波信号的导数为冲激串, 具体说明如下:



$q(t)$ 可表示为两个经移位了的冲激串之差，即  $q(t) = x(t+T_1) - x(t-T_1)$  (3.77)

利用傅里叶级数时移、线性性质，就可求得 $q(t)$ 的傅里叶系数；再利用微分性质求得 $g(t)$ 的傅里叶系数。

1、根据时移性质和线性性质， $q(t)$ 的傅里叶系数  $b_k$  可以用  $x(t)$ 的傅里叶系数

$a_k$  表示为：

$$b_k = e^{jk\omega_0 T_1} a_k - e^{-jk\omega_0 T_1} a_k$$

因为

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\pi t/T} dt = \frac{1}{T} q(t) = x(t+T_1) - x(t-T_1)$$

所以有

$$b_k = \frac{1}{T} [e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}] = \frac{2j \sin(k\omega_0 T_1)}{T}$$

2、因为  $q(t)$  是  $g(t)$  的导数，所以由微分性质，可直接写出

$$b_k = jk\omega_0 c_k \quad (3.78)$$

式中， $c_k$  ——是  $g(t)$  的傅里叶系数。

则当  $k \neq 0$  有

$$c_k = \frac{b_k}{jk\omega_0} = \frac{2j \sin(k\omega_0 T_1)}{jk\omega_0 T} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

当  $k=0$  时，

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} g(t) dt = \frac{2T_1}{T}$$

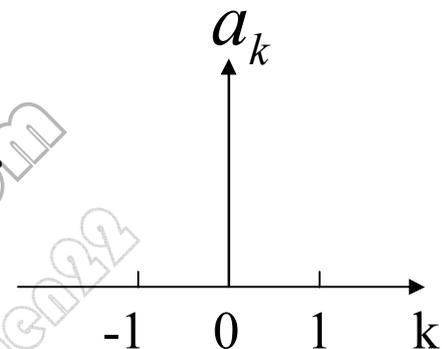
例3.9 假设关于某一信号 $x(t)$ 给出下列条件:

1、 $x(t)$ 是一个实信号。

2、 $x(t)$ 是周期的，周期为 $T=4$ ，它的傅里叶系数是 $a_k$ 。

3、 $a_k = 0$ ， $|k| > 1$ ，(即 $k > 1$ ，或 $k < -1$ 时)

4、傅里叶系数为 $b_k = e^{-jk\pi/2} a_{-k}$ 的信号是奇信号。



5、 $\frac{1}{4} \int_4 |x(t)|^2 dt = 1/2$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

证明：以上所给条件，除了一个正负号可供选择外，足以将信号确定。

解：根据条件3可知， $x(t)$ 最多只有三个非零的傅里叶系数即： $a_0, a_1, a_{-1}$

又由条件2可知， $x(t)$ 的基波频率为  $\omega_0 = 2\pi/4 = \pi/2$ ，于是有

$$x(t) = a_0 + a_1 e^{j\pi t/2} + a_{-1} e^{-j\pi t/2}$$

又由条件1可知， $x(t)$ 为实数，所以据对称性质可知  $a_0$ 为实数且  $a_1 = a_{-1}^*$ ，于是就有， $x(t) = a_0 + a_1 e^{j\pi t/2} + (a_1 e^{j\pi t/2})^* = a_0 + 2\Re_e \{a_1 e^{j\pi t/2}\}$

$$= a_0 + 2a_1 \cos \pi t / 2 \quad 205 (3.81)$$

现在来确定由条件4给出的具有傅里叶系数为  $b_k$  的信号:  $b_k = e^{-jk\pi/2} a_{-k}$

- 1、根据时间反转性质可知,  $a_{-k}$  对应于信号  $x(-t)$ 。
- 2、时移性质又指出: 第  $k$  次傅里叶系数乘以  $e^{-jk\pi/2}$  就响应于信号向右移1 (即, 以  $t-1$  代替  $t$ )。所以,  $b_k$  对应于信号  $x(-(t-1)) = x(-t+1)$  ;
- 3、又根据条件4, 它必须为奇信号。
- 4、因为  $x(t)$  为实,  $x(-t+1)$  也必须为实信号。因为实、奇信号所对应的傅里叶系数为纯虚数, 且为奇函数。于是  $b_0 = 0$  和  $b_{-1} = -b_1$  。
- 5、由于时间反转和时移都不会改变每个周期内的平均功率, 所以条件5即使在

$x(t)$  被  $x(-t+1)$  替代后仍然成立, 即 
$$\frac{1}{4} \int_4 |x(-t+1)|^2 dt = \frac{1}{2}$$

由帕斯瓦尔定理可知

$$\frac{1}{4} \int_4 |x(-t+1)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |b_k|^2 = |b_1|^2 + |b_{-1}|^2 = \frac{1}{2} \quad (3.83)$$

将  $b_1 = -b_{-1}$  代入上式, 得

$$|b_1|^2 + |-b_1|^2 = 2|b_1|^2 = \frac{1}{2} \quad 206$$

即  $|b_1|^2 = \frac{1}{4}$  ,  $|b_1| = 1/2$

6、因为  $b_1$  为纯虚数,所以  $b_1$  一定为  $j/2$  或者  $-j/2$ .

7、利用条件4 (即  $b_k = e^{jk\pi/2} a_{-k}$  且为奇信号) 和  $b_0, b_1$  求出  $a_0, a_1$

• 当  $k=0$  时: 因为  $b_0 = 0$ , 由条件4可知  $a_0 = 0$

•

• 当  $k=1$  时:  $a_1 = e^{-j\pi/2} b_{-1} = (\cos \pi / 2 - j \sin \pi / 2) b_{-1}$   
 $= -j b_{-1} = j b_1$

若取  $b_1 = j/2$ , 那么  $a_1 = -1/2$

(3.81) 式为  
 $x(t) = a_0 + 2a_1 \cos \pi t / 2$

由 (3.81) 式得,  $x(t) = -\cos(\pi t / 2)$

若取  $b_1 = -j/2$ , 那么  $a_1 = 1/2$  , 得  $x(t) = \cos(\pi t / 2)$

P98页 题2.3:

$$\text{已知: } x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2], \quad h[n] = u[n+2]$$

求出并画出输出  $y[n] = x[n] * h[n]$

解:

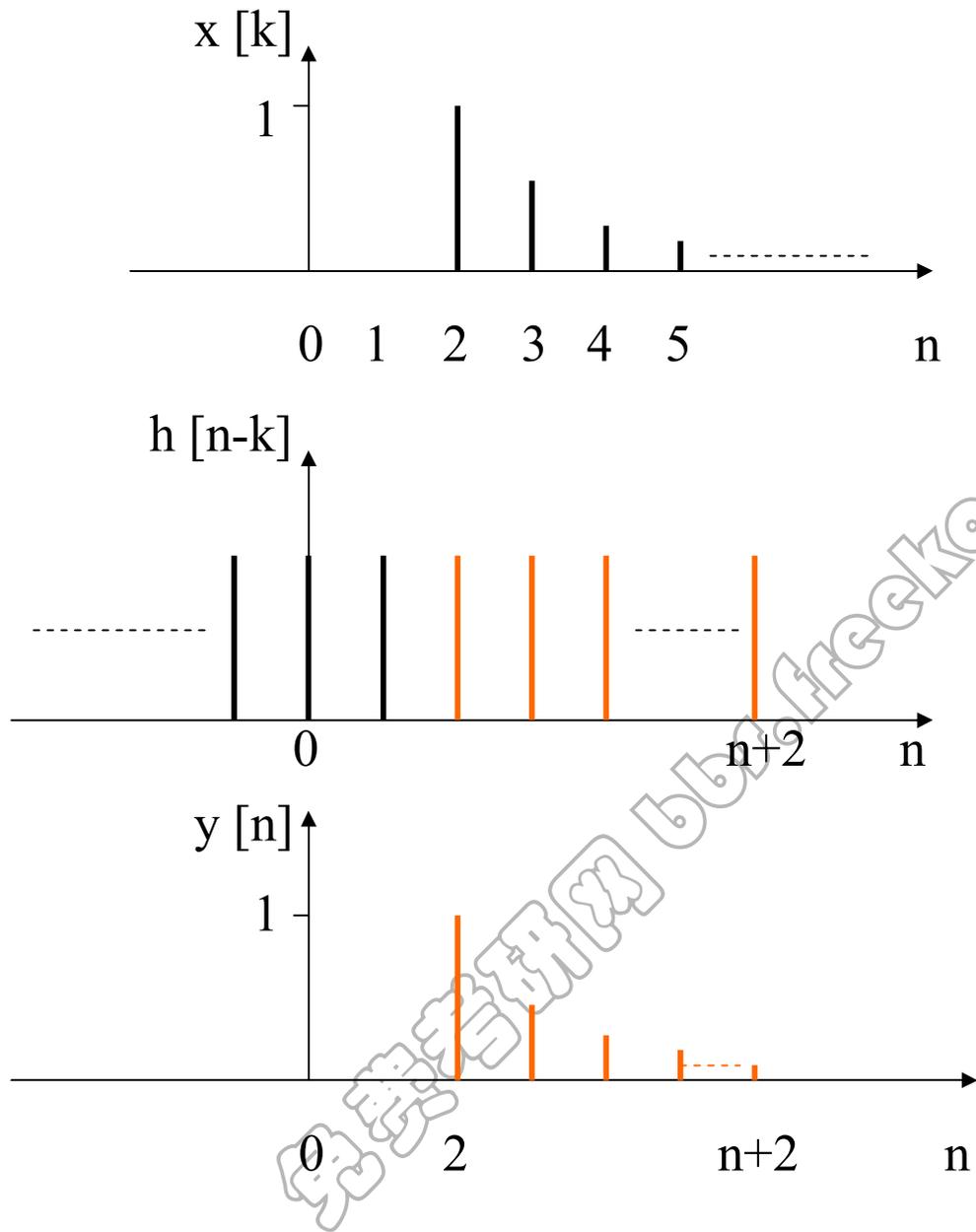
$$\therefore y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$$x[k] = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} u[k-2] = \begin{cases} 0 & k < 2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} & k \geq 2 \end{cases}$$

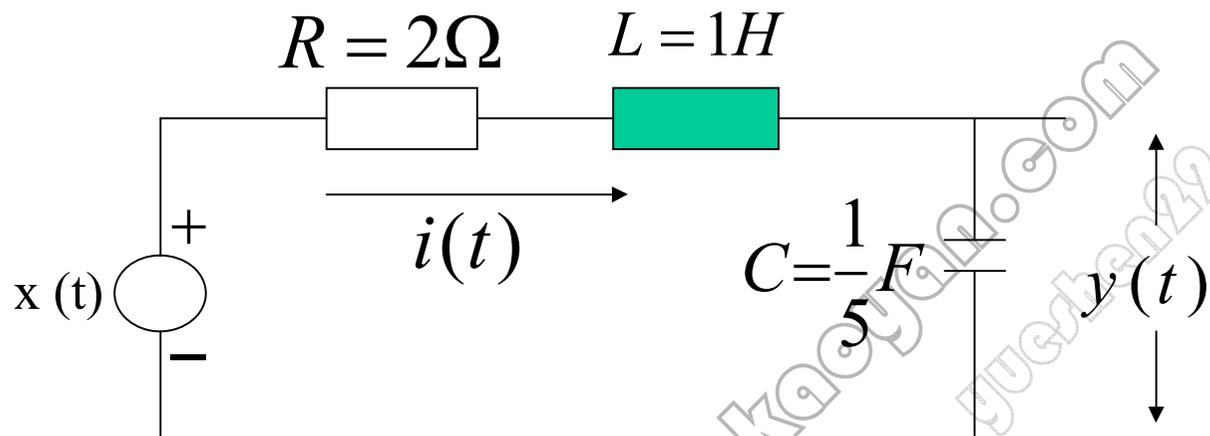
$$h[n-k] = u[n+2-k] = \begin{cases} 1 & k \leq n+2 \\ 0 & k > n+2 \end{cases}$$

当  $n+2 \geq 2$  时,  $n \geq 0$ ,  $y[n]$  有值

$$\therefore y[n] = \sum_{k=2}^{n+2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = \sum_{m=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^m = \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - (1/2)} u[n] = \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] \times 2 u[n]$$



题 2.61 (C) 已知电路如图所示, 1) 求  $y(t)$  的微分方程



解:

$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} = \frac{1}{5} \frac{dy(t)}{dt}$$

$$i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$2 \times \frac{1}{5} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{5} \times 1 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = x(t)$$

$$\frac{1}{5} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2}{5} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

2) 证明齐次解的形式为

$$e^{-at} \left\{ k_1 e^{j2t} + k_2 e^{-j2t} \right\}$$

给出a的值。

解：齐次方程为  $\frac{1}{5}y''(t) + \frac{2}{5}y'(t) + y(t) = 0$        $\frac{1}{5}\lambda^2 + \frac{2}{5}\lambda + 1 = 0$

$$\lambda_1 = -1 + 2j \quad , \quad \lambda_2 = -1 - 2j$$

$$\begin{aligned} \therefore y_h(t) &= k_1 e^{(-1+2j)t} + k_2 e^{(-1-2j)t} \\ &= e^{-t} [k_1 e^{2jt} + k_2 e^{-2jt}] \end{aligned}$$

$$\therefore a = 1$$

3) 因为电压和电流都是实数，证明：该系统的自然响应为一衰减正弦振荡。

解：自然响应——即齐次解

电压和电流都是实数

$$\begin{aligned}
y_h(t) &= e^{-t} [k_1 e^{j2t} + k_2 e^{-j2t}] \\
&= e^{-t} [k_1 (\cos 2t + j \sin 2t) + k_2 (\cos 2t - j \sin 2t)] \\
&= e^{-t} [\cos 2t (k_1 + k_2) + j \sin 2t (k_1 - k_2)] \\
&= e^{-t} [\cos 2t (a + jb + c + jd) + \sin 2t (ja - b - jc + d)] \\
jb + jd &= 0 \quad , \quad b = -d \\
ja - jc &= 0 \quad , \quad a = c
\end{aligned}$$

设:  $k_1 = a + jb$   
 $k_2 = c + jd$

$$y_h(t) = e^{-t} [2a \cos 2t + 2d \sin 2t]$$

即为一衰减正弦振荡

作业:

题3.5、题3.11、题3.42 (c)

## 3.6 离散时间周期信号的傅里叶级数表示

### 3.6.1 成谐波关系的复指数信号的线性组合

离散时间周期信号  $x[n]$  为  $x[n] = x[n + N]$

基波周期为  $N$ ; 基波频率为  $\omega_0 = 2\pi / N$

例如: 复指数信号  $e^{jk(2\pi/N)n}$  就是一个以  $N$  为周期的信号;

如果把以  $N$  为周期的所有的离散时间周期性复指数信号组合起来, 可构成一个信号集

$$\phi_k[n] = \{e^{jk\omega_0 n}\} = \{e^{jk(2\pi/N)n}\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$N$  是这个信号集的基波周期, 其谐波频率都是  $2\pi / N$  的倍数。由于离散时间复指数信号在频率上相差  $2\pi$  的整数倍 (即只有  $N$  个信号是不同的), 所

以有  $\phi_0[n] = \phi_N[n], \quad \phi_1[n] = \phi_{N+1}[n], \quad \phi_k[n] = \phi_{k+rN}[n]$

其中  $r$  —— 是一个整数。

上式表明: 当  $k$  改变  $N$  的整数倍时, 所得到的信号与原来的信号完全相同。

显然, 如果将信号集中所有独立的  $N$  个信号线性组合起来, 它们的组合一定也是以  $N$  为周期的离散时间信号。这就告诉我们, 有可能用成谐波关系的复指数

信号的线性组合来表示离散时间周期信号，即

$$x[n] = \sum_k a_k \phi_k[n] = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_k a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

因为序列  $\phi_k[n]$  只在  $k$  的  $N$  个相继值的区间上是不同的。因此，上式的求和仅仅需要包括  $N$  项。于是，上式的求和是当  $k$  在  $N$  个相继的区间上变化时，从任意  $k$  值开始对  $k$  进行的。为了指出这一点，特将求和限表示成  $k = \langle N \rangle$ ，即

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \phi_k[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (3.88)$$

譬如说， $k$  既可以取  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$ ；也可以取  $k = 3, 4, 5, \dots, N+2$  等等。上式称为离散时间傅里叶级数，而系数  $a_k$  则称为傅里叶级数系数。

### 3.6.2 离散时间周期信号傅里叶级数表示的确定

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

确定离散时间傅里叶级数的系数  $a_k$ ，有二种方法：

1、在  $x[n]$  的一个周期内对  $n$  的  $N$  个连续的值进行求值，即

$$x[0] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k$$

$$x[1] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j2\pi k/N}$$

⋮

$$x[N-1] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j2\pi k(N-1)/N}$$

可以证明，这  $N$  个方程是线性独立的，因此可以利用已知的  $x[n]$  值求得  $a_k$ 。

2、给 (3.88)式两边同乘以  $e^{-jr(2\pi/N)n}$  ,并将相继的N项对n求和

$$\text{得: } \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{n=\langle N \rangle} \sum_{K=\langle n \rangle} a_k e^{j(k-r)(2\pi/N)n}$$

交换上式右边的求和次序得

$$\sum_{n=\langle N \rangle} x[n]e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(k-r)(2\pi/N)n} \quad (3.92)$$

$$\text{由于 } \sum_{n=0}^{N-1} e^{jk(2\pi/N)n} = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{其余 } k \end{cases}$$

因此(3.92)式右边只有当(k-r)等于零或是N的整数倍时,才不为零。如果取k=r, 则 (3.92)式的右边内层和式等于N;当k≠r时,该和式等于零。于是 (3.92)式

$$\text{可改写为 } a_r = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]e^{-jr(2\pi/N)n} \quad (3.93)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$$

其中:  $a = e^{jk(2\pi/N)}$

根据(3.93)式就可确定离散时间傅里叶级数的系数。至此，我们得到了定义离散时间傅里叶级数的两个关系式，即离散时间傅里叶级数对

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \phi_k[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (3.94)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \quad (3.95)$$

$a_k$  也称频谱系数。

看(3.94)式,若从 0 到 N-1 范围内取 k,则有

$$x[n] = a_0 \phi_0[n] + a_1 \phi_1[n] + a_2 \phi_2[n] + \cdots + a_{N-1} \phi_{N-1}[N] \quad (3.96)$$

类似地,若从 1 到 N 范围内取 k,则有

$$x[n] = a_1 \phi_1[n] + a_2 \phi_2[n] + a_3 \phi_3[n] + \cdots + a_N \phi_N[N] \quad (3.97)$$

因为  $\phi_0[n] = \phi_N[n]$  ,所以只要把(3.96)和(3.97)式作一比较,就可得出

$$a_0 = a_N$$

类似地,若  $k$  取任何一组  $N$  个相连的整数,就一定有

$$a_k = a_{k+N}$$

这意味着,离散时间傅里叶级数的系数是以  $N$  为周期的。

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{N}{m}$$

例3.10 已知信号为  $x[n] = \sin \omega_0 n$

该信号仅当  $2\pi/\omega_0$  是一个整数,或整数的比时,  $x[n]$  才是周期的。求  $a_k$

1、当  $2\pi/\omega_0$  是一个整数  $N$  的情况下 (即  $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ ) ,  $x[n]$  是周期的,其基波周期为  $N$ 。

把信号展开为两个复指数信号之和,即

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{j(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j} e^{-j(2\pi/N)n}$$

$$\therefore x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

可知  $a_1 = \frac{1}{2j}$  ,  $a_{-1} = -\frac{1}{2j}$  , 其余系数均为零。

因为这些系数以  $N$  为周期重复,所以  $a_{N+1} = \frac{1}{2j}$  ,  $a_{N-1} = -\frac{1}{2j}$  。

当上例的 $N=5$ 时，其傅里叶系数如图 3.13所示。

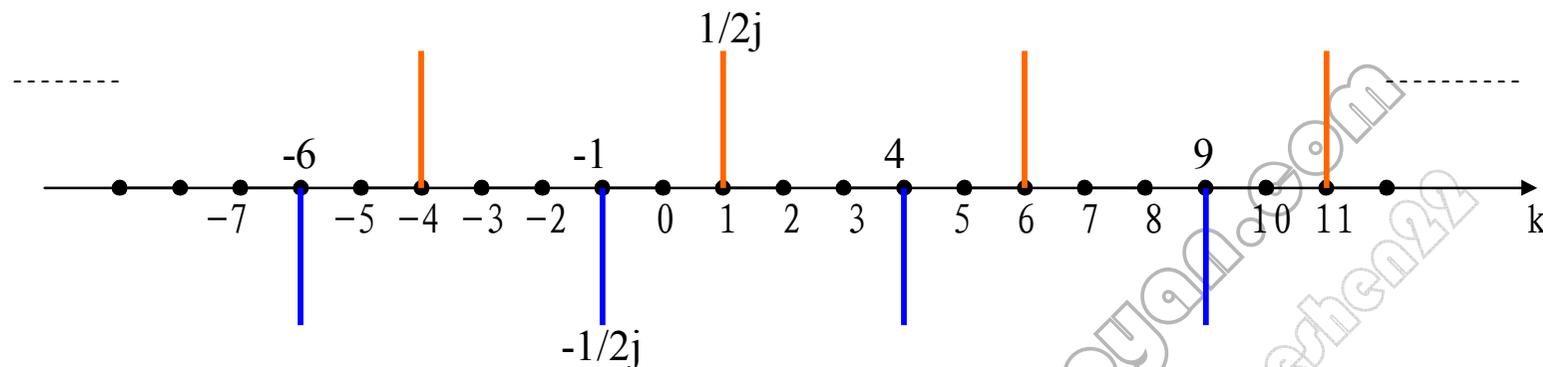


图3.13  $x[n] = \sin(2\pi / 5)n$  的傅里叶系数

2、当  $\frac{2\pi}{\omega_0}$  为两个整数之比的情况，即当  $\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{N}{M}$  ，  $(\omega_0 = \frac{2\pi M}{N})$  时。

假设M和N没有公共因子， $x[n]$ 就有一个基波周期为N。将 $x[n]$ 展开为两个复指数之和

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{jM(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j} e^{-jM(2\pi/N)n}$$

由上式可以直接确定  $a_M = (1/2j)$  ，  $a_{-M} = (-1/2j)$  ， 而在一个长度为N的周期内，其余系数均为0。

若取  $M = 3$  和  $N = 5$  为例，其傅里叶系数如图3.14 所示

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{jM(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j} e^{-jM(2\pi/N)n}$$

$$a_{N+M} = (1/2j), a_{N-M} = (-1/2j)$$

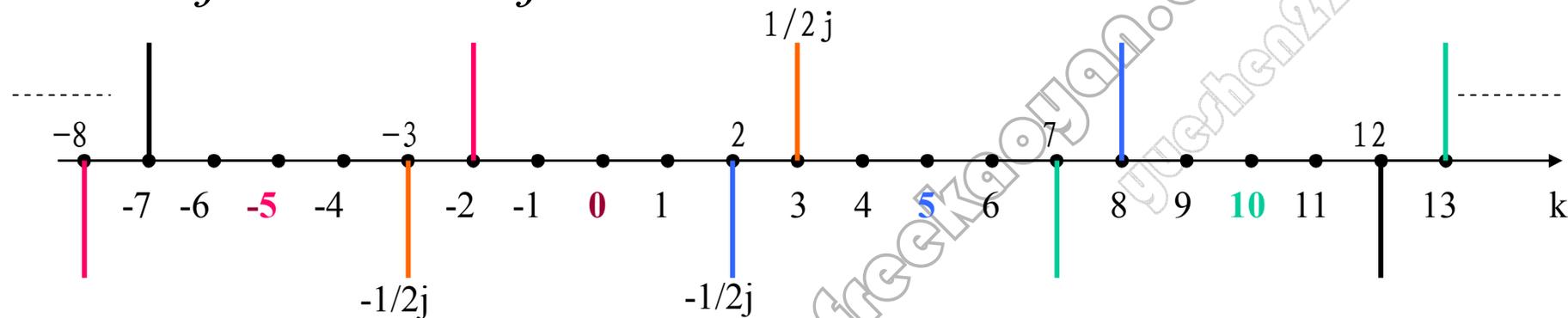


图3.14  $x[n] = \sin 3(2\pi / 5)n$  的傅里叶系数

图中再次表明这些系数的周期性。例如，对于  $N = 5$ ， $a_2 = a_{-3}$ ，在该例中就等于  $(-1/2j)$ 。然而，应该注意到：在长度为5的任意周期内，仅有两个非零的傅里叶系数，因此在综合公式中仅有两个非零项。

例3.11 考虑如下信号:

$$x[n] = 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + 3 \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right)$$

由上式可知,该信号是周期的,其周期为 $N$ 。求 $a_k$

将 $x[n]$ 展开成复指数形式,得

$$x[n] = 1 + \frac{1}{2j} \left[ e^{j(2\pi/N)n} - e^{-j(2\pi/N)n} \right] + \frac{3}{2} \left[ e^{j(2\pi/N)n} + e^{-j(2\pi/N)n} \right] \\ + \frac{1}{2} \left[ e^{j(4\pi n/N + \pi/2)} + e^{-j(4\pi n/N + \pi/2)} \right]$$

整理后可得

$$= 1 + \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{2j} \right) e^{j(2\pi/N)n} + \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2j} \right) e^{-j(2\pi/N)n} \\ + \left( \frac{1}{2} e^{j\pi/2} \right) e^{j2(2\pi/N)n} + \left( \frac{1}{2} e^{-j\pi/2} \right) e^{-j2(2\pi/N)n}$$

因此，该例的傅里叶系数为

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}j$$

$$a_{-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}j$$

$$a_2 = \frac{1}{2}e^{j\pi/2} = \frac{1}{2}[\cos \pi/2 + j \sin \pi/2] = \frac{1}{2}j$$

$$a_{-2} = \frac{1}{2}e^{-j\pi/2} = \frac{1}{2}[\cos \pi/2 - j \sin \pi/2] = -\frac{1}{2}j$$

其余的  $a_k = 0$

注意：对所有的  $k$  值，有  $a_{-k} = a_k^*$

该例的傅里叶系数如图3.15所示。

可求得：

$$a_1 = \frac{3}{2} - j\frac{1}{2}$$

$$\Re\{a_1\} = \frac{3}{2} \quad \text{Im}\{a_1\} = -\frac{1}{2}$$

$$|a_1| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\angle a_1 = \text{tg}^{-1} \frac{-1/2}{3/2} = \text{tg}^{-1} \frac{-1}{3}$$

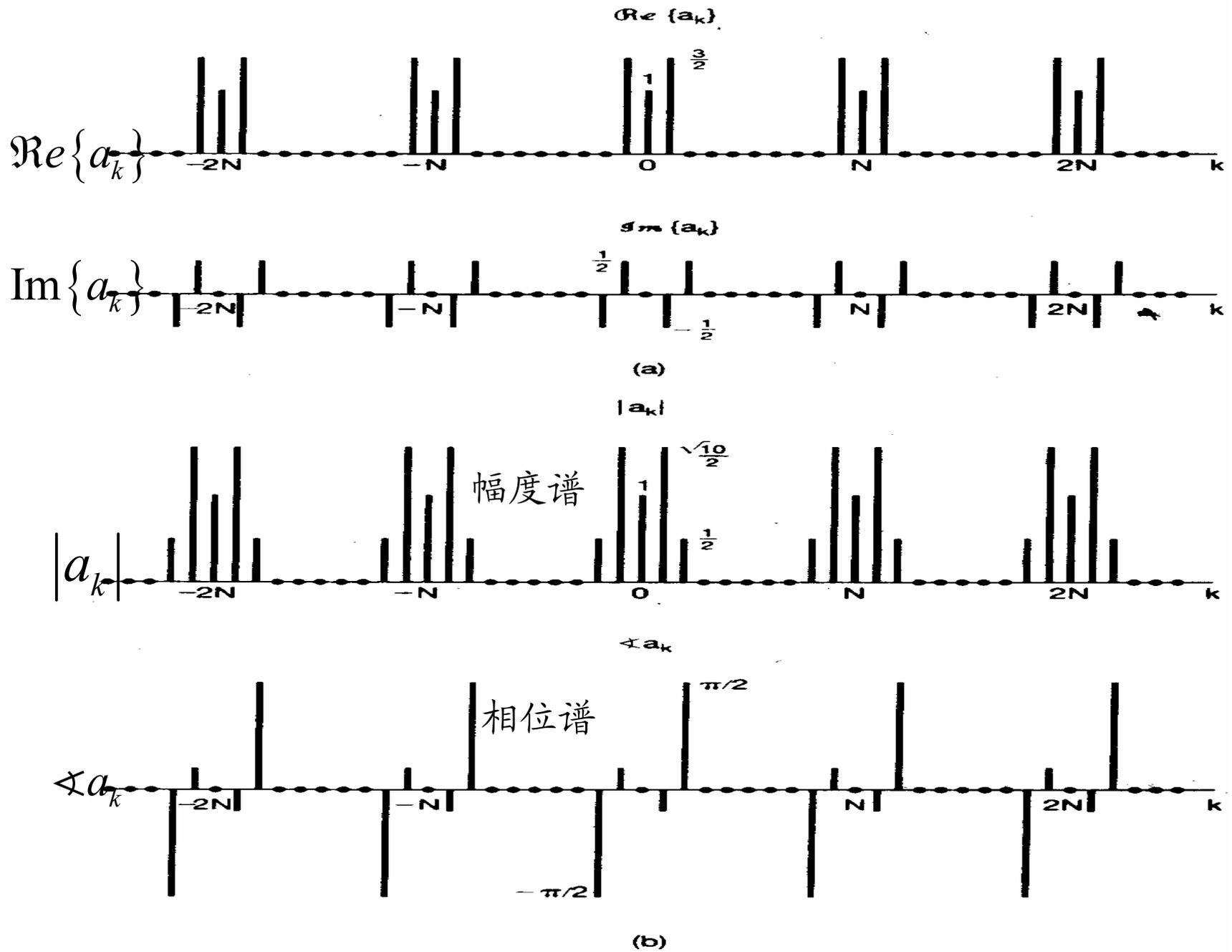


图 3.15 (a) 例 3.11 的傅里叶级数系数的实部和虚部;  
(b) 同一系数的模和相位

例 3.12 已知离散时间周期方波序列如图3.16所示,求傅里叶系数

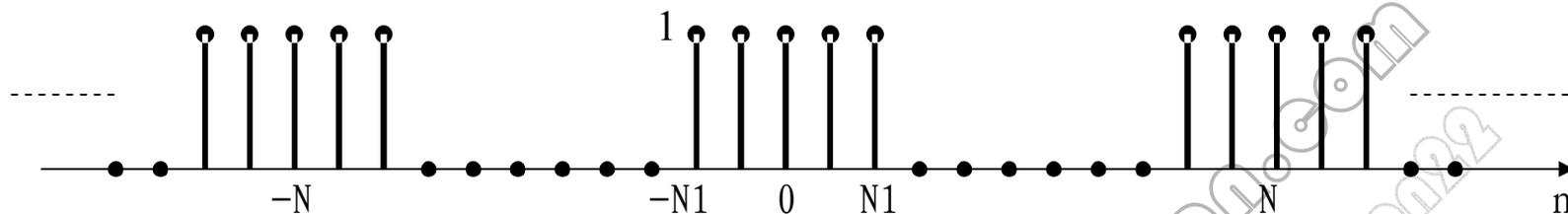


图3.16 离散时间周期方波序列

解: 由于在  $-N_1 \leq n \leq N_1$  内  $x[n] = 1$ , 所以将(3.95)式的求和区间选在  $-N_1 \leq n \leq N_1$  这一范围内,得

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk(2\pi/N)n}$$

令  $m = n + N_1$  则上式变为

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)(m-N_1)} = \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)m} \quad (3.103)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

(3.103)式的和是一个几何级数的前  $(2N_1 + 1)$  项之和,可求得为

由上式可见, 当  $k = 0, \pm N, 2N, \dots$  时,  $a_k = \frac{2N_1 + 1}{N}$

当  $k \neq 0, \pm N, 2N, \dots$  时, 可按有限项求和公式计算:

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \left( \frac{1 - e^{-jk2\pi(2N_1+1)/N}}{1 - e^{-jk(2\pi/N)}} \right) \\
 &= \frac{1}{N} \frac{e^{-jk(2\pi/2N)} [e^{jk2\pi(N_1+1/2)/N} - e^{-jk2\pi(N_1+1/2)/N}]}{e^{-jk(2\pi/2N)} [e^{jk(2\pi/2N)} - e^{-jk(2\pi/2N)}]} \\
 &= \frac{1}{N} \frac{\sin[2\pi k(N_1 + 1/2) / N]}{\sin(\pi k / N)}
 \end{aligned}$$

说明:

$$e^{-jk2\pi(2N_1+1)/N} = e^{-jk \frac{2\pi}{N} \left( \frac{2N_1+1}{2} + \frac{2N_1+1}{2} \right)} = e^{-jk \frac{2\pi}{N} \left( N_1 + \frac{1}{2} \right)} e^{-jk \frac{2\pi}{N} \left( N_1 + \frac{1}{2} \right)}$$

图3.17表示了, 当  $2N_1 + 1 = 5$  时, 分别对  $N = 10, 20$  和  $40$  三种情况下的傅里叶系数  $a_k$

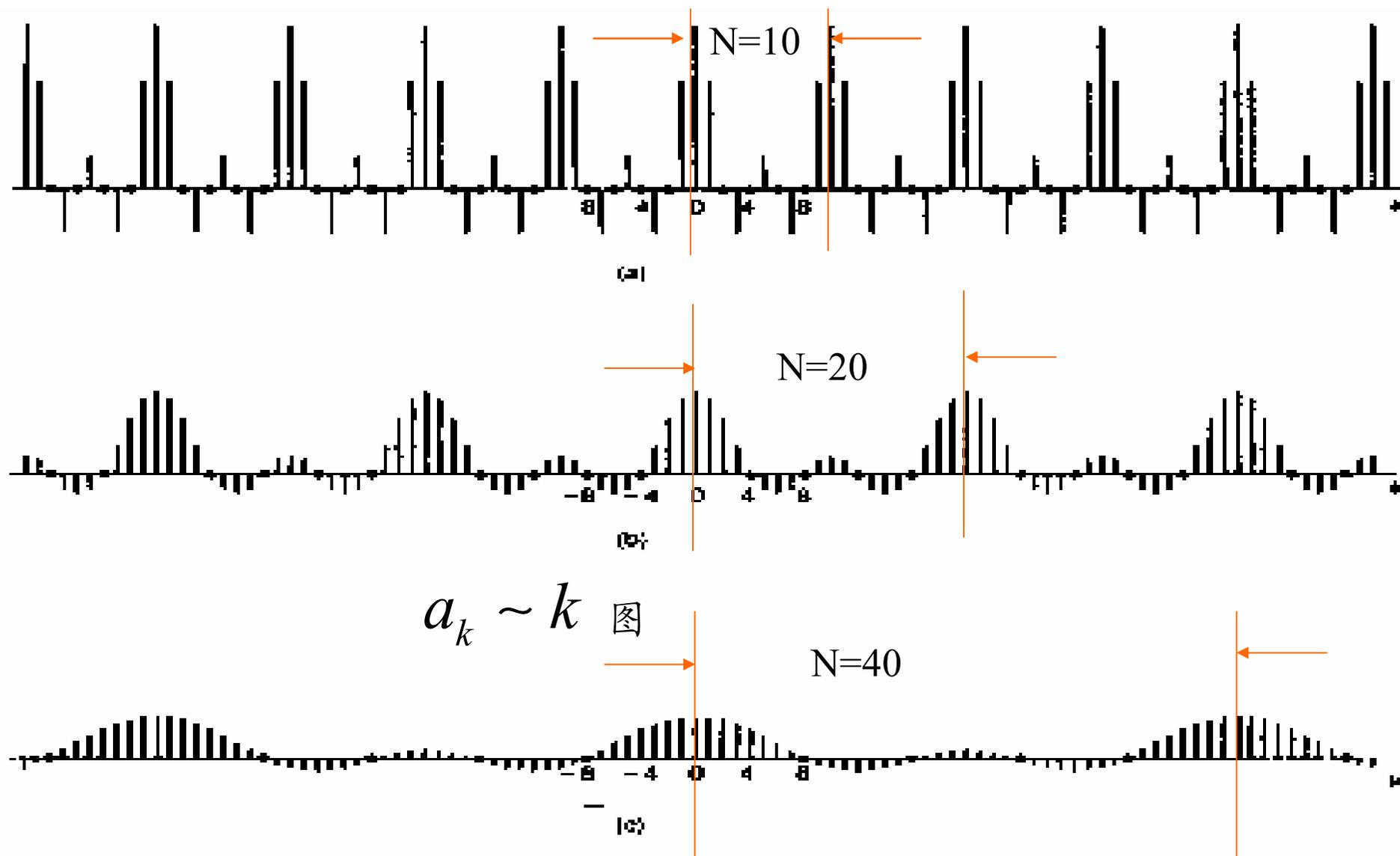


图 3.17 例 3.12 周期方波序列的傅里叶级数系数。图中  $N a_k$  是在  $2N_1 + 1 = 5$  和分别对三种  $N$  值下画出的：

(a)  $N = 10$ ; (b)  $N = 20$ ; (c)  $N = 40$

现在来研究一个离散时间方波序列的**部分和**序列。

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=-M}^M a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

为了**方便起见**，先假设周期**N**为**奇数**。用上述图3.16的例子，取 $N=9$ ， $2N_1+1=5$

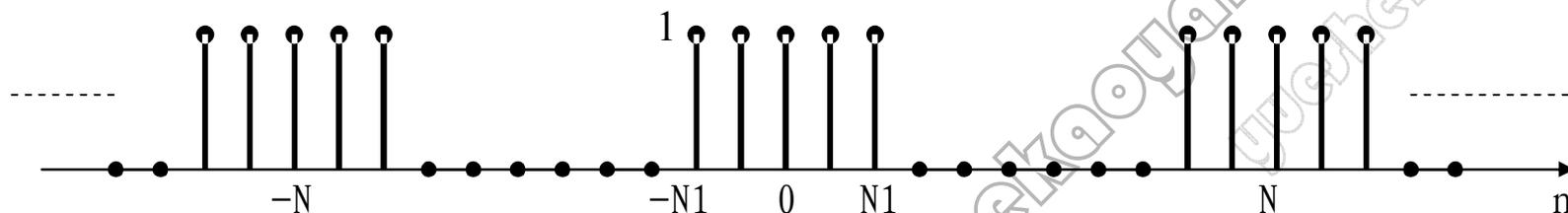
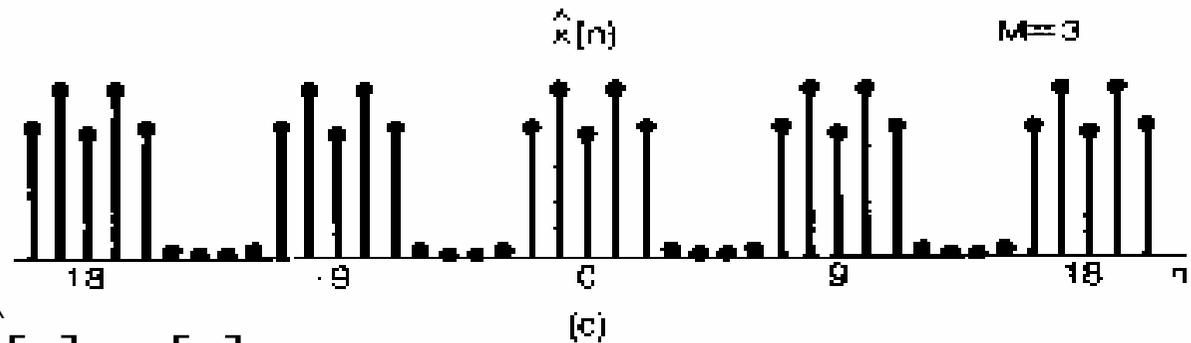
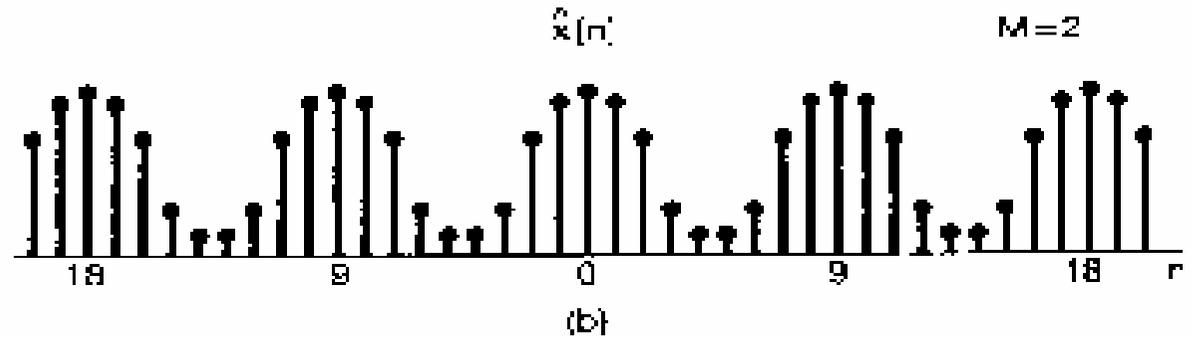
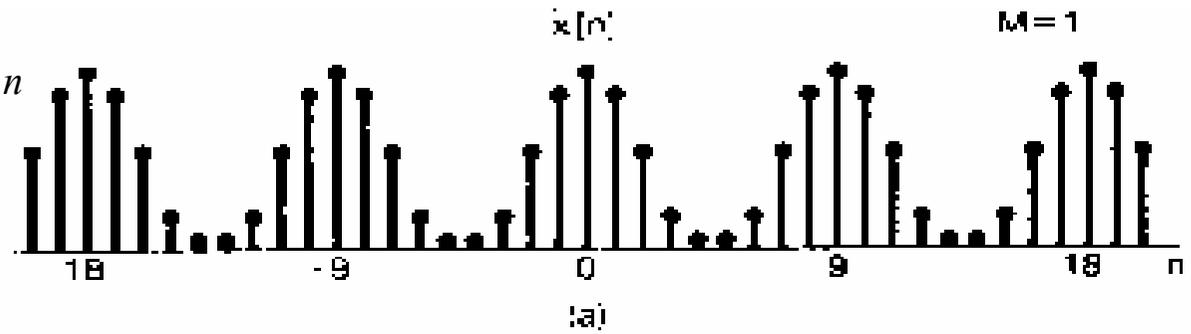


图3.16 离散时间周期方波序列

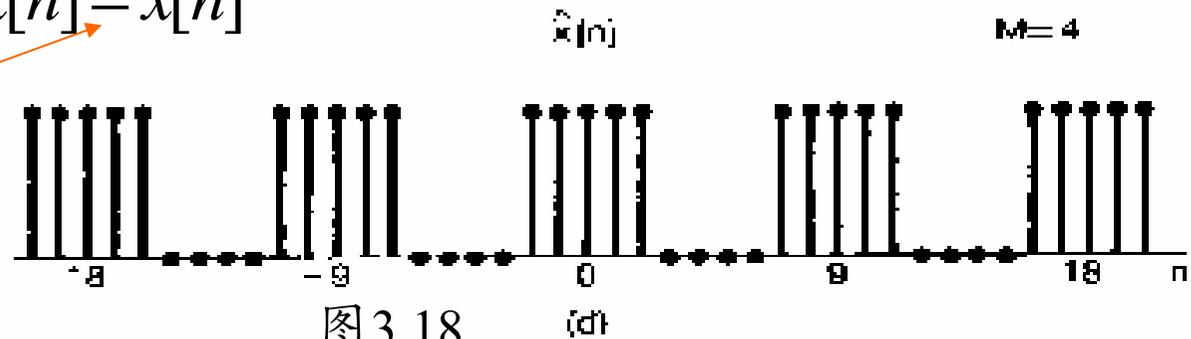
$$\text{即} \left\{ \begin{array}{l} a_k = \frac{1 \sin[\pi k(5)/9]}{9 \sin(\pi k/9)}, \quad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ a_k = \frac{5}{9}, \quad k = 0, \pm N, 2N, \dots \end{array} \right.$$

并对几个不同的M值，对信号  $\hat{x}[n]$  作图

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=-M}^M a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$



由图可见,对于 $M=4$ ,部分和 $\hat{x}[n] = x[n]$



因为 $N=9$ , 当取 $M=4$ 时,  
求和区间为  $-4 \sim 4$ , 即  
等于一个周期  $9$ 。

图3.18

与连续时间情况相比，这里不存在任何收敛问题。也没有吉伯斯现象。

事实上，离散时间傅里叶级数不存在任何收敛问题。究其原因全依赖于这样一个事实：任何离散时间周期序列  $x[n]$  完全是由有限个参数（即  $N$  个）来表征的。

因此，若  $N$  为奇数，而我们取  $M=(N-1)/2$ ，那么 (3.106) 式中的和就完全包括了  $N$  项，于是由综合公式就能得到  $\hat{x}[n] = x[n]$ 。

类似地，若  $N$  为偶数，可令 
$$\hat{x}[n] = \sum_{k=-M+1}^M a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

那么，在  $M=N/2$  时，这个和式仍由  $N$  项组成，由综合公式还是可以得出

$\hat{x}[n] = x[n]$  的结论。

而连续时间周期信号在一个单一周期内有一个连续取值问题，这就要求用无限多个傅里叶系数来表示它。

### 3.7 离散时间傅里叶级数性质

离散时间和连续时间傅里叶系数性质之间存在着很大的相似性。(见P157表3.2)。下面只限于讨论与连续时间情况相比有重要差别的几个性质。

#### 3.7.1 相乘

假设  $x[n] \xrightarrow{FS} a_k$  和  $y[n] \xrightarrow{FS} b_k$  都是周期的，且周期为N。那么，乘积  $x[n]y[n]$  也是一个周期为N的周期序列。它的傅里叶系数为

$$x[n]y[n] \xrightarrow{FS} d_k = \sum_{l \in \langle N \rangle} a_l b_{k-l}$$

除了求和变量要限制在N个连续样本区间上外，上式就类似于卷积的定义。

注意：求和可以在任何  $l$  的相继N个值上进行。我们把这种类型的运算称为两个周期的傅里叶系数序列之间的周期卷积；而把从  $-\infty \sim \infty$  的这种卷积和的

形式有时就称为非周期卷积。

### 3.7.2 一次差分

其定义为:  $y[n] = x[n] - x[n - 1]$

若  $x[n]$  是周期的(周期为 $N$ ),那么  $y[n]$  也是周期的(周期也为 $N$ )。

同样, 若

$$x[n] \xrightarrow{FS} a_k$$

则  $x[n] - x[n - 1] \xrightarrow{FS} (1 - e^{-jk(2\pi/N)}) a_k$

时移性质

证明:

$\therefore x[n] \xrightarrow{FS} a_k$  则  $x[n - 1] \xrightarrow{FS} e^{-jk(2\pi/N)} a_k$

$\therefore x[n] - x[n - 1] \xrightarrow{FS} (1 - e^{-jk(2\pi/N)}) a_k$

线性性质

### 3.7.3 离散时间周期信号的帕斯瓦尔定理

若  $x[n]$  是周期的(周期为  $N$ ), 其傅里叶系数为  $a_k$ , 则离散时间周期信号的帕斯瓦尔定理为

$$\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2$$

上式左边是  $x[n]$  在一个周期内的平均功率, 而  $|a_k|^2$  是  $x[n]$  的第  $k$  次谐波的平均功率。

因此, 帕斯瓦尔定理再一次表明: **一个周期信号的平均功率等于它的所有谐波分量的平均功率之和**。(当然, 在离散时间中只有  $N$  个不同的谐波分量。同时, 由于  $a_k$  也是周期的, 周期为  $N$ , 所以上式右边的求和可以在任何  $k$  的  $N$  个相继值上进行。)

### 3.7.4 举例

下面将给出几个例子来说明如何利用离散时间傅里叶级数性质来表征离散时间周期信号,以及计算它们的傅里叶级数表示式。

例3.13 求图3.19(a)

的  $x[n]$  的傅里叶系数。

解:

1、由图可见其基波周期为5。

2、 $x[n]$  可看成是由图

3.19(b)的方波序列  $x_1[n]$

和图3.19(c)的直流序列

$x_2[n]$  之和。

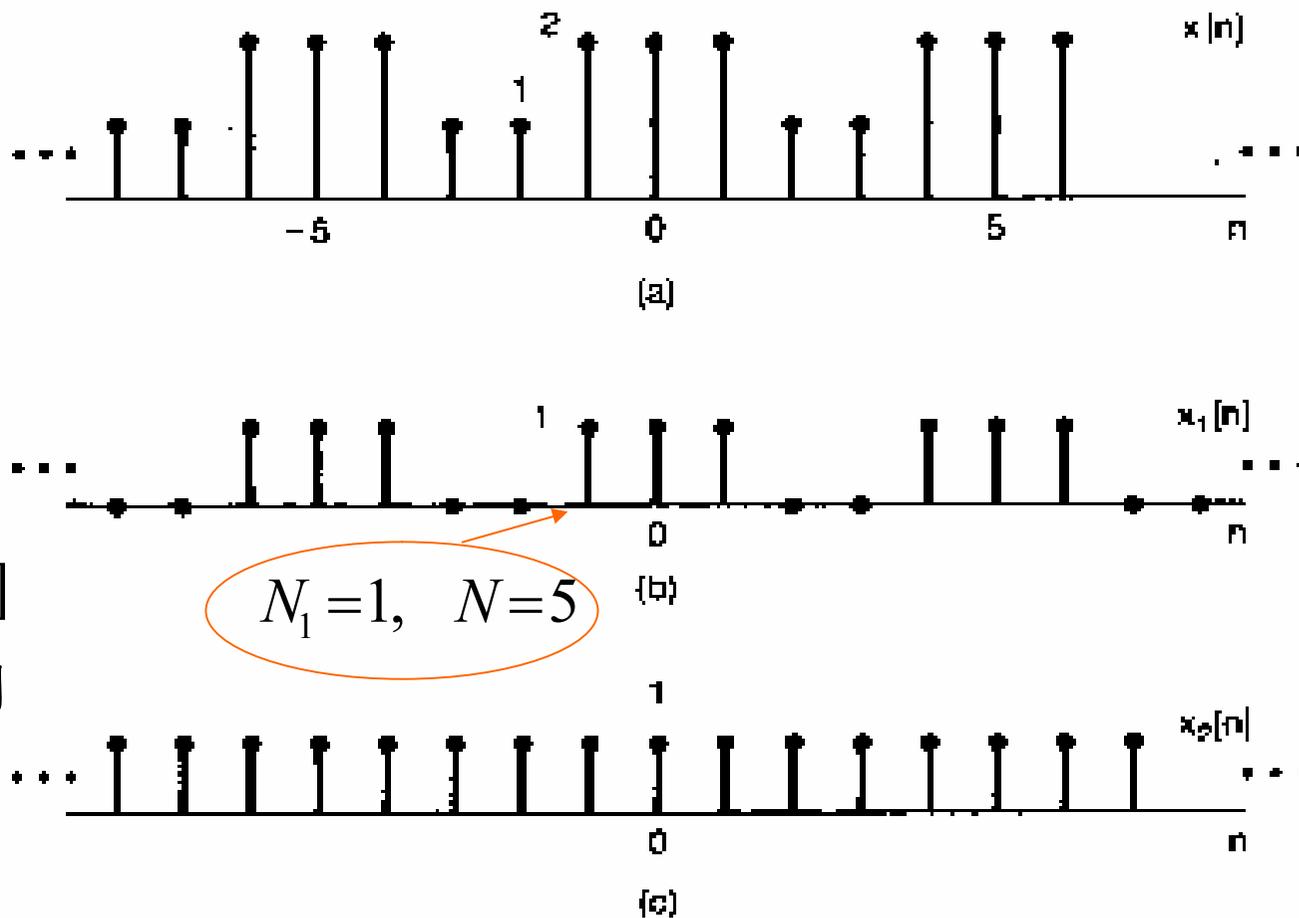


图 3.19 (a) 例 3.13 的周期序列  $x[n]$ , 以及将其表示为 (b) 方波序列  $x_1[n]$  和 (c) 直流序列  $x_2[n]$  之和

3、设  $x_1[n] \xrightarrow{FS} b_k$  ,  $x_2[n] \xrightarrow{FS} c_k$

则有  $a_k = b_k + c_k$

而由例 3.12 可知:响应于  $x_1[n]$  的  $b_k$  可表示为

P155页

$$b_k = \begin{cases} \frac{1 \sin(3\pi k / 5)}{5 \sin(\pi k / N)} , & k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ \frac{3}{5} , & k = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \end{cases}$$

序列  $x_2[n]$  仅有一个直流值,它由零次傅里叶级数系数表示为

$$c_0 = \left\{ \frac{1}{5} \sum_{n=0}^4 x_2[n] = 1 \right.$$

因为,离散时间傅里叶级数系数是周期的,所以当  $k$  为 5 的整数倍时,  $c_k = 1$  。  $x_2[n]$  其余的系数都必须为零。

因此得

$$a_k = \begin{cases} b_k = \frac{1 \sin(3\pi k / 5)}{5 \sin(\pi k / 5)} & , k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ \frac{3}{5} + 1 = \frac{8}{5} & , k = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \end{cases}$$

例 3.14 已知某序列  $x[n]$  给出的条件如下:

1、 $x[n]$  是周期的, 周期  $N=6$

2、
$$\sum_{n=0}^5 x[n] = 2$$

3、
$$\sum_{n=2}^7 (-1)^n x[n] = 1$$

4、在满足上述三个条件的所有信号中,  $x[n]$  具有在每个周期内最小的功率

求:  $x[n]$

解: 1) 将  $x[n]$  的傅里叶级数系数记作  $a_k$ ,

2)  $\because a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$  根据条件2, 可以得出  $a_0 = 1/3$

3) 因为  $e^{-j(2\pi/6)3n} = e^{-j\pi n} = (\cos \pi - j \sin \pi)^n = (-1)^n$

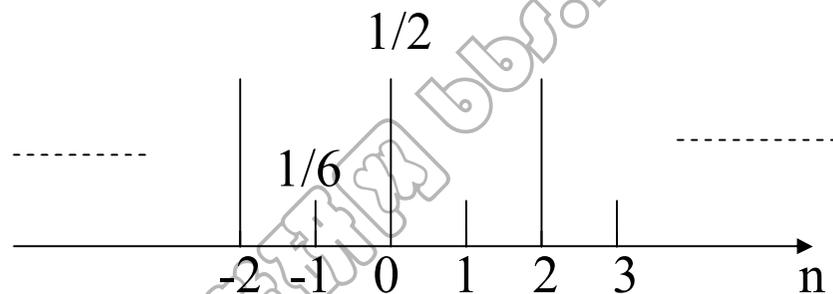
所以由条件3, 可得  $a_3 = 1/6$ 。

根据帕斯瓦尔定理， $x[n]$  的平均功率为  $P = \sum_{k=0}^5 |a_k|^2$

因为每一个非零系数都在 $P$ 中提供一个正的量，又因为  $a_0$  和  $a_3$  的值已经确定。所以要使 $P$ 最小，就只有选  $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0$ ，因此得

$$x[n] = a_0 + a_3 e^{j\pi n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(-1)^n$$

图3.20表示了满足所给条件的序列  $x[n]$ 。



### 3.8 傅里叶级数与LTI系统

一、在P129页 (3.13)、(3.14) 式已经看到

1、在连续时间情况下,若系统的单位冲激响应为  $h(t)$ , 则有

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$
$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

2、类似地,若  $x[n] = z^n$  是一个离散时间LTI系统的输入,那么其输出就为

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n$$
$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z^{-k}$$

二、当  $s$  或  $z$  是一般复数时

$$s = \sigma + j\omega$$

$$z = e^\beta = e^{\sigma + j\omega}$$

• 对于连续时间信号与系统而言，这一章及下一章都将注意力放在  $\Re\{s\} = 0$  这一特殊情况，这时  $s = j\omega$ ，即  $e^{st} = e^{j\omega t}$  这个输入是在频率  $\omega$  上的一个复指数。

具有  $s = j\omega$  形式的系统函数[即  $H(j\omega)$ ]就称为该系统的频率响应，它由下式给出：

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$$

• 对于离散时间信号与系统而言，本章和第5章都将集中在  $|z| = 1$  的  $z$  值上，这样  $z = e^{j\omega}$ ，即  $z^n = e^{j\omega n}$ 。

对  $z$  局限在  $z = e^{j\omega}$  形式的系统函数  $H(z)$  称为该系统的频率响应，它由下式给出：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

1、在连续时间情况下

令  $x(t)$  为一周期信号，其傅里叶级数表示为

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$s_k = jk\omega_0$$

假定将该信号加入单位冲激响应为  $h(t)$  的LTI系统作为它的输入，那么其输出为

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

若  $\{a_k\}$  是  $x(t)$  的一组傅里叶级数系数,那么  $\{a_k H(jk\omega_0)\}$  就是输出  $y(t)$  的一组傅里叶级数系数。

例3.16 假设  $x(t) = \sum_{k=-3}^3 a_k e^{jk2\pi t}$ ,

$$a_0 = 1, a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4}, a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}, a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$$

LTI系统的单位冲激响应为  $h(t) = e^{-t}u(t)$

求 输出  $y(t)$  的傅里叶级数系数。

解: 1、首先求频率响应

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$H(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau = -\frac{1}{1+j\omega} e^{-\tau(1+j\omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1+j\omega}$$

2、由  $x(t)$  表达式可知,  $\omega_0 = 2\pi$ , 因此可得

$$y(t) = \sum_{k=-3}^3 b_k e^{jk2\pi t}$$

由于  $b_k = a_k H(jk2\pi)$  , 所以

$$\begin{cases} b_0 = a_0 H(j02\pi) = 1 \\ b_1 = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1+j2\pi} \right) , & b_{-1} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1-j2\pi} \right) \\ b_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+j4\pi} \right) , & b_{-2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-j4\pi} \right) \\ b_3 = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1+j6\pi} \right) , & b_{-3} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1-j6\pi} \right) \end{cases} \quad (3.127)$$

$$y(t) = \sum_{k=-3}^3 b_k e^{jk2\pi t}$$

注意: 因为  $x(t)$  和  $h(t)$  都是实信号, 所以  $y(t)$  一定是**实信号**。检查一下 (3.127)

式, 并注意到  $b_k^* = b_{-k}$  就能证明这一点。

因此,  $y(t)$  也能表示为以下两种形式, 即

见P133

设  $b_k = D_k e^{j\theta_k} = E_k + jF_k$  ,  $k=1,2,3$

$$\begin{cases} y(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^3 D_k \cos(2\pi kt + \theta_k) \\ y(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^3 [E_k \cos 2\pi kt - F_k \sin 2\pi kt] \end{cases}$$

其中  $D_K, E_K, F_K$  这些系数都能直接由(3.127)式求出,例如:

$$D_1 = |b_1| = \frac{1}{4\sqrt{1+4\pi^2}}, \quad \theta_1 = \angle b_1 = -\tan^{-1}(2\pi)$$
$$E_1 = \Re\{b_1\} = \frac{1}{4(1+4\pi^2)}, \quad F_1 = \Im\{b_1\} = -\frac{\pi}{2(1+4\pi^2)}$$

免费下载网 [bbs.freeitzy.com](http://bbs.freeitzy.com)

2、在离散时间情况下

令  $x[n]$  是一周期信号，其傅里叶级数表示为

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

LTI系统的单位脉冲响应为  $h[n]$ ，则系统输出为

$$y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n$$

用  $z_k = e^{jk(2\pi/N)}$  代入, 可得

$$y[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k H(e^{j2(\pi k/N)}) e^{jk(2\pi/N)n}$$

(3.131)

$y[n]$  也是周期的, 且与  $x[n]$  有相同的周期,  $y[n]$  的第  $k$  个傅里叶系数就是输入的第  $k$  个傅里叶系数与对应频率点上的频率响应值  $H(e^{j2\pi k/N})$  的乘积。

例3.17 考虑一LTI系统,其单位脉冲响应为

$$h[n] = a^n u[n] \quad , \quad -1 < a < 1$$

输入为  $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$

求  $y[n]$  的傅里叶级数

解: 把  $x[n]$  写成傅里叶级数形式

$$x[n] = \frac{1}{2} e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} e^{-j(2\pi/N)n}$$

可得  $a_1 = \frac{1}{2}$  ,  $a_{-1} = \frac{1}{2}$

因为对  $z$  局限在  $z = e^{j\omega}$  形式的系统函数  $H(z)$ , 即  $H(e^{j\omega})$  为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n$$

据无限项和公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad , \quad |a| < 1$$

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z^{-k}$$

可得 
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

则输出的傅里叶级数为

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k H(e^{j2(\pi k/N)}) e^{jk(2\pi/N)n} \\ &= \frac{1}{2} H(e^{j2\pi/N}) e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} H(e^{-j2\pi/N}) e^{-j(2\pi/N)n} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi/N}} \right) e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - ae^{j2\pi/N}} \right) e^{-j(2\pi/N)n} \end{aligned}$$

设 
$$\frac{1}{1 - ae^{-j2\pi/N}} = re^{j\theta}$$

则可简化为 
$$y[n] = r \cos\left(\frac{2\pi}{N}n + \theta\right)$$

若  $N=4$ , 则有

$$\frac{1}{1 - ae^{-j2\pi/4}} = \frac{1}{1 + ja} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} e^{j(-\tan^{-1}(a))}$$

因此

$$y[n] = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \cos\left(\frac{\pi n}{2} - \tan^{-1}(a)\right)$$

---

书中一些错的地方:

P149 第七行 原来是:  $b_k = \frac{1}{T} [e^{-jk\omega_0 T_1} - e^{j\omega_0 T_1}]$

应改为  $b_k = \frac{1}{T} [e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-j\omega_0 T_1}]$

P162 式 (3.124) 原来是:  $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 t}$

应改为  $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$

P177 第10行 原来是  $h[n] = 1/N + M + 1$

应改为  $h[n] = 1/(N + M + 1)$

第11行 原来是  $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{N + M + 1} \sum_{k=-N}^M e^{j\omega k}$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{N + M + 1} \sum_{k=-N}^M e^{-j\omega k}$$

P178 第8行 原来是:  $H(e^{j\omega}) \frac{1}{2} [1 - e^{-j\omega}] = je^{j\omega/2} \sin(\omega/2)$

应改为  $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [1 - e^{-j\omega}] = je^{-j\omega/2} \sin(\omega/2)$

---

作业:

P181 题3.19

P238 题4.1 (b)

题4.2 (b)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \rightarrow \text{系统} \rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \rightarrow \text{系统} \rightarrow y[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k H(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}$$

当s和z为一般复数时

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} \quad \text{——称系统函数}$$

当  $s = j\omega$ ,  $z = e^{j\omega}$  时,

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega n} \quad \text{——称系统频率响应}$$

### 3.9 滤波——应用举例

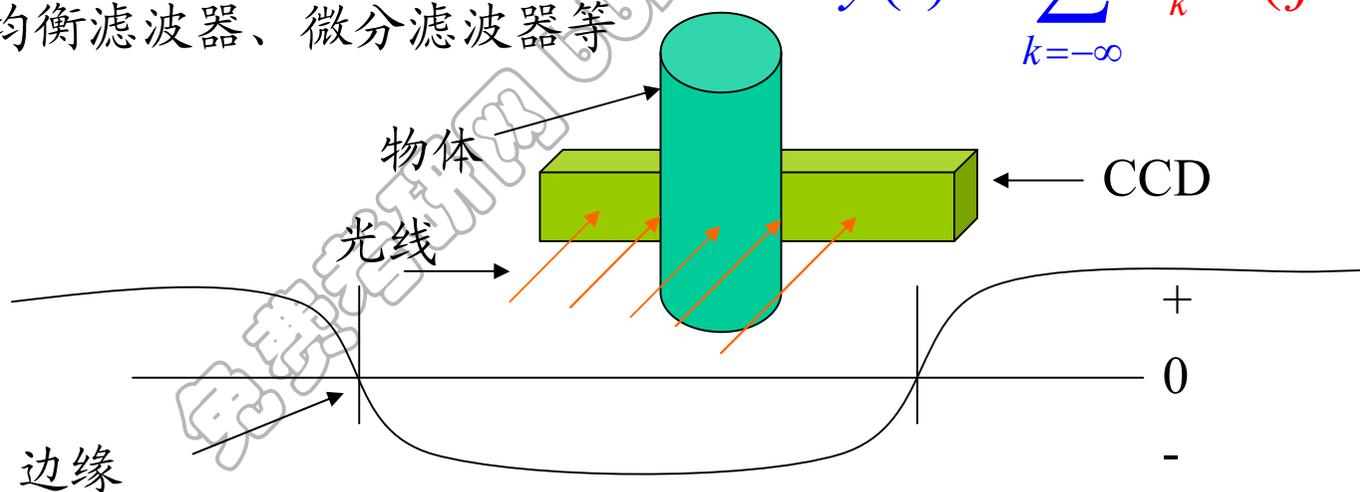
滤波——改变一个信号中各频率分量的相对大小，或全部消除某些频率分量  
这样一种过程称为滤波。

因为，一个LTI系统输出的傅里叶级数系数就是输入的这些系数乘以该系统的频率响应。因此，恰当地选取系统的频率响应，利用LTI系统能方便地实现滤波。

3.9.1 频率成形滤波器——用于改变频谱形状的线性时不变系统,称为频率成形滤波器。

例如：均衡滤波器、微分滤波器等

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

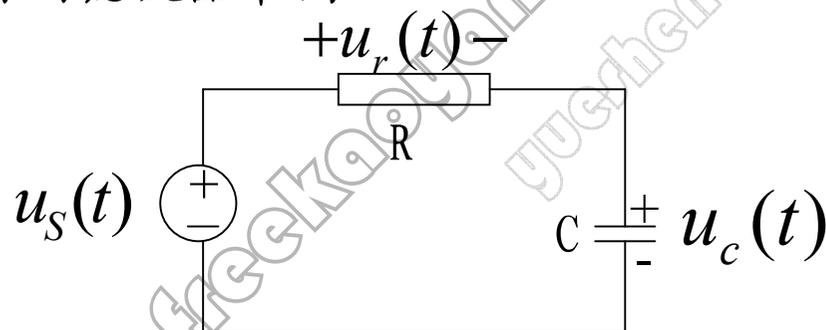


用CCD测量物体直径时

3.9.2 频率选择性滤波器——无失真传输某些频率分量，而显著地衰减或消除另一些频率分量的系统称为频率选择性滤波器。例如：低通、高通、带通等。  
 (在许多应用中，频率选择性滤波器，是用线性常系数微分或差分方程所描述的LTI系统来实现)

### 3.10 用微分方程所描述的连续时间滤波器举例

#### 3.10.1 简单RC低通滤波器



图中  $u_s(t)$  为输入。它既能实现低通滤波，也能实现高通滤波，这取决于什么作为输出信号。

1、当取  $u_c(t)$  作输出时，可得 
$$RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_s(t) \quad (3.141)$$

为了确定频率响应  $H(j\omega)$ ，定义在输入电压  $u_s(t) = e^{j\omega t}$  时，输出电压一定是  $u_c(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$ ，代入上式得

$$RC \frac{d}{dt} [H(j\omega) e^{j\omega t}] + H(j\omega) e^{j\omega t}$$

$$= RCj\omega H(j\omega) e^{j\omega t} + H(j\omega) e^{j\omega t} = e^{j\omega t}$$

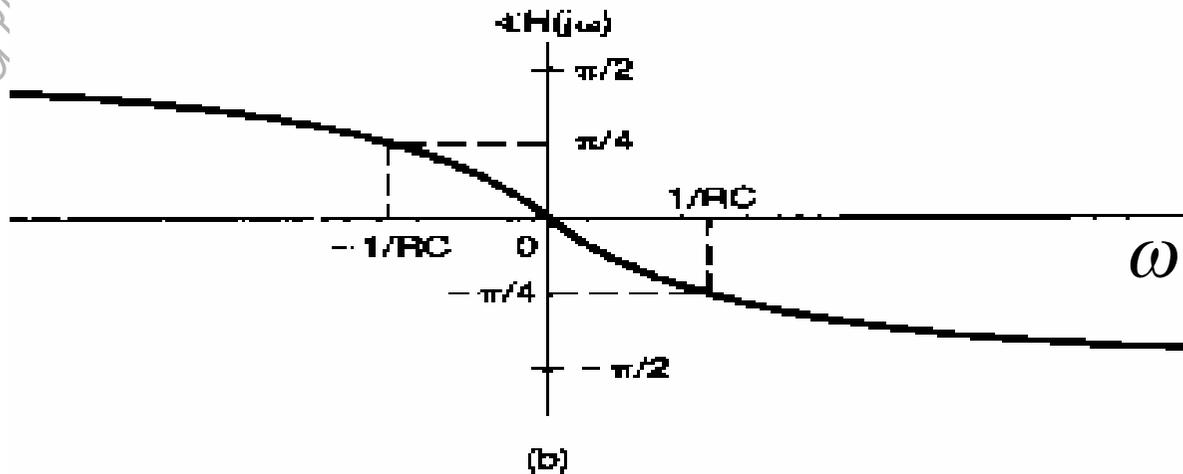
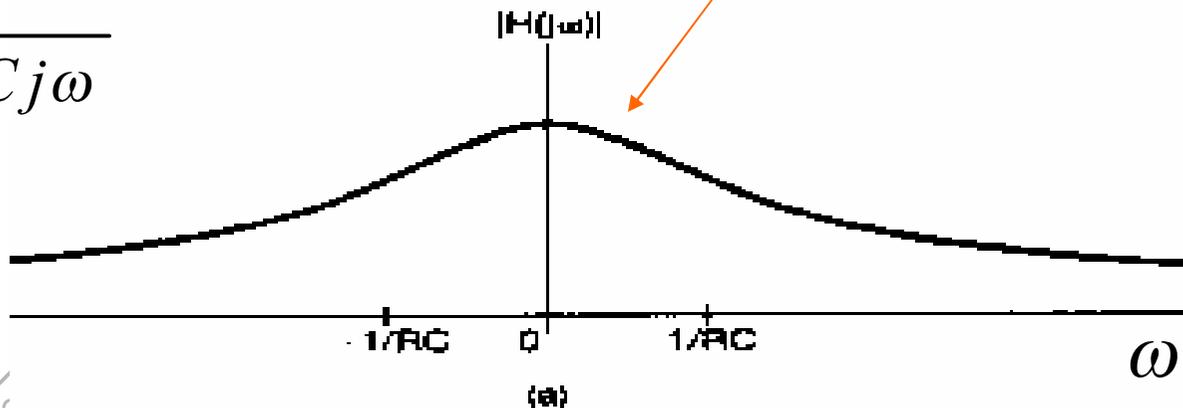
这是输入

由此可得  $H(j\omega) e^{j\omega t} = \frac{1}{1 + RCj\omega} e^{j\omega t}$

则有  $H(j\omega) = \frac{1}{1 + RCj\omega}$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

$$\phi = -\tan^{-1} RC\omega$$



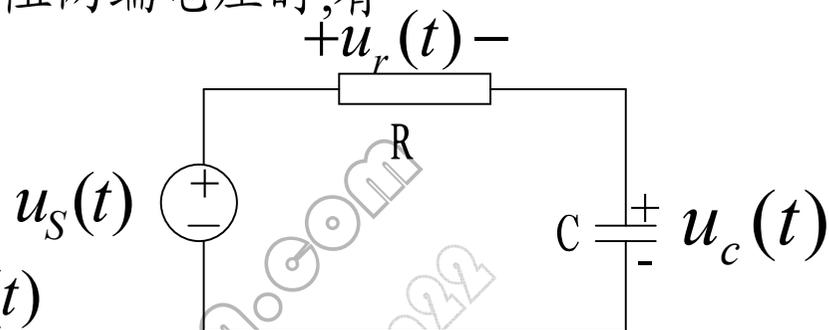
低通

### 3.10.2 简单RC高通滤波器——当将输出取电阻两端电压时,有

因为  $RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u_s(t)$

$$RC \frac{d[u_s(t) - u_r(t)]}{dt} + [u_s(t) - u_r(t)] = u_s(t)$$

得  $RC \frac{du_r(t)}{dt} + u_r(t) = RC \frac{du_s(t)}{dt}$



$$(3.148)$$

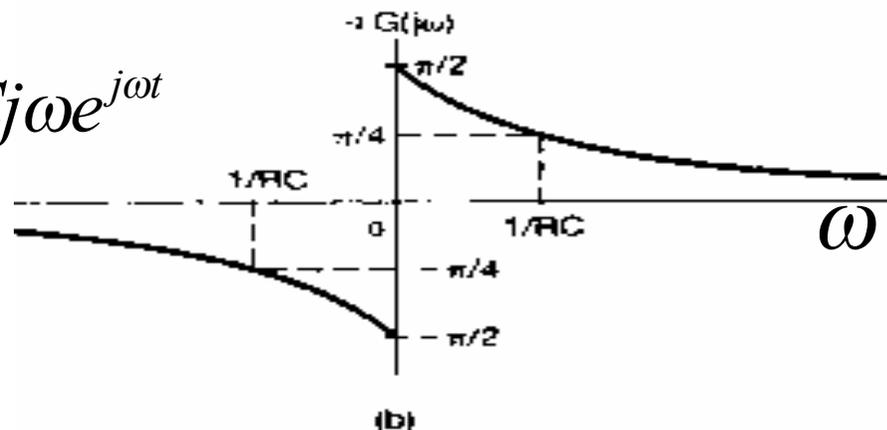
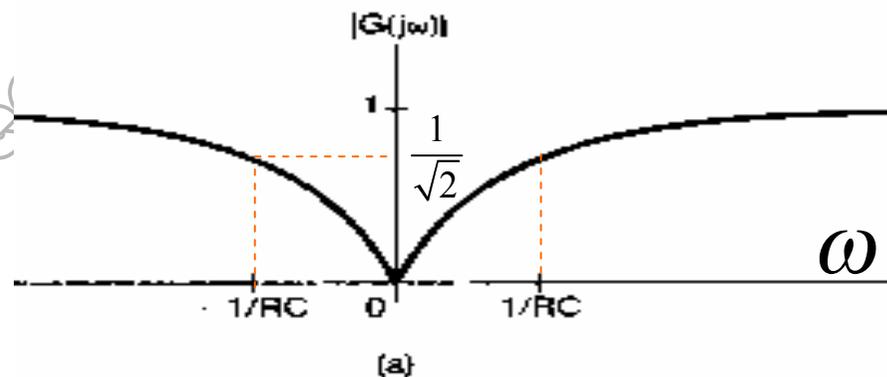
若取  $u_s(t) = e^{j\omega t}$ , 那么一定有

$$u_r(t) = G(j\omega)e^{j\omega t}$$

将它们代入上式,得

$$RCj\omega G(j\omega)e^{j\omega t} + G(j\omega)e^{j\omega t} = RCj\omega e^{j\omega t}$$

$$G(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$



### 3.11 用差分方程描述的离散时间滤波器举例

由于离散时间系统能有效地用专用或通用数字系统来实现,因此由差分方程描述的滤波器在实际中被广泛地采用。由差分方程描述的离散时间LTI系统可以是递归的,从而具有无限长单位脉冲响应(IIR系统);又能是非递归的,从而具有有限长单位脉冲响应(FIR系统)。——这一节只限于递归与非递归滤波器的几个简单例子。

#### 3.11.1 一阶递归离散时间滤波器

一阶递归离散时间滤波器——是由一阶差分方程所描述的LTI系统

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \quad (3.151)$$

根据复指数信号的特征函数性质知道,若  $x[n] = e^{j\omega n}$  则  $y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$

将这些代入(3.151)式,得  $H(e^{j\omega})e^{j\omega n} - aH(e^{j\omega})e^{j\omega(n-1)} = e^{j\omega n}$

$$[1 - ae^{-j\omega}]H(e^{j\omega})e^{j\omega n} = e^{j\omega n}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

系统的  
频率响应

当  $a = 0.6$  和  $a = -0.6$  时的模和相位如图3.34所示。

由图可见:

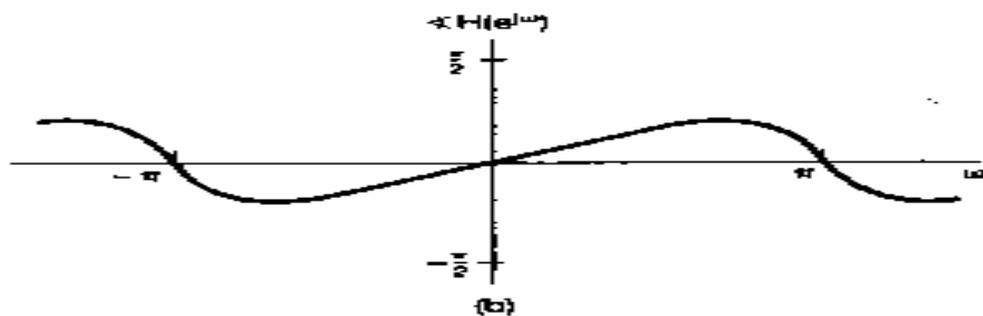
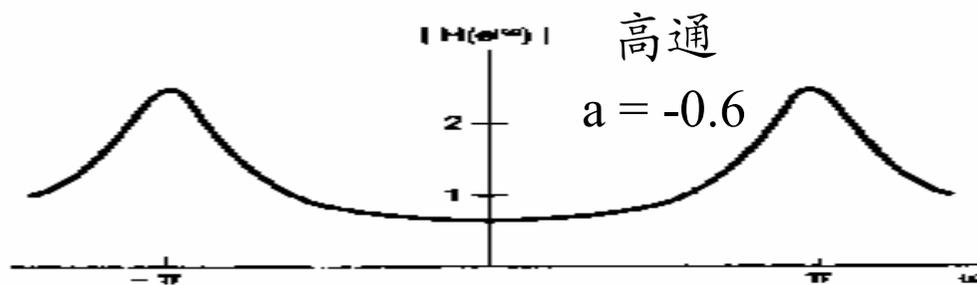
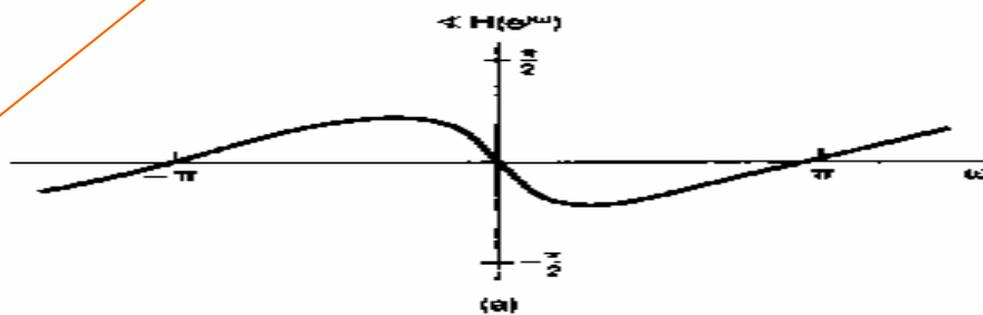
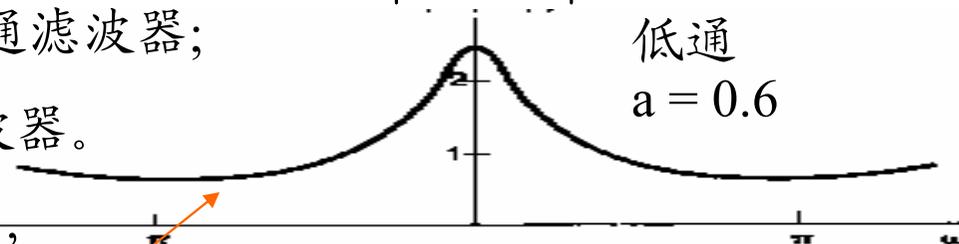
- 1、对于正的 $a$ ,差分方程表现为一个低通滤波器;
- 2、对于负的 $a$ ,该系统为一个高通滤波器。

(这里  $a$  控制了该滤波器通带的宽度,

随着 $|a|$ 的减少,带宽愈宽。)

具有无限长单位脉冲响应

$$|H(e^{j\omega})|$$



免费下载网

### 3.11.2 非递归离散时间滤波器

一个FIR非递归差分方程的一般形式为

$$y[n] = \sum_{k=-N}^M b_k x[n-k]$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n}$$

这就是输出  $y[n]$  是  $x[n-M]$  到  $x[n+N]$  的  $(N+M+1)$  个值的加权平均, 其加权系数为  $b_k$ 。

这种滤波器常用的一个例子是移动平均滤波器, 这时在任意  $n$  (比如  $n_0$ ) 的输出  $y[n]$ , 是在  $n_0$  点附近  $x[n]$  的平均。——它的基本思想就是局部平均, 把输入中的高频分量平均掉, 而低频部分得到保留 (响应当于将原始序列作平滑或低通滤波)。

例: 一个三点移动平均滤波器, 其形式为  $y[n] = \frac{1}{3}(x[n-1] + x[n] + x[n+1])$

每一个输出  $y[n]$  是三个连续输入值的平均。这时

$$h[n] = \frac{1}{3}[\delta[n-1] + \delta[n] + \delta[n+1]]$$

$$x[n] * \delta[n-1] = x[n-1]$$

根据 (3.122) 式, 相应的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{3}[e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}] = \frac{1}{3}(1 + 2\cos\omega)$$

图3.35为  $H(e^{j\omega})$  的模。

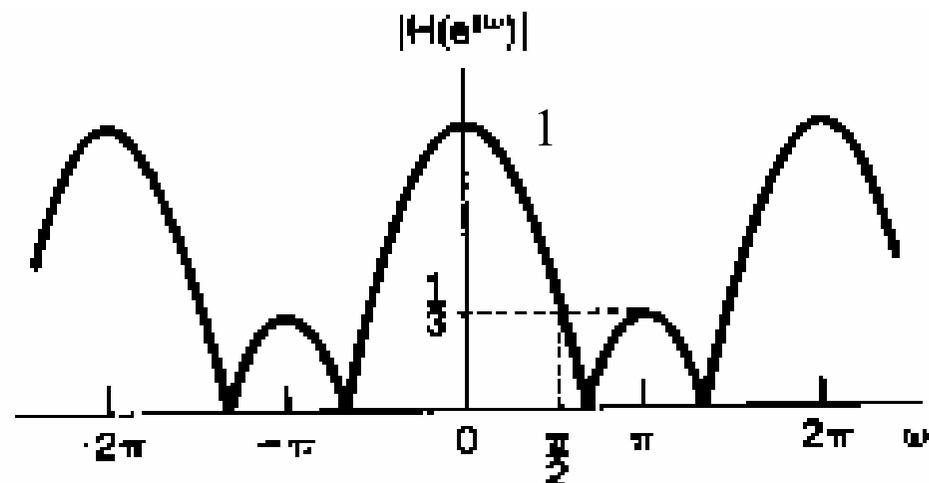


图 3.35 一个三点移动平均低通滤波器频率响应的模特性

作为这类滤波器的一般化,

可以考虑在  $N+M+1$  个点上求平均,即

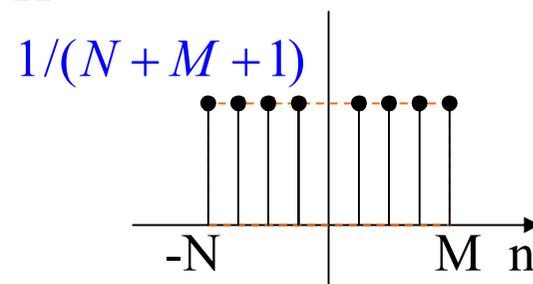
$$y[n] = \frac{1}{N+M+1} \sum_{k=-N}^M x[n-k]$$

$$h[n] = \frac{1}{N+M+1} [\delta[n+N] + \dots + \delta[n] + \dots + \delta[n-M]]$$

$$= \frac{1}{N+M+1} \sum_{K=-N}^M \delta[n-K]$$

相应的单位脉冲响应就是一个矩形脉冲,即

$$h[n] = \begin{cases} 1/(N+M+1) & , -N \leq n \leq M \\ 0 & , \text{其余 } n \end{cases}$$



该滤波器的频率响应为  $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} = \frac{1}{N+M+1} \sum_{k=-N}^M e^{-j\omega k}$

令  $m = k+N$  得

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{N+M+1} \sum_{m=0}^{M+N} e^{-j\omega(m-N)} = \frac{1}{N+M+1} e^{j\omega N} \sum_{m=0}^{M+N} e^{-j\omega m} \\
 &= \frac{1}{N+M+1} e^{j\omega N} \frac{1 - (e^{-j\omega})^{(M+N+1)}}{1 - e^{-j\omega}} \\
 &= \frac{1}{N+M+1} e^{j\omega N} \frac{e^{-j\omega(M+N+1)/2} (e^{j\omega(M+N+1)/2} - e^{-j\omega(M+N+1)/2})}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} \\
 &= \frac{1}{N+M+1} e^{j\omega[(N-M)/2]} \frac{\sin[\omega(M+N+1)/2]}{\sin(\omega/2)}
 \end{aligned}$$

利用调节平均窗口  $N+M+1$  的大小,就可改变截止频率。

例如:

对于  $M+N+1=33$  和  $65$  (即  $M=N=16$  和  $M=N=32$ ) 时,  $H(e^{j\omega})$  的模如图 3.36 所示

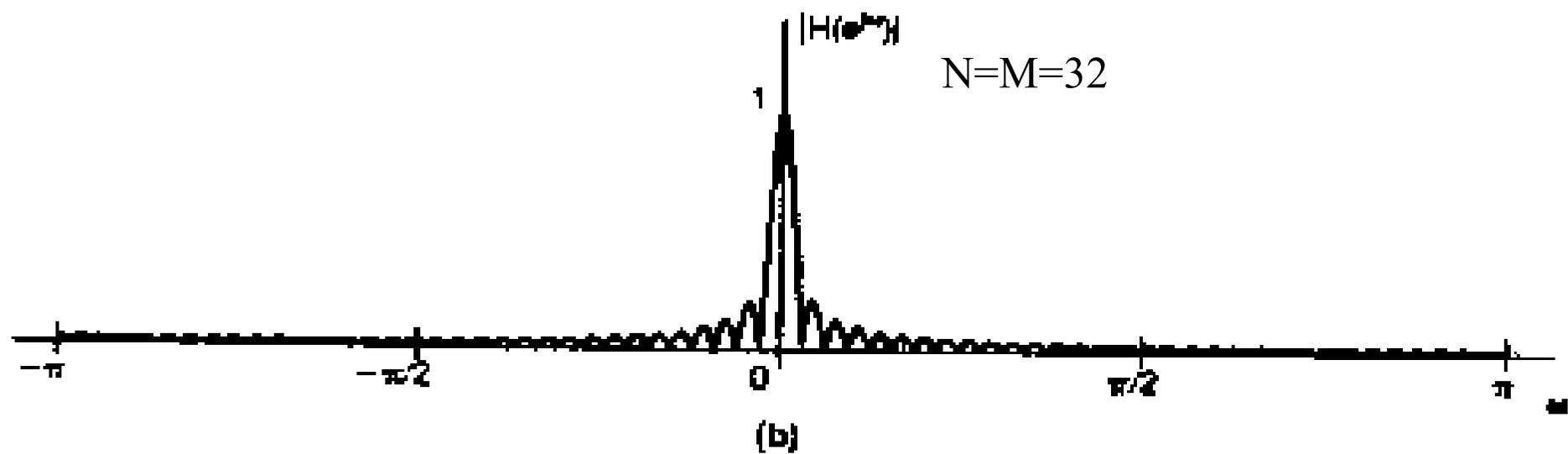
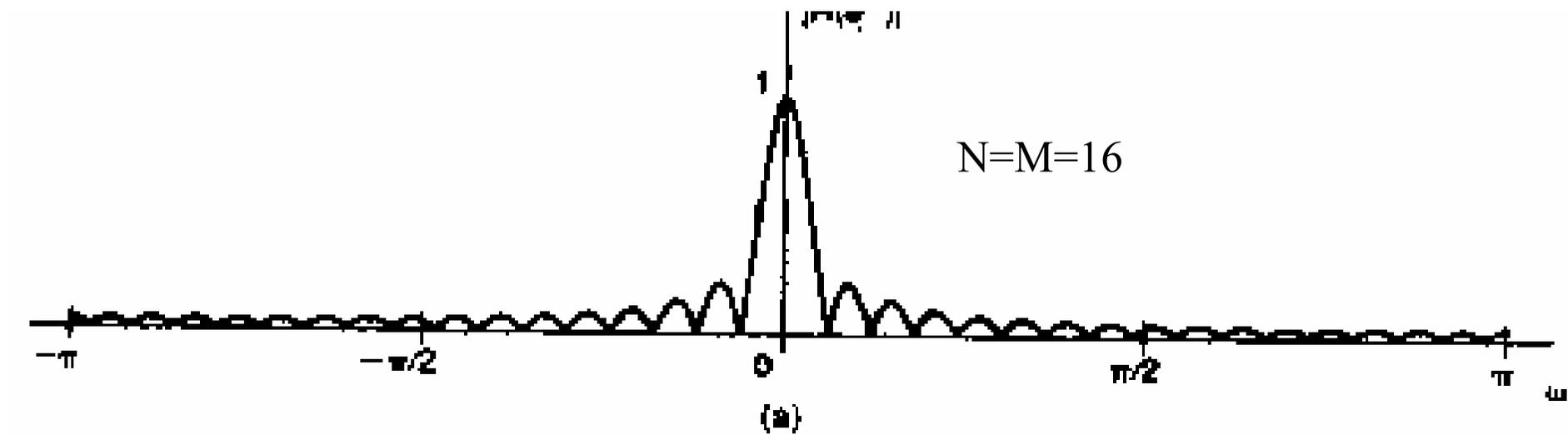


图 3.36 (3.162)式低通移动平均滤波器的频率响应的模特性:(a)  $M = N = 16$ , (b)  $M = N = 32$

非递归滤波器也能实现高通滤波:

例如: 考虑以下差分方程:

$$y[n] = \frac{x[n] - x[n-1]}{2}$$

当输入信号近似不变时,  $y[n]$  的值就接近于0。对于从一个样本到另一个样本变化很大的输入信号来说, 可以预期  $y[n]$  会有较大的输出值。因此, 上式所描述的系统近似为一个高通滤波器。

为了更详细地看出这一点, 可考虑系统的频率响应。这时,

$$h[n] = \frac{1}{2} \{ \delta[n] - \delta[n-1] \}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n}$$

再利用 (3.122) 式, 可得

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} (1 - e^{-j\omega}) = je^{-j\omega/2} \frac{(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})}{2j} = je^{-j\omega/2} \sin(\omega/2)$$

图3.37画出了  $H(e^{j\omega})$  的模特性。

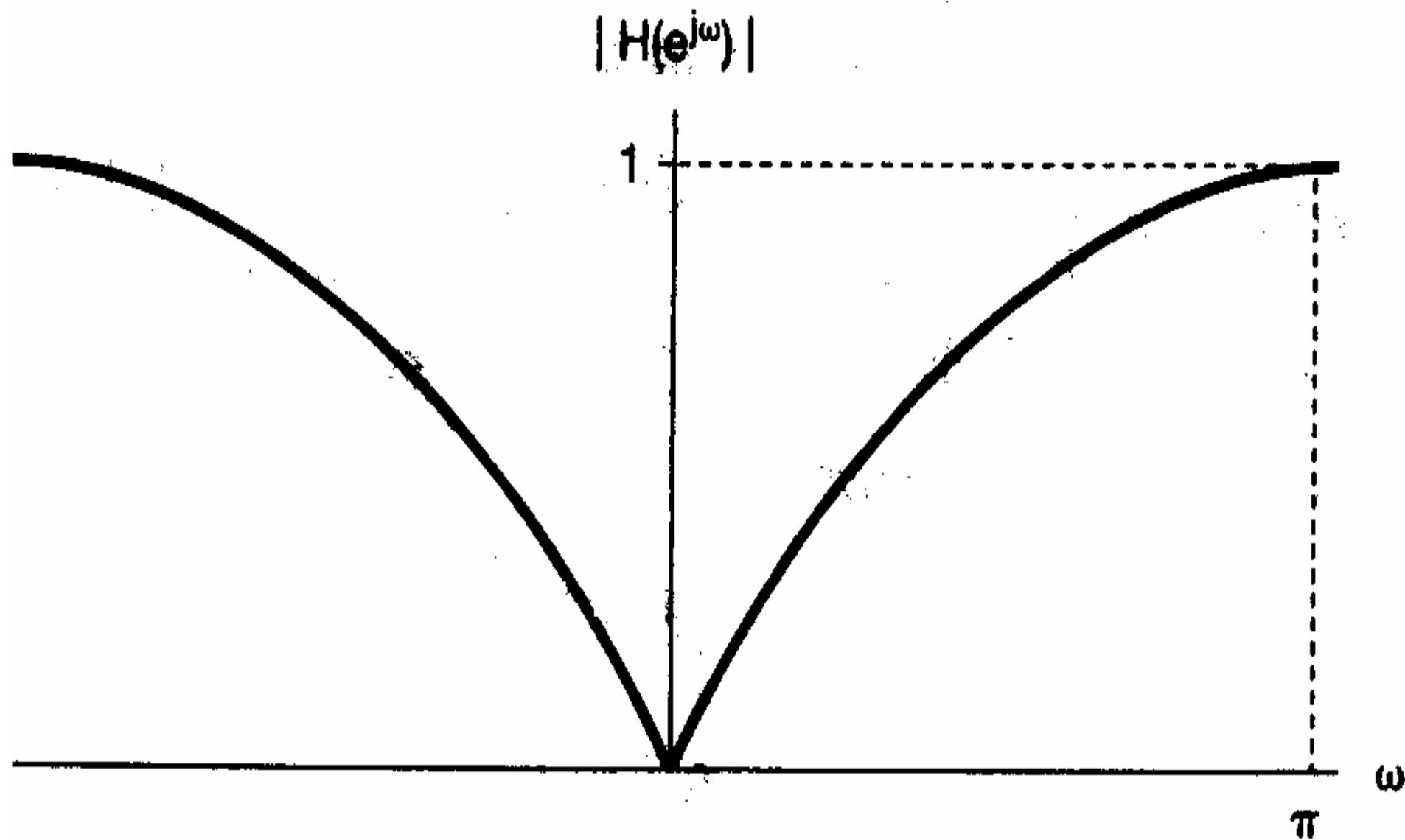


图 3.37 一个简单高通滤波器的频率响应

小结:

- 1、复指数信号是LTI系统的特征函数;
- 2、任何具有实际意义的周期信号都可以表示成一个傅立叶级数（即成谐波关系的复指数信号的加权和，并与被表示的信号具有相同的周期）;
- 3、若一个周期信号加到一个LTI系统上，则输出也一定是周期的，并与输入信号的周期相同。

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow \text{系统} \longrightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

$$x[n] = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 n} \longrightarrow \text{系统} \longrightarrow y[n] = \sum_k a_k H(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}$$

- 4、介绍了一个重要的应用——滤波

书中一些错的地方:

P214 式 (4.25)  $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} d\omega$

应改为  $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$

P219 第4行  $\begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau \\ -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau \end{cases}$  应改为  $\begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau \\ -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau \end{cases}$

P220 倒数第2、4、6行及P221 第1行中的  $e^{-2|t|}$  应改为  $e^{-|t|}$

# 第四章

## 连续时间傅里叶变换

周期信号和非周期信号



## 4.0 引言

在第三章讲述了周期信号可用复指数信号的线性组合来表示,在这一章将把这一概念推广应用到非周期信号中去.

### 4.1 非周期信号的表示:连续时间傅里叶变换

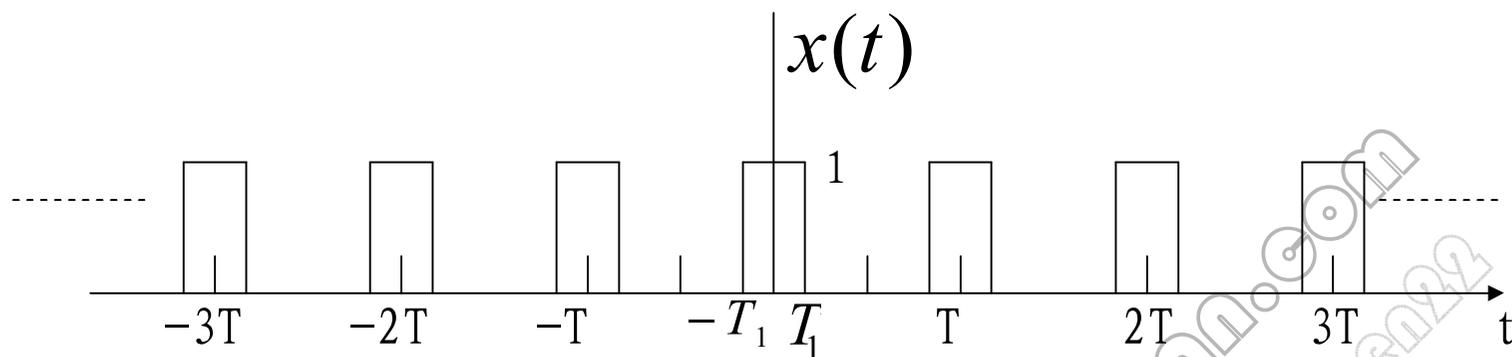
#### 4.1.1 非周期信号傅里叶变换表示的导出

非周期信号的复指数信号表示(即信号的傅里叶变换):

其基本思想是把一个非周期信号当作一个周期信号在周期趋向无穷大时的极限看待,并去研究这样的周期信号的傅里叶级数表示式的极限情况。

1、先看一个连续时间周期方波信号,周期为 $T$ 。在一个周期内

$$x(t) = \begin{cases} 1 & , \quad |t| < T_1 \\ 0 & , \quad T_1 < |t| < T / 2 \end{cases}$$



由例3.5可知,该信号的傅里叶系数  $a_k$  为

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{jk\omega_0 T} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}$$

即  $Ta_k = \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega} \Big|_{\omega=k\omega_0}$

这就是说,若将  $\omega$  看作一个连续的变量,则函数  $(2 \sin \omega T_1) / \omega$  就代表  $Ta_k$  的包络。而且,若  $T_1$  固定,则  $Ta_k$  的包络就与  $T$  无关。

见图4.2

由图可见，随着 $T$ 增加，该包络就被以愈来愈密集间隔采样。随着 $T$ 变得任意大，原来的周期方波就趋近于一个矩形脉冲。

与此同时，傅里叶级数系数作为包络上的样本也变得愈来愈密集，这样从某种意义上说，随着 $T \rightarrow \infty$

傅里叶级数系数就趋近于这个包络函数（因为

$\omega_0 = 2\pi / T$ ，当 $T \rightarrow \infty$ 时， $\omega_0 \rightarrow 0$ ）。

这说明，可以把非周期信号当作周期信号在周期任意大时的极限来看待。

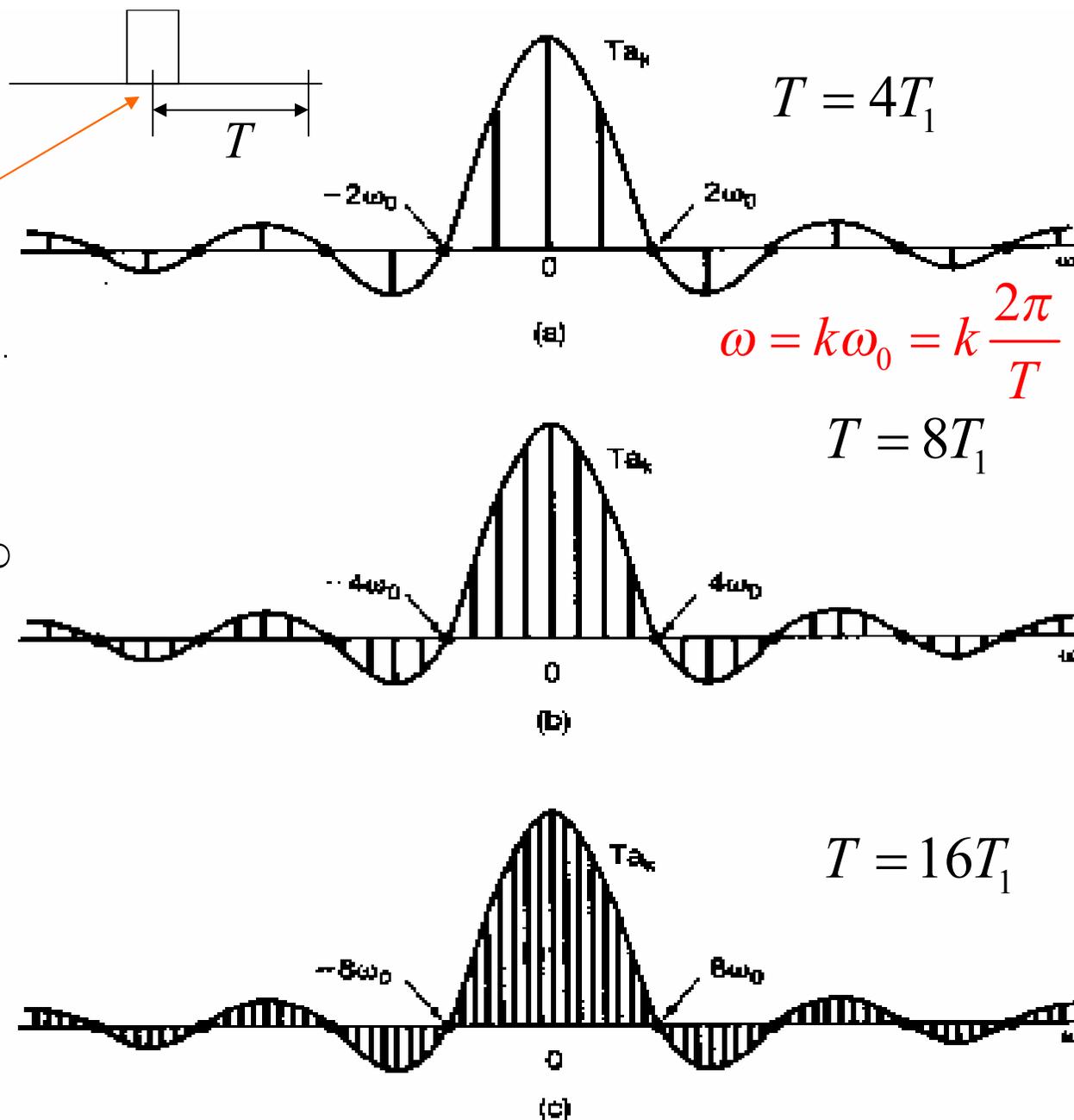


图 4.2 周期方波的傅里叶级数系数及其包络， $T_1$  固定：  
(a)  $T = 4T_1$ ；(b)  $T = 8T_1$ ；(c)  $T = 16T_1$

2、再看一个信号  $x(t)$  ,它具有有限持续期,即满足:  $x(t)=0$  ,  $|t|>T_1$

如图4.3 (a) 所示。将  $x(t)$  进行**周期延拓**,构成一个周期信号  $\tilde{x}(t)$  ,

如(b)所示。

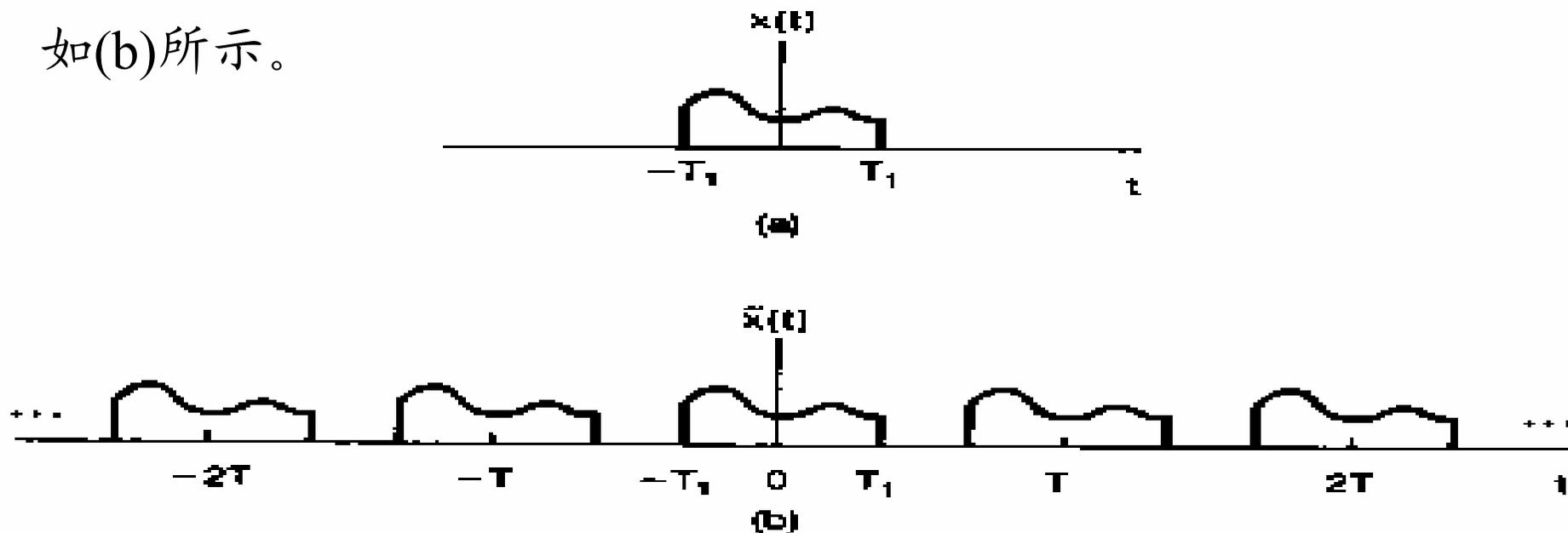


图 4.3 (a)非周期信号  $x(t)$ ; (b)由  $x(t)$  为一个周期构成的周期信号  $\tilde{x}(t)$

延拓构成的周期信号满足

$$\tilde{x}(t) = x(t) \quad , \quad |t| \leq T_1 \quad \text{和} \quad T > 2T_1$$

以及

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{x}(t)$$

将  $\tilde{x}(t)$  展开成傅里叶级数有

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = 2\pi / T \quad (4.3)$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (4.4)$$

由于 
$$x(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & , |t| < T/2 \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$$

所以(4.4)可重写为

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

因此,定义  $Ta_k$  的包络  $X(j\omega)$  为

$$X(j\omega) = Ta_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.5)$$

称  $x(t)$  的傅立叶变换式

$$a_k = \frac{1}{T} X(j\omega) \Big|_{\omega=k\omega_0} = \frac{1}{T} X(jk\omega_0) \quad (4.6) \quad \text{代入 (4.3) 可得}$$

将(4.6)代入(4.3)式得  $\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$

因为  $\omega_0 = 2\pi / T$  ,所以  $\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$

随着  $T \rightarrow \infty$  (即  $\omega_0 \rightarrow 0$ ), 则  $\tilde{x}(t) \rightarrow x(t)$ , 因此有

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \tilde{x}(t) = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

根据微积分知识,上式中无穷项累加的极限可以取积分形式,即

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.8) \quad \leftarrow \text{称傅立叶反变换式}$$

上式(4.8)和(4.5)式一起称为傅里叶变换对。现重写于下:

傅里叶变换对为

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

称为傅里叶反变换式

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

(4.9) 称为傅里叶变换式

可表示为

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

函数  $X(j\omega)$  称为  $x(t)$  的傅里叶变换或傅里叶积分，——也称  $x(t)$  的频谱

#### 4.1.2 傅里叶变换的收敛

与周期信号的傅里叶级数一样,傅里叶变换对相当广泛的一类信号,特别是对一些实际有用的信号是适用的但并不是对所有信号都适用。傅里叶变换也存在着两组收敛条件。

下面将考虑

令  $\hat{x}(t)$  为傅里叶反变换得到的信号, 即

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

1、若 $x(t)$ 能量有限，即 $x(t)$ 平方可积

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

傅立叶级数时

$$\int_T |x(t)|^2 dt < \infty$$

则 $x(t)$ 的傅里叶变换存在。

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} |e(t)|^2 dt = 0$$

其中 
$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$$

如果以上**两点**成立，则虽然 $\hat{x}(t)$ 和 $x(t)$ 在个别点上或许有明显的不同但是在**能量上没有任何差别**。

2、傅里叶变换还有另一组条件——狄里赫利条件。

狄里赫利条件为：

$$1) 、 x(t) \text{ 绝对可积, 即 } \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$$

傅立叶级数时

$$\int_T |x(t)| dt < \infty$$

2) 、 在任何有限区间内， $x(t)$ 只有有限个最大值和最小值。

3)、在任何有限区间内,  $x(t)$  有有限个不连续点, 并且在每个不连续点都必须是有有限值。

从该收敛条件可以得出, 本身是连续的或者只有有限个不连续点的绝对可积信号一般都存在傅里叶变换。

**注意:** 这两组条件给出的是: 一个信号存在傅立叶变换的充分条件, 不是必要条件。因此在下一节会看到一些既不绝对可积又不具备平方可积的周期信号也可以具有傅立叶变换。

这样就有可能把傅立叶级数和傅立叶变换纳入到一个统一的框架内。

#### 4.1.3 连续时间傅里叶变换举例

是单边指数信号

例4.1 求信号  $x(t) = e^{-at}u(t)$   $a > 0$  的傅里叶变换。

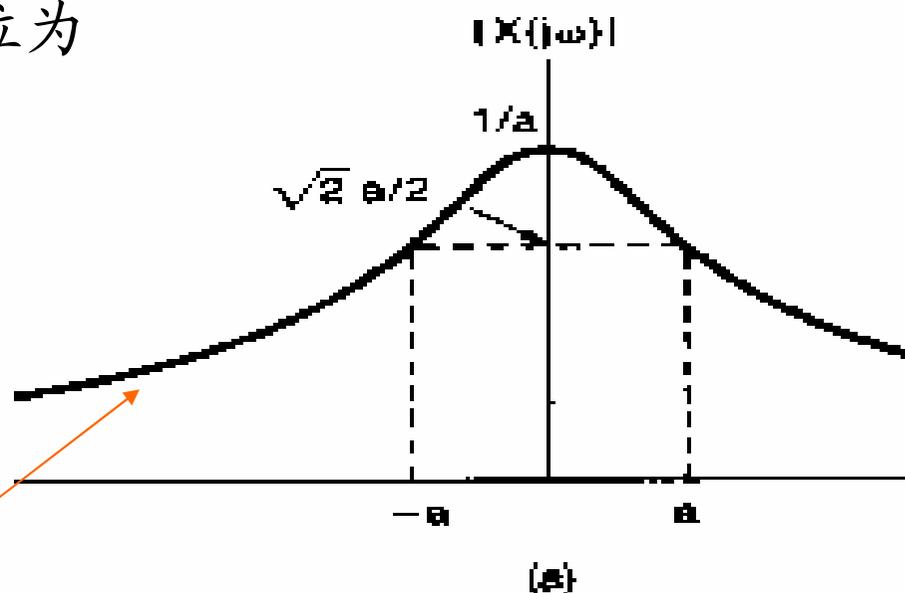
解: 由傅立叶变换式, 可得

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \\ &= -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned}$$

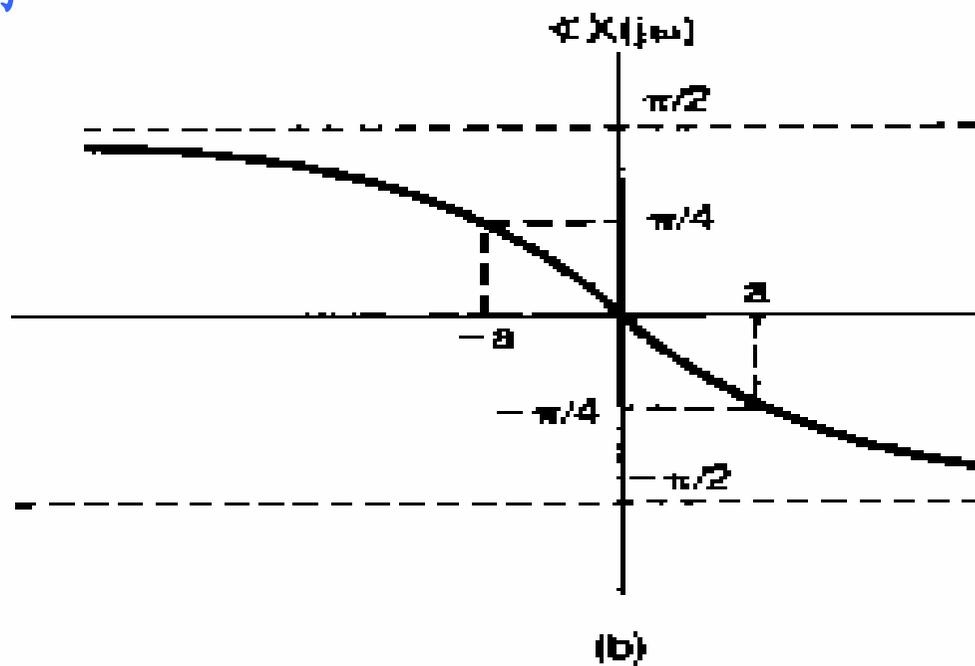
这个傅里叶变换是复数,其模和相位为

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

$$\angle X(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



注意: 这谱线是连续的



免费下载网

例4.2 求信号  $x(t) = e^{-a|t|}$  ,  $a > 0$  的傅里叶变换。

$$\begin{aligned} \text{解: } X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

这时  $X(j\omega)$  是**实数**。如图4.7所示。

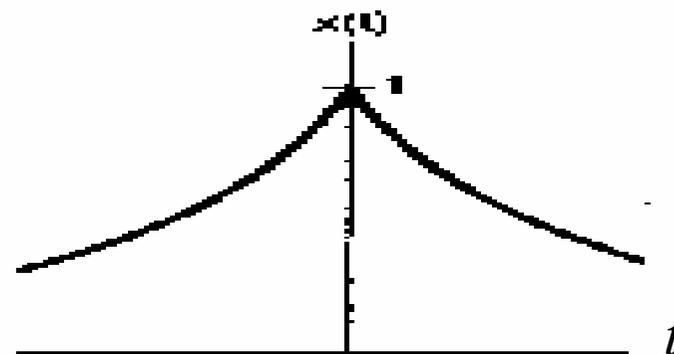


图4.6 例 4.2 中的信号  $x(t)$

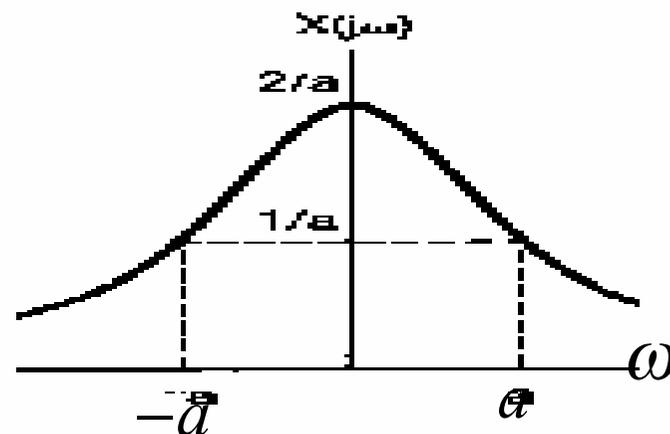


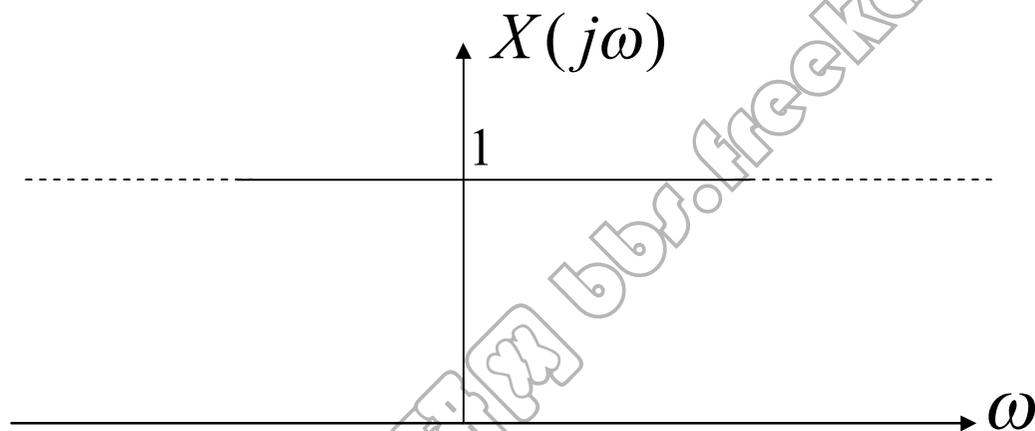
图4.7 信号的傅里叶变换

### 例4.3 求单位冲激函数的傅里叶变换

解:

$$\because x(t) = \delta(t)$$

$$\therefore X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$



这就是说,单位冲激函数的**频谱**在所有频率上都是相同的.

例4.4 考虑下面矩形信号

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$

如图4.8(a)所示,求它的傅里叶变换。

解:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{1}{-j\omega} (e^{-j\omega T_1} - e^{j\omega T_1}) \\ &= 2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega} = 2T_1 \frac{\sin \omega T_1}{\omega T_1} = 2T_1 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right) \end{aligned}$$

$$[\because \operatorname{sinc}(\theta) = \frac{\sin \pi\theta}{\pi\theta} \quad \leftarrow \text{sinc函数}]$$

$$\therefore \frac{\sin(\omega T_1)}{\omega T_1} = \frac{\sin\left(\frac{\omega T_1}{\pi} \pi\right)}{\frac{\omega T_1}{\pi} \pi} = \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)]$$

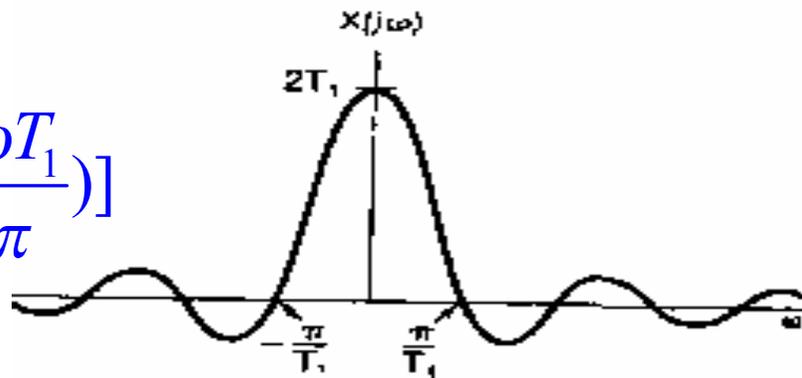
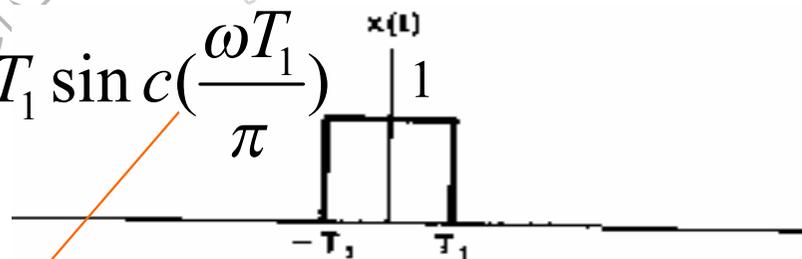
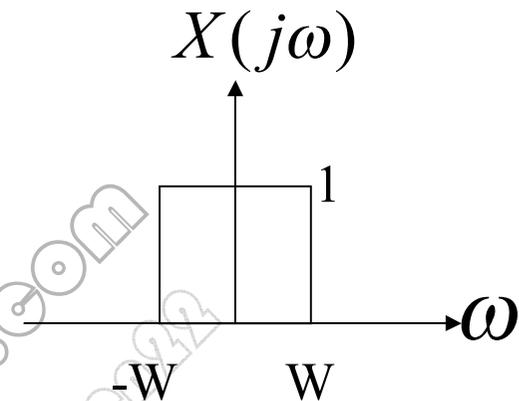


图 4.8 (a) 例 4.4 中的矩形脉冲信号;

例4.5 已知信号的傅里叶变换为

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad |\omega| < W \\ 0 & , \quad |\omega| > W \end{cases} \quad (4.18)$$



求  $x(t)$

解:利用综合公式可得

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi jt} e^{j\omega t} \Big|_{-W}^W = \frac{1}{2\pi jt} (e^{jWt} - e^{-jWt}) \\ &= \frac{\sin Wt}{\pi t} = \frac{W}{\pi} \frac{\sin Wt}{Wt} = \frac{W}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

如图4.9(b)所示

比较例4.4和例4.5可发现:

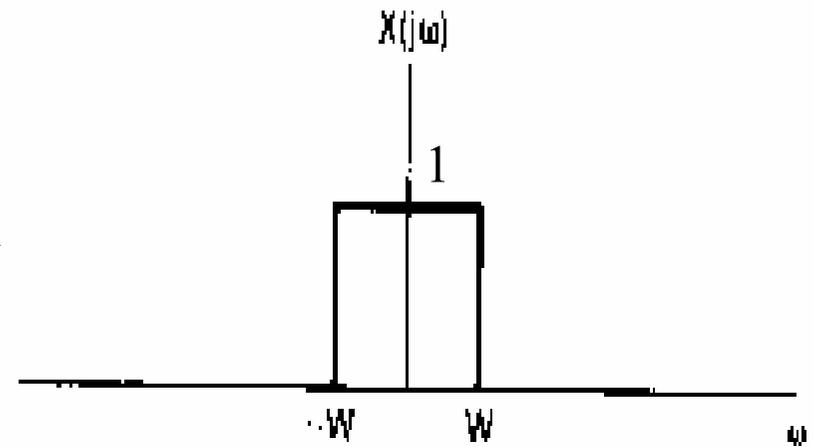
1、傅里叶变换对都是形式为  $(\sin a\theta) / b\theta$  的函数和一个矩形脉冲所组成。(在例4.4中信号是脉冲;在例4.5中变换  $X(j\omega)$  是一个脉冲.) 这种特殊关系, 显然是傅里叶变换具有对偶性的一个直接结果。

2、 $(\sin a\theta) / b\theta$  的函数形式在分析及LTI系统的研究中具有特殊的重要作用, 因此往往给予它特别的名称和符号。通常将

$\sin x / x$  定义为  $Sa(x)$  称为抽样函数

$\sin \pi x / \pi x = \text{sinc}(x)$  称为  $\text{sinc}$  函数

显然,  $\text{sinc}(x)$  就是将  $Sa(x)$  的自变量作尺度变换的结果, 或者说是以  $\pi$  作为因子进行归一的结果。



$$x(t) = \frac{W \sin Wt}{\pi Wt} = \frac{W}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$$

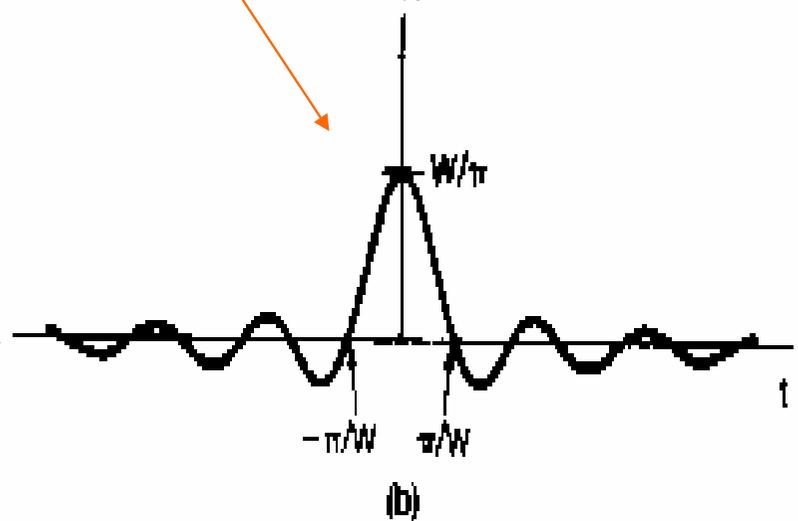


图 4.9 例 4.5 的傅里叶变换对:

(a) 例 4.5 的傅里叶变换; (b) 相应的时间函数

### 3、W对信号和频谱的影响

1)、当W增大时:

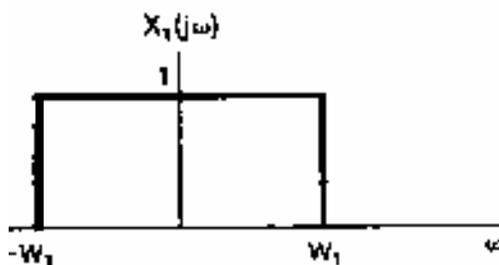
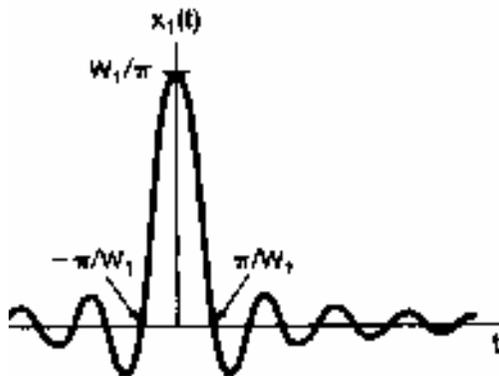
- $X(j\omega)$  变宽;
- $x(t)$ 在时域被压缩, 其主瓣 (即  $|t| < \pi/W$  部分) 变得愈来愈窄;
- 主瓣的幅度则变得愈来愈大

2)、当  $W \rightarrow \infty$  的极限下

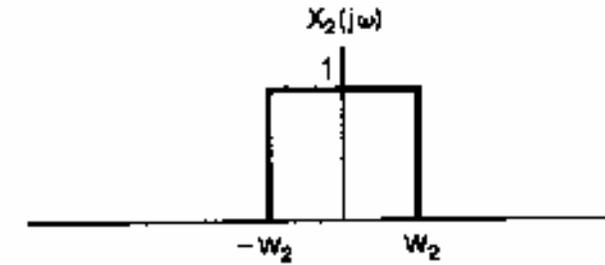
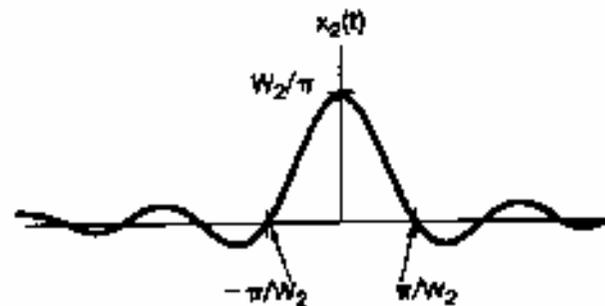
$$X(j\omega) = 1, \quad -\infty < \omega < \infty$$

(见例4.3)

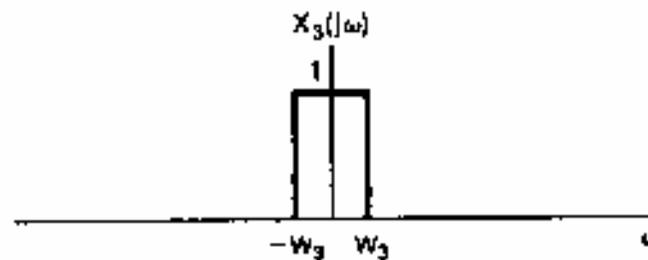
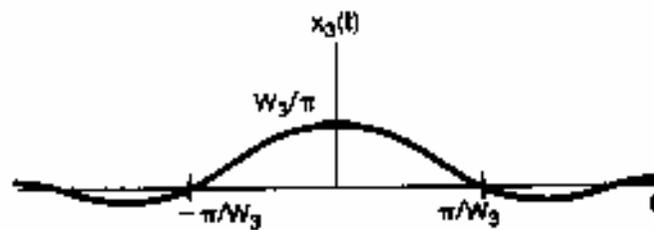
$x(t)$  将表现为一个冲激函数。



(a)

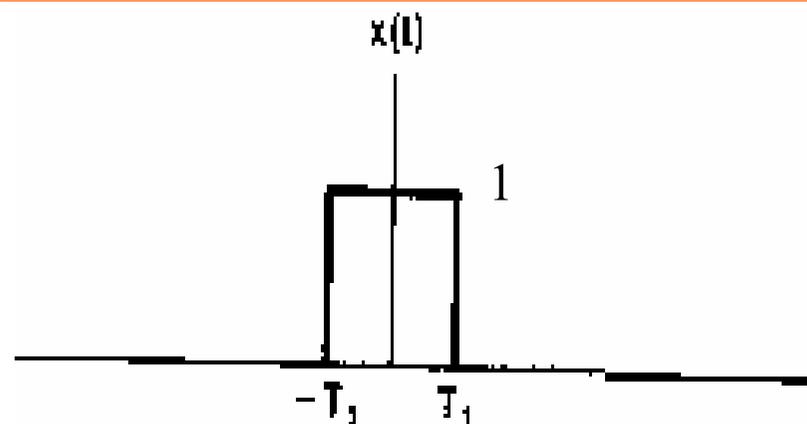
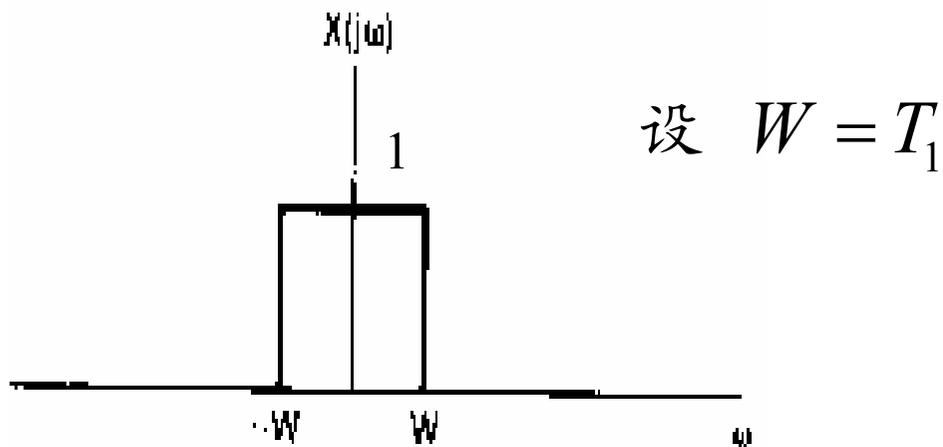


(b)

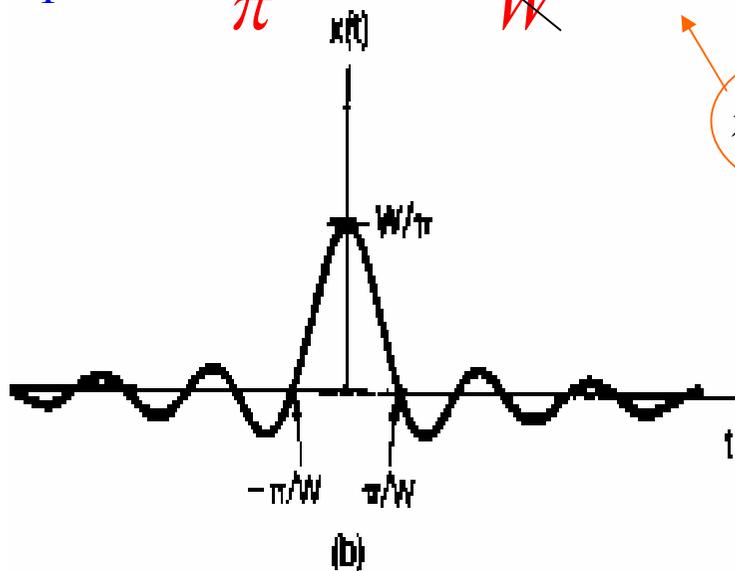


(c)

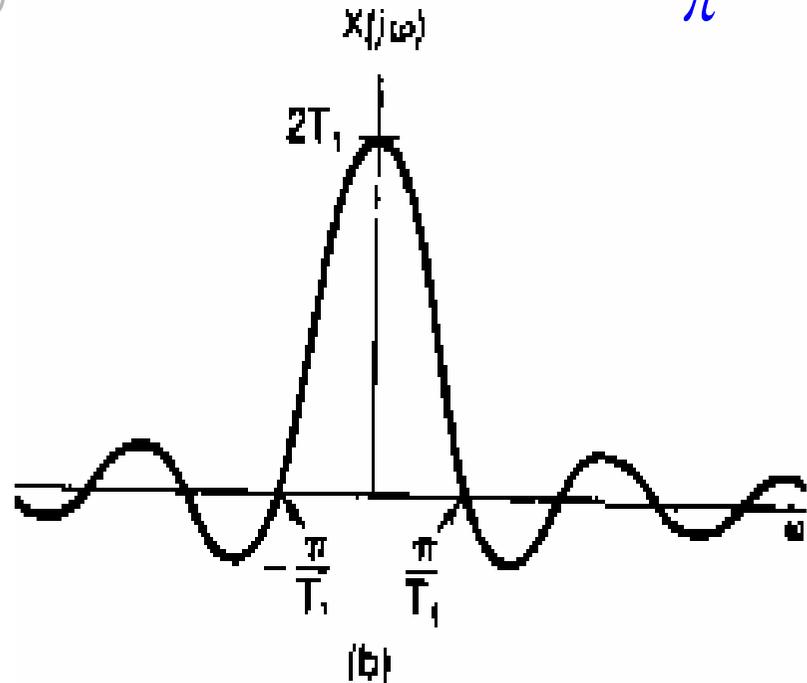
图 4.11 对于几个不同的 W 值, 图 4.9 的傅里叶变换对



$$T_1 \operatorname{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right) \xleftrightarrow{F} \frac{\pi}{W} X(j\omega) \quad 2T_1$$



$$x(t) \xleftrightarrow{F} 2T_1 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$



相差  $2\pi$

4.9 例 4.5 的傅里叶变换对:

(a) 例 4.5 的傅里叶变换; (b) 相应的时间函数

图 4.8 (a) 例 4.4 中的矩形脉冲信号;

## 4.2 周期信号的傅里叶变换

我们已经知道,满足收敛条件的周期信号可以用傅里叶级数来表示;非周期信号可以用傅里叶变换来表示。这虽然解决了周期信号与非周期信号如何在频域分解的问题,但不同的表示方法总会给我们造成某些不便。如果能将它们统一起来,无疑将会给我们带来许多便利。由于任何周期信号都不满足绝对可积的条件,因此不可能按照傅里叶变换的定义去建立周期信号的傅里叶变换。所幸的是,狄里赫利条件只是傅里叶变换存在的充分条件。

我们将会看到有些信号尽管不满足这些条件,但它们的傅里叶变换依然存在,因此建立周期信号的傅里叶变换表示是可能的。

例: 求直流信号的傅里叶变换

$$x(t) = 1, \quad -\infty < t < \infty$$

← 不满足绝对可积的条件

解: 它可以看作是双边指数函数  $x(t) = e^{-a|t|}$  中  $a \rightarrow 0$  的极限情况, 即

$$x(t) = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-a|t|} = 1$$

已知双边指数函数的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} X_1(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

当  $a \rightarrow 0$  时, 有

$$\lim_{a \rightarrow 0} X_1(j\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} = \begin{cases} 0 & , \omega \neq 0 \\ \infty & , \omega = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{存在一个冲激}$$

并且

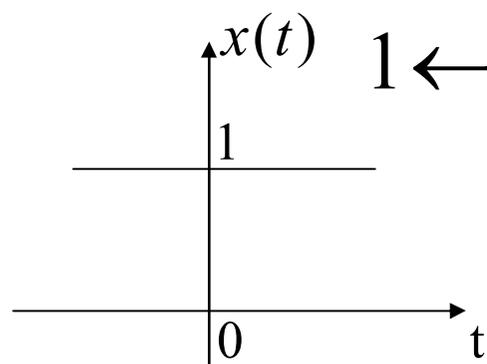
$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} d\omega = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2} d\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0} 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{a}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 2\pi$$

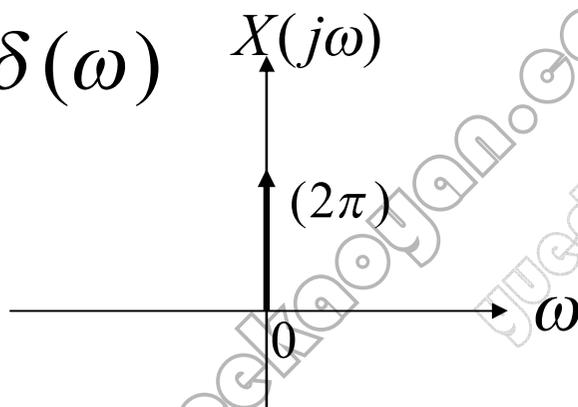
由此可知: 在  $\omega = 0$  处存在一个冲激强度为  $2\pi$  的冲激函数, 即

$$X(j\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} X_1(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

直流信号及其频谱如下图所示



$$1 \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega)$$



注意:

$$\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1$$

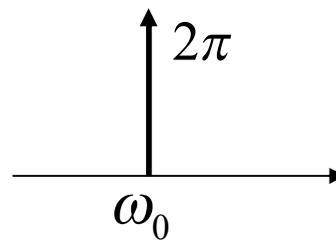
例: 考虑一个信号  $x(t)$ , 其傅里叶变换  $X(j\omega)$  是一个面积为  $2\pi$ , 出现在  $\omega = \omega_0$  处的单独的一个冲激, 即  $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

求  $x(t)$

解: 由傅里叶反变换公式得

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}$$



频移性

$$1 \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega)$$

$$\text{即: } e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

将上面结果加以推广，

$$\text{因为} \quad e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

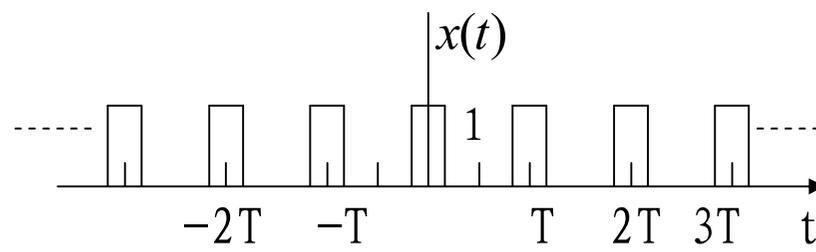
$$\therefore x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

可以看出：周期信号可以用傅里叶变换来表示，它由频域中一组等间隔的冲激函数线性组合而成，每个冲激的强度等于响应的傅里叶级数系数  $a_k$  的  $2\pi$  倍。

也可用傅立叶反变换来验证：

$$\begin{aligned} \therefore x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \end{aligned} \quad 285$$

例4.6 考虑图4.1的方波信号,傅里叶级数系数为



$$a_k = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{\pi k}$$

因此,该信号的傅里叶变换为

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$$

如图4.12所示 (图对应于  $T = 4T_1$  画出)

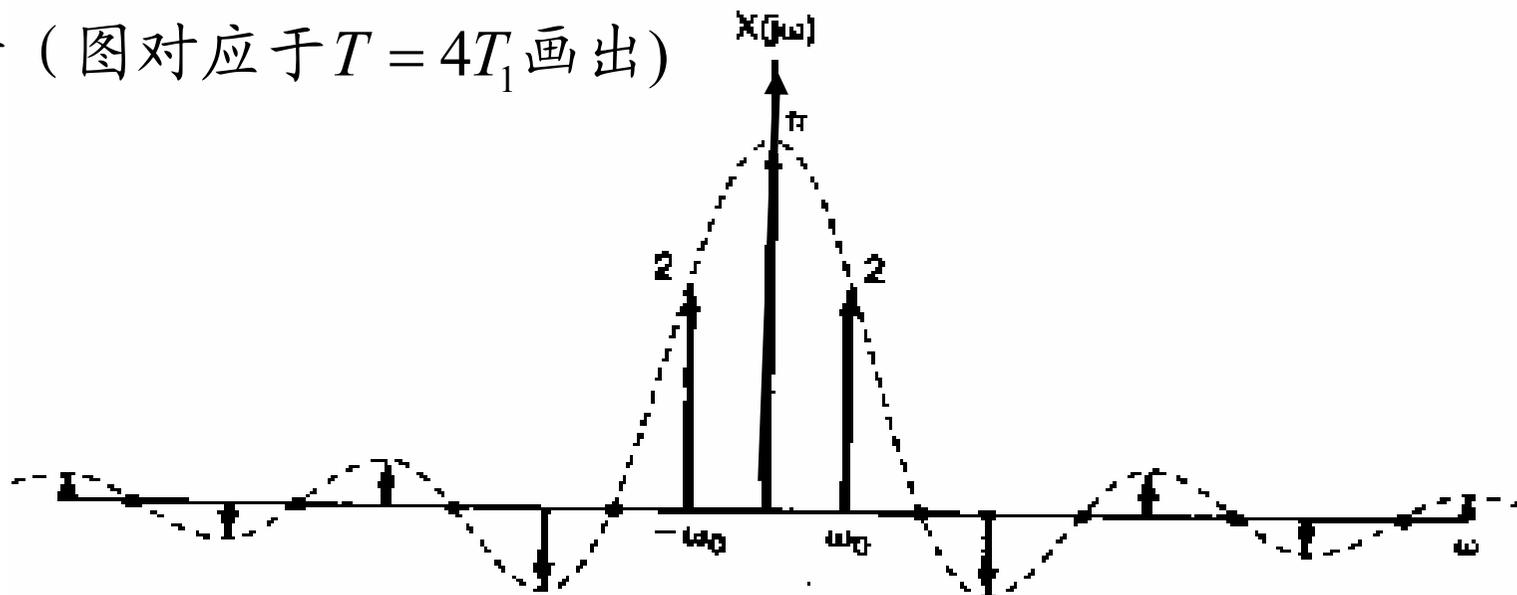


图 4.12 一对称周期方波的傅里叶变换

例4.7

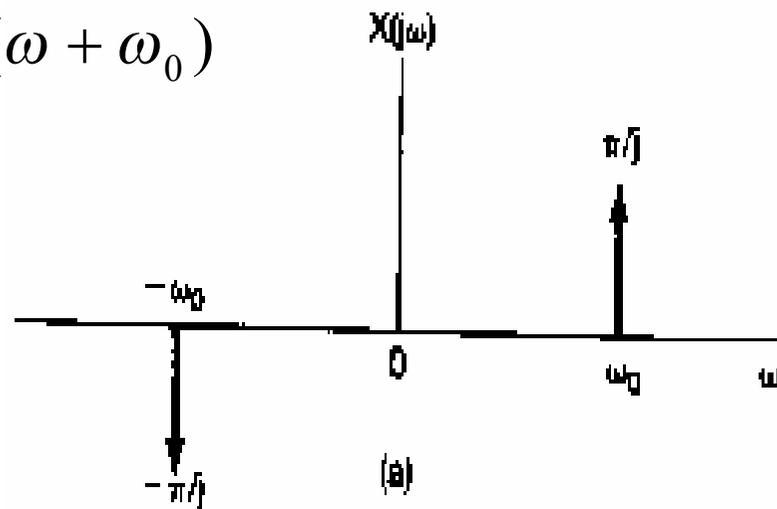
1、设 $x(t)$ 为 
$$x(t) = \sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

该信号的傅里叶级数系数为 
$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2j} & a_{-1} = -\frac{1}{2j} \\ a_k = 0, & k \neq \pm 1 \end{cases}$$

因此,其傅里叶变换为:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \\ &= 2\pi a_1 \delta(\omega - \omega_0) + 2\pi a_{-1} \delta(\omega + \omega_0) \\ &= 2\pi \frac{1}{2j} \delta(\omega - \omega_0) - 2\pi \frac{1}{2j} \delta(\omega + \omega_0) \\ &= \frac{\pi}{j} \delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{j} \delta(\omega + \omega_0) \\ &= \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

见图4.13 (a)



2、设信号为 
$$x(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

它的傅里叶系数为 
$$\begin{cases} a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2} \\ a_k = 0, \quad k \neq \pm 1 \end{cases}$$

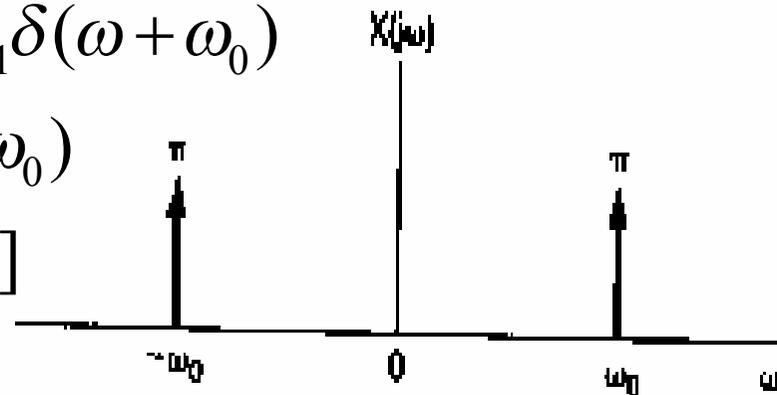
该信号的傅里叶变换为

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$= 2\pi a_1 \delta(\omega - \omega_0) + 2\pi a_{-1} \delta(\omega + \omega_0)$$

$$= \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)$$

$$= \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$



见图4.13(b)

图 4.13 (a)  $x(t) = \sin \omega_0 t$  的傅里叶变换; (b)  $x(t) = \cos \omega_0 t$  的傅里叶变换

例4.8 设信号是周期为T的周期冲激串

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

求：它的傅里叶变换

解：选取积分区间为  $-T/2 \leq t \leq T/2$ ，则傅里叶系数为

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

这就是说，周期冲激串的每一个傅里叶系数都有相同的值 $1/T$ 。

该信号的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \\ &= \frac{2\pi}{T} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T} k\right) \end{aligned}$$

可见，在时域周期为T的周期性冲激串的傅里叶变换，在频域是一个周期为  $2\pi/T$  的周期冲激串。

### 4.3 连续时间傅里叶变换性质——（见P233页表4.1）

讨论这些性质的目的在于：

- 1、通过它们深刻揭示信号在时域的描述与其在频域的描述之间的关系。
- 2、简化傅里叶变换或反变换的求取。
- 3、由于一个周期信号的傅里叶级数和傅里叶变换表示之间存在着密切关系，利用这一关系就能把傅里叶变换的性质直接转移到对应的傅里叶级数性质中去。

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

为了方便，我们常常用  $F\{x(t)\}$  表示  $X(j\omega)$ ；用  $F^{-1}\{X(j\omega)\}$  表示  $x(t)$ 。

或者将傅里叶变换对表示为  $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$

#### 4.3.1 线性

若  $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$  ,  $y(t) \xleftrightarrow{F} Y(j\omega)$

$$ax(t) + by(t) \xleftrightarrow{F} aX(j\omega) + bY(j\omega)$$

证明：设信号  $z(t) = ax(t) + by(t)$ ，则该信号的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [ax(t) + by(t)]e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} ax(t)e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} by(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= aX(j\omega) + bY(j\omega) \end{aligned}$$

即得

$$ax(t) + by(t) \xleftrightarrow{F} aX(j\omega) + bY(j\omega)$$

#### 4.3.2 时移性质

若

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

则有

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

证明：

$$\because x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

在该式中以  $t - t_0$  取代  $t$ ，可得

$$x(t-t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{-j\omega t_0} X(j\omega)] e^{j\omega t} d\omega$$

所以得  $F\{x(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$

或者  $x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$

这个性质表明:信号在时间上移位,并不改变它的傅里叶变换的模;即若将  $X(j\omega)$  用极坐标表示

$$F\{x(t)\} = X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\angle X(j\omega)}$$

那么

$$F\{x(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0} X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j[\angle X(j\omega) - \omega t_0]}$$

可见,信号在时间上的移位只是在它的变换中引入相移(即  $-\omega t_0$ ),该相移与频率成线性关系。

例4.9 已知信号如图4.15(a)所示,求它的傅里叶变换。

解: 信号 $x(t)$ 可认为是由图(b)的 $x_1(t)$ 和图(c)的 $x_2(t)$ 经右移2.5后线性组合而成。

即

$$x(t) = \frac{1}{2}x_1(t-2.5) + x_2(t-2.5)$$

因为矩形脉冲信号的傅里叶变换为

$$X_1(j\omega) = \int_{-1/2}^{1/2} x_1(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-1/2}^{1/2}$$

$$= \frac{1}{-j\omega} (e^{-j\omega/2} - e^{j\omega/2}) = \frac{2(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})}{\omega \cdot 2j}$$

$$= \frac{2}{\omega} \sin(\omega/2)$$

$$X_2 = \frac{2}{\omega} \sin(3\omega/2)$$

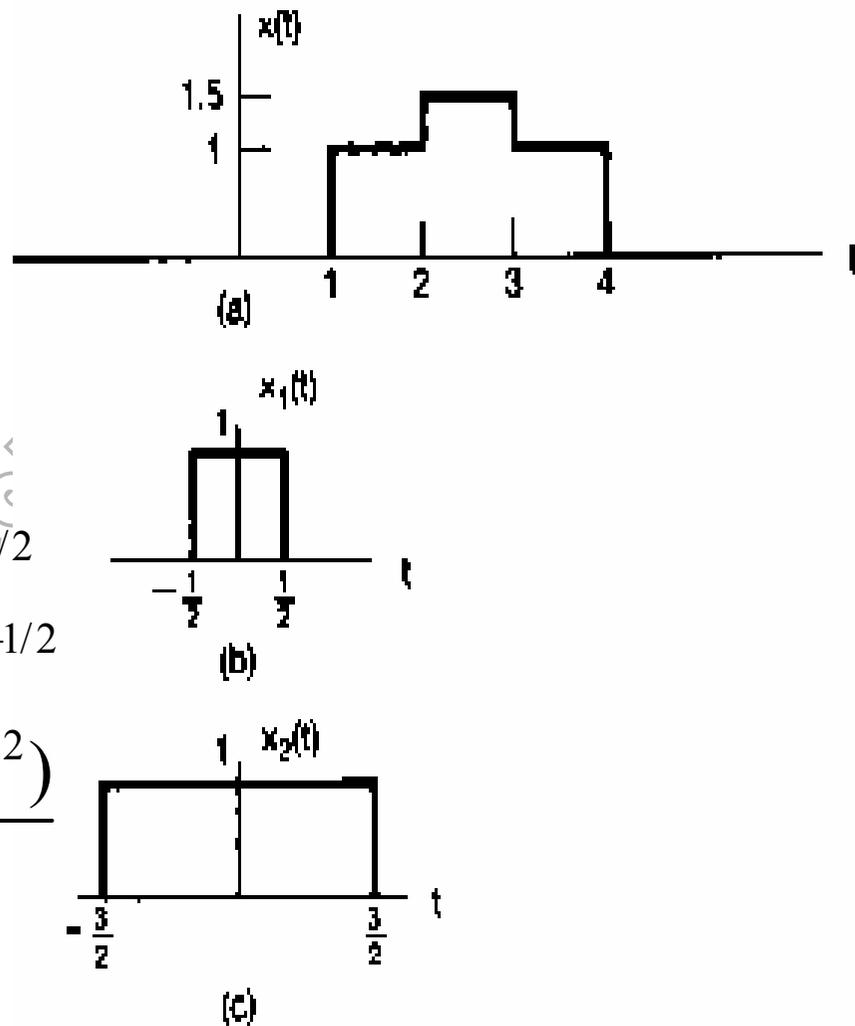


图4.15

将一个信号分解为两个简单信号的线性组合:

(a)例4.9中的信号 $x(t)$ ;

(b)和(c)是用来表示 $x(t)$ 的两个简单信号

利用傅里叶变换的线性和时移性质,可得

$$x(t) = \frac{1}{2}x_1(t-2.5) + x_2(t-2.5) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = e^{-j5\omega/2} \left[ \frac{1}{2}X_1(j\omega) + X_2(j\omega) \right]$$

$$\text{即 } X(j\omega) = e^{-j5\omega/2} \left\{ \frac{\sin(\omega/2) + 2\sin(3\omega/2)}{\omega} \right\}$$

### 4.3.3 共轭及共轭对称性

1、**共轭性质**指,若  $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$

$$\text{则有 } x^*(t) \xleftrightarrow{F} X^*(-j\omega) \quad (4.28)$$

证明:  $\because X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$

上式取共轭,得  $X^*(j\omega) = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \right]^* = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{j\omega t} dt$

以  $-\omega$  替代  $\omega$ , 得  $X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{-j\omega t} dt$  (4.29)

上式即为

$$x^*(t) \xleftrightarrow{F} X^*(-j\omega)$$

#证毕

## 2、 共轭对称性

1) 若 $x(t)$ 为实函数, 即有  $x(t) = x^*(t)$

而由(4.29)式, 可得  $X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = X(j\omega)$

可见, 此时

$$X(j\omega) = X^*(-j\omega) \quad [x(t) \text{ 为实函数}]$$

用  $-\omega$  替换  $\omega$  得  $X(-j\omega) = X^*(j\omega)$  (4.30)

(也可看成是对上式两边取共轭得到)

所以说, 当  $x(t)$  为实函数时,  $X(j\omega)$  具有共轭对称性.

2) 进一步分析 (4.30) 式: 如果将  $X(j\omega)$  用直角坐标表示, 即

$$X(j\omega) = \Re\{X(j\omega)\} + j \Im\{X(j\omega)\}$$

• 若  $x(t)$  为实函数, 则有

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)[\cos \omega t - j \sin \omega t] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin \omega t dt = \Re\{X(j\omega)\} - j \Im\{X(j\omega)\} \end{aligned}$$

即  $\Re\{X(j\omega)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos \omega t dt$

$\Im\{X(j\omega)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin \omega t dt$  设  $\tau = -t$

•  $x(-t)$ 的傅立叶变换为:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(-t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega(-\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-(-j\omega)\tau} d\tau = X(-j\omega)$$

$$\begin{aligned} X(-j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) [\cos \omega \tau + j \sin \omega \tau] d\tau \\ &= \Re\{X(-j\omega)\} - j \Im\{X(-j\omega)\} \end{aligned}$$

即  $\Re\{X(-j\omega)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cos \omega \tau d\tau$

$$\Im\{X(-j\omega)\} = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \sin \omega \tau d\tau$$

可见此时

$$\begin{aligned} \Re\{X(j\omega)\} &= \Re\{X(-j\omega)\} \\ \Im\{X(j\omega)\} &= -\Im\{X(-j\omega)\} \end{aligned}$$

由上式可知,傅里叶变换的实部是频率的偶函数;而虚部则是频率的奇函数。因此,当欲计算一个实值信号的傅里叶变换时,只需求出 $\omega > 0$ 时的值就可以了。

$\omega < 0$  时的值，可利用上面导出的关系，直接从  $\omega > 0$  时的值得出。

- 若  $x(t)$  不仅为实函数，而且是偶函数

根据信号傅里叶变换，可写出 
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

用  $\tau = -t$  替换，可得 
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau)e^{j\omega\tau} d\tau$$

因为是偶函数，即 
$$x(\tau) = x(-\tau)$$

是偶函数

所以有 
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-(-j\omega)\tau} d\tau = X(-j\omega)$$

即此时  $X(j\omega)$  为偶函数。

由共轭对称性可知，实函数有 
$$X(-j\omega) = X^*(j\omega)$$

所以得

$$X(j\omega) = X^*(j\omega)$$

是实函数

即  $X(j\omega)$  为实、偶函数。

- 若  $x(t)$  为实、奇函数

$$\begin{aligned} \because X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt \end{aligned}$$

而  $x(t)$  为实、奇函数。所以上式等号右边 **第一项等于零**，即变为

$$X(j\omega) = -j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin \omega t dt$$

可见，此时  $X(j\omega)$  是 **纯虚且为奇** 函数。

- 3、当实函数  $x(t)$  用奇、偶函数来表示时

若一个实函数用其偶部和奇部表示，即  $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$

其中

$$x_e(t) = E_v \{ x(t) \} = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$$

$$x_o(t) = O_d \{ x(t) \} = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]$$

根据傅里叶变换的线性性质，有

$$\begin{aligned} F\{x(t)\} &= F\{x_e(t)\} + F\{x_o(t)\} \\ &= \operatorname{Re}\{X(j\omega)\} + j \operatorname{Im}\{X(j\omega)\} \end{aligned}$$

因为， $x_e(t)$  是一个实、偶函数，所以  $F\{x_e(t)\}$  也是一个实偶函数；

因为， $x_o(t)$  是一个实、奇函数，所以  $F\{x_o(t)\}$  是一个纯虚函数。

于是可得出以下结论：

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = \operatorname{Re}\{X(j\omega)\} + j \operatorname{Im}\{X(j\omega)\}$$

$$x_e(t) = E_v\{x(t)\} \xleftrightarrow{F} \operatorname{Re}\{X(j\omega)\}$$

$$x_o(t) = O_d\{x(t)\} \xleftrightarrow{F} j \operatorname{Im}\{X(j\omega)\}$$

也就是说，一个实函数的频谱的实部是由其偶部贡献；而频谱的虚部是由其奇部贡献。上述结果，完全适用于周期信号的傅里叶级数。

例4.10 已知信号  $x(t) = e^{-a|t|}$  ,  $a > 0$

应用共轭对称性来求它的傅里叶变换.

解: 因为信号  $x_1(t) = e^{-at}u(t)$  的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} X_1(j\omega) &= \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \\ &= -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned}$$

又因为,  $x(t) = e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$   $\because E_v \{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$

所以  $x(t) = 2 \left[ \frac{e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)}{2} \right] = 2E_v \{e^{-at}u(t)\}$

因为  $e^{-at}u(t)$  是实值函数, 由对称性质可得

$$E_v \{e^{-at}u(t)\} \xleftrightarrow{F} \Re_e \{X_1(j\omega)\} = \Re_e \left\{ \frac{1}{a+j\omega} \right\}$$

$$X(j\omega) = 2\Re_e \left\{ \frac{a-j\omega}{(a+j\omega)(a-j\omega)} \right\} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \text{——与例4.2的结果一样。}$$

#第9次 05-4-15

题3.5 已知  $x_2(t) = x_1(1-t) + x_1(t-1)$

- 1、问  $x_2(t)$  的基波频率  $\omega_2$  与  $x_1(t)$  的基波频率  $\omega_1$  是什么关系？
- 2、求  $x_2(t)$  的傅立叶级数系数  $b_k$  与  $x_1(t)$  的傅立叶系数  $a_k$  之间的关系。

解：1、因为  $x_1(1-t)$  和  $x_1(t-1)$  只是  $x_1(t)$  的时移和反转，所以它们的基波频率不变。而  $x_2(t)$  只是以上信号的叠加，因此  $\omega_2 = \omega_1$

2、因为  $x_1(t)$  的傅立叶系数为  $a_k$ ，所以

$$x_1(1-t) = x_1(-(t-1)) \xrightarrow{FS} a_{-k} e^{-jk\omega_1 \cdot 1}$$

$$x_1(t-1) \xrightarrow{FS} a_k e^{-jk\omega_1 \cdot 1}$$

$$x_2(t) = x_1(1-t) + x_1(t-1) \xrightarrow{FS} b_k = a_{-k} e^{-jk\omega_1} + a_k e^{-jk\omega_1} = e^{-jk\omega_1} (a_{-k} + a_k)$$

题3.11 现对一信号小 $x[n]$  给出如下信息:

1、 $x[n]$  是实偶信号

2、 $x[n]$  有周期 $N = 10$ 和傅立叶系数  $a_k$

3、 $a_{11} = 5$

4、
$$\frac{1}{10} \sum_{n=0}^9 |x[n]|^2 = 50$$

证明  $x[n] = A \cos(Bn + C)$  , 并给出常数A, B和C的值。

证明: 因为 $x[n]$ 为实偶信号, 所以 $a_k$ 也是实偶的。

因为  $a_{11} = 5$  , 所以  $a_{11-10} = a_1 = a_{-1} = a_9 = 5$

根据帕斯瓦尔定理 
$$\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2 = 50$$

$$\because a_1^2 + a_9^2 = 25 + 25 = 50 \quad \therefore a_k = 0 \quad k \neq 1, 9$$

$$\begin{aligned} \therefore x[n] &= a_1 e^{j\omega_0 n} + a_9 e^{j9\omega_0 n} = 5(e^{j\omega_0 n} + e^{j9\omega_0 n}) \\ &= 5[(\cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n) + (\cos 9\omega_0 n + j \sin 9\omega_0 n)] \\ &= 5[(\cos \omega_0 n + \cos 9\omega_0 n) + j(\sin \omega_0 n + \sin 9\omega_0 n)] \\ &= 5\left(\cos \frac{2\pi}{10} n + \cos 9 \frac{2\pi}{10} n\right) = 5\left[\cos\left(\frac{\pi}{5} n\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{5} n\right)\right] \\ &= 10\left[\cos\left(\frac{\pi}{5} n\right)\right] \end{aligned}$$

$$x[n] = A \cos(Bn + C)$$

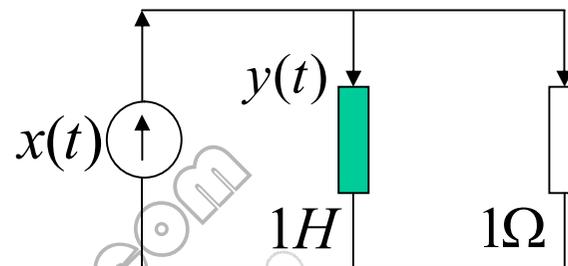
$$A = 10 \quad , B = \frac{\pi}{5} \quad , C = 0$$

### 题3 .19

a)、求关联 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的微分方程。

b)、求系统对输入为 $x(t) = e^{j\omega t}$ 的系统频率响应。

c)、若 $x(t) = \cos(t)$ ，求输出 $y(t)$ 。



解:

a)、
$$y(t) = x(t) - \frac{L}{R} \frac{dy(t)}{dt} = x(t) - \frac{dy(t)}{dt}, \quad \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

b)、 $\because x(t) = e^{j\omega t} \quad \therefore y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$ 代入微分方程得:

$$H(j\omega)j\omega e^{j\omega t} + H(j\omega)e^{j\omega t} = e^{j\omega t}, \quad H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

注意:  $\because e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1+j\omega} \quad \therefore h(t) = e^{-t}u(t)$

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}u(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(j\omega+1)t} dt = \frac{1}{j\omega + 1}$$

c)、由(a)已求得系统的微分方程为:  $y'(t) + y(t) = x(t)$

由(b)已求得系统的频率响应为  $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$

又  $\because x(t) = \cos t = \frac{1}{2}(e^{jt} + e^{-jt})$  可见  $\omega = 1$

$$\begin{aligned}\therefore y(t) &= H(j\omega)x(t) = \left(\frac{1}{1+j}\right) \frac{1}{2}(e^{jt} + e^{-jt}) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{jt}}{1+j} + \frac{e^{-jt}}{1-j}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{jt}}{\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}} + \frac{e^{-jt}}{\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} [e^{j(t-\frac{\pi}{4})} + e^{-j(t-\frac{\pi}{4})}] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

题3.42 令 $x(t)$ 是一个基波周期为 $T$ 和傅立叶系数为 $a_k$ 的实值信号。

(c) 证明: 若 $x(t)$ 是奇函数, 则它的傅立叶系数是虚数且为奇函数,  $a_0 = 0$ 。

解:

$$\begin{aligned}\because a_k &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) (\cos k\omega_0 t - j \sin k\omega_0 t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cos k\omega_0 t dt - j \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \sin k\omega_0 t dt \\ &= -j \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \sin k\omega_0 t dt \quad \text{可见为虚数且为奇}\end{aligned}$$

当 $k=0$ 时,  $a_k = 0$

另一种证明法：（应用已学的性质）

因为 $x(t)$ 是奇函数，即  $x(-t) = -x(t)$

而  $x(-t) \xrightarrow{FS} a_{-k}$  ,  $x(t) \xrightarrow{FS} a_k$

$\therefore a_{-k} = -a_k$  即傅立叶系数为奇函数。这时  $a_0 = 0$

又因为 $x(t)$ 是实信号，有  $a_{-k} = a_k^*$

因此可得  $a_k^* = -a_k$  可知只能是纯虚数

关于 $h(t)$ 的求法:

一、

- 1、求出微分方程——求得传输算子 $H(p)$ ——将 $H(p)$ 展开成部分分式——经反变换求得。
- 2、单位冲激响应 $h(t)$ 可通过将 $H(j\omega)$ 展开成部分分式而求得。

免费资源网 [bbs.freemk.com](http://bbs.freemk.com) [wenku.com](http://wenku.com)

题3.14

已知  $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k]$  ,  $y[n] = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right)$

求:  $H(e^{jk\pi/2})$  在  $k = 0, 1, 2, 3$  时的值。

解: 因为输入是周期信号,

免费下载网 [bbs.freekaoyan.com](http://bbs.freekaoyan.com) yueshen22

#### 4.3.4 微分和积分

##### 1、微分性质

若  $x(t)$  的傅里叶变换是  $X(j\omega)$ ，将傅里叶反变换公式的两边对  $t$  进行微分，

可得

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(j\omega)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

据此性质，可将时域的微分运算转变为频域的代数运算。

将微分性质进一步推广，有

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{F} (j\omega)^n X(j\omega)$$

## 2、积分性质

若  $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$

则  $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$

积分产生的直流分量

证明：由卷积积分可知，

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau * \delta(t) = x(t) * \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = x(t) * u(t)$$

由时域卷积性质 ( $x(t) * y(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)Y(j\omega)$  在后面介绍), 得

$$x(t) * u(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \left[ \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] = \pi X(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(j\omega) \quad \#$$

说明:

$$u(t) = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{F} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a + j\omega} = \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{a}{a^2 + \omega^2} + \frac{\omega}{j(a^2 + \omega^2)} \right]$$

其中  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{a^2 + \omega^2} = \begin{cases} 0 & \omega \neq 0 \\ \infty & \omega = 0 \end{cases}$        $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2 + \omega^2} d\omega = \pi$

即

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{a^2 + \omega^2} = \pi\delta(\omega) \quad \therefore u(t) \xleftrightarrow{F} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

例4.11 求单位阶跃函数 $x(t) = u(t)$ 的傅里叶变换

解:

$$\because \delta(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = 1$$

而

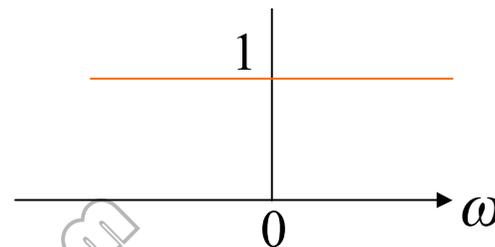
$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt$$

利用时域积分性质,有  $u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$

还可以看到,应用微分性质可以复原单位冲激函数的傅里叶变换,即

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega \left[ \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \right] = 1$$

$$j\pi\omega\delta(\omega) = 0$$



例4.12 已知信号如图4.16(a)所示,求傅里叶变换

解: 图(a)可知  $x(t) = t[u(t+1) - u(t-1)]$

$$\begin{aligned} \because g(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = [u(t+1) - u(t-1)] + t[\delta(t+1) - \delta(t-1)] \\ &= [u(t+1) - u(t-1)] - \delta(t+1) - \delta(t-1) \end{aligned}$$

可见,信号的导数为图(b)和图(c)这两个分量的和。

这些分量信号的傅里叶变换为:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \int_{-1}^1 x(t)e^{-j\omega t} dt = \left(\frac{2 \sin \omega}{\omega}\right) - e^{j\omega} - e^{-j\omega} \\ &= \frac{2 \sin \omega}{\omega} - 2 \cos \omega \end{aligned}$$

因为对  $g(t)$  的积分, 就是  $x(t)$ 。所以利用积分性质就有

$$X(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{j\omega} + \pi G(0)\delta(\omega)$$

由于  $G(0) = 2 \frac{\sin 0}{0} - 2 \cos 0 = 0$ , 所以最后得

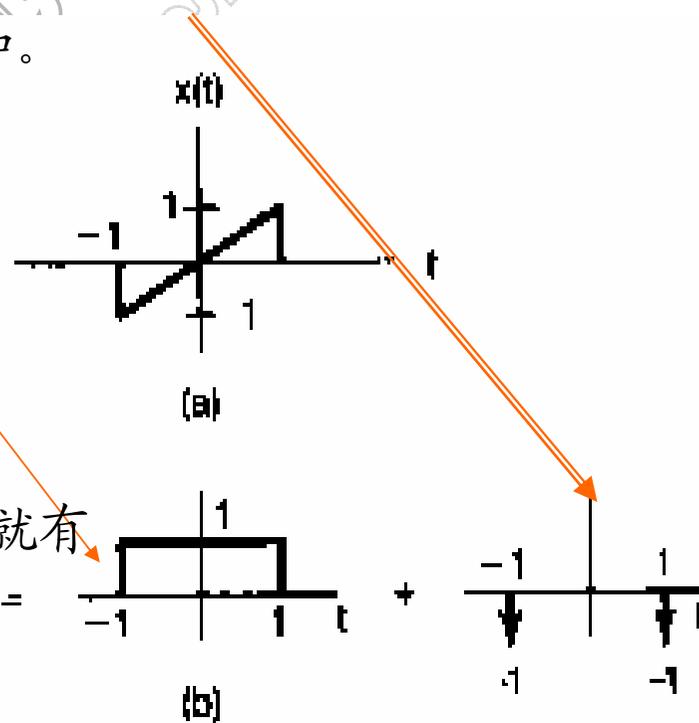


图 4.16 (a)欲求傅里叶变换的信号  $x(t)$ ;

(b)  $x(t)$  的导数表示为两个分量的和

$$X(j\omega) = \frac{2 \sin \omega}{j\omega^2} - \frac{2 \cos \omega}{j\omega} = -j \left( \frac{2 \sin \omega}{\omega^2} - \frac{2 \cos \omega}{\omega} \right)$$

可见,  $X(j\omega)$  的表示式是纯虚且为奇函数。

注: 求  $u(t+1) - u(t-1)$  的傅里叶变换:

1、可按矩形脉冲的傅里叶变换求得; 2、也可按如下方法求得:

$$\because u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$\begin{aligned} \therefore u(t+1) - u(t-1) &\longrightarrow e^{j\omega} \left( \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right) - e^{-j\omega} \left( \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right) \\ &= e^{j\omega} \frac{1}{j\omega} + \cancel{e^{j\omega} \pi\delta(\omega)} - e^{-j\omega} \frac{1}{j\omega} - \cancel{e^{-j\omega} \pi\delta(\omega)} \\ &= \frac{1}{j\omega} (e^{j\omega} - e^{-j\omega}) = \frac{2}{\omega} \frac{(e^{j\omega} - e^{-j\omega})}{2j} = \frac{2 \sin \omega}{\omega} \end{aligned}$$

### 4.3.5 时间与频率的尺度变换

若  $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$

则  $x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$  式中:  $a$  — 实常数 (4.34)

证明:  $\because x(at) \xleftrightarrow{F} F\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt$

当  $a > 0$  时, 令  $\tau = at$  得  $x(\tau) \xleftrightarrow{F} F\{x(\tau)\} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-(j\omega/a)\tau} d\tau$

当  $a < 0$  时,  $\tau = at = -|a|t$ , 此时  $t = -\frac{1}{|a|}\tau, dt = -\frac{1}{|a|}d\tau$

积分上、下限变为  $-\infty, \infty$ 。此时

$$F\{x(\tau)\} = -\frac{1}{|a|} \int_{\infty}^{-\infty} x(\tau) e^{(j\omega/|a|)\tau} d\tau = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-(j\omega/a)\tau} d\tau$$

将两种情况综合起来, 就得(4.34)式  $x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$  #证毕.

尺度变换性质告诉我们:除了一个幅度因子 $1/|a|$ 外,信号在时域有一个尺度因子 $a$ 变换,相应于它在频域上有一个线性因子 $1/a$ 的变换,反之亦然。

这就从理论上说明了时域与频域之间的相反关系。具体地说,对一个脉冲信号,如果脉冲宽度越宽,它的频带就越窄;脉宽减小 $a$ 倍,其带宽就增大 $a$ 倍,因此,脉宽与带宽的乘积是一个常数。

若令  $a = -1$ , 则可得  $x(-t) \xleftrightarrow{F} X(-j\omega)$

也就是说,在时间上反转一个信号,它的傅里叶变换也反转。

#### 4.3.6 对偶性

若

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

则有

$$X(jt) \xleftrightarrow{F} 2\pi x(-\omega)$$

证明: 因为  $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

有  $2\pi x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

显然

$$2\pi x(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

将上式中变量 $t$ 和 $\omega$ 相互交换,得

$$2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jt) e^{-j\omega t} dt$$

即得  $X(jt) \xleftrightarrow{F} F\{X(jt)\} = 2\pi x(-\omega)$

证毕.

可见,傅里叶变换对之间存在着对偶关系。即信号波形与信号频谱函数的波形有着互相置换的关系,其幅度之比为常数 $2\pi$ 。式中的 $-\omega$ 表示频谱函数坐标轴必须正负对调。

见图4.17

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & , |t| < T_1 \\ 0 & , |t| > T_1 \end{cases} \xleftrightarrow{F} X_1(j\omega) = 2T_1 \frac{\sin \omega T_1}{\omega T_1}$$

$$x_2(t) = \frac{W}{\pi} \frac{\sin Wt}{Wt} \xleftrightarrow{F} X_2(j\omega) = \begin{cases} 1 & , |\omega| < W \\ 0 & , |\omega| > W \end{cases}$$

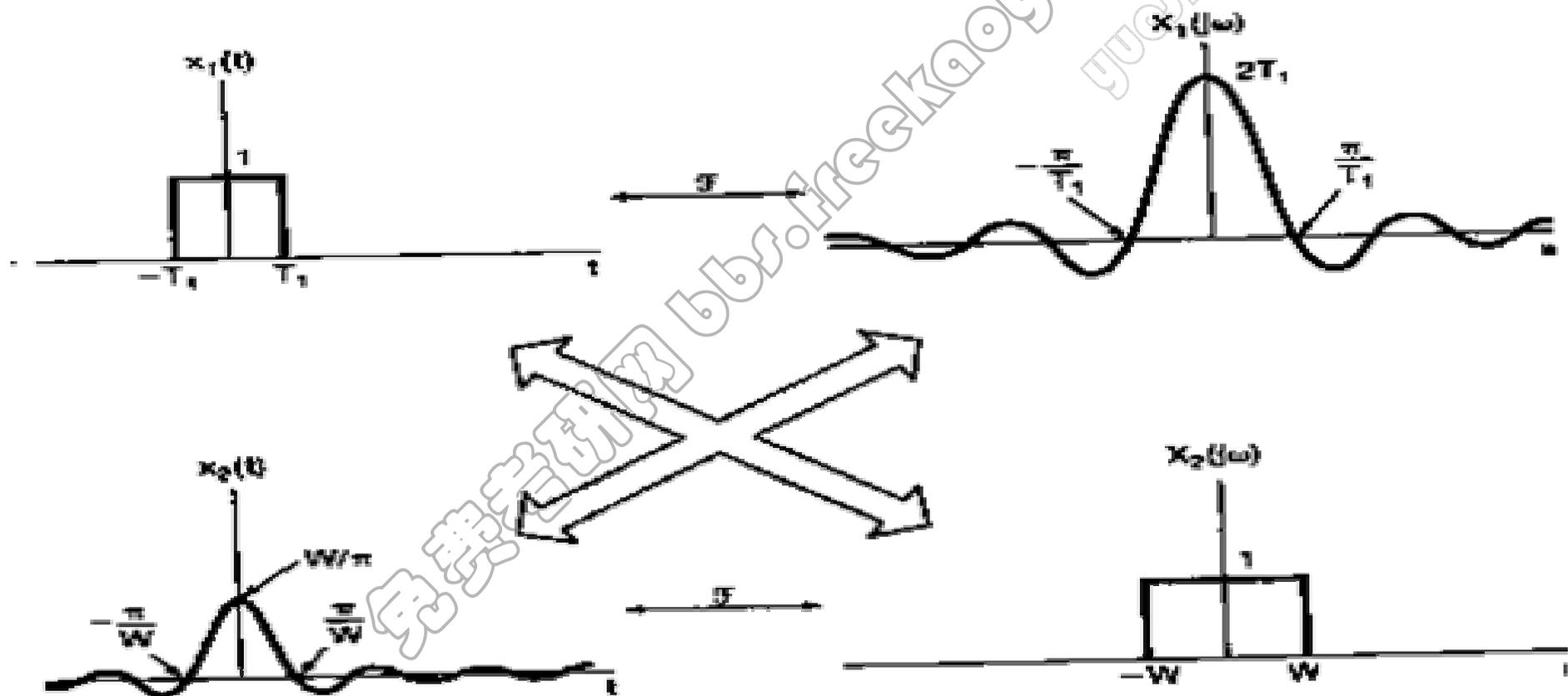


图 4.17 (4.36)式和(4.37)式两对傅里叶变换之间的关系

例4.13 已知信号  $g(t) = \frac{2}{1+t^2}$  ,用对偶性求它的傅里叶变换  $G(j\omega)$  。

解: 如果令  $X(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$   $e^{-a|t|} \xleftrightarrow{F} \frac{2a}{a^2+\omega^2} \quad (a > 0)$

那么由例4.2就有

$$x(t) = e^{-|t|} \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

对于这一变换对的综合公式是

$$e^{-|t|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{2}{1+\omega^2} \right) e^{j\omega t} d\omega$$

将上式两边乘  $2\pi$  ,并将  $t$  以  $-t$  置换,可得

$$2\pi e^{-|t|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{2}{1+\omega^2} \right) e^{-j\omega t} d\omega$$

交换变量  $t$  和  $\omega$  ,可得

$$2\pi e^{-|\omega|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{2}{1+t^2} \right) e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned} X(j\omega) &\xleftrightarrow{F} x(t) \\ X(jt) &\longleftrightarrow 2\pi x(-\omega) \end{aligned}$$

由此可知,

$$\frac{2}{1+t^2} \xleftrightarrow{F} F \left\{ \frac{2}{1+t^2} \right\} = 2\pi e^{-|\omega|}$$

利用对偶性还可以很方便地从傅里叶变换的一些性质,联想或推导出与之对偶的其它性质.

### 1、频移特性

若

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega)$$

则

$$x(t)e^{\pm j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} X[j(\omega \mp \omega_0)]$$

证明: (方法1)

$$F \left\{ x(t)e^{\pm j\omega_0 t} \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{\pm j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(\omega \mp \omega_0)t} dt$$

$$= X[j(\omega \mp \omega_0)]$$

上述性质也可通过对偶性加以证明,即

证明: (方法2)

$$\because x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

由对偶性得

$$X(jt) \xleftrightarrow{F} 2\pi x(-\omega)$$

由时移性得

$$X[j(t-t_0)] \xleftrightarrow{F} 2\pi x(-\omega)e^{-j\omega t_0}$$

再由对偶性得

$$2\pi x(-t)e^{-j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi X[j(-\omega - \omega_0)]$$

得

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} X[j(\omega - \omega_0)]$$

#3.25

1、线性  $ax(t) + by(t) \xleftrightarrow{F} aX(j\omega) + bY(j\omega)$

2、线性时移性质  $x(t - t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$

3、共轭及共轭对称性  $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \quad x^*(t) \xleftrightarrow{F} X^*(-j\omega)$

$$X(j\omega) = X^*(-j\omega) \quad X(-j\omega) = X^*(j\omega)$$

4、微分和积分  $\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(j\omega) \quad \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$

5、时间与频率的尺度变换  $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \quad x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$

6、对偶性  $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \quad X(jt) \xleftrightarrow{F} 2\pi x(-\omega)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$2\pi x(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

$$2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jt) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

## 1、频移特性

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega)$$

$$x(t)e^{\pm j\omega_0 t} \xrightarrow{F} X[j(\omega \mp \omega_0)]$$

## 2、频域微分性

若  $x(t) \xrightarrow{F} X(j\omega)$

则  $tx(t) \xrightarrow{F} j \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$

$$t^n x(t) \xrightarrow{F} (j)^n \frac{d^n X(j\omega)}{d\omega^n}$$

证明：方法1

$$\therefore X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$\therefore \frac{dX(j\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)(-jt)e^{-j\omega t} dt$$

$$= -j \int_{-\infty}^{\infty} [tx(t)]e^{-j\omega t} dt$$

两边乘 j, 得

$$j \frac{dX(j\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} [tx(t)]e^{-j\omega t} dt$$

$$tx(t) \xleftrightarrow{F} j \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

同样可得

$$t^n x(t) \xleftrightarrow{F} (j)^n \frac{d^n X(j\omega)}{d\omega^n}$$

上述性质也可根据对偶性质、时域微分性得出：

证明： 方法2

$$\because x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

得  $X(jt) \xleftrightarrow{F} 2\pi x(-\omega)$

根据微分性，有  $\frac{dX(jt)}{dt} \xleftrightarrow{F} 2\pi j\omega x(-\omega)$

运用对偶性，有  $2\pi jtx(-t) \xleftrightarrow{F} -2\pi \frac{dX(-j\omega)}{d\omega}$

得  $-jtx(t) \xleftrightarrow{F} \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$

两边乘 j, 得  $tx(t) \xleftrightarrow{F} j \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$

3、频域积分性

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

$$\pi x(0)\delta(t) - \frac{1}{jt} x(t) \xleftrightarrow{F} \int_{-\infty}^{\omega} X(j\eta) d\eta$$

证明:

若

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

则

$$X(jt) \xleftrightarrow{F} 2\pi x(-\omega)$$

据时域积分性可得

$$\int_{-\infty}^t X(j\tau) d\tau \xleftrightarrow{F} 2\pi \left[ \frac{1}{j\omega} x(-\omega) + \pi x(0)\delta(\omega) \right]$$

据对偶性,可得

$$2\pi \left[ \frac{1}{jt} x(-t) + \pi x(0)\delta(t) \right] \xleftrightarrow{F} -2\pi \int_{\infty}^{-\omega} X(-j\eta) d\eta$$

令  $-t = t$  , 即有

$$-\frac{1}{jt} x(t) + \pi x(0)\delta(t) \xleftrightarrow{F} \int_{-\infty}^{\omega} X(j\eta) d\eta$$

### 4.3.7 帕斯瓦尔定理

若  $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$

则  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$  ——称帕斯瓦尔定律

证明: (可直接用傅里叶变换求出)

$$(a - jb)(a + jb) = a^2 + b^2 = [\sqrt{a^2 + b^2}]^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)e^{-j\omega t} d\omega \right] dt$$

改变一下积分次序, 有

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \right] d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)X(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(j\omega)|^2}{2\pi} d\omega$$

能量守恒

单位时间内的能量

能谱密度 (每单位频率内的能量)

帕斯瓦尔定理指出：信号在时域拥有的总能量既可以按每单位时间内的能量  $|x(t)|^2$  在整个时间内积分计算出来；也可以按每单位频率内的能量  $|X(j\omega)|^2 / 2\pi$  在整个频率范围内积分求得。

因此， $|X(j\omega)|^2 / 2\pi$  常称为信号  $x(t)$  的能谱密度。——表示信号在频域上能量分布情况。

周期信号也有相应的帕斯瓦尔定理，由于周期信号能量是无穷的，因此它是用信号平均功率来描述的。周期信号的帕斯瓦尔定理为（见P145中（3.67）

式)

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

式中： $T$  ——信号的基波周期；

$a_k$  ——傅里叶级数系数

上式表明周期信号平均功率等于其各谐波频率分量平均功率之和。因此也将  $|a_k|^2$  称为周期信号的功率谱（表明周期信号的功率在频域上的分布情况）。

#### 4.4 卷积性质

如果  $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$  ,  $h(t) \xleftrightarrow{F} H(j\omega)$

则有  $x(t) * h(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)H(j\omega)$

证明: 令  $y(t) = x(t) * h(t)$  , 对  $y(t)$  作傅里叶变换,

$$\text{则有 } Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$$

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) H(j\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= X(j\omega) H(j\omega)$$

即得

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{F} Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

例4.15 有一连续时间LTI系统,其单位冲激响应为  $h(t) = \delta(t - t_0)$

而输入信号  $x(t)$  的傅里叶变换为  $X(j\omega)$ , 求系统的输出

解:  $\because h(t) = \delta(t - t_0)$

$$\therefore H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t_0} dt = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = e^{-j\omega t_0}$$

$$\because y(t) = x(t) * h(t) \xrightarrow{F} Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

输出的傅里叶变换为

$$x(t - t_0) \xrightarrow{F} X(j\omega) e^{-j\omega t_0}$$
$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

则  $y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-j\omega t_0} X(j\omega)] e^{j\omega t} d\omega$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = x(t - t_0)$$

## 4.5 相乘性质

$$\text{若 } x_1(t) \xleftrightarrow{F} X_1(j\omega) \quad , \quad x_2(t) \xleftrightarrow{F} X_2(j\omega)$$

$$x_1(t)x_2(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$$

证明: (可利用傅里叶的对偶性而求得)

$$\text{据对偶性有 } X_1(jt) \xleftrightarrow{F} 2\pi x_1(-\omega) \quad , \quad X_2(jt) \xleftrightarrow{F} 2\pi x_2(-\omega)$$

$$\text{利用卷积性得 } X_1(jt) * X_2(jt) \xleftrightarrow{F} 4\pi^2 x_1(-\omega)x_2(-\omega)$$

$$\text{利用对偶性有 } 4\pi^2 x_1(-t)x_2(-t) \xleftrightarrow{F} 2\pi X_1(-j\omega) * X_2(-j\omega)$$

$$\text{由于 } x(-t) \xleftrightarrow{F} X(-j\omega)$$

$$\text{因此,可得 } x_1(t)x_2(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$$

例4.21 设信号  $s(t)$  的频谱为  $S(j\omega)$  ,另一个信号  $p(t)$  为  $p(t) = \cos \omega_0 t$

求  $r(t) = s(t)p(t) = s(t) \cos \omega_0 t$  的频谱  $R(j\omega)$  。

解: 因为 
$$p(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

而 
$$1 \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega)$$

据频移性, 可得 
$$1 \times e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

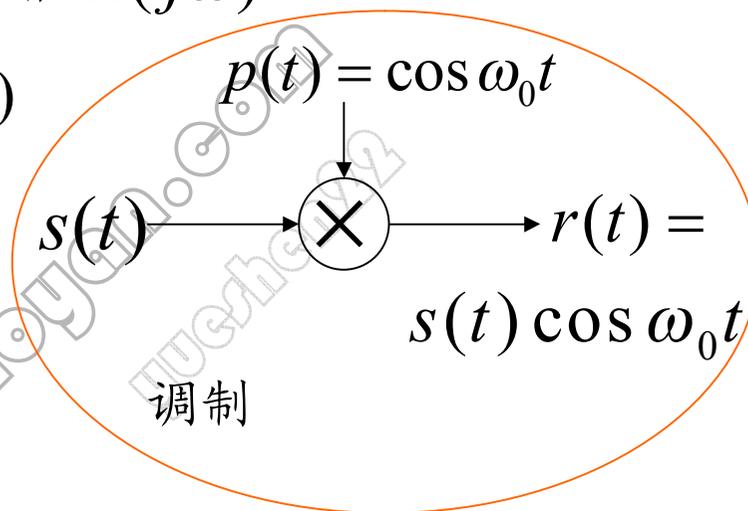
$$1 \times e^{-j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

所以 
$$p(t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \xleftrightarrow{F} P(j\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

又因为 
$$r(t) = s(t)p(t) \xleftrightarrow{F} R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * P(j\omega)$$

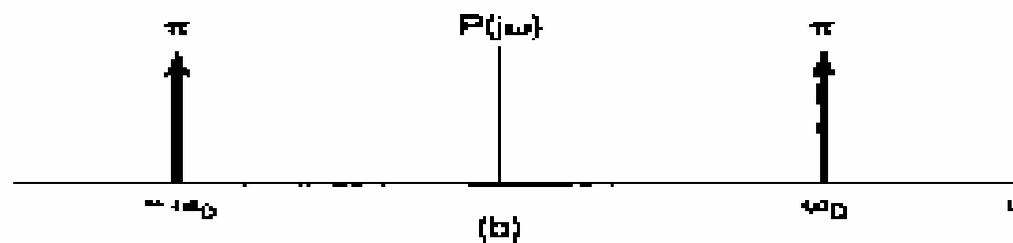
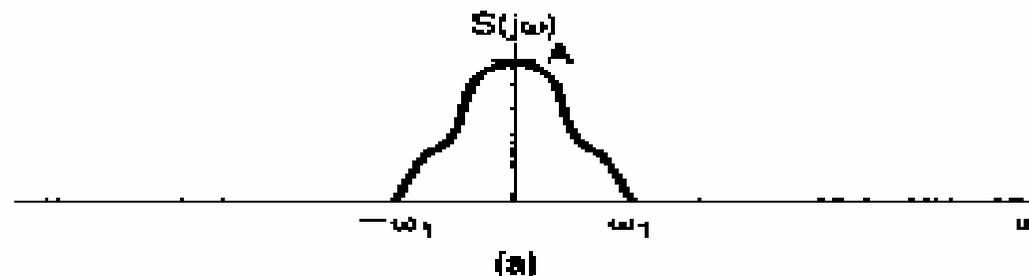
所以 
$$= \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$= \frac{1}{2} S[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} S[j(\omega + \omega_0)]$$



注意: 图中已假设  $\omega_0 > \omega_1$  。

若  $\omega_0 < \omega_1$  时, 就会产生重叠。



这在通信称调制。

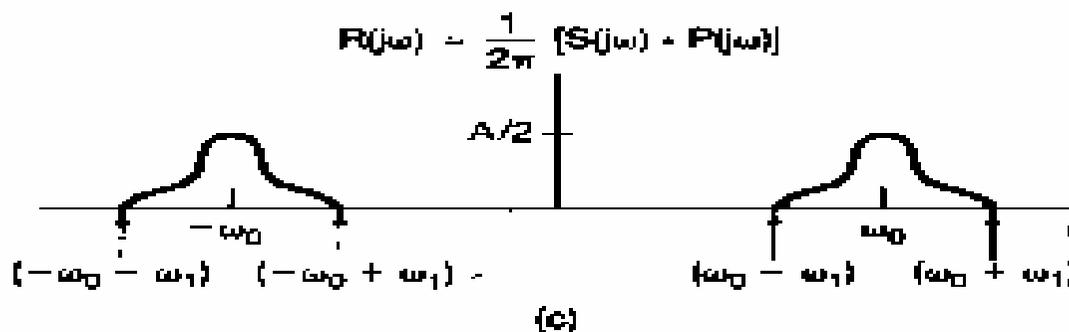


图 4.23 例 4.21 中相乘性质的应用:

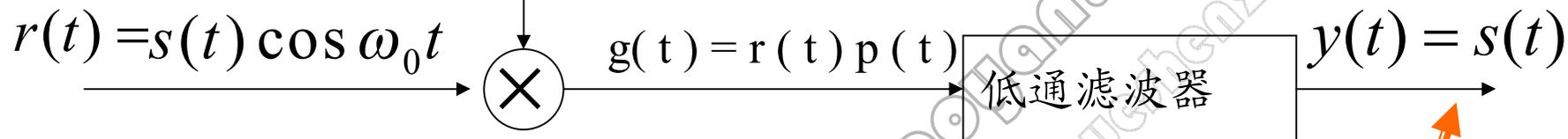
(设电缆的带宽为300M、信道宽度为6M, 则这根电缆可同时传送50路信号)

例4.22 考虑在例4.21中得到的信号  $r(t)$ , 并令  $g(t) = r(t)p(t)$ ,

其中  $p(t) = \cos \omega_0 t$ , 求  $g(t)$  的频谱。

解:

$$p(t) = \cos \omega_0 t$$



$$\because r(t) = s(t)p(t) \quad p(t) = \cos \omega_0 t$$

$$\because g(t) = r(t)p(t) = s(t) \cos^2 \omega_0 t = s(t)[1 + \cos 2\omega_0 t] / 2$$

$$= \frac{1}{2} [s(t) + s(t) \cos 2\omega_0 t]$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{2} S(j\omega) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * \pi [\delta(\omega - 2\omega_0) + \delta(\omega + 2\omega_0)] \right\}$$

$$= \frac{1}{2} S(j\omega) + \frac{1}{4} \{ S[j(\omega - 2\omega_0)] + S[j(\omega + 2\omega_0)] \}$$

由图可知，当  $g(t)$  通过理想低通滤波器时，只要使该滤波器幅度为 2，截止频率  $\omega_c$  满足  $\omega_1 < \omega_c < 2\omega_0 - \omega_1$  就可使调制信号  $s(t)$  得到恢复，得  $y(t) = s(t)$

这就是解调

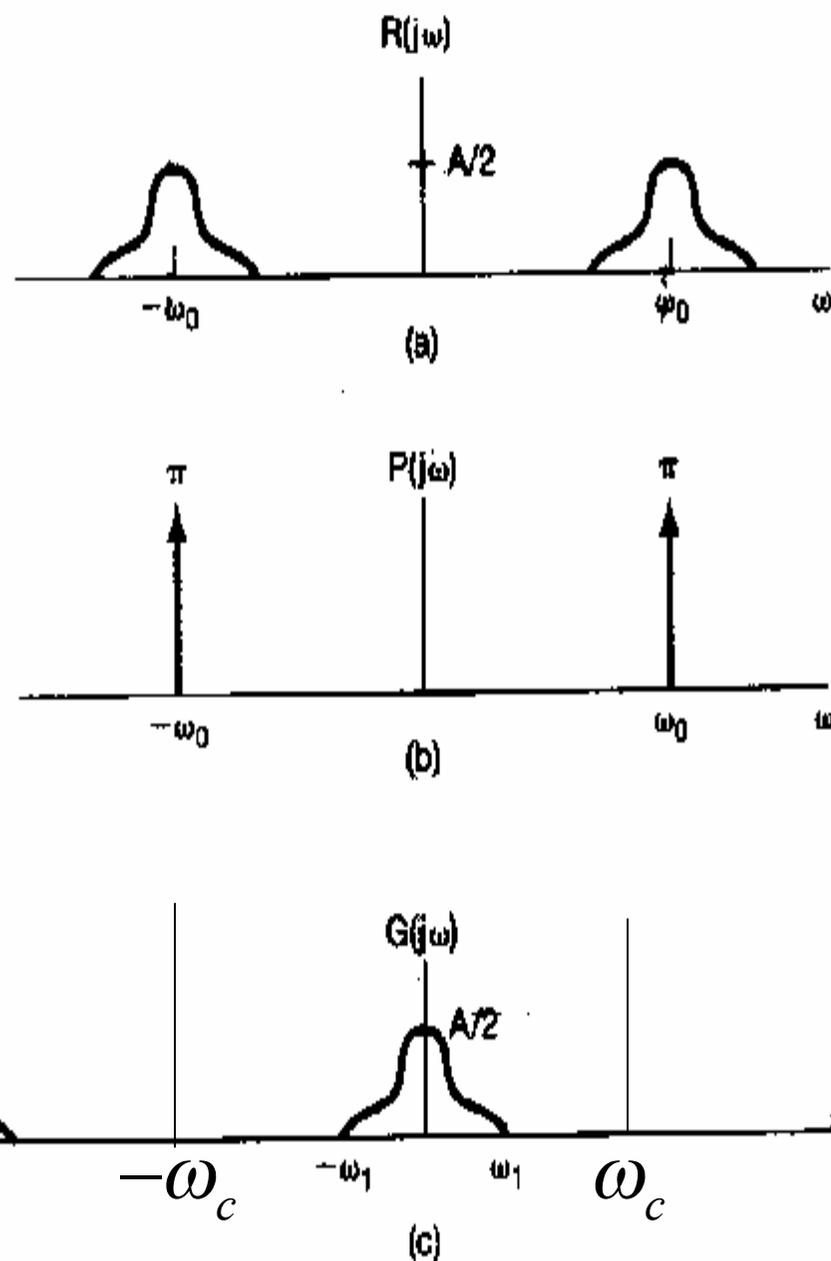


图 4.24 例 4.22 中考虑的各信号的频谱：(a)  $R(j\omega)$ ；(b)  $P(j\omega)$ ；(c)  $G(j\omega)$

#### 4.5.1 具有可变中心频率的频率选择性滤波——相乘性质的另一个重要应用

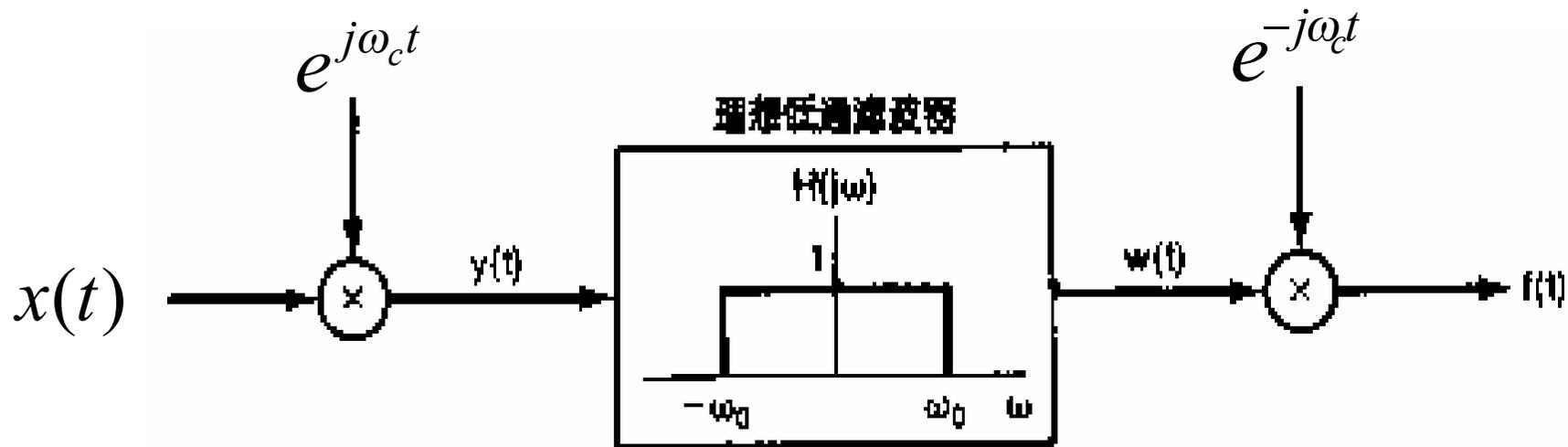


图 4.26 利用复指数载波的幅度调制实现带通滤波器

$$y(t) = e^{j\omega_c t} x(t) \xrightarrow{F} Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [2\pi\delta(\omega - \omega_c) * X(j\omega)] = X[j(\omega - \omega_c)]$$

即  $Y(j\omega)$  就等于  $X(j\omega)$  向右移  $\omega_c$  ; 同样,

$$f(t) = e^{-j\omega_c t} w(t) \xrightarrow{F} F(j\omega) = W[j(\omega + \omega_c)]$$

即  $F(j\omega)$  就等于  $W(j\omega)$  向左移  $\omega_c$  。

可见，整个系统等效于一个中心频率为  $-\omega_c$  带宽为  $2\omega_0$  的理想带通滤波器。随着  $\omega_c$  的改变，该带通滤波器的中心频率也就改变了。

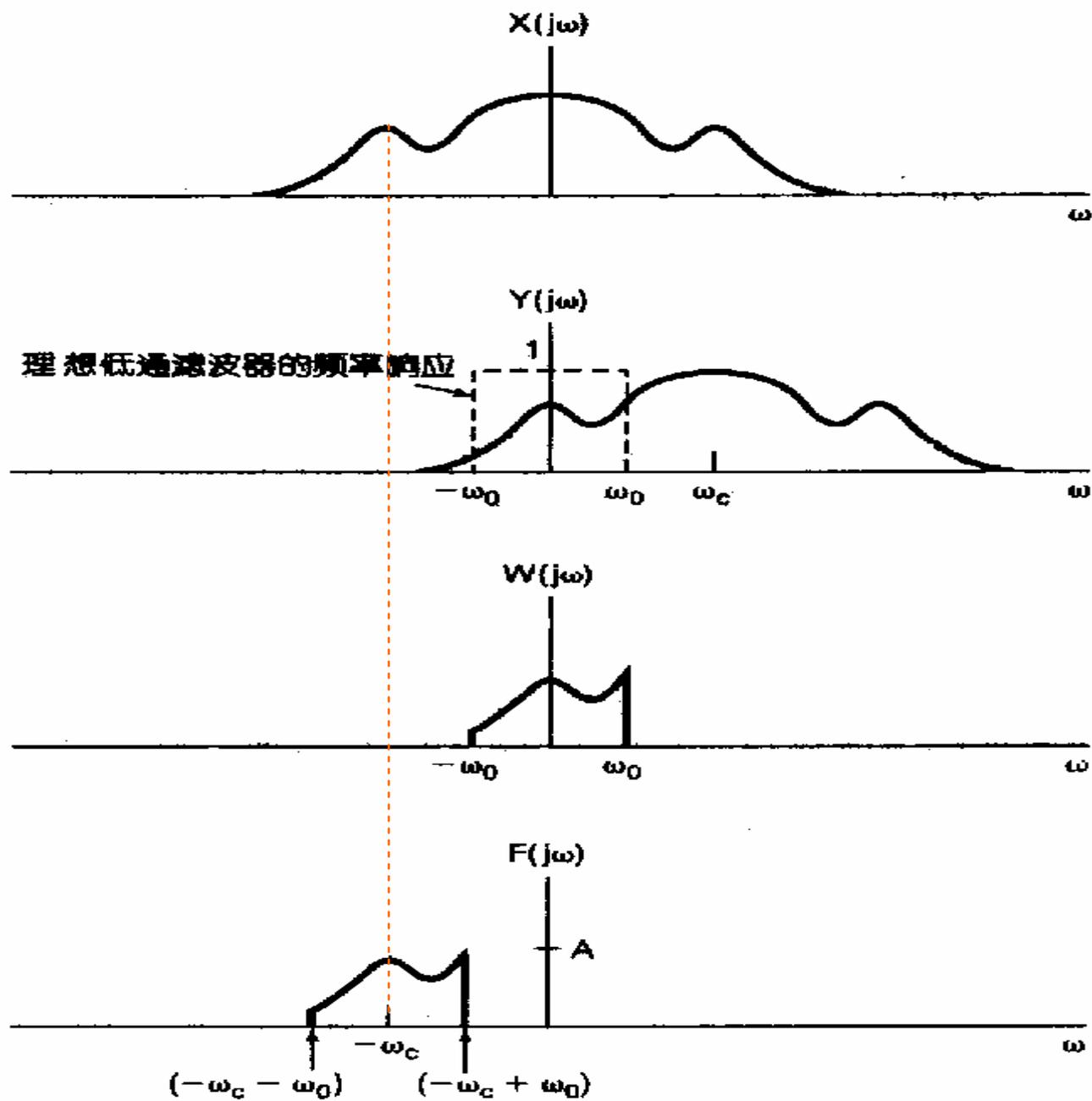


图 4.27 图 4.26 系统中各信号的频谱

## 4.6 傅里叶变换性质和基本傅里叶变换对列表 (P233)

## 4.7 由线性常系数微分方程表征的系统

一个LTI系统可用线性常微分方程表示为

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (4.72)$$

下面将讨论如何确定这样一个LTI系统的频率响应 ( $H(j\omega)$ ) 问题。

有两种途径:

1、依赖于复指数信号是LTI系统的特征函数这一事实。

具体地说就是, 若  $x(t) = e^{j\omega t}$

则有  $y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$

将这些代入(4.72)式, 就能解出  $H(j\omega)$  。

2、应用傅里叶变换的微分性质来求。即

对 (4.27) 两边取傅里叶变换, 得

$$F \left\{ \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right\} = F \left\{ \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right\}$$

根据线性性质,上式变为

$$\sum_{k=0}^N a_k F \left\{ \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right\} = \sum_{k=0}^M b_k F \left\{ \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right\}$$

由微分性质,得

$$\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

或

$$Y(j\omega) \left[ \sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k \right] = X(j\omega) \left[ \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k \right]$$

因此,可得

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k} \quad (4.76)$$

可见,  $H(j\omega)$  是一个有理函数,其分子多项式的系数与原微分方程右边的系数相同;分母多项式的系数与原微分方程左边的系数相同。因此  $H(j\omega)$  可根据原微分方程的系数直接写出。

例 4.24 有一稳定的LTI系统，可由如下微分方程表征

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t) \quad , \quad a > 0$$

求：系统的单位冲激响应  $h(t)$

解：根据第二种途径即(4.76)式，可得

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + a}$$

由例4.1可知（也可查P234页表4.2）

$$x(t) = e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

所以该系统的单位冲激响应为

$$h(t) = e^{-at}u(t)$$

例 4.25 已知LTI系统的微分方程为

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

求:系统的单位冲激响应

解: 由(4.76)式可得  $H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 3} = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)}$

利用部分分式展开, 得

$$\frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)} = \frac{A_1}{j\omega + 1} + \frac{A_2}{j\omega + 3} \quad \text{两边同乘 } (j\omega + 1) \text{ 并令 } j\omega = -1$$

则 左式 =  $\left. \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 3)} \right|_{j\omega = -1} = \frac{1}{2}$ , 右式 =  $A_1 + (j\omega + 1) \frac{A_2}{j\omega + 3} \Big|_{j\omega = -1} = A_1$

即  $A_1 = 1/2$ , 同理得  $A_2 = 1/2$ , 则有  $H(j\omega) = \frac{1/2}{j\omega + 1} + \frac{1/2}{j\omega + 3}$

所以  $h(t) = \frac{1}{2} e^{-t} u(t) + \frac{1}{2} e^{-3t} u(t)$

例 4.26 假设例4.25系统的输入为  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$

$$x(t) = e^{-t}u(t)$$

求系统的输出  $y(t)$   $y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)H(j\omega)$

解:  $\because x(t) = e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 3} = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)}$$

$$\begin{aligned} \therefore Y(j\omega) &= H(j\omega)X(j\omega) = \left[ \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)} \right] \left[ \frac{1}{j\omega + 1} \right] \\ &= \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)^2(j\omega + 3)} \end{aligned}$$

用部分分式展出, 得  $Y(j\omega) = \frac{A_{11}}{j\omega + 1} + \frac{A_{12}}{(j\omega + 1)^2} + \frac{A_{21}}{j\omega + 3}$

其中:  $A_{11}, A_{12}, A_{21}$  为待定系数,

两边同乘  $(j\omega + 1)^2$

得 
$$\frac{j\omega + 2}{(j\omega + 3)} \Big|_{j\omega=-1} = \left[ A_{11}(j\omega + 1) + A_{12} + \frac{A_{21}}{j\omega + 3} (j\omega + 1)^2 \right] \Big|_{j\omega=-1}$$

$$A_{12} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{d}{dj\omega} \left[ \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 3)} \right] \Big|_{j\omega=-1} \\ &= \frac{(j\omega + 3) - (j\omega + 2)}{(j\omega + 3)^2} \Big|_{j\omega=-1} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

同样可得 
$$A_{21} = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)^2 (j\omega + 3)} (j\omega + 3) \Big|_{j\omega=-3} = -\frac{1}{4}$$

于是得到 
$$Y(j\omega) = \frac{1/4}{j\omega + 1} + \frac{1/2}{(j\omega + 1)^2} - \frac{1/4}{j\omega + 3}$$

经反变换后，得

$$y(t) = \left[ \frac{1}{4} e^{-t} + \frac{1}{2} t e^{-t} - \frac{1}{4} e^{-3t} \right] u(t)$$

作业： P238 题4.1 (b)  
题4.2 (b)

P239 题4.11

P245 题4.33 (a)、(b)

免费考研网 [bbs.freekaoyan.com](http://bbs.freekaoyan.com)  
yueshen22

## 4.8 小结

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

- 1、从周期信号的傅里叶级数——非周期信号的傅里叶变换——周期信号的傅里叶变换（由发生在该周期信号各谐波频率上的冲激串所组成，并且每个冲激串的面积正比于各傅里叶级数系数）。
- 2、傅里叶变换具有一系列重要性质，其中有两个性质在研究信号与系统时具有特别重要的意义：
  - 1)、卷积性质——是复指数信号的特征函数性质的一个直接结果，并由此导致可以用系统的频率响应来表征一个LTI系统。这种表征是用频域的方法来分析LTI系统的基础。
  - 2)、相乘性质——它是频域分析方法研究采样和调制系统的基础。
- 3、傅里叶分析方法特别适合于研究由线性常系数微分方程描述的LTI系统（就是这种系统的频率响应能直接根据微分方程的系数来确定）。

# 第五章

## 离散时间傅里叶变换

## 5.1 非周期信号的表示:离散时间傅里叶变换

### 5.1.1 离散时间傅里叶变换的导出

对离散时间非周期序列,为了建立它的傅里叶变换表示,将采用与在连续时间情况下完全类似的步骤进行。

设某一离散时间信号 $x[n]$ 它具有有限持续期,即存在着某个整数 $N_1$ 和 $N_2$ 满足在 $-N_1 \leq n \leq N_2$ 以外 $x[n]=0$ (见图5.1(a))。将这个非周期信号进行周期延拓构成一个周期信号 $\tilde{x}[n]$ ,使得 $x[n]$ 是它的一个周期内的信号,如图5.1(b)所示。

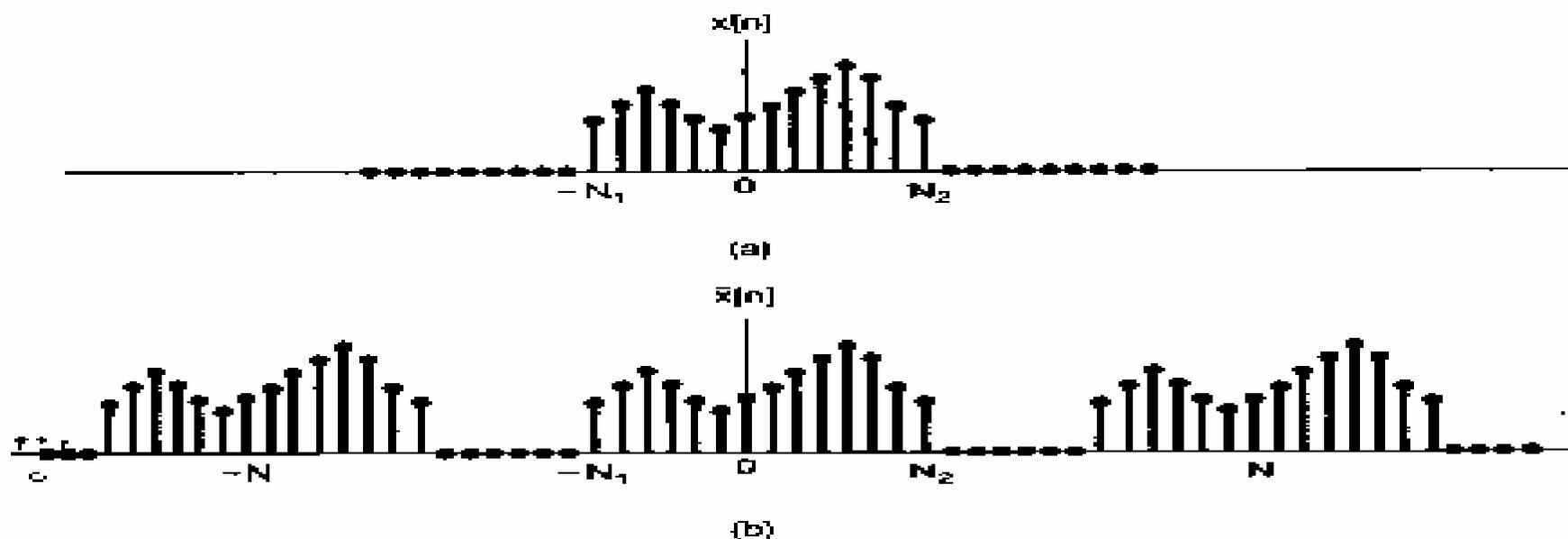


图 5.1 (a) 有限长序列  $x[n]$ ; (b) 由  $x[n]$  构成的周期序列

随着所选周期 $N$ 的增大,  $\tilde{x}[n]$ 就在一个更长的时间间隔内与  $x[n]$ 一样, 而当  $N \rightarrow \infty$  时, 对任意 $n$ 值来说, 有  $\tilde{x}[n] = x[n]$ 。

由 (3.94)式和(3.95)式可得  $\tilde{x}[n]$  的傅里叶级数表示式为

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=(N)} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (5.1)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=(N)} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \quad (5.2)$$

因为在  $-N_1 \leq n \leq N_2$  区间,  $\tilde{x}[n] = x[n]$ 。因此, (5.2)式变为

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \quad (5.3)$$

现定义函数

$$X(e^{j\omega}) = Na_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (5.4)$$

周期为  $2\pi$

由于  $e^{-j(\omega+2\pi)n} = e^{-j\omega n}$ ，所以该函数是周期信号，基波周期为  $2\pi$ 。

比较 (5.3)和(5.4)式,可发现系数  $a_k$  正比于  $X(e^{j\omega})$  的的样值,即

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) \quad (5.5)$$

式中  $\omega_0 = 2\pi / N$  为频域中的**样本间隔**。

将 (5.1)和(5.5)式组合在一起,得

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=(N)} \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \quad (5.6)$$

因为  $\omega_0 = 2\pi / N$ ,或  $1/N = \omega_0 / 2\pi$  ,所以(5.6)式又可写成

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=(N)} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0 \quad (5.7)$$

因为当  $N \rightarrow \infty$  时,由于  $\omega_0 \rightarrow d\omega, k\omega_0 \rightarrow \omega, \tilde{x}[n] \rightarrow x[n]$

上式中的求和将转化为积分。另一方面,从(5.4)式可以看出  $X(e^{j\omega})$  对  $\omega$

是以  $2\pi$  为周期的.当(5.7)式中的求和在长度为N的区间上进行时,就相应于 $\omega$ 在

$2\pi$  长度的区间上变化。因此,(5.7)式在  $N \rightarrow \infty$  时变为

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

由于  $X(e^{j\omega})$  和  $e^{j\omega n}$  都是以  $2\pi$  为周期,因此上式的积分区间可以在任何一个长度为  $2\pi$  的区间。

至此,我们得到了一对关系式

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

(5.8)——是综合公式,称离散时间傅里叶反变换

(5.9)——是分析公式,称离散时间傅里叶变换

这一对式子就是离散时间傅里叶变换对,

$X(e^{j\omega})$  ——称离散时间傅里叶变换

### 5.1.2 离散时间傅里叶变换举例

例5.1 已知信号  $x[n] = a^n u[n]$  ,  $|a| < 1$

求离散时间傅里叶变换

解:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

图5.4(a)示出了  $a > 0$  时,  $X(e^{j\omega})$  的模和相位;

图5.4(b)示出了  $a < 0$  时,  $X(e^{j\omega})$  的模和相位;

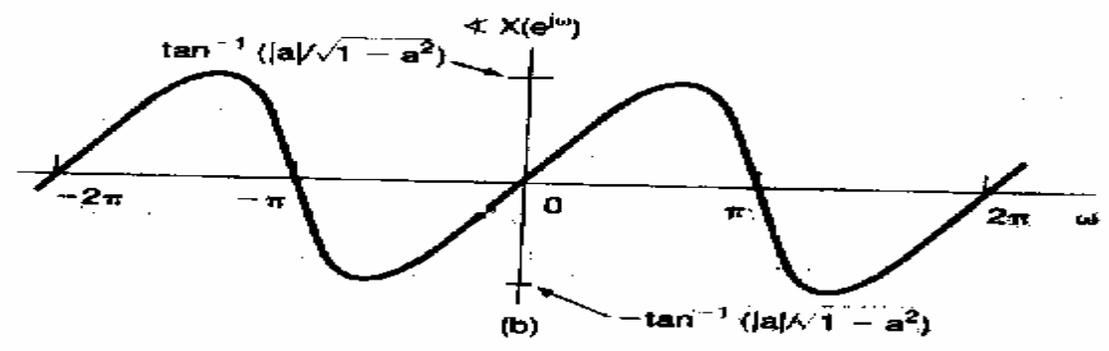
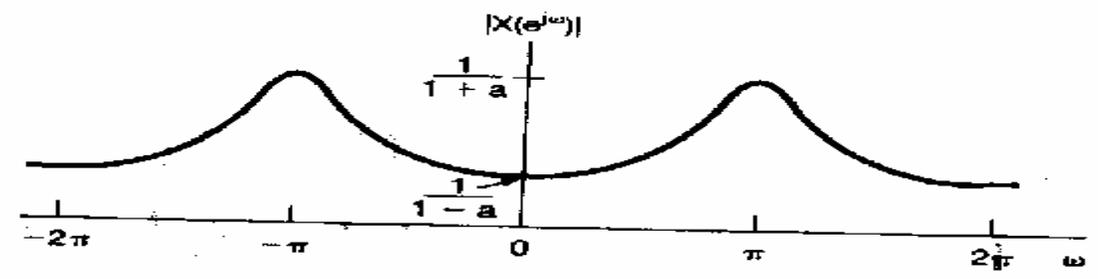
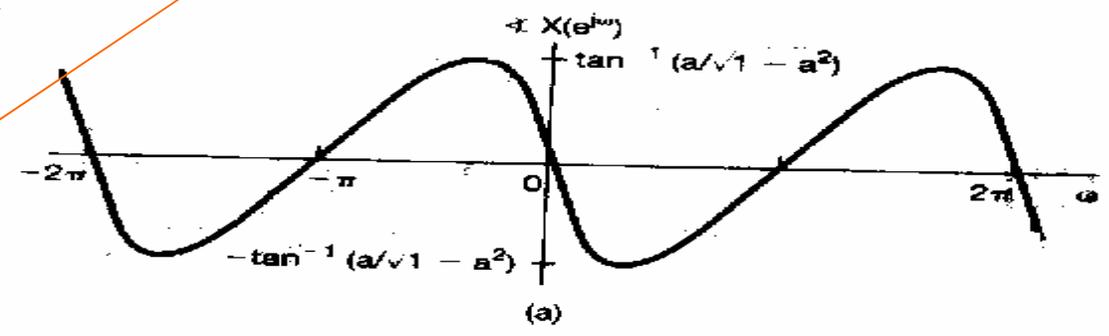
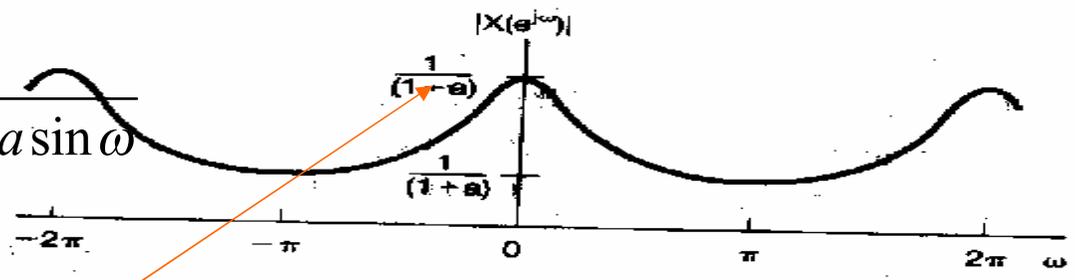
注意:图中所有这些函数都是周期为  $2\pi$  的周期函数。

$$\frac{1}{1 - a(\cos \omega - j \sin \omega)} = \frac{1}{(1 - a \cos \omega) + j a \sin \omega}$$

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{(1 - a \cos \omega)^2 + (a \sin \omega)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \cos \omega + a^2}}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-a}, & \omega = 0 \\ \frac{1}{1+a}, & \omega = \pi \end{cases}$$



鬼才数学网

图 5.4 例 5.1 傅里叶变换的模和相位: (a)  $a > 0$ ; (b)  $a < 0$

例5.2 设  $x[n] = a^{|n|}$  ,  $|a| < 1$

该信号对于  $0 < a < 1$  如图5.5(a)所示。它的傅里叶变换可求出为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\omega n}$$

在上式第二个求和式中, 以  $m = -n$  置换, 可得

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n + \sum_{m=1}^{\infty} (ae^{j\omega})^m$$

这两个求和式都是无穷几何级数, 可表示为

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{1}{1-ae^{j\omega}} (ae^{j\omega})^0 = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{1-(1-ae^{j\omega})}{1-ae^{j\omega}} \\ &= \frac{1-ae^{j\omega} + (1-ae^{-j\omega})ae^{j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})(1-ae^{j\omega})} = \frac{1-a^2}{(1-ae^{-j\omega})(1-ae^{j\omega})} \\ &= \frac{1-a^2}{1-ae^{j\omega} - ae^{-j\omega} + a^2} = \frac{1-a^2}{1-2a\cos\omega + a^2} \end{aligned}$$

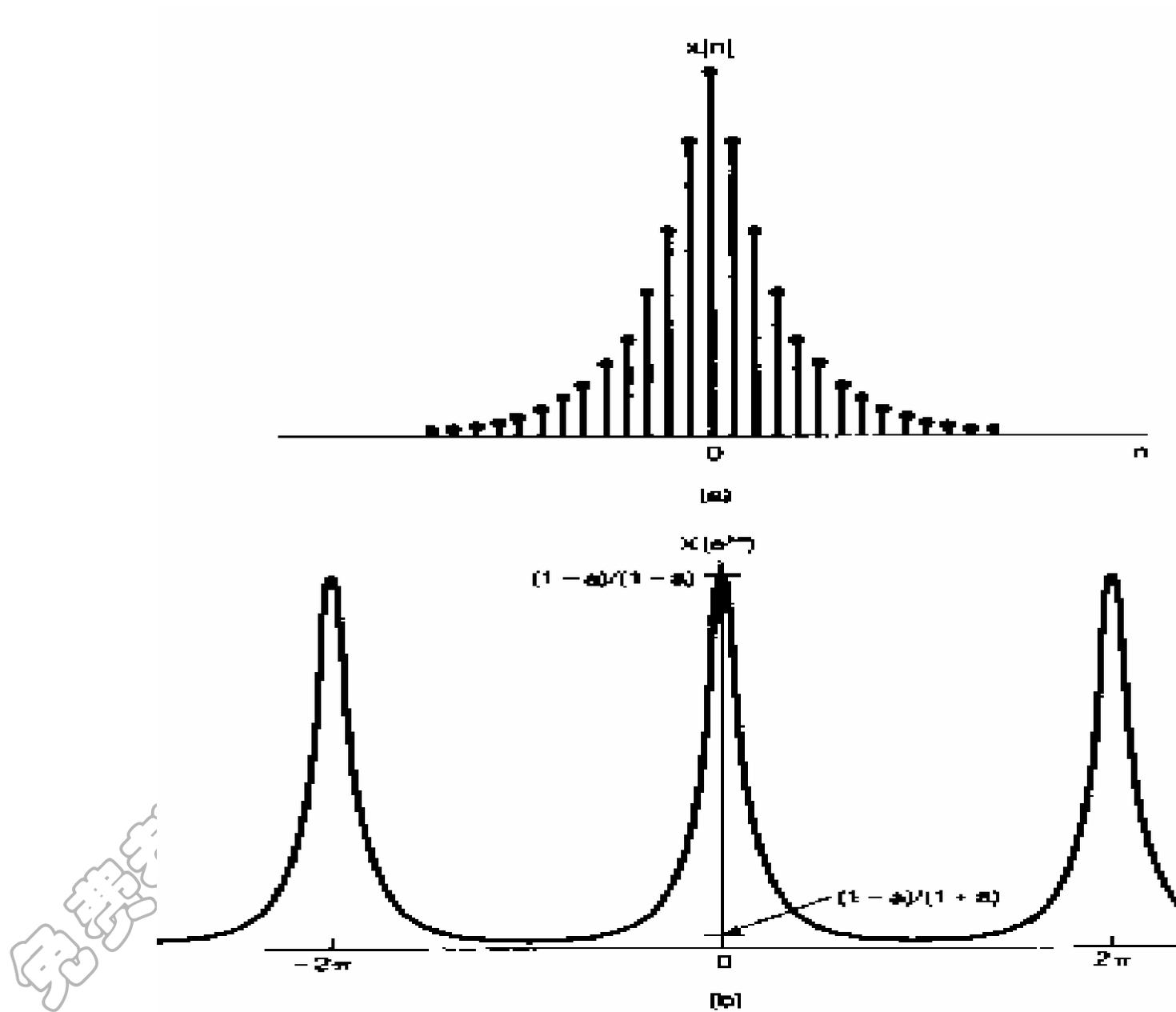


图5.5 (a)信号  $x[n] = a^{|n|}$ , (b)傅里叶变换 ( $0 < a < 1$ )

例 5.3 考虑下列矩形脉冲序列

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$

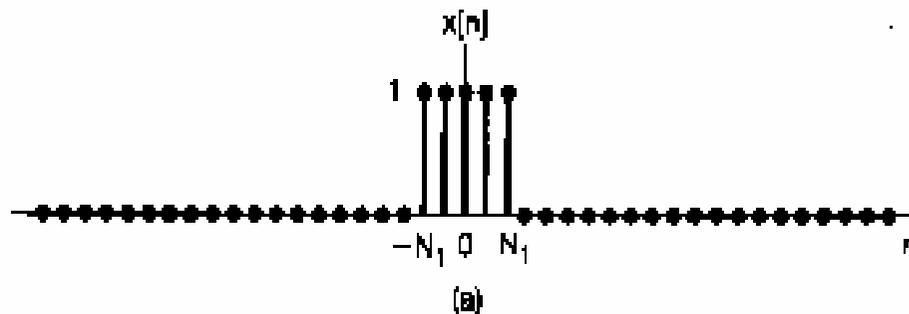


图5.6(a) 示出  $N_1=2$  的  $x[n]$ , 这时

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} = \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-j\omega(m-N_1)}$$

$$= e^{j\omega N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-j\omega m} = e^{j\omega N_1} \frac{1 - e^{-j\omega(2N_1+1)}}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$= e^{j\omega N_1} \frac{1 - e^{-j\omega(N_1+1/2)} e^{-j\omega(N_1+1/2)}}{1 - e^{-j\omega/2} e^{-j\omega/2}}$$

$$= e^{j\omega N_1} \frac{e^{-j\omega(N_1+1/2)} [e^{j\omega(N_1+1/2)} - e^{-j\omega(N_1+1/2)}]}{e^{-j\omega/2} [e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}]} = \frac{e^{-j\omega/2} [e^{j\omega(N_1+1/2)} - e^{-j\omega(N_1+1/2)}]}{e^{-j\omega/2} [e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}]}$$

$$= \frac{\sin \omega(N_1 + 1/2)}{\sin \omega/2}$$

——是sinc函数在离散情况下所对应的形式，但这是周期函数，其周期为  $2\pi$ ；而连续情况下，sinc 是非周期的。

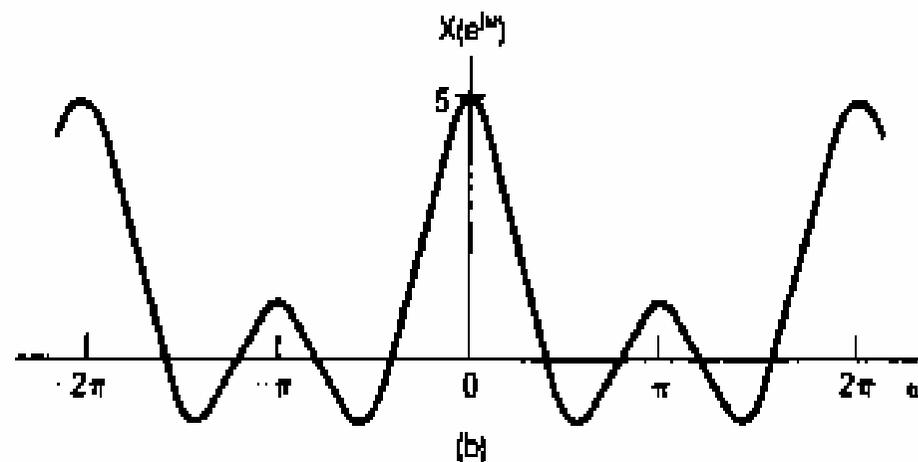


图 5.6 (a) 例 5.3 在  $N_1=2$  时的矩形脉冲序列；  
(b) 对应的傅里叶变换

### 5.1.3 关于离散时间傅里叶变换的收敛问题

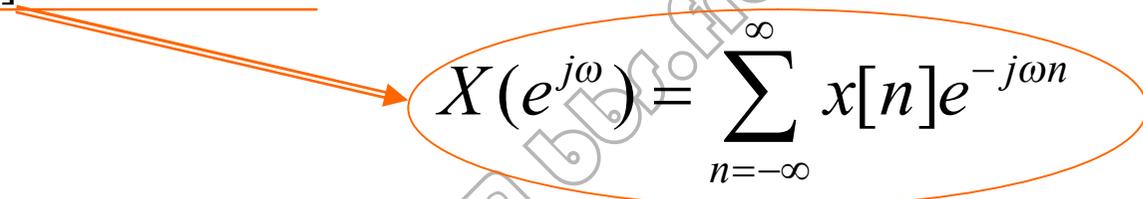
以上讨论都是假设  $x[n]$  是任意的,但属有限长情况下得到的结论。与连续时间傅里叶变换的收敛条件相对应,如果  $x[n]$  绝对可和,即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

或  $x[n]$  的能量有限,即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

那么,  $x[n]$  的傅里叶变换式一定收敛。


$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

应当指出,以上所给出的绝对可和和平方和的条件并不等价。由于存在以下关系

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| \leq \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \right]^{1/2}$$

因此绝对可和的信号一定平方可和;但平方可和的信号不一定绝对可和。即能量有限的条件要比绝对可和的条件更为宽松,更容易满足。

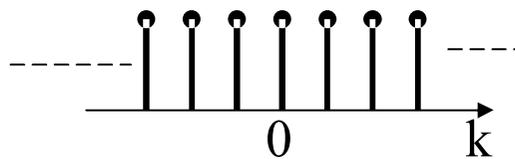
由于离散时间反变换 (5.8)式

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

的积分是在一个有限的积分区间上进行, 因此不存在收敛问题。

## 5.2 周期信号的傅里叶变换

与连续时间信号的频域表示情况一样, 也可以用离散时间傅里叶变换将离散时间周期信号与非周期信号的频域表示统一起来。为了导出这种表示的形式, 考虑如下信号 (频域以  $2\pi$  为周期的均匀冲激串):

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$


根据反变换公式, 可得

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi}$$

即

$$e^{j\omega_0 n} = e^{j0n} \quad \frac{1}{2\pi} \xleftrightarrow{F} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

由此可得

$$1 \xleftrightarrow{F} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

如果将  $k$  的取值范围选为  $k = 0 \rightarrow (N-1)$ , 则上式可展开为

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi a_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi l) + 2\pi a_1 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \cdots \\ + 2\pi a_{N-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - (N-1)\omega_0 - 2\pi l)$$

式中, 每一项中的和式只是为了保证这一项所表示的冲激是以  $2\pi$  为周期的。如果我们注意到  $a_k$  本身也是以  $N$  为周期的, 当我们将  $k$  的取值范围扩大到所有整数时, 上式就可以写成更简单的形式。

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

式中  $k = 0 \sim (N-1)$  的各项就对应于  $l = 0$  的各项;  $k$  取  $N \sim (2N-1)$  的各项就对应于  $l = 1$  的各项; 依此类推。

至此, 我们得到了离散时间周期信号的离散时间傅里叶变换表示。

由于  $x[n]=1$  是  $\omega_0=0$  的复指数信号  $e^{j\omega_0 n}$ 。为将该结果推广，再看信号：

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$$

根据傅里叶反变换公式，可求得时域信号为

$$x[n] = \int_0^{2\pi} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega = e^{j\omega_0 n}$$

即

$$e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{F} 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) \quad (5.18)$$

由上可见，它符合频移性质。

由于一个离散时间周期信号（周期为  $N$ ），其傅里叶级数可表示为

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j\omega_0 k}, \quad (\omega_0 = \frac{2\pi}{N})$$

所以

$$\sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j\omega_0 k} \xleftrightarrow{F} \sum_{k=\langle N \rangle} 2\pi a_k \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi l)$$

例5.5 考虑周期信号

$$x[n] = \cos \omega_0 n = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{5} \quad (5.22)$$

求 傅里叶变换

$$\text{解: } \because e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{F} 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$$

$$e^{-j\omega_0 n} \xleftrightarrow{F} 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)$$

$$\therefore X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \pi \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5} - 2\pi l\right) + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \pi \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5} - 2\pi l\right)$$

$$\text{得 } X(e^{j\omega}) = \pi \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5}\right) + \pi \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5}\right), \quad -\pi < \omega < \pi$$

$X(e^{j\omega})$  以周期为  $2\pi$  重复, 如下图缩示。

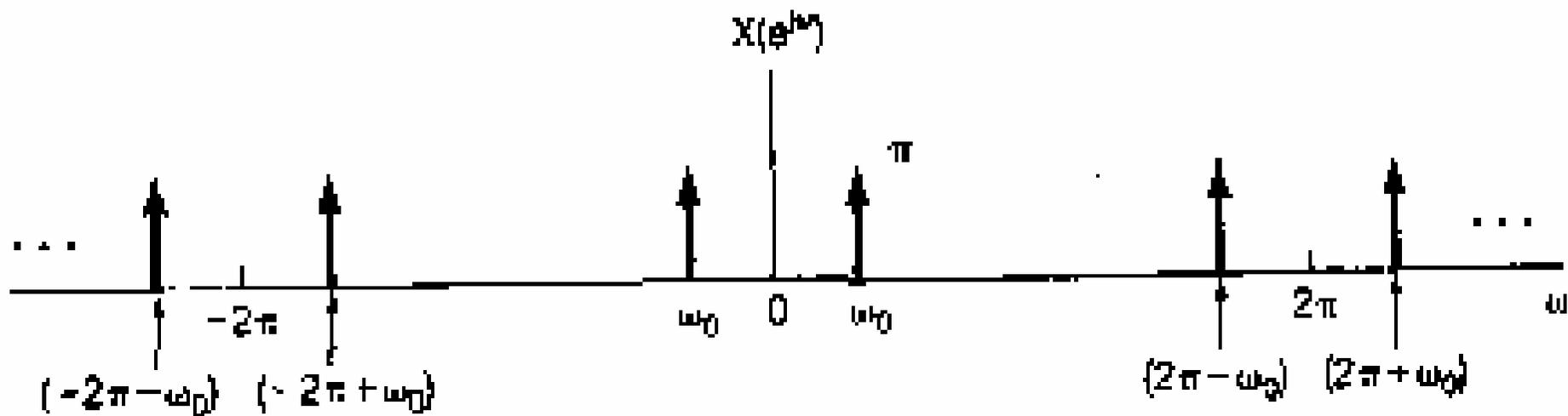


图 5.10  $x[n] = \cos(\omega_0 n)$  的离散时间傅里叶变换

免费下载网 [www.bbsoln.com](http://www.bbsoln.com)

上次习题:

题3.19 (c) 若  $x(t) = \cos(t)$ , 求输出  $y(t)$

由(a)已求得系统的微分方程为:  $y'(t) + y(t) = x(t)$

由(b)已求得系统的频率响应为  $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$

$$\text{又 } \because x(t) = \cos t = \frac{1}{2}(e^{jt} + e^{-jt})$$

$$\therefore y(t) = H(j\omega)x(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{jt}}{1+j} + \frac{e^{-jt}}{1-j}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{jt}}{\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}} + \frac{e^{-jt}}{\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[e^{j(t-\frac{\pi}{4})} + e^{-j(t-\frac{\pi}{4})}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

题4.2(b)

求  $\frac{d}{dt} \{u(-2-t) + u(t-2)\}$  的傅立叶变换。

解:  $\because X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} [u(-2-t) + u(t-2)] e^{-j\omega t} dt$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [-\delta(-2-t) + \delta(t-2)] e^{-j\omega t} dt$$

$\delta[-(t+2)]$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-2-t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2) e^{-j\omega t} dt$$
$$= -e^{j2\omega} + e^{-j2\omega} = -2j \sin 2\omega$$

实验课: 地点: 东3—106、107

指导教师: 孙熙文

时间: 双周四下午 3、4节

(原来3、4节的同学)

晚上 6:30—8:00

(原来1、2节的同学)

内容: 在生仪学院服务器中。(10.12.41.6)

离散时间傅立叶变换对:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

因为在一个有限的积分区间上进行，  
因此不存在收敛问题

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$\because e^{-j\omega n}$  以  $2\pi$  为周期

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$\because x(e^{j\omega})$  也是周期的

周期信号的傅立叶变换:

$$1 \xleftrightarrow{F} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{F} 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$$

$$x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{j\omega_0 k} \xleftrightarrow{F} \sum_{k \in \langle N \rangle} 2\pi a_k \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi l)$$

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

### 5.3 离散时间傅里叶变换性质

在以下讨论中，采用如下符号来表示一个信号与其傅里叶变换的一对关系。

$$X(e^{j\omega}) = F \{x[n]\}$$

$$x[n] = F^{-1} \{X(e^{j\omega})\}$$

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

#### 5.3.1 离散时间傅里叶变换的周期性

离散时间傅里叶变换对  $\omega$  来说总是周期的，其周期为  $2\pi$ ，即

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$$

这点与连续时间傅里叶变换是不同的（一般来说，连续时间傅里叶变换不是周期的）。

#### 5.3.2 线性

若  $x_1[n] \xleftrightarrow{F} X_1(e^{j\omega})$  ,  $x_2[n] \xleftrightarrow{F} X_2(e^{j\omega})$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{F} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}) \quad 365$$

### 5.3.3 时移和频移性质

若  $x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$

则有  $x[n - n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$  (5.30)

和  $e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j(\omega - \omega_0)})$  (5.31)

证明:

1、时移性

$$\because x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$\therefore x[n - n_0] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega(n - n_0)} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} [X(e^{j\omega}) e^{-j\omega n_0}] e^{j\omega n} d\omega$$

即  $x[n - n_0] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) e^{-j\omega n_0}$

2、频移性  $\because X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$

$$\therefore X(e^{j(\omega-\omega_0)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\omega-\omega_0)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{x[n]e^{j\omega_0 n}\}e^{-j\omega n}$$

$$x[n]e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{F} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

### 5.3.4 共轭与共轭对称性

1) 若  $x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$

则  $x^*[n] \xleftrightarrow{F} X^*(e^{-j\omega})$

证明:  $\because X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$  ← 这是傅立叶变换的公式

上式取共轭, 得  $X^*(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]e^{j\omega n}$

用  $-\omega$  替代  $\omega$  得  $X^*(e^{-j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]e^{-j\omega n}$

上式即为

$$x^*[n] \xleftrightarrow{F} X^*(e^{-j\omega})$$

2) 若  $x[n]$  是实值序列 ( 即  $x[n] = x^*[n]$  ) , 那么其变换是**共轭对称**的,

即 
$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \quad (x[n] \text{ 为实}) \quad (5.36)$$

证明:  $\because X^*(e^{-j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega})$

$\therefore X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \quad X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega})$

3) 如果将  $X(e^{j\omega})$  用直角坐标表示, 即

$$X(e^{j\omega}) = \Re e \{ X(e^{j\omega}) \} + j \Im m \{ X(e^{j\omega}) \}$$

而 
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n][\cos \omega n - j \sin \omega n]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cos \omega n - j \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \sin \omega n$$

$x[-n]$  的傅立叶变换为:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-(-j\omega)n} = X(e^{-j\omega})$  令  $n = -n$

$$X(e^{-j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cos \omega n + j \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \sin \omega n$$

$$\Re\{X(e^{j\omega})\} = \Re\{X(e^{-j\omega})\}$$

$$\Im\{X(e^{j\omega})\} = -\Im\{X(e^{-j\omega})\}$$

据此可得,  $\Re\{X(e^{j\omega})\}$  是  $\omega$  的偶函数, 而  $\Im\{X(e^{j\omega})\}$  是  $\omega$  的奇函数。

同理,  $X(e^{j\omega})$  的模是  $\omega$  的偶函数, 相角是  $\omega$  的奇函数。

4) 当实函数  $x[n]$  用奇、偶函数来表示时

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n] \xleftrightarrow{F} F\{x_e[n]\} + F\{x_o[n]\}$$

其中  $x_e[n] = E_v\{x[n]\} = \frac{1}{2}[x[n] + x[-n]] \xleftrightarrow{F} \Re\{X(e^{j\omega})\}$

实、偶函数

$$x_o[n] = O_d\{x[n]\} = \frac{1}{2}[x[n] - x[-n]] \xleftrightarrow{F} j\Im\{X(e^{j\omega})\}$$

实、奇函数

$$\left( x[n] = x_e[n] + x_o[n] = \frac{1}{2}[x[n] + x[-n]] + \frac{1}{2}[x[n] - x[-n]] \right) \quad 369$$

若 $x[n]$ 为实且偶序列，则其傅立叶变换也是实且偶函数。

若 $x[n]$ 为实且奇序列，则其傅立叶变换也是奇且纯虚函数

### 5.3.5 差分与累加

离散时间情况下的**累加**就相应于连续时间情况下的**积分**。而**差分**相当于**微分**。

1、**差分** 若  $x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$

根据线性和时移性，有  $x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{F} (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$

2、**累加** 若  $y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m] = x[n] * u[n] = x[n] * \sum_{m=-\infty}^n \delta[m]$

则有  $\sum_{m=-\infty}^n x[m] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})U(e^{j\omega})$

$$\therefore U(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$\therefore \sum_{m=-\infty}^n x[m] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

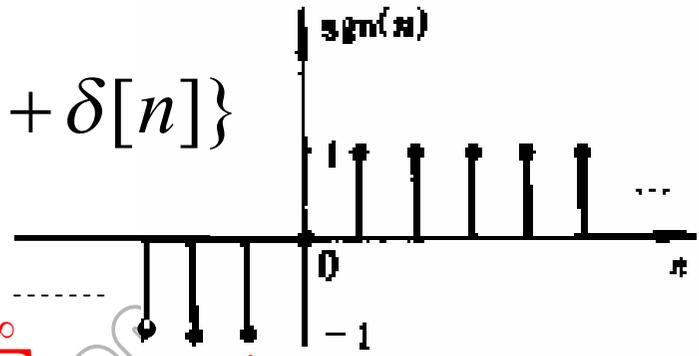
说明：单位阶跃的频谱

由于  $u[n]$  可以表示为  $u[n] = \frac{1}{2} \{1 + \text{sgn}[n] + \delta[n]\}$

$$\therefore 1 \xleftrightarrow{F} 2\pi \sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$\delta[n] \xleftrightarrow{F} 1 \quad \leftarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\omega n}$$

$$\text{sgn}[n] \xleftrightarrow{F} \frac{-j \sin \omega}{1 - \cos \omega}$$



sgn(n) 的图形

$$\therefore u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{j \sin \omega}{1 - \cos \omega}\right) + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$2 - 2\cos\omega = 1 - e^{j\omega} - e^{-j\omega} + e^{j\omega} e^{-j\omega}$$

$$= \frac{1 - e^{j\omega}}{2(1 - \cos \omega)} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

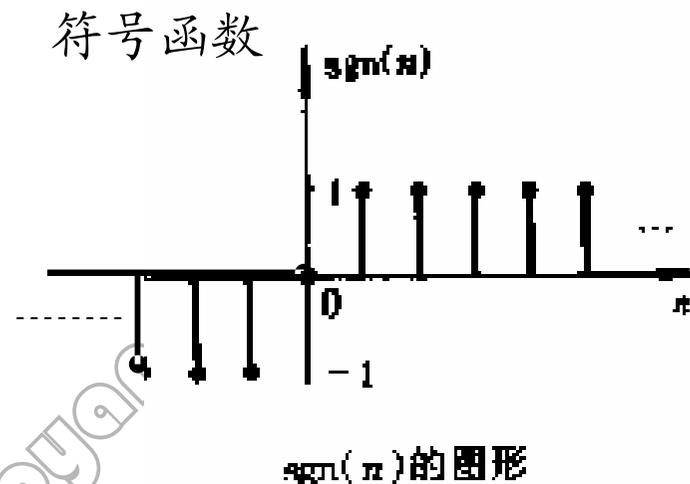
$$= (1 - e^{j\omega})(1 - e^{-j\omega}) \frac{1 - e^{j\omega}}{1 - e^{j\omega}}$$

$$= \frac{1 - e^{j\omega}}{(1 - e^{j\omega})(1 - e^{-j\omega})} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

Sgn [n] 的傅立叶变换:

$$\therefore \operatorname{sgn}[n] = \begin{cases} 1 & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -1 & n < 0 \end{cases}$$



也可看成  $\operatorname{sgn}[n] = a^n u[n] - a^{-n} u[-n]$  ,  $0 < a < 1$

当  $a \rightarrow 1$  时的极限, 因为

$$a^n u[n] \xrightarrow{F} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$a^{-n} u[-n] \xrightarrow{F} \frac{1}{1 - ae^{j\omega}}$$

$$\therefore \operatorname{sgn}[n] \xrightarrow{F} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} - \frac{1}{1 - ae^{j\omega}} = \frac{-2ja \sin \omega}{1 - 2a \cos \omega + a^2} = \frac{-j \sin \omega}{1 - \cos \omega}$$

$a \rightarrow 1$

式中右边的冲激串反映了累加过程中可能出现的直流或平均值。

因此，在离散时间情况下，频域上  $(1 - e^{-j\omega})$  乘积因子表示时域上的差分；

频域上  $\frac{1}{1 - e^{-j\omega}}$  的乘积因子表示时域上的累加运算。

例5.8 利用累加性质来导出单位阶跃的傅里叶变换。

解：因为

$$g[n] = \delta[n] \xleftrightarrow{F} G(e^{j\omega}) = 1$$

而单位阶跃就是单位脉冲的累加，即

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n g[m]$$

上式两边取傅里叶变换，并应用累加性质可得

$$\begin{aligned} U(e^{j\omega}) &= \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} G(e^{j\omega}) + \pi G(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \\ &= \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \end{aligned}$$

### 5.3.6 时间反转

设信号  $x[n] \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$

则  $y[n] = x[-n]$  的傅立叶变换为

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{-j\omega n}$$

作  $m = -n$  置换, 得

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-(-j\omega)m} = X(e^{-j\omega})$$

$$x[-n] \xleftrightarrow{F} X(e^{-j\omega})$$

### 5.3.7 时域扩展

在连续时间情况下, 时间和频率的尺度变换性质为  $x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$

然而, 由于离散时间信号在时间上的离散性, 因此若  $a$  不是一个整数时就遇到了困难(即, 不能用  $a < 0$  来减慢这个信号的变化); 另一方面, 即使令  $a$  是一个不同于

±1 的整数，比如说  $x[2n]$ ，因为  $n$  仅仅取整数值，所以  $x[2n]$  仅为由  $x[n]$  中的偶次样本所组成。

1、 然而，若令  $k$  是一个整正数，并且定义

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k] & \text{当 } n \text{ 为 } k \text{ 的整倍数时} \\ 0 & \text{当 } n \text{ 不为 } k \text{ 的整倍数时} \end{cases} \quad (5.44)$$

则  $x_{(k)}[n]$  就是在  $x[n]$  的相邻两点间插入  $(k-1)$  个零值而得到的（可以把  $x_{(k)}[n]$  看作是减慢了的  $x[n]$ ），见图 5.13

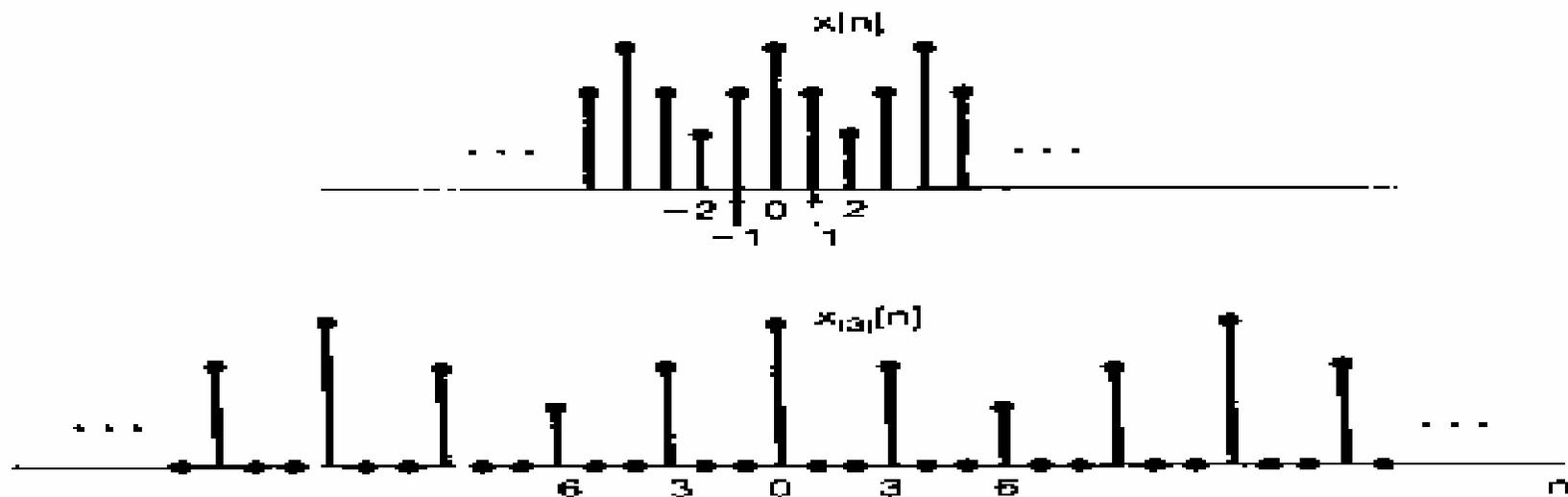


图 5.13 在序列  $x[n]$  的每两个连续值之间插入两个零值而得到的序列  $x_{(2)}[n]$

2、 当  $k$  为负整数时,  $x_{(k)}[n]$  除了有上述内插的过程外, 还要进行一次反转。

由(5.44)可知,  $x_{(k)}[n]$  只有当  $n$  是  $k$  的倍数时(即  $n = rk$ ), 才不为零, 所以  $x_{(k)}[n]$  的傅里叶变换为

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[n] e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[rk] e^{-j\omega rk}$$

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k] \\ 0 \end{cases} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r] e^{-j(k\omega)r} = X(e^{jk\omega})$$

即 
$$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{jk\omega})$$

上式表明: 当取  $k > 0$  时, 信号在时域上被拉开 (即, 在时间上等效于变化减慢), 而在频域上被压缩了  $k$  倍 (即, 等效于变化加快)。

一般地说, 由于  $X(e^{j\omega})$  是  $2\pi$  周期的, 因而  $x_{(k)}[n]$  的频谱

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = X(e^{jk\omega}) \text{ 是 } \frac{2\pi}{k} \text{ 周期的, 显然 } 2\pi \text{ 也是它的周期。}$$

图5.14 绘出了  $k$  分别为 2、3 时的情况。

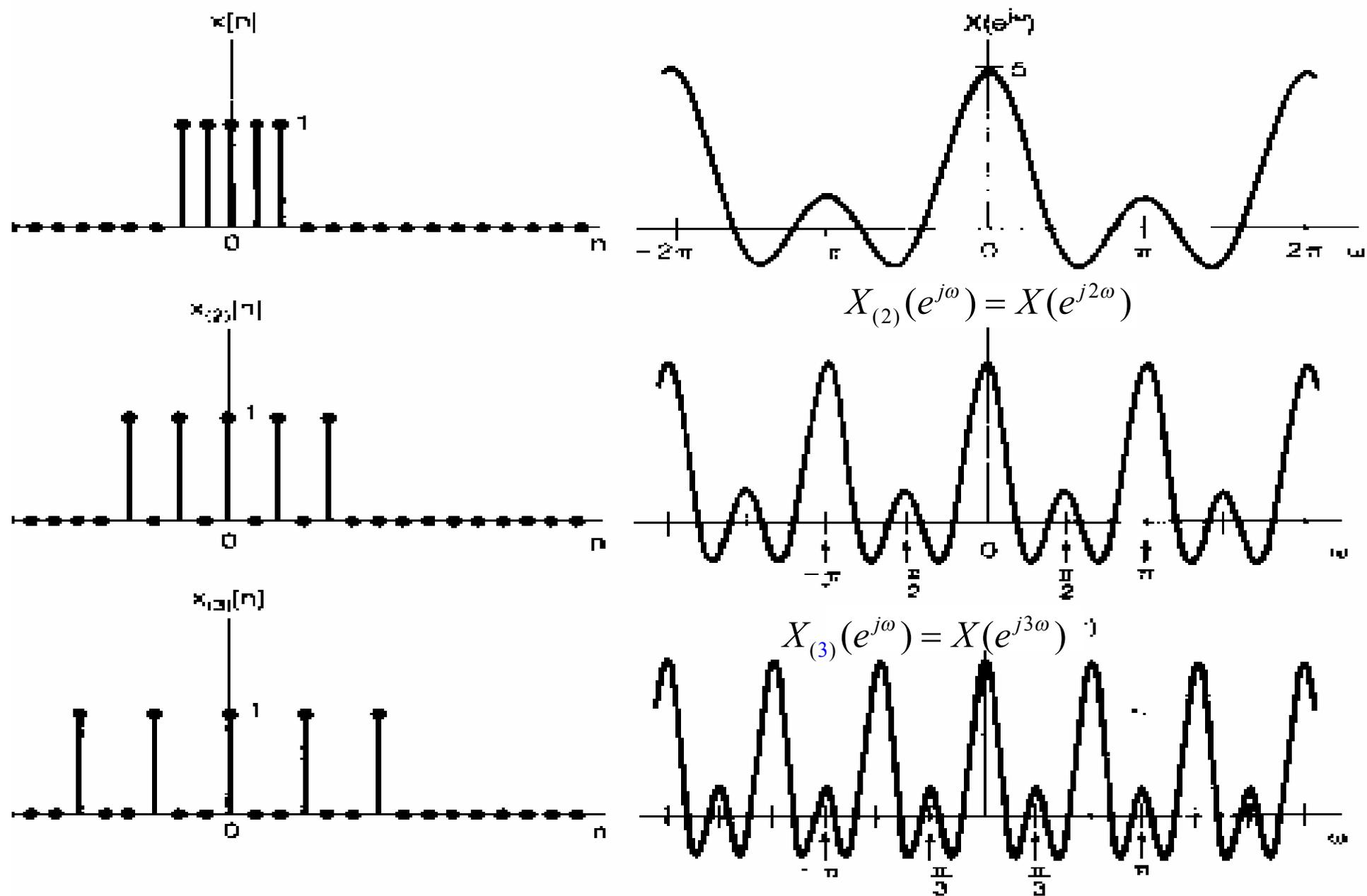


图 5.14 时域和频域之间的相反关系：当  $k$  增加时， $x_{(k)}[n]$  在时域上拉开，而其变换则在频域上压缩

例5.9 已知信号为图5.15(a)中的序列，求它的傅里叶变换。

解：

$$x[n] = y_{(2)}[n] + 2y_{(2)}[n-1]$$

$$\text{其中 } y_{(2)}[n] = \begin{cases} y[n/2] & \text{当 } n \text{ 为偶} \\ 0 & \text{当 } n \text{ 为奇} \end{cases}$$

先看  $y[n]$ ，它是矩形脉冲右移2而成，所以得（见P259例5.3）

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega} \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

利用时域扩展性得

$$Y_{(2)}[n] \xleftrightarrow{F} e^{-j4\omega} \frac{\sin(5\omega)}{\sin \omega}$$

再根据线性和时移性得

$$2Y_{(2)}[n-1] \xleftrightarrow{F} 2e^{-j5\omega} \frac{\sin(5\omega)}{\sin \omega}$$

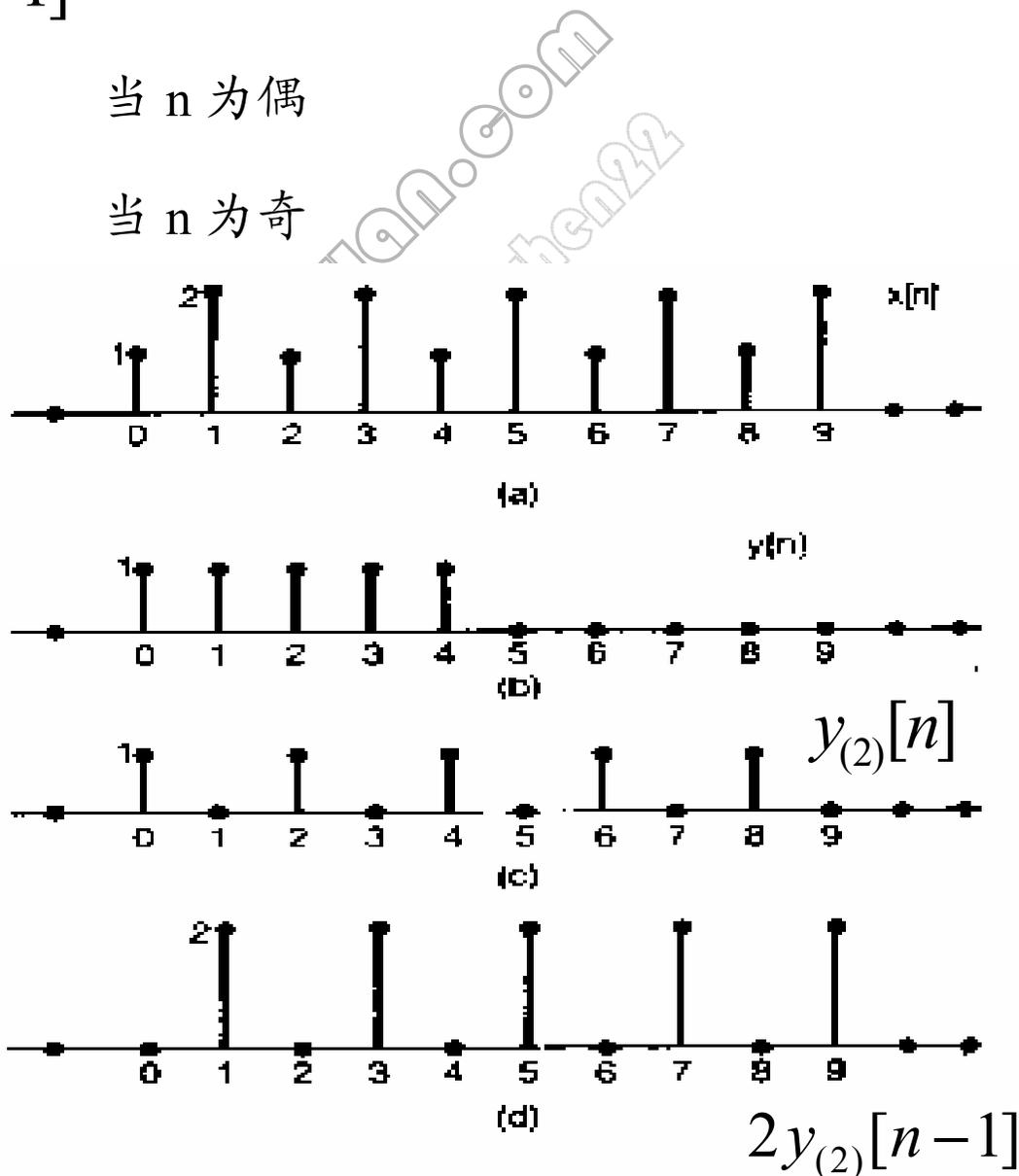


图 5.15

最后得  $X(e^{j\omega}) = e^{-j4\omega} (1 + 2e^{-j\omega}) \frac{\sin(5\omega)}{\sin \omega}$

### 5.3.8 频域微分

设  $x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$

对  $X(e^{j\omega})$  求微分, 得  $\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \frac{d[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}]}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -jnx[n]e^{-j\omega n}$

由上式可见,  $\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$  就是  $-jnx[n]$  的傅里叶变换。所以得

$$-jnx[n] \xleftrightarrow{F} \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

即

$$nx[n] \xleftrightarrow{F} j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

### 5.3.9 帕斯瓦尔定理

若 
$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

则有 
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

该式直接用傅里叶变换就能得出

证明:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x^*[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X^*(e^{j\omega}) e^{-j\omega n} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X^*(e^{j\omega}) d\omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X^*(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \end{aligned}$$

**例5.10** 信号  $x[n]$  的傅里叶变换  $X(e^{j\omega})$  在  $-\pi \leq \omega \leq \pi$  区间上,如图5.16所示。

请确定在时域  $x[n]$  是否是周期的、实信号、偶信号和/或有限能量的。

解: 1、在时域上的周期性就意味着傅里叶变换除了在各个基波频率的整数倍频率上有可能出现冲激外,其余地方均为零。现在  $X(e^{j\omega})$  不是这样,所以得出:  $x[n]$  不是周期的。

2、根据傅里叶变换的对称性知道,一个实序列一定有一个傅里叶变换,其模是  $\omega$  的偶函数,相位是  $\omega$  的奇函数。这给出的  $|x(e^{j\omega})|$  和  $\angle X(e^{j\omega})$  确是这样。因此:  $x[n]$  是实序列。

3、若  $x[n]$  是偶函数,那么根据实信号的对称性,  $X(e^{j\omega})$  必须为实且偶。然而,因为  $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j2\omega}$ , 即  $X(e^{j\omega})$  不是一个实值函数,因此:  $x[n]$  不是偶函数。

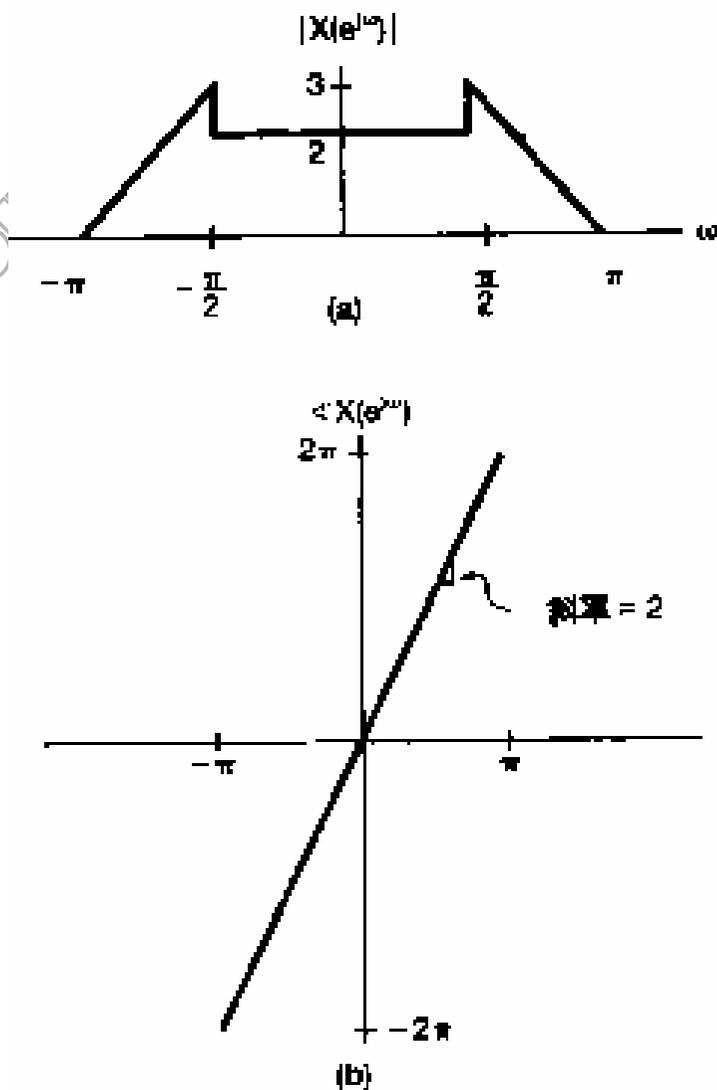


图 5.16 例 5.10 中傅里叶变换的模和相位

4、检查是否为有限能量，可用帕斯瓦尔定理。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

看图 5.16，在  $-\pi \sim \pi$  上积分， $|X(e^{j\omega})|^2$  一定为一个有限量，所以  $x[n]$  是有限能量的。

## 5.4 卷积性质

若  $x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$  和  $h[n] \xleftrightarrow{F} H(e^{j\omega})$

则有  $x[n] * h[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$

该性质的成立是依据以下两个特性：

- 1、信号可以表示复指数信号  $e^{j\omega n}$  的线性组合（即傅里叶变换的表示）；
- 2、 $e^{j\omega n}$  是LTI系统的特征函数。

如  $h[n]$  为某一LTI系统的单位脉冲响应， $x[n]$  为系统的输入信号，则

输出信号的频谱为  $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$ 。

当把信号分解成各频率复指数信号分量的线性组合，这些频率分量通过LTI系统时，系统的作用就是给它们的振幅加权  $H(e^{j\omega})$ 。因此，单位

脉冲响应  $h[n]$  的频谱  $H(e^{j\omega})$  被称为系统的频率响应。

### 5.4.1 举例

例5.11 考虑一LTI系统，其单位脉冲响应为  $h[n] = \delta[n - n_0]$

它的频率响应  $H(e^{j\omega})$  就是

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_0] e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_0}$$

可见，这LTI系统是一个纯时移系统，对所有频率其模为1；相移为  $-\omega n_0$

（即，相移与频率成线性关系）。

若  $x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$

则  $y[n] = x[n] * h[n] \xleftrightarrow{F} Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$

$$y[n] = x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$$

仅从卷积考虑求出  
 $y[n]$

从时移性考虑，也可得到  
同样结果  $y[n] = x[n - n_0]$

例5.13 一LTI系统，其单位脉冲响应为

$$h[n] = a^n u[n] \quad , |a| < 1$$

假设该系统的输入是

$$x[n] = \beta^n u[n] \quad , |\beta| < 1$$

求  $y[n]$

解： 1、先求  $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$

$$\begin{aligned} \therefore H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \end{aligned}$$

同样可得

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - \beta e^{-j\omega}}$$

则有

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - \beta e^{-j\omega})}$$

2、求 $y[n]$ 最容易的做法是用部分分式将  $Y(e^{j\omega})$  展开。

1) 若  $a \neq \beta$  (即无重根) 时, 有

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})(1-\beta e^{-j\omega})} = \frac{A}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\beta e^{-j\omega}}$$

等式两边同乘  $(1-ae^{-j\omega})$ , 并令  $e^{-j\omega} = \frac{1}{a}$ , 得  $A = \frac{a}{a-\beta}$

同样若等式两边同乘  $(1-\beta e^{-j\omega})$ , 并令  $e^{-j\omega} = \frac{1}{\beta}$ , 得  $B = \frac{\beta}{\beta-a}$

因为,  $a^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$ ,  $\beta^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}}$

由此可得,

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{a}{a-\beta} a^n u[n] - \frac{\beta}{a-\beta} \beta^n u[n] \\ &= \frac{1}{a-\beta} [a^{n+1} u[n] - \beta^{n+1} u[n]] \end{aligned}$$

2) 若  $a = \beta$  , 这时有重根, 即

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2} = \frac{A_{11}}{(1 - ae^{-j\omega})^2} + \frac{A_{12}}{1 - ae^{-j\omega}}$$

等式两边同乘  $(1 - ae^{-j\omega})^2$  , 并令  $e^{-j\omega} = 1/a$  ,

$$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2} (1 - ae^{-j\omega})^2 \Big|_{e^{-j\omega} = 1/a} = A_{11} + A_{12} (1 - ae^{-j\omega}) \Big|_{e^{-j\omega} = 1/a}$$

得  $A_{11} = 1$  。为了求  $A_{12}$  , 可将上式对  $e^{-j\omega}$  求一阶导数, 即得  $A_{12} = 0$

$$\text{则有 } (n+1)a^n u[n] \xleftrightarrow{F} Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$$

也可用频域微分性来求。即

$$\therefore \frac{d}{d\omega} \left( \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \right) = \frac{ae^{-j\omega} (-j)}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$$

$$\text{得 } \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2} = \frac{1}{ae^{-j\omega} (-j)} \frac{d}{d\omega} \left( \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \right) = \frac{j}{a} e^{j\omega} \frac{d}{d\omega} \left( \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \right)$$

其中  $a^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$

利用微分性可得

$$na^n u[n] \xleftrightarrow{F} j \frac{d}{d\omega} \left( \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \right)$$

应用时移性质,可得

$$(n+1)a^{n+1} u[n+1] \xleftrightarrow{F} je^{j\omega} \frac{d}{d\omega} \left( \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \right)$$

考虑到还有  $1/a$  因子后,得

$$(n+1) \frac{a^{n+1}}{a} u[n+1] \xleftrightarrow{F} j \frac{e^{j\omega}}{a} \frac{d}{d\omega} \left( \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \right)$$

$$\therefore y[n] = (n+1)a^n u[n+1]$$

注意到:虽然上式右边乘了一个起始于  $n = -1$  的阶跃,但在  $n = -1$  时,  $(n+1) = 0$  即

$y[n] = 0$ , 所以上式最后可写为  $y[n] = (n+1)a^n u[n]$  可见结果相同

例5.14 频率响应为  $H_{lp}(e^{j\omega})$  的LTI系统是一个截止频率为  $\pi/4$ 的理想低通滤波器,通带内增益为 1。

求系统的总频率响应。

解: 1、先看上部路径。

$$\because (-1)^n = e^{j\pi n}$$

$$\therefore w_1[n] = e^{j\pi n} x[n]$$

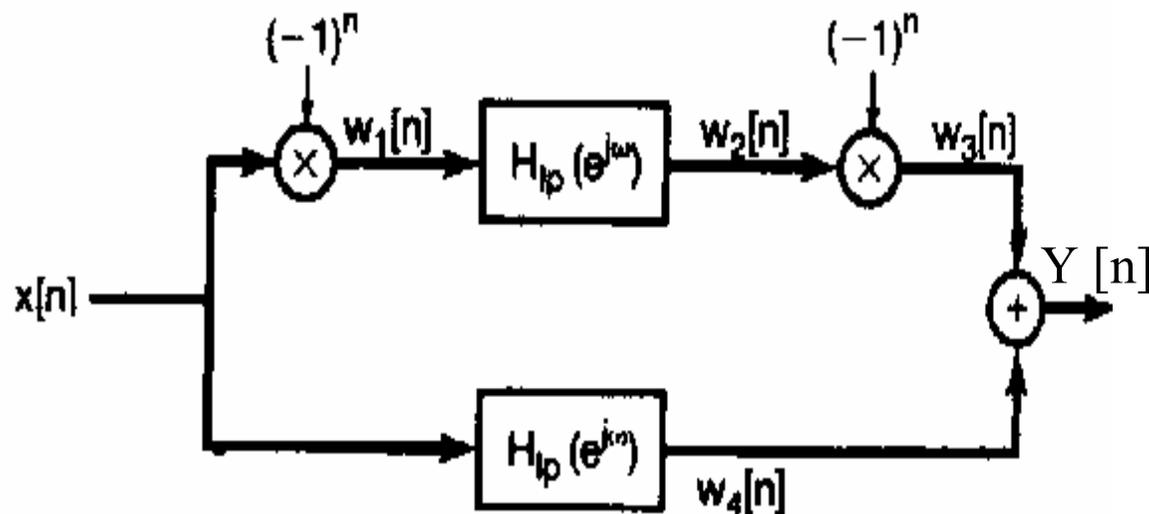
根据频移性质可知

$$W_1(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$$

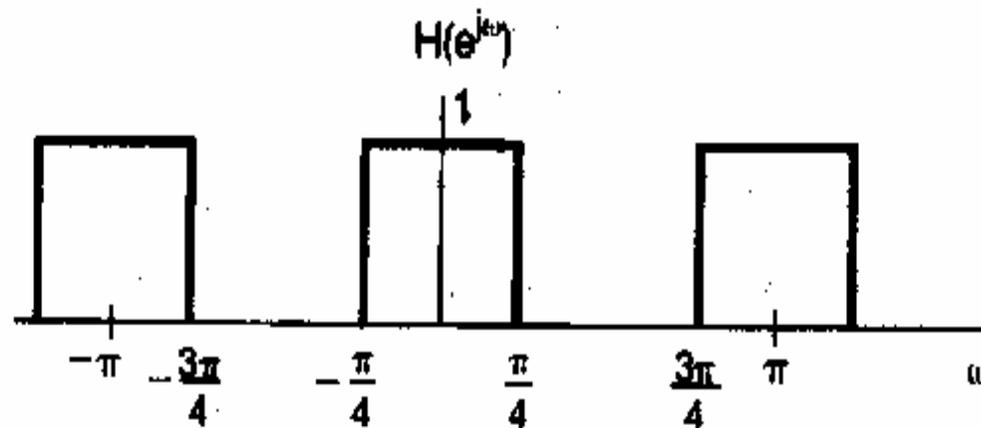
由卷积性质得

$$W_2(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega}) X(e^{j(\omega-\pi)})$$

$$\therefore w_3[n] = e^{j\pi n} w_2[n]$$



(a)



(b)

图5.18 (a)系统连接图 (b)系统的总频率响应

利用频移性质得

$$W_3(e^{j\omega}) = W_2(e^{j(\omega-\pi)}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})X(e^{j(\omega-2\pi)})$$

因为离散时间傅里叶变换总是周期的，周期为 $2\pi$ ，所以

$$W_3(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})X(e^{j\omega})$$

2、再看下面部分。

应用卷积性质，可得

$$W_4(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

3、根据线性性质，系统输出的频率响应为

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= W_3(e^{j\omega}) + W_4(e^{j\omega}) \\ &= [H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) + H_{lp}(e^{j\omega})]X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

4、系统总频率响应为  $H(e^{j\omega}) = [H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) + H_{lp}(e^{j\omega})]$

其中  $H(e^{j(\omega-\pi)})$  为高通滤波器的频率响应

$H(e^{j\omega})$  为低通滤波器的频率响应

可见，整个系统既通过低频，又通过高频，而阻止这两个频带之间的频率通过。因此，这个系统是一个具有理想带阻特性的滤波器。其带阻范围是

$$\pi / 4 < |\omega| < 3\pi / 4$$

值得提及的是：和连续时间情况相同，不是每一个LTI系统都有一个频率响应。

例如单位脉冲响应  $h[n] = 2^n u[n]$  的LTI系统，对正弦输入就不是一个有限的响应。然而，若一个LTI系统是稳定的，那么，它的单位脉冲响应就是绝对可和的，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

#5.13

---

### 离散时间傅立叶变换对

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

题4.33一因果LTI系统由下列微分方程表征:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt} + 6 \frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2x(t)$$

求: (a) 该系统的单位冲激响应;

(b) 若  $x(t) = te^{-2t}u(t)$ , 该系统的相应是什么?

解: (a)、 
$$H(j\omega) = \frac{2}{(j\omega)^2 + 6j\omega + 8} = \frac{2}{(j\omega + 2)(j\omega + 4)} = \frac{1}{j\omega + 2} - \frac{1}{j\omega + 4}$$

$$h(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-4t}u(t)$$

(b)  $\because x(t) = te^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 2)^2}$

$$\therefore Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = \frac{2}{(j\omega + 2)^3(j\omega + 4)}$$

$$= \frac{1}{j\omega + 2} + \frac{-1/2}{(j\omega + 2)^2} + \frac{1}{(j\omega + 2)^3} + \frac{-1/4}{j\omega + 4}$$

$$y(t) = \left[ e^{-2t} - \frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{2}t^2e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-4t} \right]u(t)$$

$$\frac{2}{(j\omega+2)^3(j\omega+4)} = \frac{A_{11}}{j\omega+2} + \frac{A_{12}}{(j\omega+2)^2} + \frac{A_{13}}{(j\omega+2)^3} + \frac{A_2}{j\omega+4}$$

$$\left. \frac{2}{(j\omega+2)^3} \right|_{j\omega=-4} = \left( \frac{A_{11}}{j\omega+2} + \frac{A_{12}}{(j\omega+2)^2} + \frac{A_{13}}{(j\omega+2)^3} \right) (j\omega+4) + A_2 \longrightarrow A_2 = -\frac{1}{4}$$

$$\left. \frac{2}{(j\omega+4)} \right|_{j\omega=-2} = A_{11}(j\omega+2)^2 + A_{12}(j\omega+2) + A_{13} + \frac{A_2}{j\omega+4} (j\omega+2)^3 \longrightarrow A_{13} = 1$$

$$\left. \frac{-2}{(j\omega+4)^2} \right|_{j\omega=-2} = 2A_{11}(j\omega+2) + A_{12} + \dots \longrightarrow A_{12} = -\frac{1}{2}$$

$$\left. \frac{4(j\omega+4)}{(j\omega+4)^4} \right|_{j\omega=-2} = 2A_{11} + \dots \longrightarrow A_{11} = \frac{1}{4}$$

$$y(t) = \left[ \frac{1}{4} e^{-2t} - \frac{1}{2} t e^{-2t} + \frac{1}{2} t^2 e^{-2t} - \frac{1}{4} e^{-4t} \right] \mu(t)$$

## 5.5 相乘性质

$$\text{若 } x_1[n] \xleftrightarrow{F} X_1(e^{j\omega}), \quad x_2[n] \xleftrightarrow{F} X_2(e^{j\omega})$$

$$\text{则 } y[n] = x_1[n]x_2[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

$$\text{证明: } Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2[n]e^{-j\omega n}$$

$$\text{因为 } x_1[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})e^{j\theta n} d\theta$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$\text{于是有 } Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n] \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})e^{j\theta n} d\theta \right\} e^{-j\omega n}$$

$$\text{即 } Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]e^{-j(\omega-\theta)n} \right] d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta = \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) \circledast X_2(e^{j(\omega)})$$

上式响应于  $X_1(e^{j\omega})$  和  $X_2(e^{j\omega})$  的**周期卷积**，并且在这个式子中的积分可

以在任意  $2\pi$  长度的区间内进行。卷积的一般形式（积分区间从  $-\infty \sim \infty$ ）常称为非周期卷积，以与周期卷积相区分。

例：已知  $x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$ ，求  $x[n]e^{j\omega_0 n}$  的傅立叶变换。

$$\therefore e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{F} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)$$

$$\therefore x[n]e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)$$

将积分区间取为  $0 \sim 2\pi$  得

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} X(e^{j\theta}) \delta(\omega - \theta - \omega_0) d\theta \\ &= X(e^{j(\omega - \omega_0)}) \end{aligned}$$

$$x[n]e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{F} X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

这就是频移性——也称调制特性

## 5.6 傅里叶变换性质和基本傅里叶变换对列表 (P 277页)

表5.1综合了离散时间傅里叶变换的若干重要性质,并指出在正文中讨论它们的节次。

表5.2 汇总了一些基本而最重要的离散时间傅立叶变换对。

## 5.7 对偶性

在连续时间傅里叶变换中的分析公式和总合公式之间**存在某种对偶性**,即

连续  $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \end{array} \right.$

图形见P208

连续  $\left\{ \begin{array}{l} x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \\ X(jt) \xleftrightarrow{F} 2\pi x(-\omega) \end{array} \right.$

然而,在离散时间傅里叶变换中的分析公式和总合公式之间**不存在对偶性**,即

离散  $\left\{ \begin{array}{l} x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \end{array} \right.$

连续  $\rightarrow$  图形见P259

但在离散时间傅里叶级数的综合公式和分析公式之间存在对偶性,即

$$\begin{cases} x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \\ a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n} \end{cases}$$

离散

离散

图形见P155

另外,在离散时间傅里叶变换和连续时间傅里叶级数之间也存在一种对偶关系,即

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} & \text{连续} \\ a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt & \text{离散} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} & \text{连续} \\ x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega & \text{离散} \end{cases}$$

连续时间傅里叶级数

离散时间傅里叶变换

### 5.7.1 离散时间傅里叶级数的对偶性

离散时间傅里叶级数公式为

$$\begin{cases} x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} & \text{(A)} \\ a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n} & \text{(B)} \end{cases}$$

因为一个周期信号  $x[n]$  的傅里叶系数  $a_k$  本身就是一个离散周期序列，所以就能将这个序列  $a_k$  展开成傅里叶级数。

见P152页式(3.98)

$$a_k = a_{k+N}$$

如果将  $x[n]$  的傅里叶级数系数  $a_k$  表示为一周期为  $N$  的离散信号  $a[k]$ ，则(B)式变为

$$a[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

目的是将  $a_k$  化成级数展开形式

将上式中的  $k$  与  $n$  对换，则有

$$a[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} x[k] e^{-jk\omega_0 n}$$

再把上式中的  $k$  换成  $-k$ ，则得到

$$a[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} x[-k] e^{jk\omega_0 n}$$

上式为  $a[n]$  的傅里叶级数形式,其系数为  $\frac{1}{N}x[-k]$

于是得到如下对偶关系

若 
$$x[n] \xleftrightarrow{F_s} a[k]$$

则 
$$a[n] \xleftrightarrow{F_s} \frac{1}{N}x[-k]$$

式中  $N$ ——为  $x[n]$  的周期。

该性质意味着：**离散时间傅里叶级数的每一个性质都有其对应的一个对偶关系存在。**

例5.16 求周期为 $N=9$ 的下面信号的傅里叶级数系数  $a_k$  :

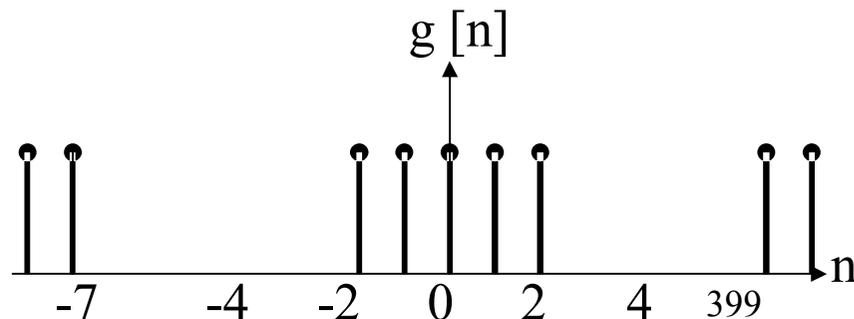
$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{9} \frac{\sin(5\pi n/9)}{\sin(\pi n/9)} & , n \neq 9 \text{ 的倍数} \\ \frac{5}{9} & , n = 9 \text{ 的倍数} \end{cases} \quad (5.72)$$

解：在第三章曾求得一个周期矩形方波的傅里叶级数系数在形式上与(5.72)式很相象。由对偶性可想到  $x[n]$  的傅里叶系数也一定具有矩形方波的形式。

$$\begin{aligned} x[n] &\xleftrightarrow{F_s} a[k] \\ a[n] &\xleftrightarrow{F_s} \frac{1}{N} x[-k] \end{aligned}$$

为了更仔细地看出这点，令  $g[n]$  是一个周期为 $N=9$ 的周期方波，即有

$$g[n] = \begin{cases} 1 & , |n| \leq 2 \\ 0 & , 2 < |n| \leq 4 \end{cases}$$

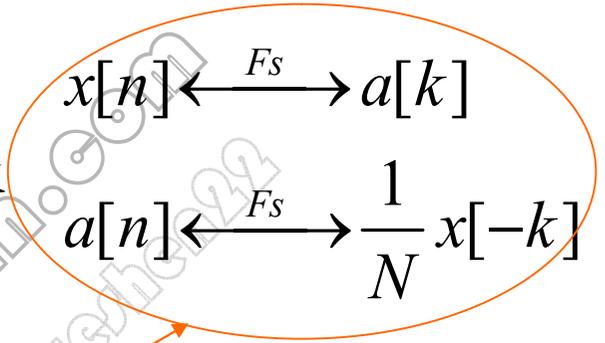


$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=-2}^2 g[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^4 e^{-jk\omega_0(m-2)} \\
&= \frac{1}{N} e^{j2k\omega_0} \sum_{m=0}^4 e^{-jk\omega_0 m} = \frac{1}{N} e^{j2k\omega_0} \frac{1 - e^{-j5k\omega_0}}{1 - e^{-jk\omega_0}} \\
&= \frac{1}{N} e^{j2k\omega_0} \frac{e^{-j5k\omega_0/2} [e^{j5k\omega_0/2} - e^{-j5k\omega_0/2}]}{e^{-jk\omega_0/2} [e^{jk\omega_0/2} - e^{-jk\omega_0/2}]} \\
&= \frac{1}{N} \frac{\sin(5k\omega_0/2)}{\sin(k\omega_0/2)} = \frac{1}{N} \frac{\sin(5k\pi/N)}{\sin(k\pi/N)} \\
&= \frac{1}{9} \frac{\sin(5k\pi/9)}{\sin(k\pi/9)} \quad k \neq 0, \pm N, \pm 2N \dots
\end{aligned}$$

$$b_k = \frac{5}{9} \quad k = 0, \pm N, \pm 2N \dots$$

即

$$b_k = \begin{cases} \frac{1}{9} \frac{\sin(5\pi k / 9)}{\sin(\pi k / 9)} & , k \neq 9 \text{ 的倍数} \\ \frac{5}{9} & , k = 9 \text{ 的倍数} \end{cases}$$



比较  $b_k$  与例题所给  $x[n]$ , 它们是相同的信号。因此根据对偶性, 有

$$g[n] \xleftrightarrow{F_s} b[k]$$

$$x[n] = b[n] \xleftrightarrow{F_s} \frac{1}{9} g[-k]$$

$$g[n] = \begin{cases} 1 & , |n| \leq 2 \\ 0 & , 2 < |n| \leq 4 \end{cases}$$

所以

$$x[n] \xleftrightarrow{F_s} \frac{1}{9} g[-k] = \begin{cases} \frac{1}{9} & , |k| \leq 2 \\ 0 & , 2 < |k| \leq 4 \end{cases}$$

### 5.7.2 离散时间傅里叶变换和连续时间傅里叶级数之间的对偶性

$$\left\{ \begin{array}{l} x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad \text{离散 (5.73)} \end{array} \right.$$

见P259

离散时间傅里叶变换公式

$$\left\{ \begin{array}{l} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad \text{连续 (5.74)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{连续 (5.75)} \end{array} \right.$$

见P136-137

连续时间傅里叶级数公式

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \text{离散 (5.76)} \end{array} \right.$$

注意到: (5.73)式和(5.76)式是很相像的; (5.74)式和(5.75)式也很像。

先看(5.74)和 (5.75)式: (均为连续)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

将 (5.74)式中的  $\omega$  换成  $t$ ,  $n$  换成  $k$ , 则有

$$X(e^{jt}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-jkt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-jk\omega_0 t}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$
$$k\omega_0 = k$$

在将上式中  $k$  换成  $-k$ , 可得

$$X(e^{jt}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]e^{jk\omega_0 t}$$

上式是周期为  $2\pi$  的  $X(e^{jt})$  信号的傅里叶级数形式。其系数为  $x[-k]$ 。

于是得到如下对偶关系

若

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

则

$$X(e^{jt}) \xleftrightarrow{Fs} x[-k]$$

再看 (5.73)和 (5.76)式: (式中  $x(t)$  为  $2\pi$  周期, 此时  $\omega_0 = 1$  )

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega \end{array} \right. \quad \leftarrow \text{将(5.76)式的 } t \text{ 换成 } \omega, k \text{ 换成 } n.$$

均为离散

得  $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} x(\omega) e^{-jn\omega} d\omega$

令  $\omega = -\omega$  得:  $a[n] = a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} x(-\omega) e^{jn\omega} d\omega$

于是得到如下对偶关系

$$\begin{array}{l} x(t) \xleftrightarrow{F_s} a_k \\ a[n] = a_n \xleftrightarrow{F} x(-\omega) \end{array}$$

可见, 离散时间傅里叶变换与连续时间傅里叶级数之间存在对偶关系。

$$x(t) \xleftrightarrow{F_s} a_k$$

$$a[n] = a_n \xleftrightarrow{F} x(-\omega)$$

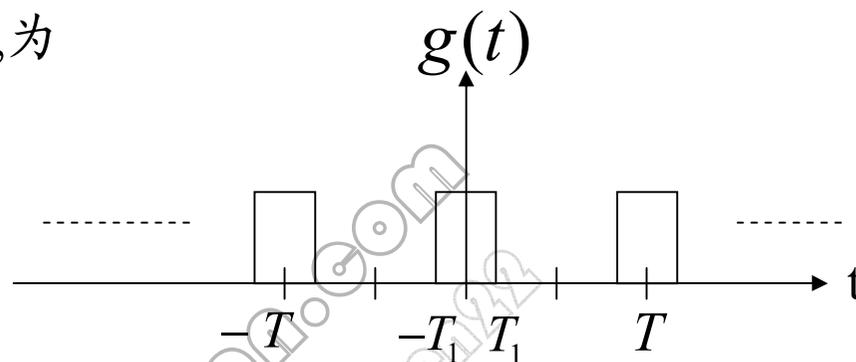
例5.17 利用离散时间傅里叶变换综合公式和连续时间傅里叶级数分析公式之间的对偶性来求下面的离散时间傅里叶变换。

$$x[n] = \frac{\sin(\pi n / 2)}{\pi n}$$

解：为了利用对偶性首先必须确认一个周期  $T = 2\pi$  的连续时间信号  $g(t)$ ，使其傅里叶系数  $a_k = x[k]$ 。由P135页例3.5可知， $g(t)$  是一个周期为  $2\pi$

(即基波频率  $\omega_0 = 2\pi/T = 1$ ) 的周期性方波,为

$$g(t) = \begin{cases} 1 & , |t| \leq T_1 \\ 0 & , T_1 < |T| \leq \pi \end{cases}$$



那么,  $g(t)$  的傅里叶级数系数是

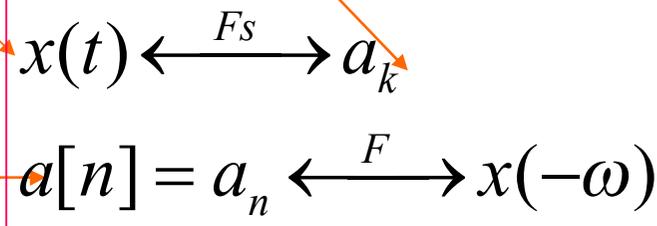
$$a_k = \frac{1}{T} \int_T g(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{\sin(kT_1)}{k\pi}$$

若取  $T_1 = \pi/2$ , 就有  $a_k = x[k]$ 。这时,  $g(t)$  的分析公式为

$$\frac{\sin(\pi k/2)}{\pi k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-T_1}^{T_1} g(t) e^{-jkt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1) e^{-jkt} dt$$

将  $k$  写为  $n$ ,  $t$  写为  $\omega$ , 则有

$$\frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1) e^{-jn\omega} d\omega$$



再令  $\omega = -\omega$  得:

$$\frac{\sin(\pi n / 2)}{\pi n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1) e^{j\omega n} d\omega$$

上式右边具有对  $x[n]$  的傅里叶变换综合公式的形式, 这里

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & , |\omega| \leq \pi/2 \\ 0 & , \pi/2 < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$
$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

## 5.8 由线性常系数差分方程表征的系统

对于一个LTI系统而言,其输出  $y[n]$  和输入  $x[n]$  间的线性常系数差分方程一般具有如下形式:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (5.78)$$

本节将利用离散时间傅里叶变换的几个性质导出由这样一个方程所描述的LTI系统的频率响应  $H(e^{j\omega})$ 。

有两种方法来确定  $H(e^{j\omega})$  :

1、利用复指数是LTI系统特征函数这一事实来求。

若  $x[n] = e^{j\omega n}$  是一个LTI系统的输入,那么其输出就一定具有  $H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$  这种形式。将这些表达式代入 (5.78)式,做一些代数运算就可解出  $H(e^{j\omega})$ 。

2、利用离散时间傅里叶变换的卷积、线性和时移性质来求。

设  $X(e^{j\omega})$ 、 $Y(e^{j\omega})$  和  $H(e^{j\omega})$  分别为输入  $x[n]$ 、输出  $y[n]$  和单位脉冲响应  $h[n]$  的傅里叶变换,那么离散时间傅里叶变换的卷积性质就意味着有

$$H(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega}) / X(e^{j\omega})$$

在(5.78)式两边应用傅里叶变换,并利用线性和时移性质,可得

$$\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$$

或

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega}} \quad (5.80)$$

由(5.80)式可见,像在连续时间情况下一样,  $H(e^{j\omega})$  是两个多项式的比。只是在离散时间下, 这些多项式的变量是  $e^{-j\omega}$ 。分子多项式的系数就是(5.78)式右边的系数; 而分母多项式的系数就是(5.78)式左边的系数。因此, 由(5.78)式表征的LTI系统的频率响应就能够凭直观写出来。

例5.18 考虑一因果LTI系统,其差分方程为

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \quad , |a| < 1$$

求 该系统的单位脉冲响应  $h[n]$ 。

解: 由(5.80)式,该系统的频率响应是

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

由P257页例5.1可知,上式就是序列  $a^n u[n]$  的傅里叶变换。因此,该系统的单位脉冲响应是  $h[n] = a^n u[n]$

例5.19 考虑一因果LTI系统,其差分方程为

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n]$$

求: 该系统的单位脉冲响应  $h[n]$ 。

解: 由(5.80)式,该系统的频率响应是  $H(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}}$  410

为求单位脉冲响应

1、将上式的分母因式分解为：
$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})}$$

2、按部分分式展开，即 
$$H(e^{j\omega}) = \frac{A_1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{A_2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$A_1 = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})} (1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}) \Big|_{e^{-j\omega}=2} = 4$$

$$A_2 = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})} (1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}) \Big|_{e^{-j\omega}=4} = -2$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{4}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})} - \frac{2}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})}$$

3、写出式中每一项的反变换为

$$h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

例5.20 考虑例5.19的LTI系统, 并设系统输入为

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

求: 系统输出  $y[n]$

解: 利用(5.80)式和例5.18, 可得

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \left[ \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} \right] \left[ \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \right] \\ &= \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2} \end{aligned}$$

按部分分式展开得

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2} = \frac{B_{11}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{B_{12}}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2} + \frac{B_2}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

可求得  $B_{11} = -4$  ,  $B_{12} = -2$  ,  $B_2 = 8$

即

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{4}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} - \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2} + \frac{8}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

则有

$$y[n] = \left\{ -4\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n + 8\left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} u[n]$$

## 5.9 小结

这一章和第四章相并行地研究了离散时间信号的傅里叶变换,并考察了它的许多重要性质。已经看到连续时间和离散时间傅里叶分析之间有很多类似之处,同时也看到了某些重要的差别。

### 1、类似点

例如,在离散时间情况下,傅里叶级数和傅里叶变换之间的关系是非常类似于在连续时间情况下两者之间的关系。尤其是,从离散时间傅里叶级数导出非周期信号的离散时间傅里叶变换的过程与在连续时间情况下所对应的几乎是完全一样。再者,连续时间傅里叶变换的很多性质都能在离散时间情况下找到相应的性质。

### 2、不同点

例如,一个非周期信号的离散时间傅里叶变换总是周期的,且周期为  $2\pi$ 。除了上述异同点外,还讨论了连续时间和离散时间信号的傅里叶表示之间的对偶关系。

作业: P285

1、题5.7

2、题5.19

3、题 5.51

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

免费考研网 bbs.freekaoyan.com  
yueshen22

# 第六章

## 信号与系统的时域和频域特性

P285 题 5.7 利用傅立叶变换性质，确定下面傅立叶变换所对应的时域信号是：

1) 实、虚信号，或均不是；2) 偶、奇信号，或均不是。

a)  $X_1(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} \sum_{k=1}^{10} (\sin k\omega)$

解：若为实信号则应： $X(e^{j\omega}) = X_1^*(e^{-j\omega})$

现  $X_1(e^{-j\omega}) = -e^{j\omega} \sum_{k=1}^{10} (\sin k\omega)$

$$X_1^*(e^{-j\omega}) = -e^{-j\omega} \sum_{k=1}^{10} (\sin k\omega) \neq X(e^{j\omega})$$

• 所以，该信号不是实信号

又  $\because X_1(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} \sum_{k=1}^{10} (\sin k\omega) = \cos \omega \sum_{k=1}^{10} (\sin k\omega) - j \sin \omega \sum_{k=1}^{10} (\sin k\omega)$  (A)

而综合公式为  $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$

奇函数

偶函数

经反变换可得  $x[n] = -j \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \omega \sum_{k=1}^{10} (\sin k\omega) e^{j\omega n} d\omega$

即有  $jx[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \omega \sum_{k=1}^{10} (\sin k\omega) e^{j\omega n} d\omega$  所以为虚信号

• 由 (A) 式可见，该信号既不是偶也不是奇——即均不是

b)、 $X_2(e^{j\omega}) = j \sin(\omega) \cos(5\omega)$

解：1、若为实信号则应： $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$

现  $X_2(e^{-j\omega}) = -j \sin(\omega) \cos(5\omega)$

$$X_2^*(e^{-j\omega}) = j \sin(\omega) \cos(5\omega) = X_2(e^{j\omega})$$

可见，时域信号为实信号。

2、 $\because X_2(e^{j\omega}) = j \sin(\omega) \cos(5\omega)$  为虚且奇。所以，对应的时域信号为实奇信号。

c)、
$$X_3(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 + e^{j(-3\omega/2+\pi)} = 1 - e^{-j3\omega/2} ; & 0 \leq |\omega| \leq \pi / 8 \\ e^{j(-3\omega/2+\pi)} = -e^{-j3\omega/2} ; & \pi / 8 < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

解：1)、若为实信号则应： $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$

$$X_3(e^{-j\omega}) = \begin{cases} 1 - e^{j3\omega/2} ; & 0 \leq |\omega| \leq \pi / 8 \\ -e^{j3\omega/2} ; & \pi / 8 < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad 418$$

$$X_3 * (e^{-j\omega}) = \begin{cases} 1 - e^{-j3\omega/2}; & 0 \leq |\omega| \leq \pi/8 \\ -e^{-j3\omega/2}; & \pi/8 < |\omega| \leq \pi \end{cases} = X_3(e^{j\omega})$$

所以对应的时域信号为实信号。

2)、

$$\therefore X_3(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 + e^{j(-3\omega/2+\pi)} = 1 - e^{-j3\omega/2}; & 0 \leq |\omega| \leq \pi/8 \\ e^{j(-3\omega/2+\pi)} = -e^{-j3\omega/2} & ; \quad \pi/8 < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

因为它既不是偶信号也不是纯虚信号，所以其对应的时域信号不是偶信号也不是奇信号。

题5.19 考虑一因果稳定的LTI系统S，其输入和输出可通过下面二阶差分方程关

$$\text{联: } y[n] - \frac{1}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] = x[n]$$

a)、求该系统的频率响应  $H(e^{j\omega})$

b)、求系统的单位脉冲响应  $h[n]$

解:

$$\text{a)、 } H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}e^{-j\omega} - \frac{1}{6}e^{-j2\omega}}$$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 + \frac{1}{3}e^{-j\omega})} = \frac{k_1}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})} + \frac{k_2}{(1 + \frac{1}{3}e^{-j\omega})} \\ &= \frac{3/5}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})} + \frac{2/5}{(1 + \frac{1}{3}e^{-j\omega})} \end{aligned}$$

$$\text{b)、 } \therefore h[n] = \left[ \frac{3}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{5} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right] u[n]$$

附录A: 部分分式展开:

$$H(v) = \frac{\beta_m v^m + \beta_{m-1} v^{m-1} + \cdots + \beta_1 v + \beta_0}{a_n v^n + a_{n-1} v^{n-1} + \cdots + a_1 v + a_0}$$

一、

- 1、对于连续时间傅立叶分析来说:  $v$  相当于  $(j\omega)$ ;
- 2、对于拉斯变换来说:  $v$  相当于复变量  $s$ ;
- 3、在离散傅立叶分析中:  $v$  相当于  $(e^{-j\omega})$ ;
- 4、对于 $z$ 变换:  $v$  相当于  $z^{-1}$  或  $z$ 。

二、

- 1、如果  $m < n$ , 则  $H(v)$  称为严格真有理函数——这时可先将分母因式分解,

$$H(v) = \frac{\beta_m v^m + b_{m-1} v^{m-1} + \cdots + \beta_1 v + \beta_0}{(v - \rho_1)(v - \rho_2) \cdots (v - \rho_n)}$$

再确定系数  $A_1, A_2, \cdots, A_n$

$$H(v) = \frac{A_1}{(v - \rho_1)} + \frac{A_2}{(v - \rho_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(v - \rho_n)}$$

2、如果  $m \geq n$ ，可用除法将  $H(v)$  写成一个  $v$  的多项式与一个严格真有理函数之和，即

$$H(v) = c_{m-n}v^{m-n} + c_{m-n-1}v^{m-n-1} + \cdots + c_1v + c_0 + \frac{b_{n-1}v^{n-1} + b_{n-2}v^{n-2} + \cdots + b_1v + b_0}{v^n + a_{n-1}v^{n-1} + \cdots + a_1v + a_0}$$

### 三、P297题5.51

(a)、考虑一离散时间系统，其单位脉冲响应为：

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

求一个关联该系统输入和输出的线性系数差分方程。

解：

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \xrightarrow{F} H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{1/2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{3/2 - 1/2e^{-j\omega}}{1 - 3/4e^{-j\omega} + 1/8e^{-j2\omega}}$$

可得：
$$y[n] - 3/4y[n-1] + 1/8y[n-2] = 3/2x[n] - 1/2x[n-1]$$

题5.51(b)已知一个因果LTI系统的方框图，

1. 求关联该系统 $x[n]$ 和 $y[n]$ 的差分方程。

2. 求该系统的频率响应  $H(e^{j\omega})$

3. 求该系统的单位脉冲响应 $h[n]$

1)求差分方程

•设中间变量  $y_1[n]$ ,  $y_2[n]$ ,  $y_3[n]$ 。

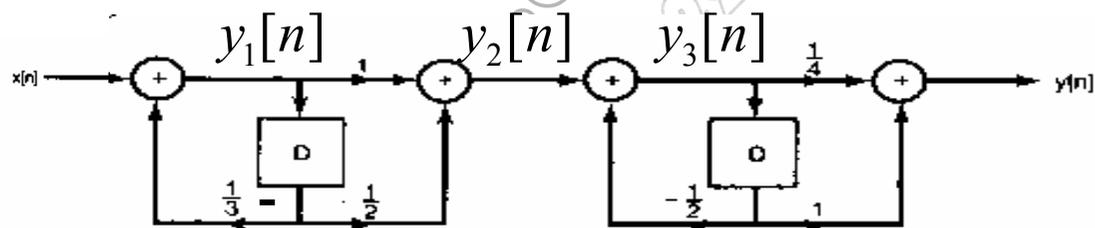


图 P5.51

$$y_1[n] = \frac{1}{3} y_1[n-1] + x[n] \Rightarrow H_1(e^{j\omega}) = \frac{Y_1(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

$$y_2[n] = y_1[n] - \frac{1}{2} y_1[n-1] \Rightarrow H_2(e^{j\omega}) = \frac{Y_2(e^{j\omega})}{Y_1(e^{j\omega})} = 1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}$$

$$y_3[n] = y_2[n] - \frac{1}{2} y_3[n-1] \Rightarrow H_3(e^{j\omega}) = \frac{Y_3(e^{j\omega})}{Y_2(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$y[n] = \frac{1}{4} y_3[n] + y_3[n-1] \Rightarrow H_4(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{Y_3(e^{j\omega})} = \frac{1}{4} + e^{-j\omega}$$

得

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{Y(e^{j\omega})}{Y_3(e^{j\omega})} \frac{Y_3(e^{j\omega})}{Y_2(e^{j\omega})} \frac{Y_2(e^{j\omega})}{Y_1(e^{j\omega})} \frac{Y_1(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \\ &= \left(\frac{1}{4} + e^{-j\omega}\right) \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right) \left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}\right) \\ &= \frac{\left(\frac{1}{4} + e^{-j\omega}\right) \left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}{\left(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right) \left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{7}{8}e^{-j\omega} - \frac{1}{2}e^{-j2\omega}}{1 + \frac{1}{6}e^{-j\omega} - \frac{1}{6}e^{-j2\omega}} \end{aligned}$$

则差分方程为:  $y[n] + \frac{1}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] = \frac{1}{4}x[n] + \frac{7}{8}x[n-1] - \frac{1}{2}x[n-2]$

2、系统频率响应为:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\left(\frac{1}{4} + e^{-j\omega}\right) \left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}{\left(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right) \left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{7}{8}e^{-j\omega} - \frac{1}{2}e^{-j2\omega}}{1 + \frac{1}{6}e^{-j\omega} - \frac{1}{6}e^{-j2\omega}}$$

3、求该系统的单位脉冲响应

$$\therefore H(e^{j\omega}) = \frac{(\frac{1}{4} + e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})}{(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{7}{8}e^{-j\omega} - \frac{1}{2}e^{-j2\omega}}{1 + \frac{1}{6}e^{-j\omega} - \frac{1}{6}e^{-j2\omega}}$$

可见，分子分母的阶数相同，所以得用长除法将上式化为一个多项式与一个严格真有理函数之和的形式。即

$$\therefore H(e^{j\omega}) = \frac{(\frac{1}{4} + e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})}{(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} = \frac{12e^{-j2\omega} - 21e^{-j\omega} - 6}{4e^{-j2\omega} - 4e^{-j\omega} - 24}$$

$$4e^{-j2\omega} - 4e^{-j\omega} - 24 \begin{array}{l} 3 \\ \hline 12e^{-j2\omega} - 21e^{-j\omega} - 6 \\ \hline -12e^{-j2\omega} - 12e^{-j\omega} - 72 \\ \hline -9e^{-j\omega} + 66 \end{array}$$

$$H(e^{j\omega}) = 3 + \frac{3}{4} \frac{-3e^{-j\omega} + 22}{(e^{-j\omega} - 3)(e^{-j\omega} + 2)} = 3 + \frac{3}{4} \left[ \frac{A_1}{(e^{-j\omega} - 3)} + \frac{A_2}{(e^{-j\omega} + 2)} \right]$$

可求得:  $A_1 = \frac{13}{5}$  ,  $A_2 = -\frac{28}{5}$

$$H(e^{j\omega}) = 3 + \frac{3}{4} \left[ \frac{13/5}{(e^{-j\omega} - 3)} - \frac{28/5}{(e^{-j\omega} + 2)} \right]$$
$$= 3 - \frac{13/20}{(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} - \frac{21/10}{(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega})}$$

得  $h[n] = 3\delta[n] - \frac{13}{20} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \frac{21}{10} \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

---

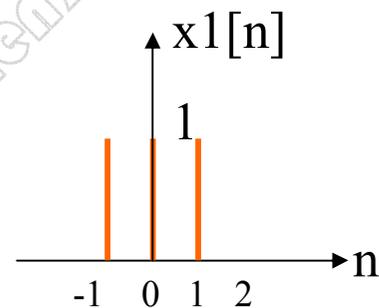
---

题 5.8 当  $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} \left( \frac{\sin \frac{3}{2}\omega}{\sin \frac{\omega}{2}} \right) + 5\pi\delta(\omega), \quad -\pi < \omega \leq \pi$

求:  $x[n]$

解: 频域中  $\frac{1}{1-e^{-j\omega}}$  因子是时域表示累加操作。即:

$$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \longleftrightarrow \frac{1}{1-e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$



现看  $x_1[n] = u[n+1] - u[n-1]$  的傅立叶变换:

$$\begin{aligned} X_1(e^{j\omega}) &= \sum_{k=-1}^1 e^{-j\omega k} = \sum_{m=0}^2 e^{-j\omega(m-1)} = e^{j\omega} \sum_{m=0}^2 e^{-j\omega m} \\ &= e^{j\omega} \frac{1-e^{-j\omega 3}}{1-e^{-j\omega}} = e^{j\omega} \frac{e^{-j\omega 3/2} [e^{j\omega 3/2} - e^{-j\omega 3/2}]}{e^{-j\omega/2} [e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}]} = \frac{\sin(3\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \end{aligned}$$

$$X_1(e^{j0}) = \sum_{k=-1}^1 e^{-j0k} = \sum_{k=-1}^1 1 = 3$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^n x_1[k] &\longleftrightarrow \frac{1}{1-e^{-j\omega}} X_1(e^{j\omega}) + \pi X_1(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \\ &= \frac{1}{1-e^{-j\omega}} \frac{\sin(3\omega/2)}{\sin(\omega/2)} + 3\pi\delta(\omega) \quad , \quad -\pi < \omega \leq \pi \end{aligned}$$

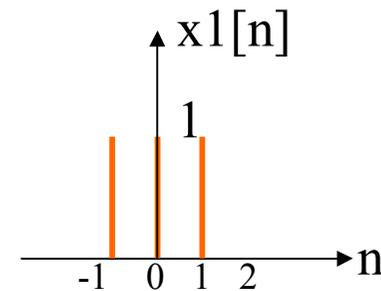
又因为:  $1 \xrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega)$

所以:

$$x[n] = 1 + \sum_{k=-\infty}^n x_1[k] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} \left( \frac{\sin \frac{3}{2}\omega}{\sin \frac{\omega}{2}} \right) + 3\pi\delta(\omega) + 2\omega\delta(\omega)$$

$-\pi < \omega \leq \pi$

$$x[n] = 1 + \sum_{k=-\infty}^n x_1[k] = \begin{cases} 1 & , \quad n \leq -2 \\ n+3 & , \quad -1 \leq n \leq 1 \\ 4 & , \quad n \geq 2 \end{cases}$$



P100页

题2.17 考虑一LTI系统，其输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 由下面微分方程描述：

$$\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = x(t)$$

系统满足初始松弛的条件。

(a)若  $x(t) = e^{(-1+3j)t}u(t)$  ,求  $y(t) = ?$

解: 1、经典法  $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

$$1) \because \lambda + 4 = 0 \quad \lambda = -4 \quad \therefore y_h(t) = Ae^{-4t}u(t)$$

$$2) \because x(t) = e^{(-1+3j)t}u(t) \quad \therefore \text{设 } y_p(t) = Be^{(-1+3j)t}u(t)$$

代入方程得  $Be^{(-1+3j)t}(-1+3j) + 4Be^{(-1+3j)t} = e^{(-1+3j)t}$

$$B(-1+3j) + 4B = 1, \quad B = \frac{1}{4 + (-1+3j)} = \frac{1}{3(1+j)}$$

$$\therefore y(t) = Ae^{-4t}u(t) + \frac{1}{3(1+j)}e^{(-1+3j)t}u(t)$$

$$y(0) = A + \frac{1}{3(1+j)} = 0, \quad A = -\frac{1}{3(1+j)}$$

$$y(t) = -\frac{1}{3(1+j)}e^{-4t}u(t) + \frac{1}{3(1+j)}e^{(-1+3j)t}u(t)$$

$$= \frac{(1-j)}{6} [e^{(-1+3j)t} - e^{-4t}]u(t)$$

## 2、用傅立叶变换

$$\because \frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = x(t) \quad , \quad \therefore H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 4}$$

$$\because x(t) = e^{(-1+3j)t}u(t) \quad , \quad \therefore X(j\omega) = \frac{1}{j\omega - (-1+3j)}$$

即

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 4)[j\omega - (-1+3j)]}$$

$$= \frac{A_1}{j\omega + 4} + \frac{A_2}{j\omega - (-1+3j)}$$

可求得

$$A_1 = -\frac{1}{3(1+j)} = -\frac{(1-j)}{6} \quad , \quad A_2 = \frac{1}{3(1+j)} = \frac{(1-j)}{6}$$

$$Y(j\omega) = \frac{(1-j)}{6} \left[ \frac{1}{(j\omega - (-1+3j))} - \frac{1}{(j\omega + 4)} \right]$$

$$y(t) = \frac{(1-j)}{6} [e^{(-1+3j)t} - e^{-4t}]u(t)$$

## 6.0 引言

一个LTI系统既可通过时域特性来描述,也可利用系统频率响应的频率特性来表示。

由于时域中的微分方程和卷积运算在频域都变成了代数运算,所以利用频域来分析LTI系统就特别方便。

然而,在系统设计中,对频域和时域的要求一般都需要进行综合考虑。因为在大量的应用中,对于一个系统既从频域,又从时域两方面提出了或限定了一定的特性要求。而这些要求又往往是互相矛盾的。所以在系统设计和分析中将时域特性与频域特性联系起来并给以权衡考虑是很必要的。

### 6.1 傅里叶变换的模和相位表示

一般说来,傅里叶变换是复数值的。所以可用它的实部和虚部,或用它的模和相位来表示。连续时间傅里叶变换 $X(j\omega)$ 的模—相表示如下:

$$X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\angle X(j\omega)}$$

离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的模—相表示如下:

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})}$$

模所描述的是一个信号的基本频率含量，也即给出的是组成 $x(t)$ 的各复指数信号相对振幅的信息。

相位角 $\angle X(j\omega)$ 不影响各个频率分量的大小，但是提供了有关这些复指数信号的相对相位信息。由 $\angle X(j\omega)$ 所代表的相位关系对信号 $x(t)$ 的本质属性有显著的影响，因此，即使模函数不变，也能得出看上去很不同的信号。

例如信号为

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos(2\pi t + \phi_1) + \cos(4\pi t + \phi_2) + \frac{2}{3} \cos(6\pi t + \phi_3)$$

选择不同的 $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ ，就可给出不同的信号波形。参见图6.1

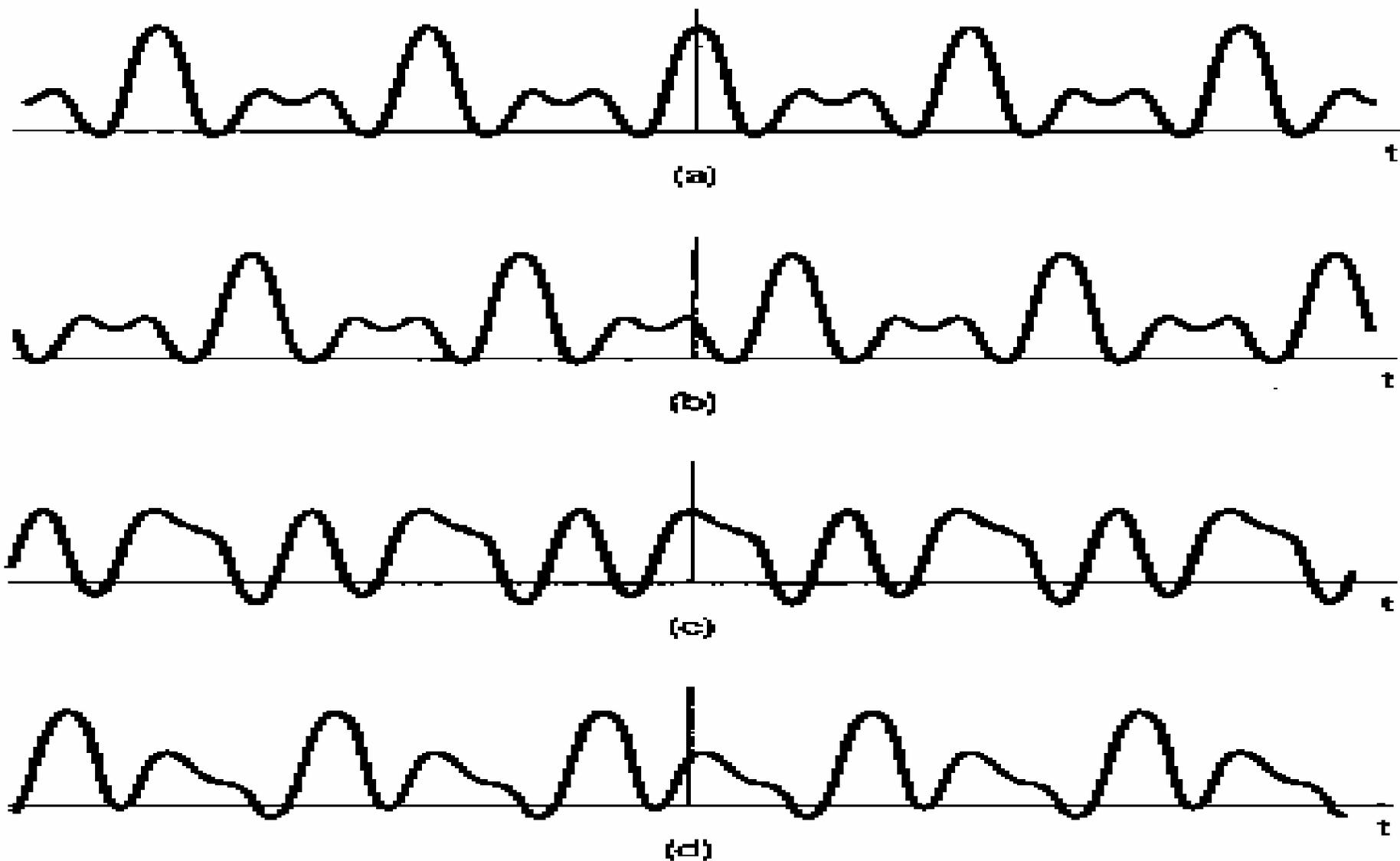


图 6.1 选择不同的  $\phi_1$ 、 $\phi_2$  和  $\phi_3$ ，由(6.3)式给出的信号  $x(t)$ ：

(a)  $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$ ；

(b)  $\phi_1 = 4 \text{ rad}$ ， $\phi_2 = 8 \text{ rad}$ ， $\phi_3 = 12 \text{ rad}$ ；

(c)  $\phi_1 = 6 \text{ rad}$ ， $\phi_2 = -2.7 \text{ rad}$ ， $\phi_3 = 0.93 \text{ rad}$ ；

(d)  $\phi_1 = 1.2 \text{ rad}$ ， $\phi_2 = 4.1 \text{ rad}$ ， $\phi_3 = -7.02 \text{ rad}$

## 6.2 LTI系统频率响应的模和相位表示

1、根据连续时间傅里叶变换的卷积性质,一个LTI系统的输入和输出的傅里叶变换可表示为

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

2、在离散时间情况下,一个LTI系统的输入和输出的傅里叶变换可表示为

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

可见,一个LTI系统对输入的作用就是改变信号中每一频率分量的复振幅。

利用模—相表示来看这个作用就能更详细地明了这个作用的性质。

在连续时间情况下可表示为

$$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)| |X(j\omega)|$$

$$\angle Y(j\omega) = \angle H(j\omega) + \angle X(j\omega)$$

称系统的相移

离散时间情况下可表示为

$$|Y(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})| |X(e^{j\omega})|$$

$$\angle Y(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) + \angle X(e^{j\omega})$$

称系统的增益

系统的相移可以改变输入信号中各分量之间的相对相位关系，这样，即使系统的增益对所有频率都为常数的情况下，也有可能对输入的时域特性上产生很大的变化。

如果系统对输入的改变是不希望的，则称失真（幅度和相位）

下面将给出几个概念和方法，以便更完整的了解这些影响。

免费考研网 bbs.freekaoyan.com yueshen22

## 6.2.1 线性与非线性相位

1、线性相位——相移与频率 $\omega$ 成线性关系。

例如，在连续时间情况下若一个LTI系统的频率响应为

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0} = |H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)}$$

$$|H(j\omega)| = 1, \quad \angle H(j\omega) = -\omega t_0$$

具有这种频率响应特性的系统所产生的输出就是输入的时移，即

$$y(t) = x(t - t_0)$$

在离散时间情况下，当线性相位的斜率是一个整数时，其产生的效果与连续时间情况下是类似的。

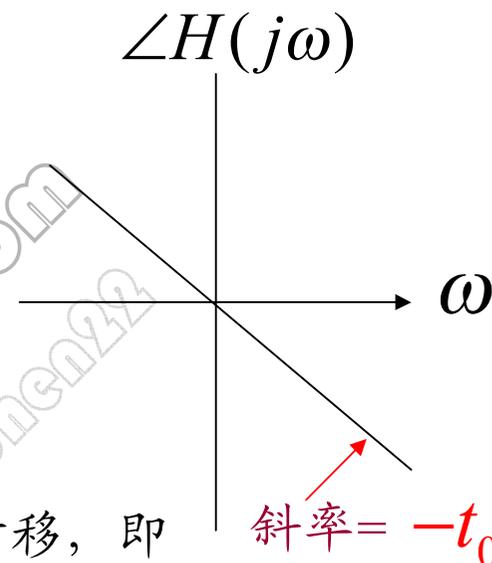
例如若一个LTI系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} = |H(e^{j\omega})|e^{j\angle H(e^{j\omega})}$$

$$|H(e^{j\omega})| = 1, \quad \angle H(e^{j\omega}) = -\omega n_0$$

则具有这种频率响应特性的系统所产生的输出就是输入的时移，即

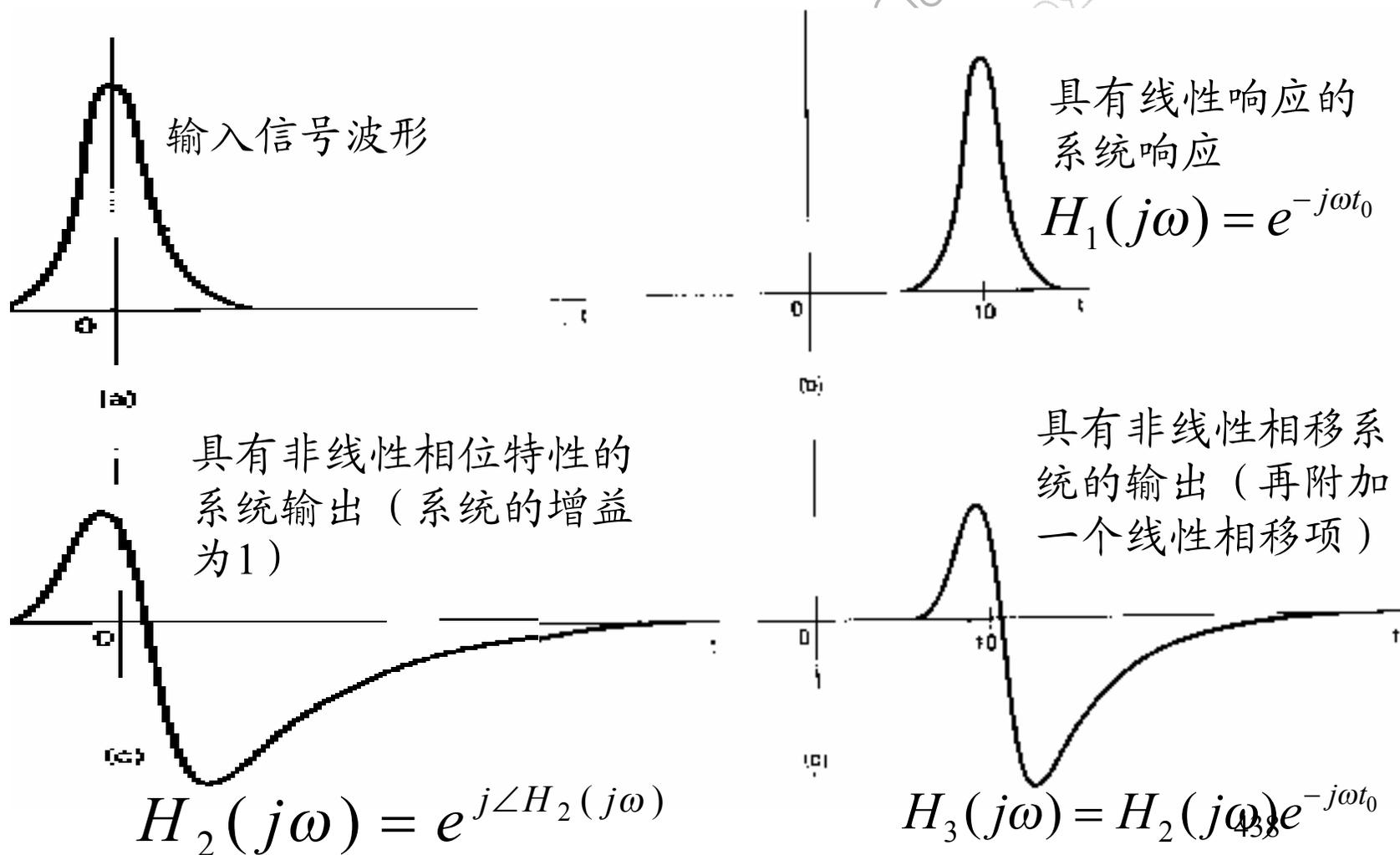
$$y[n] = x[n - n_0]$$



上述例子中考虑的系统具有单位增益,当输入信号傅里叶变换的模通过这些系统时都没有改变。为此,这样的系统一般称为**全通系统**。

## 2、非线性相位——相移与频率 $\omega$ 成非线性关系

图6.3表示了一个信号加到三个不同的系统上的情况。



## 6.2.2 群时延

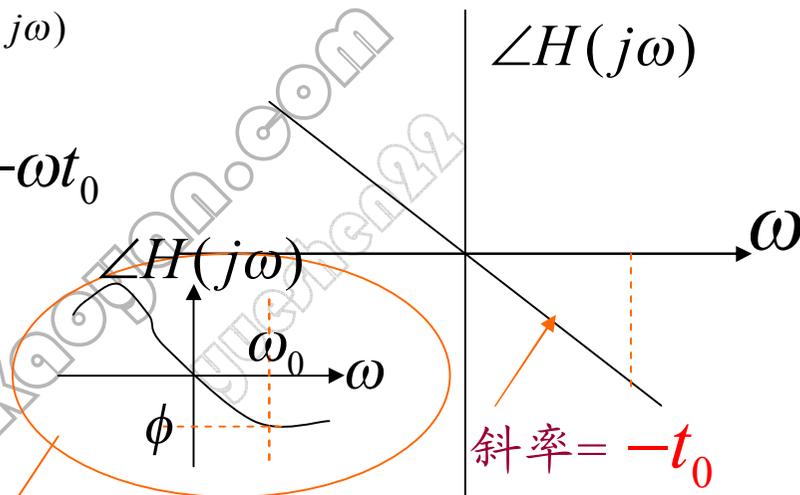
由前述可知，具有线性相位特性的系统有一个特别简单的意义，这就是时移。

例：
$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0} = |H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)}$$

$$|H(j\omega)| = 1, \quad \angle H(j\omega) = -\omega t_0$$

$$y(t) = x(t - t_0) \quad \text{延时 } t_0$$

可见，相位特性的斜率  $-t_0$  就是时移的大小。



**时延**的概念能直接推广到包括非线性相位特性的情况。这时可假设输入为一个窄带信号，即输入  $x(t)$  的傅立叶变换在以  $\omega = \omega_0$  为中心的一个很小的频率范围内。将这个频带取得很小，就可以将该系统的相位特性在这个频带内准确地用线性关系来近似。即

$$\angle H(j\omega) \approx -\phi - \omega a$$

则有

$$Y(j\omega) = X(j\omega) |H(j\omega)| e^{-j\phi} e^{-j\omega a}$$

其中： $e^{-j\phi}$  —— 恒定复数因子； $\phi$  为  $\omega_0$  时的固定时延。

$e^{-j\omega a}$  对应于**时延** $a$ 的线性相移项。**这个时延**称为在  $\omega = \omega_0$  的**群时延**。

在每个频率上的群时延就等于在那个频率上相位特性斜率的负值，即群时延定义为：

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \{ \angle H(j\omega) \}$$

$\angle H(j\omega) \approx -\phi - \omega a$

下面的例子将说明非线性群时延对一个信号的影响。

例6.1 考虑一个全通系统的单位冲击响应，

系统的频率响应  $H(j\omega)$  有三个因式的乘积构成为：

$$H(j\omega) = \prod_{i=1}^3 H_i(j\omega)$$

式中：
$$H_i(j\omega) = \frac{1 + (j\omega/\omega_i)^2 - 2j\zeta_i(\omega/\omega_i)}{1 + (j\omega/\omega_i)^2 + 2j\zeta_i(\omega/\omega_i)}$$

$$\begin{cases} \omega_1 = 315 \text{ rad/s} & , \zeta_1 = 0.066 \\ \omega_2 = 943 \text{ rad/s} & , \zeta_2 = 0.033 \\ \omega_3 = 1888 \text{ rad/s} & , \zeta_3 = 0.058 \end{cases}$$

因为分子是分母的复数共轭，所以  $|H_i(j\omega)| = 1$

每一  $H_i(j\omega)$  的相位为：
$$\angle H_i(j\omega) = -2 \arctan \left[ \frac{2\zeta(\omega/\omega_i)}{1 - (\omega/\omega_i)^2} \right]$$

则系统的总相位为：
$$\angle H(j\omega) = \sum_{i=1}^3 \angle H_i(j\omega)$$

因为  $\omega = 2\pi f \quad \therefore \quad \omega_1 = 315 \text{rad/s} \longrightarrow f_1 \approx 50 \text{Hz};$

$\omega_2 = 943 \text{rad/s} \longrightarrow f_2 \approx 150 \text{Hz}; \quad \omega_3 = 1888 \text{rad/s} \longrightarrow f_3 \approx 300 \text{Hz}$

如果将  $\angle H(j\omega)$  的值限制在  $-\pi \sim \pi$  之间, 就得到所谓主值相位函数 (也就是将相位以  $2\pi$  取模数) 如图 6.5(a) 所示。

$$\angle H_i(j\omega) = -2 \arctan \left[ \frac{2\zeta(\omega/\omega_i)}{1 - (\omega/\omega_i)^2} \right]$$

注意: 1、这个函数包括了在各个频率上的  $2\pi$  大小的几个不连续点, 使得该相位函数在这些点上是不可微分的。

2、然而, 在任何频率上将这个相位值加上或减去  $2\pi$  的整数倍, 原来的频率响应仍旧未变。

$$H(j\omega) = e^{-j\angle H_i(j\omega)} = e^{-j[\angle H_i(j\omega) + 2\pi]}$$

3、作为频率函数的群时延现在就可计算为:

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \{ \angle H(j\omega) \}$$

见图(c).

$$\angle H(j\omega) \approx -\phi - \omega a$$

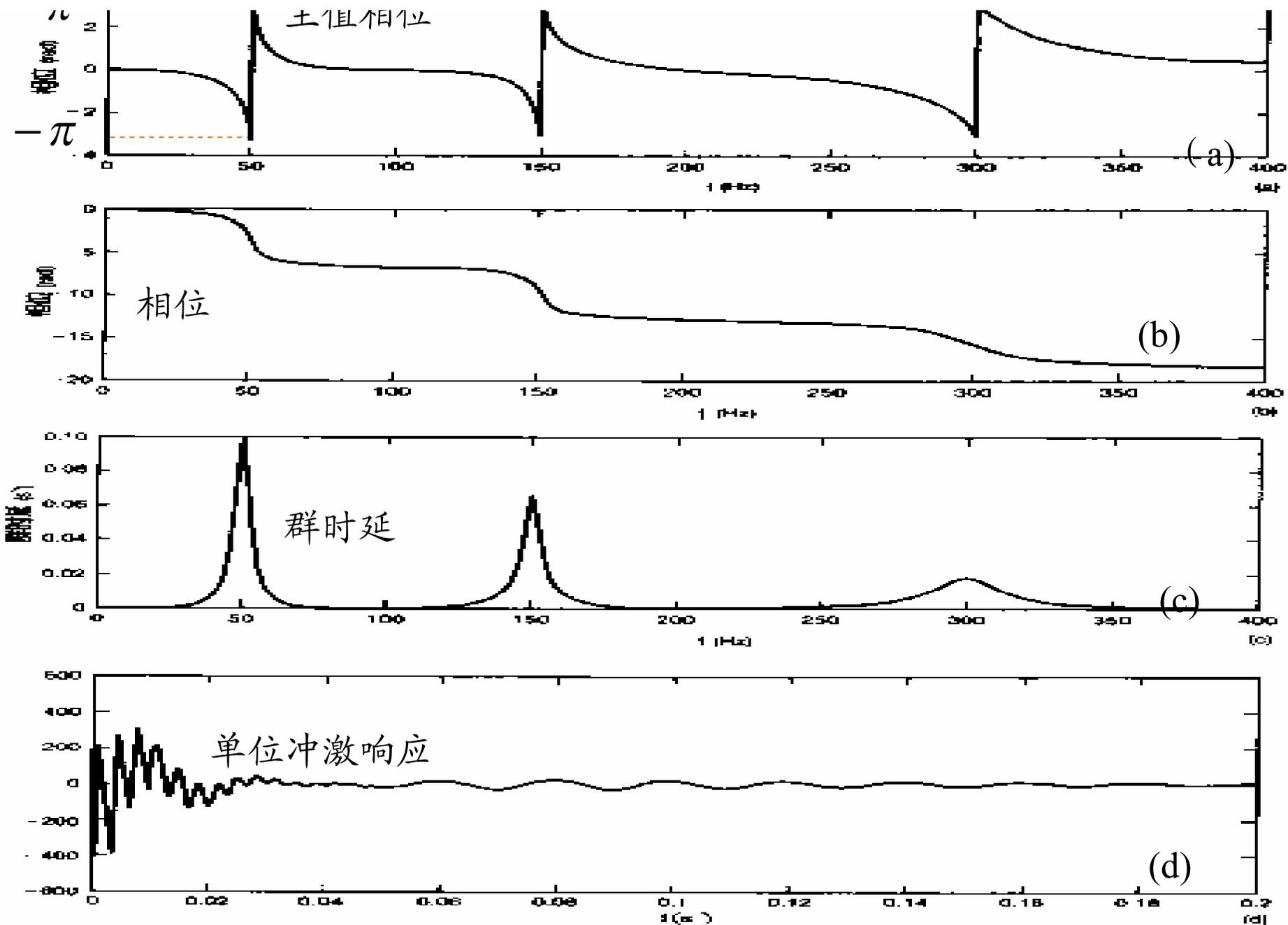


图 6.5 例 6.1 中全通系统的相位、群时延和单位冲激响应：  
 (a) 主值相位；(b) 展开的相位特性；(c) 群时延；  
 (d) 单位冲激响应。这些量都是对以 Hz 计的频率作出的

## 6.23 对数模和波特图

用**极坐标形式**来表示连续时间和离散时间傅里叶变换和系统频率响应时,即

$$\because Y(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)} |X(j\omega)|e^{j\angle X(j\omega)}$$

$$\therefore |Y(j\omega)| = |H(j\omega)| |X(j\omega)|$$

$$\angle Y(j\omega) = \angle H(j\omega) + \angle X(j\omega)$$

**可以看到**: 相位关系是相加的, 而模的关系则相乘。如果模取对数的话, 就会使**相乘运算变为相加运算**。从而使运算得到简化。一般采用的对数尺度是以  $20\log_{10}$  为单位的, 称为分贝(dB)。

我们将

$20\log_{10} H(j\omega) $	$\longleftrightarrow$	$\log_{10}(\omega)$	作的图 <b>称为波特图</b> 。
$\angle H(j\omega)$	$\longleftrightarrow$	$\log_{10}(\omega)$	

**应该注意**: 如果  $h(t)$  是实函数, 那么  $|H(j\omega)|$  是  $\omega$  的偶函数, 而  $\angle H(j\omega)$  是  $\omega$  的奇函数。**由于这个原因, 负  $\omega$  部分的图就是多余的, 它可以立即由正  $\omega$  部分的图来得到。**

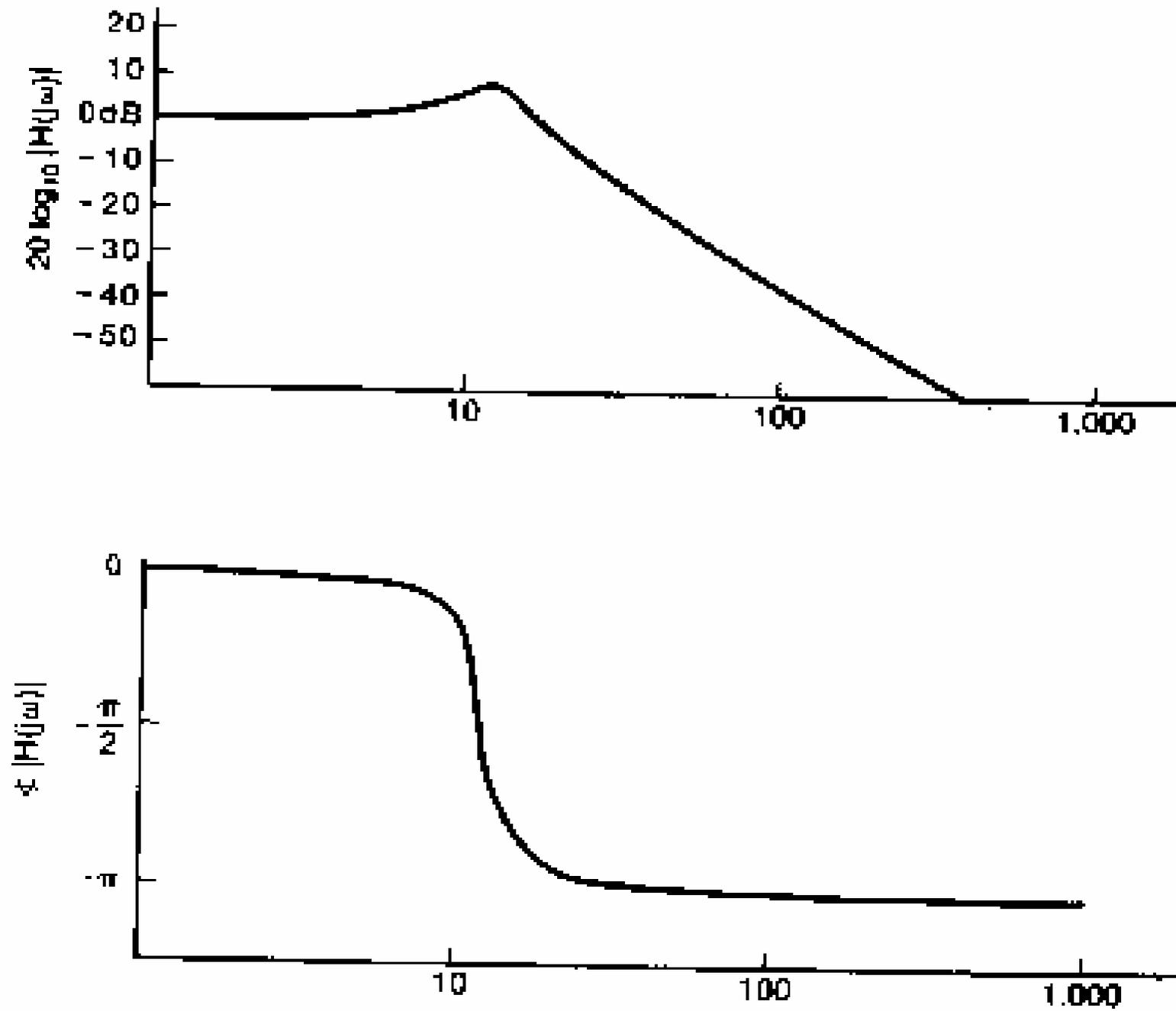


图 6.8 一个典型的波特图(注意,  $\omega$  是用对数坐标画出的)

### 6.3 理想频率选择性滤波器的时域特性

1、 连续时间理想低通滤波器具有如下形式的频率响应:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & , |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & , |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (6.17)$$

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = 1 \\ \theta(\omega) = 0 \end{cases}$$

如图 6.10(a)所示

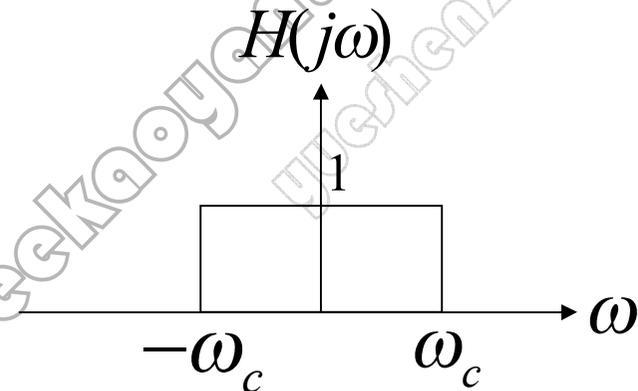


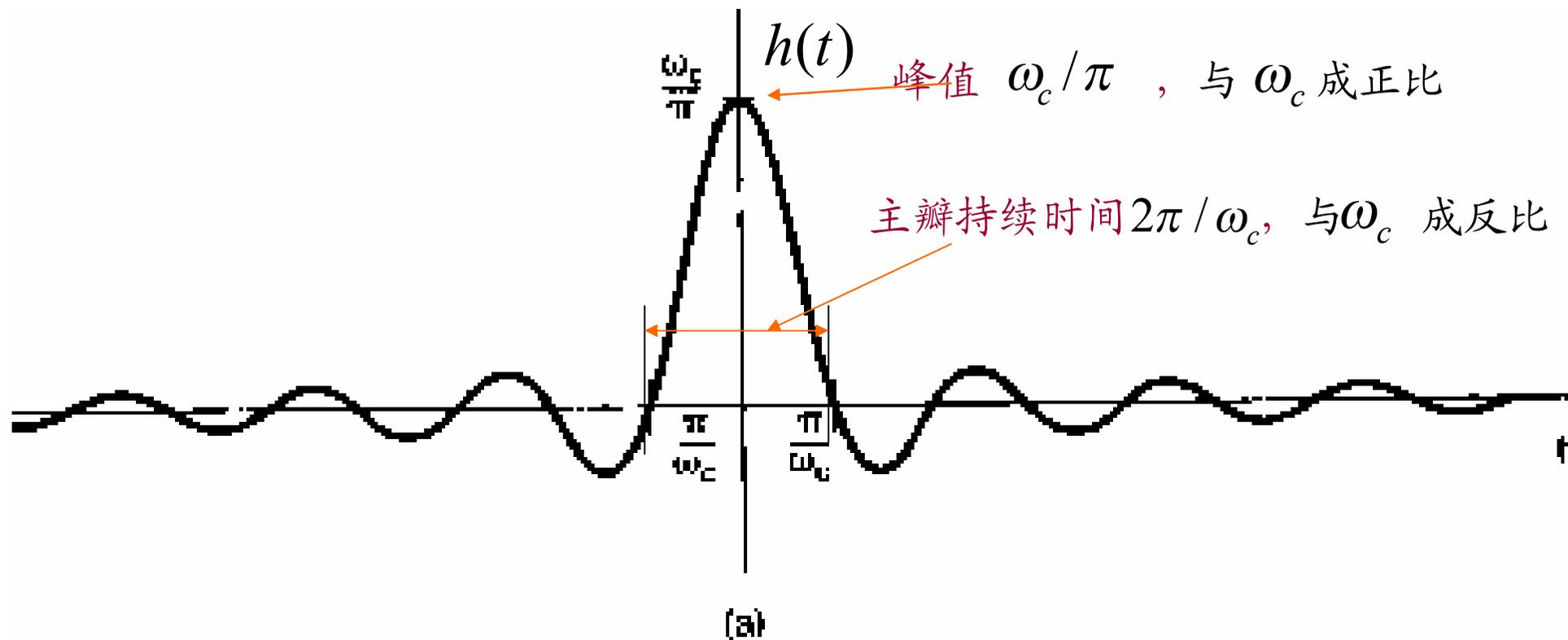
图6.10 (a)

由傅里叶反变换可求得其冲激响应为:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t}$$

可见: 当  $t=0$  时有最大值  $\omega_c / \pi$  ;

当  $\omega_c t = \pi$  (即  $t = \pi / \omega_c$ ) 时,  $h(t) = 0$ 。 如图6.12(a)所示



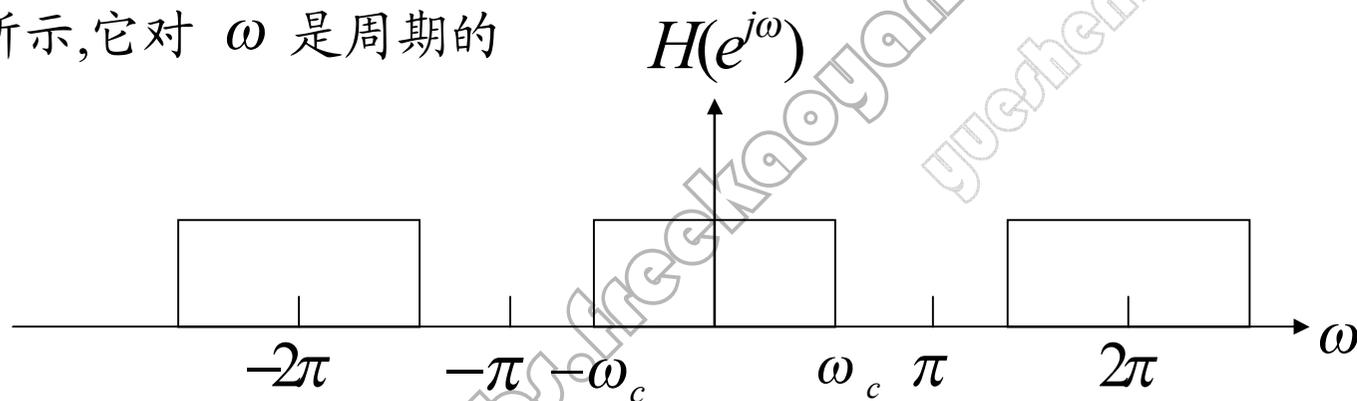
由图可见

- 1、冲激响应的峰值  $\omega_c / \pi$  与截止频率  $\omega_c$  成正比;
- 2、波形主瓣的持续时间  $2\pi / \omega_c$  与  $\omega_c$  成反比。当  $\omega_c \rightarrow \infty$  时,  $h(t) \rightarrow \delta(t)$

2、离散时间理想低通滤波器的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & , |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & , \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (6.18)$$

如图6.10(b)所示,它对  $\omega$  是周期的



其冲激响应为

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}$$

当  $n=0$  时有最大值  $\omega_c / \pi$  ;

当  $\omega_c n = \pi$  (即  $n = \pi / \omega_c$  ) 时,  $h[n]=0$ 。其波形如图6.12(b)所示。

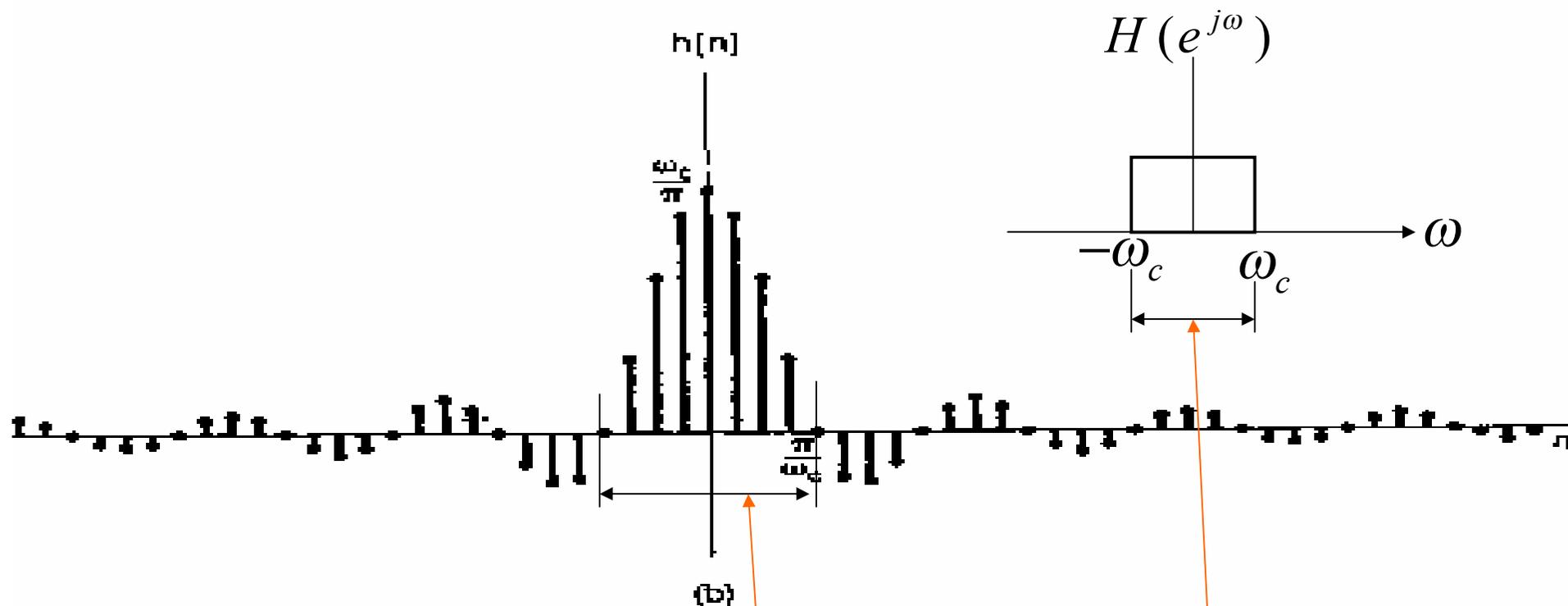
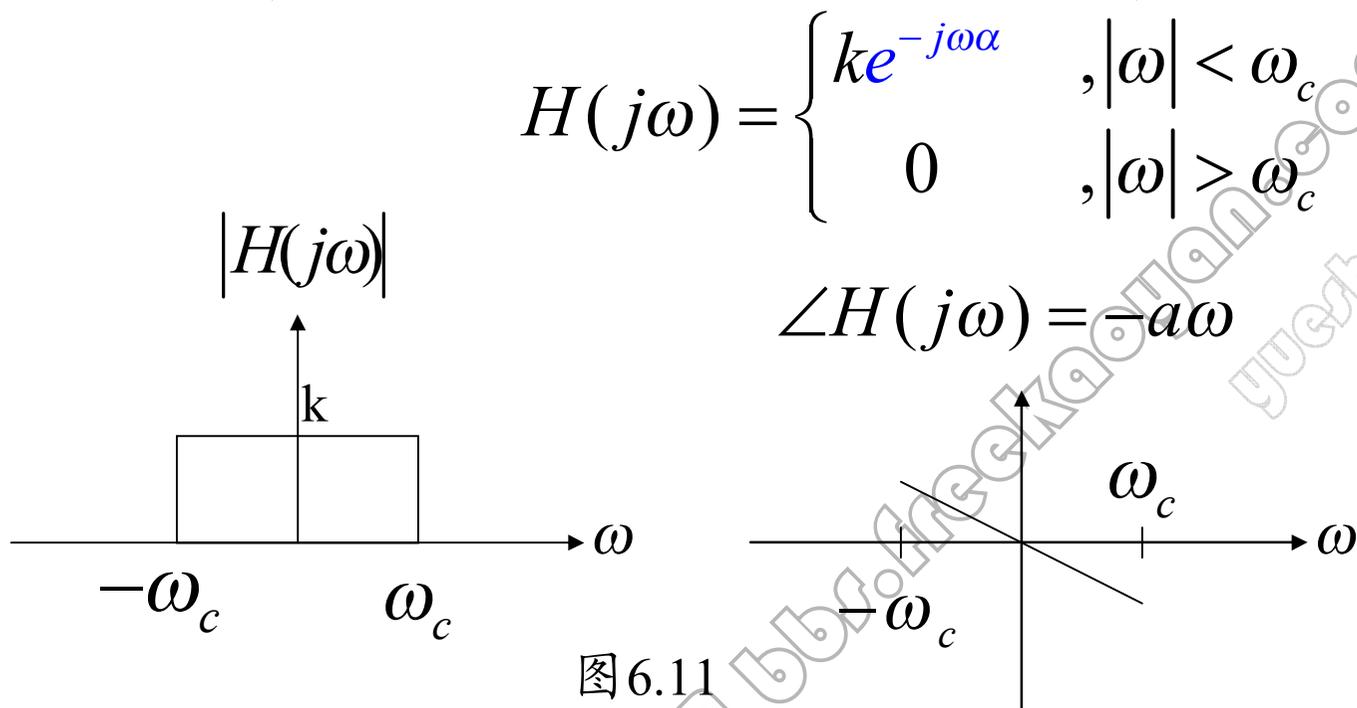


图 6.12 (a) 图 6.10(a) 的连续时间理想低通滤波器单位冲激响应；  
 (b) 图 6.10(b) 的离散时间理想低通滤波器在  $\omega_c = \pi/4$  时单位脉冲响应

注意：无论是在连续时间或是在离散时间情况下，滤波器的通带宽度都是正比于  $\omega_c$  的，而单位冲激响应的主瓣宽度反比于  $\omega_c$ 。当滤波器的带宽增加时，单位冲激响应就变的愈来愈窄。

### 3、在通带内具有线性相位的理想滤波器

如图6.11所示,相对于零相位的理想低通滤波器来说,仅引入一个单一的时移。即



其冲激响应为  $h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} ke^{-j\omega\alpha} e^{j\omega t} d\omega$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} ke^{j\omega(t-\alpha)} d\omega = \frac{k}{2\pi j(t-\alpha)} [e^{j\omega_c(t-\alpha)} - e^{-j\omega_c(t-\alpha)}]$$

$$= \frac{k}{\pi} \frac{[e^{j\omega_c(t-\alpha)} - e^{-j\omega_c(t-\alpha)}]}{(t-\alpha)2j} = \frac{k\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c(t-\alpha)}{\omega_c(t-\alpha)}$$

幅值      右移a

当取  $k=1$  时，可画出下图

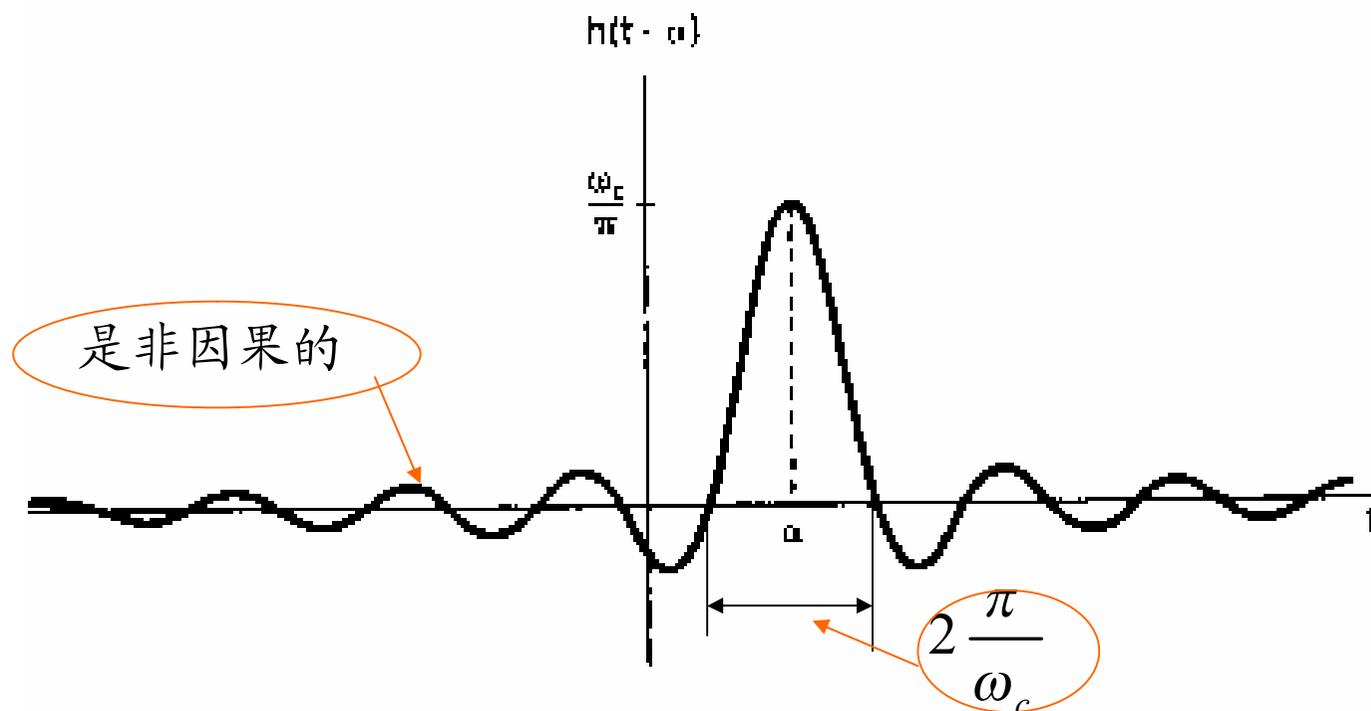


图 6.13 模和相位特性如图 6.11 所示的理想低通滤波器的单位冲激响应

由图可见，冲激响应出现的时刻  $\alpha$  比激励信号  $\delta(t)$  延迟了一段时间  $\alpha$ ，它正是低通滤波器相频特性的斜率，如果截止频率  $\omega_c$  增大，则  $h(t)$  峰值增加，主瓣宽度压缩。当  $\omega_c \rightarrow \infty$  时，系统将失去低通滤波器特性而变成一个无失真传输系统。

## 补充：信号的无失真传输

1、信号的无失真传输，从时域来说：要求系统输出响应与输入信号的波形完全相同（幅度可以不同，时间前后可有所不同），即

$$y(t) = kx(t - t_0)$$

式中：k —— 为与t无关的实常数，

$t_0$  —— 为延迟时间。

2、从频域分析，可对上式取傅立叶变换，

得 
$$Y(j\omega) = kX(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

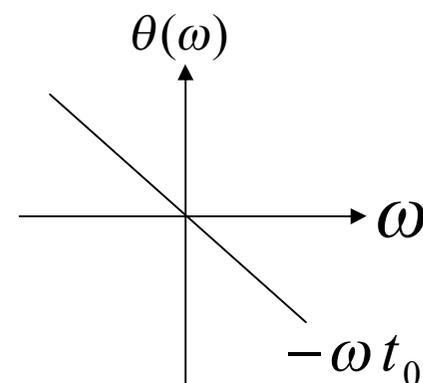
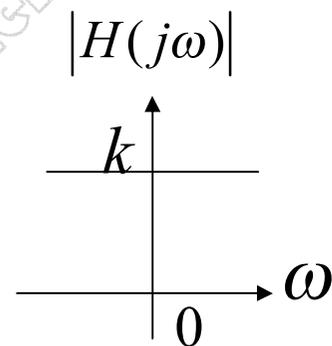
因为 
$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

所以有 
$$H(j\omega) = ke^{-j\omega t_0} = |H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}$$

即 
$$|H(j\omega)| = k, \quad \theta(\omega) = -\omega t_0$$

因此，无失真传输系统在频域应满足两个条件：

- 1) 系统的幅频特性在整个频率范围内应为常数k;
- 2) 系统的相频特性在整个频率范围内应与  $\omega$  成正比。



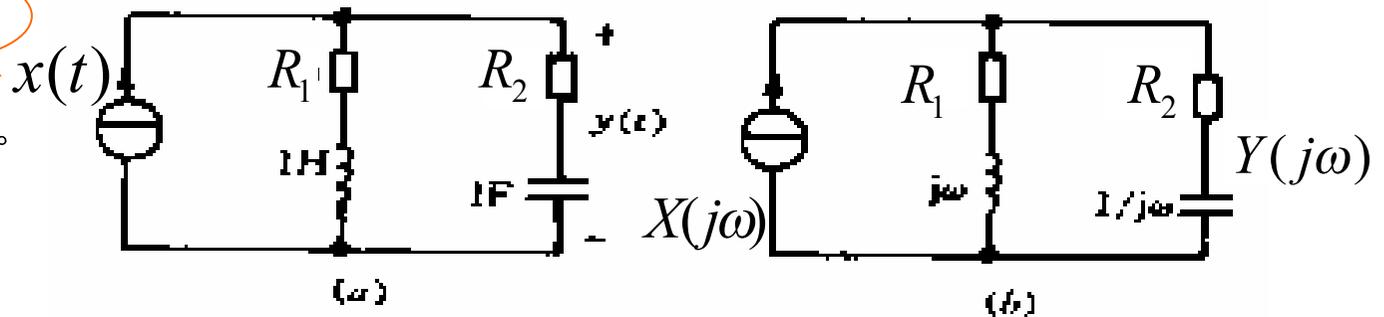
例：电路如图所示，为获得无失真传输，试确定元件  $R_1$ ,  $R_2$  的值。

解：

电流源

1、先画出频域模型图。

2、由相量法可得：



$$Y(j\omega) = \frac{(R_1 + j\omega)(R_2 + 1/j\omega)}{R_1 + j\omega + R_2 + 1/j\omega} X(j\omega) = \frac{(R_1 R_2 + 1) + j(\omega R_2 - R_1/\omega)}{(R_1 + R_2) + j(\omega - 1/\omega)} X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{(R_1 R_2 + 1) + j(\omega R_2 - R_1/\omega)}{(R_1 + R_2) + j(\omega - 1/\omega)}$$

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\frac{(R_1 R_2 + 1)^2 + (\omega R_2 - R_1/\omega)^2}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega - 1/\omega)^2}}$$

$$\theta(\omega) = \arctg \frac{(\omega R_2 - R_1/\omega)}{(R_1 R_2 + 1)} - \arctg \frac{(\omega - 1/\omega)}{(R_1 + R_2)}$$

当  $R_1 = R_2 = 1\Omega$  时：

$$|H(j\omega)| = 1$$

$$\theta(\omega) = 0$$

即，满足无失真传输条件

$$|H(j\omega)| = k, \quad \theta(\omega) = -\omega t_0$$

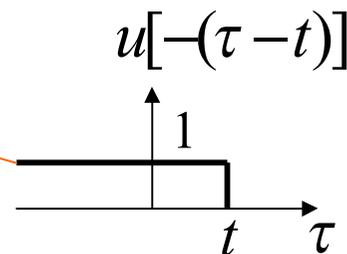
#### 4、连续时间和离散时间理想低通滤波器的阶跃响应

阶跃响应就是单位冲激响应的积分或求和，即

1) 连续  $u(t) \xrightarrow{h(t)} \text{线性时不变系统} \xrightarrow{} s(t)$  单位阶跃响应

$$s(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) u(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$



2) 离散  $u[n] \xrightarrow{h[n]} \text{线性时不变系统} \xrightarrow{} s[n]$  单位阶跃响应

$$s[n] = u[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$$

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m]$$

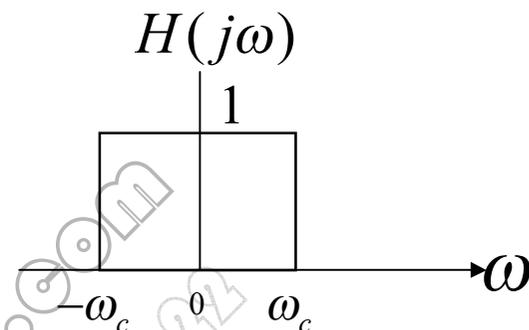
所以有

$$\begin{cases} s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \\ s[n] = \sum_{m=-\infty}^n h[m] \end{cases}$$

下面以连续时间情况下理想低通滤波器的阶跃响应为例。

理想低通滤波器的

$$\text{频率响应为: } H(j\omega) = \begin{cases} ke^{-j\omega\alpha} & , |\omega| < \omega_c \\ 0 & , |\omega| > \omega_c \end{cases}$$



利用综合公式可求得单位冲激响应为:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} ke^{-j\omega\alpha} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi j(t-\alpha)} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} ke^{j\omega(t-\alpha)} dj\omega(t-\alpha) \\ &= \frac{k}{2\pi j(t-\alpha)} e^{j\omega(t-\alpha)} \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{k}{2\pi j(t-\alpha)} (e^{j\omega_c(t-\alpha)} - e^{-j\omega_c(t-\alpha)}) \\ &= k \frac{\sin \omega_c(t-\alpha)}{\pi(t-\alpha)} = \frac{k\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c(t-\alpha)}{\omega_c(t-\alpha)} \end{aligned}$$

所以理想低通滤波器的阶跃响应为:

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \frac{k\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c(\tau-\alpha)}{\omega_c(\tau-\alpha)} d\tau$$

为了方便, 令  $\omega_c(\tau-\alpha) = x$ , 则  $d\tau = dx/\omega_c$ , 上式可写成

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \frac{k}{\pi} \int_{-\infty}^{\omega_c(t-\alpha)} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{k}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x} dx + \frac{k}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-\alpha)} \frac{\sin x}{x} dx \\
 &= \frac{k}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{k}{\pi} Si[\omega_c(t-\alpha)]
 \end{aligned}$$

抽样信号是偶信号

其中：第一项积分  $\int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

第二项积分  $Si(y) = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx = y - \frac{1}{3} \cdot \frac{y^3}{3!} + \frac{1}{5} \cdot \frac{y^5}{5!} - \dots$

称为正弦积分（是超越函数）。

所以，理想低通滤波器的阶跃响应可写成  $s(t) = \frac{k}{2} + \frac{k}{\pi} Si[\omega_c(t - \alpha)]$

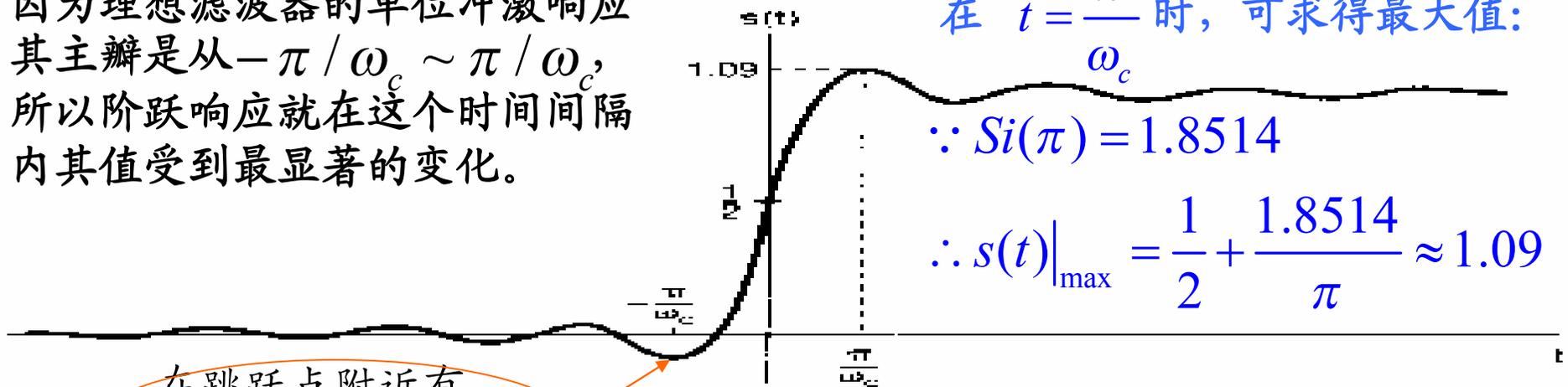
当  $k=1$  ,  $\alpha=0$  时,  $s(t)$  的波形如图6.14(a)所示。

因为理想滤波器的单位冲激响应其主瓣是从  $-\pi/\omega_c \sim \pi/\omega_c$ , 所以阶跃响应就在这个时间间隔内其值受到最显著的变化。

在  $t = \frac{\pi}{\omega_c}$  时, 可求得最大值:

$$\because Si(\pi) = 1.8514$$

$$\therefore s(t)|_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{1.8514}{\pi} \approx 1.09$$



在跳跃点附近有  
过冲和振荡

图(b)为离散时间理想低通滤波器的阶跃响应

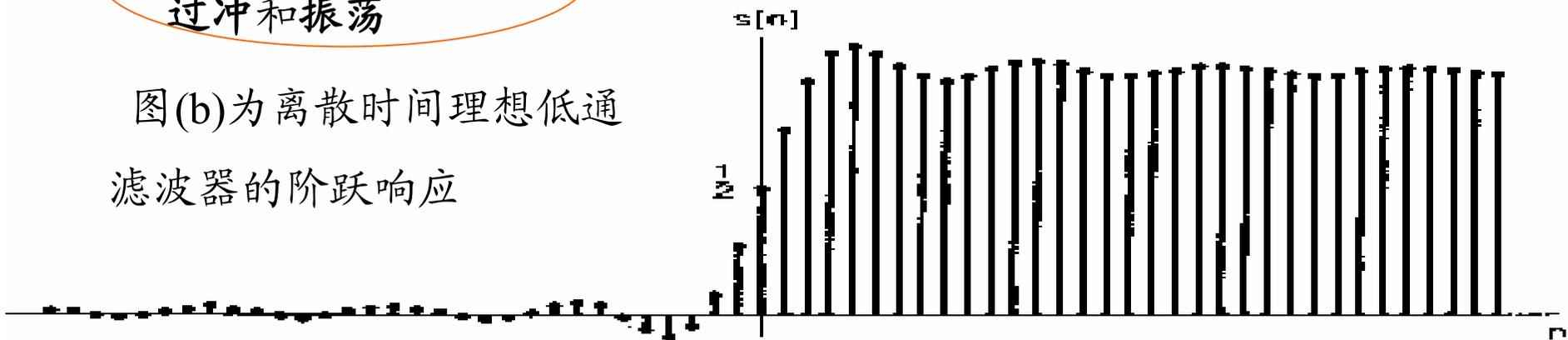
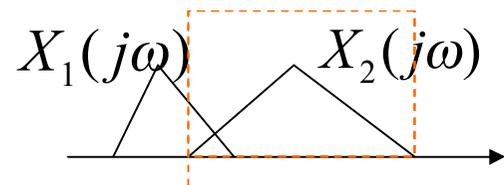


图 6.14 (a) 连续时间理想低通滤波器的阶跃响应;  
(b) 离散时间理想低通滤波器的阶跃响应

## 6.4 非理想滤波器的时域和频域特性讨论



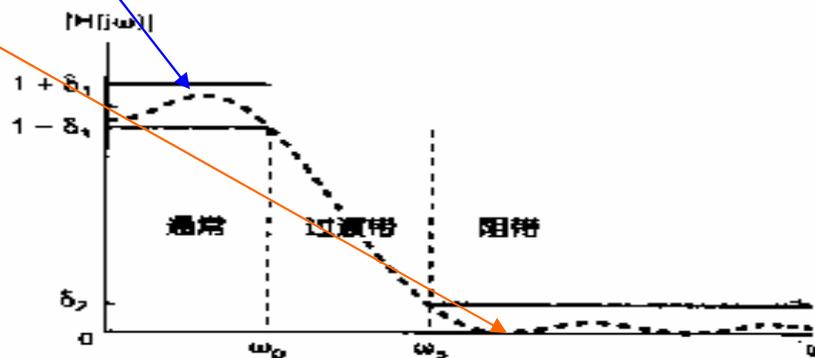
• 理想滤波器的特性在实际中不一定总是所要求的：

- 1、要分离的信号不总是位于完全分开的频带上，当过滤具有重叠频谱的混合信号时，宁肯希望有一个从通带到阻带具有渐渐过渡特性的滤波器。
- 2、由阶跃响应图可知，在跳变点附近呈现过冲和振荡，这是不希望的。
- 3、由单位冲激响应图可知，理想低通滤波器是非因果系统这在实际中是无法实现的。

• 由于理想频率选择性滤波器的模特性是不能实现的，因此更可取的是滤波器的通带和阻带特性上允许有某些灵活性。例如，在低通滤波器情况下，通带内在单位增益上可以有某些偏离（称通带起伏或波纹）；阻带内在零增益上也可以有某些偏离（称阻带起伏或波纹）；以及在通带边缘和阻带边缘之间允许有一个过渡带存在。

频域中较窄的过渡带所付出的代价是：在阶跃响应（时域）中的振荡加剧

见P321图6.18



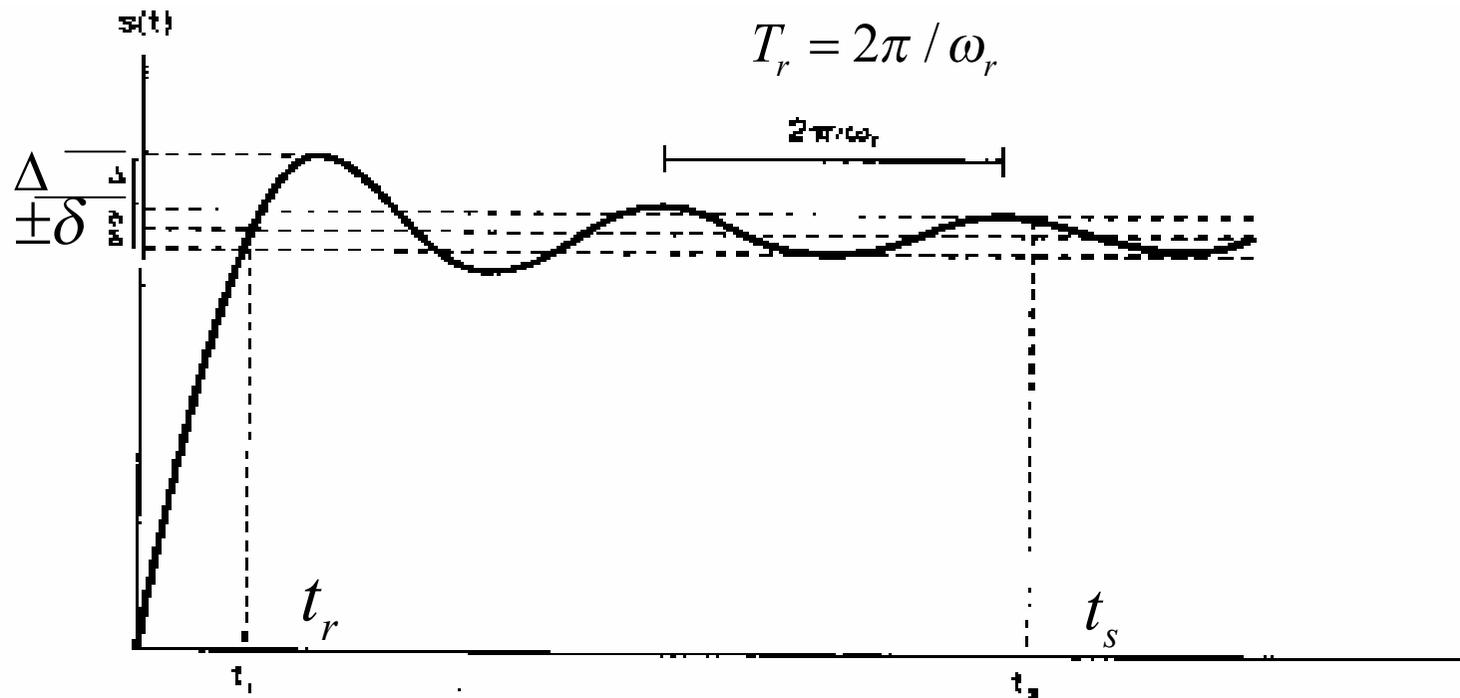


图 6.17 一个连续时间低通滤波器的阶跃响应，图中指出上升时间  $t_r$ ，超量  $\Delta$ ，振荡频率  $\omega_r$ ， $T_r = 2\pi / \omega_r$ ， $t_s$ ， $\pm\delta$ ，即阶跃响应位于其终值  $\pm\delta$  内所需要的时间

为了控制时域特性，一般都将指标要求放在一个滤波器的阶跃响应上（如图6.17所示）。

- 1)、  $t_r$  —— 上升时间。指阶跃响应上升到它的终值所需要的时间。
- 2)、  $\Delta$  —— 超量。指超过阶跃响应终值的量。
- 3)、  $\omega_r$  —— 振荡频率。
- 4)、  $t_s$  —— 建立时间。指阶跃响应位于其终值  $\pm\delta$  内所需要的时间。

## 6.5 一阶与二阶连续时间系统

在实际中许多物理系统都可以用线性常微分方程来建模,并且这类型式的系统往往又很容易实现。高阶系统又常常由一阶和二阶系统以级联或并联的型式来实现或表示的。因此,一阶和二阶系统的性质在分析、设计和理解高阶系统的时域和频域特性方面起着重要的作用。

### 6.5.1 一阶连续时间系统

一阶系统的微分方程可表示为:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad (6.21)$$

其中  $\tau$  ——称为系统的时间常数(控制着系统响应的快慢)。

一阶系统的频率响应为:

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1} \quad (6.22)$$

1、其单位冲激响应为

$$\therefore e^{-at} u(t) \xleftarrow{F} \frac{1}{a + j\omega}$$

$$\therefore \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t) \xleftarrow{F} \frac{1/\tau}{\frac{1}{\tau} + j\omega} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

即得

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t)$$

459

## 2、系统的阶跃响应为

$$s(t) = h(t) * u(t) \xleftrightarrow{F} S(j\omega) = H(j\omega)U(j\omega)$$

$$\therefore h(t) \xleftrightarrow{F} H(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1}$$

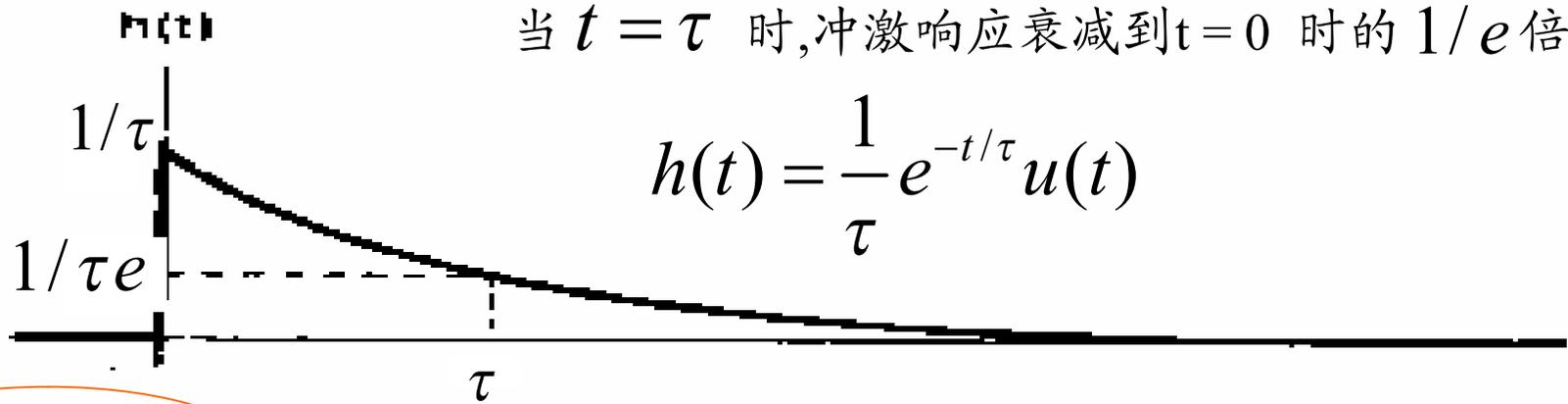
$$u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$\begin{aligned}\therefore s(t) \xleftrightarrow{F} & \frac{1}{j\omega\tau + 1} \left[ \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] = \frac{1}{(j\omega\tau + 1)j\omega} + \frac{\pi\delta(\omega)}{j\omega\tau + 1} \\ & = \frac{1}{(j\omega\tau + 1)j\omega} + \pi\delta(\omega) = \frac{A_1}{(j\omega\tau + 1)} + \frac{A_2}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \\ & = \frac{-\tau}{(j\omega\tau + 1)} + \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) = \left[ \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] - \frac{1}{(j\omega + 1/\tau)}\end{aligned}$$

$$\therefore s(t) = u(t) - e^{-t/\tau} u(t) = [1 - e^{-t/\tau}] u(t)$$

见图6.19 (a)为单位冲激响应; (b)为阶跃响应.

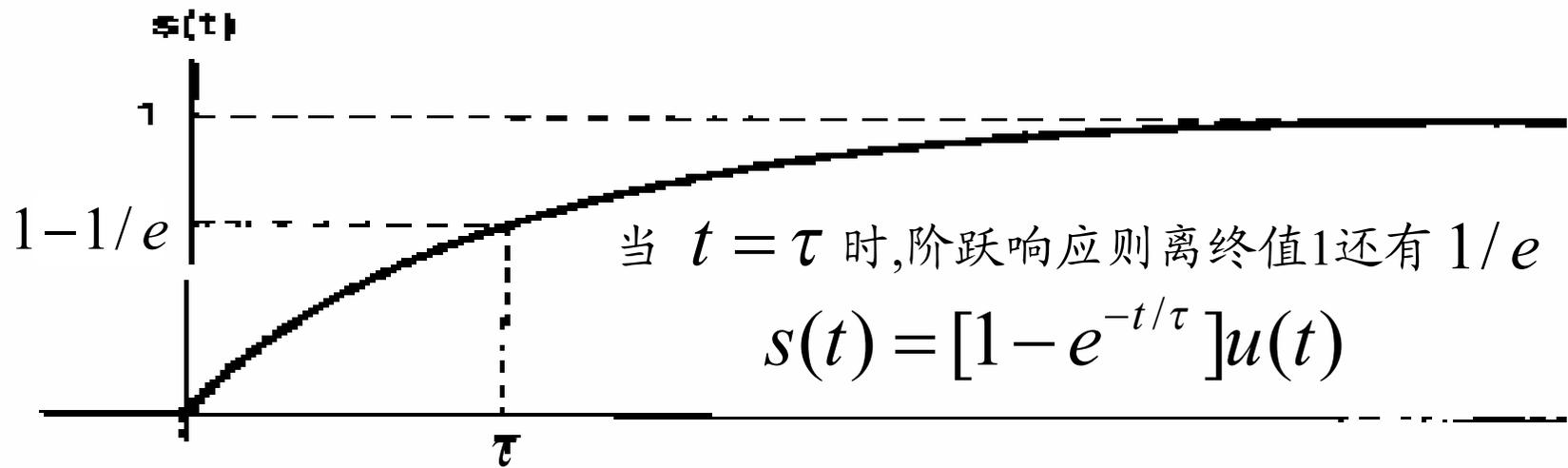
当  $t = \tau$  时,冲激响应衰减到  $t=0$  时的  $1/e$  倍.



$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t)$$

(a)

$e = 2.7183$



当  $t = \tau$  时,阶跃响应则离终值  $1$  还有  $1/e$

$$s(t) = [1 - e^{-t/\tau}] u(t)$$

(b)

图 6.19 一阶连续时间系统:

(a) 单位冲激响应; (b) 阶跃响应

3、再看一阶系统的波特图。 因为  $H(j\omega) = 1/(j\omega\tau + 1)$

所以有  $20 \log_{10} |H(j\omega)| = -10 \log_{10} [(\omega\tau)^2 + 1]$

1)、当  $\omega\tau \ll 1$  时，对数模近似为零；即

$$20 \log_{10} |H(j\omega)| \approx 0, \quad \omega \ll 1/\tau$$

2)、当  $\omega\tau \gg 1$  时，对数模就近似为  $\log_{10}(\omega)$  的线性函数。即

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} |H(j\omega)| &\approx -20 \log_{10}(\omega\tau) \\ &= -20 \log_{10}(\omega) - 20 \log_{10}(\tau), \quad \omega \gg 1/\tau \end{aligned}$$

换句话说，一阶系统的对数特性在低频和高频域的渐近线都是直线。

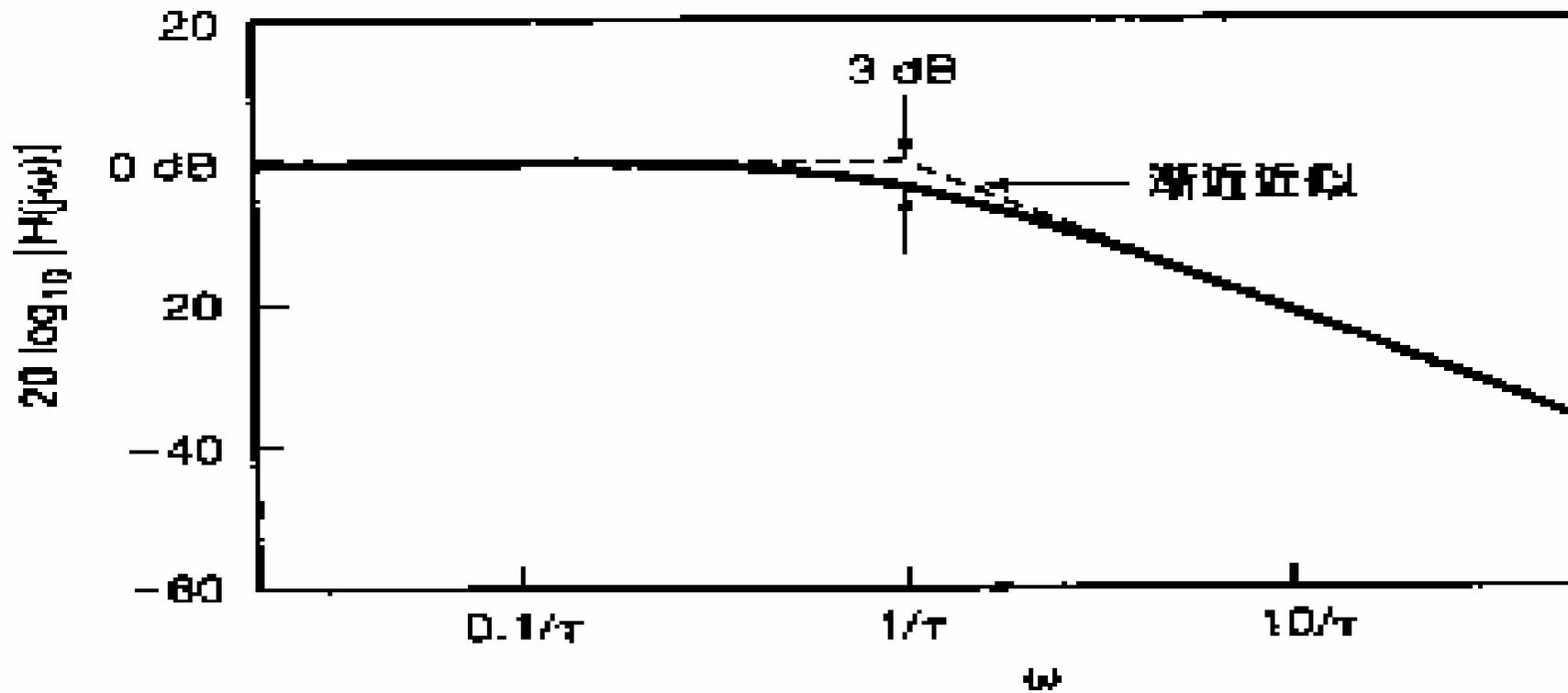
(低频渐近线是一条 0 dB 线；而高频渐近线是一条每隔 10 倍频程有 20dB 衰减的直线 (直线的斜率为  $-20 \text{ dB}/10$  倍频) )。

3)、当  $\omega = 1/\tau$  时,  $20 \log_{10} |H(j\omega)| = -10 \log_{10}(2) \approx -3 \text{ dB}$

图 6.20 为一个连续时间一阶系统的波特图。

由图可见,直线近似的波特图仅在折转频率附近有明显的误差。

$$20 \log_{10} |H(j\omega)| = -10 \log_{10} [(\omega\tau)^2 + 1]$$

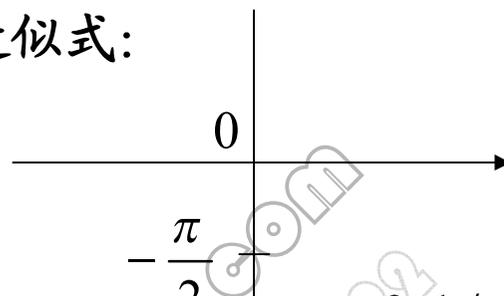


免费下载

4、对  $\angle H(j\omega)$  也能求得一个有用的直线近似式:

$$\because H(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1}$$

$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega\tau) \approx \begin{cases} 0 & \omega \leq 0.1/\tau \\ -(\pi/4)[\log_{10}(\omega\tau) + 1], & 0.1/\tau \leq \omega \leq 10/\tau \\ -\pi/2 & \omega \geq 10/\tau \end{cases}$$



由直线方程导出:  $y = a \log_{10}(\omega\tau) + b$

$$\text{当 } \omega = 10/\tau \text{ 时, } y = -\frac{\pi}{2} = a \log_{10} 10 + b = a + b$$

$$\text{当 } \omega = 0.1/\tau \text{ 时, } y = 0 = a \log_{10} 0.1 + b = -a + b$$

$$\text{从而解得 } b = -\frac{\pi}{4}, \quad a = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{即有 } y = -\frac{\pi}{4} [\log_{10}(\omega\tau) + 1]$$

可见,这条近似特性线,在

$$0.1/\tau \leq \omega \leq 10/\tau$$

范围内是线性下降的(从  $0 \sim -\pi/2$ )。

- 1) 当  $\omega \ll 1/\tau$  时,  $\angle H(j\omega)$  的准确渐近值是零;
- 2) 当  $\omega \gg 1/\tau$  时,  $\angle H(j\omega)$  的准确渐近值是  $-\pi/2$ 。
- 3) 当  $\omega = 1/\tau$  时,  $\angle H(j\omega) = -\pi/4$

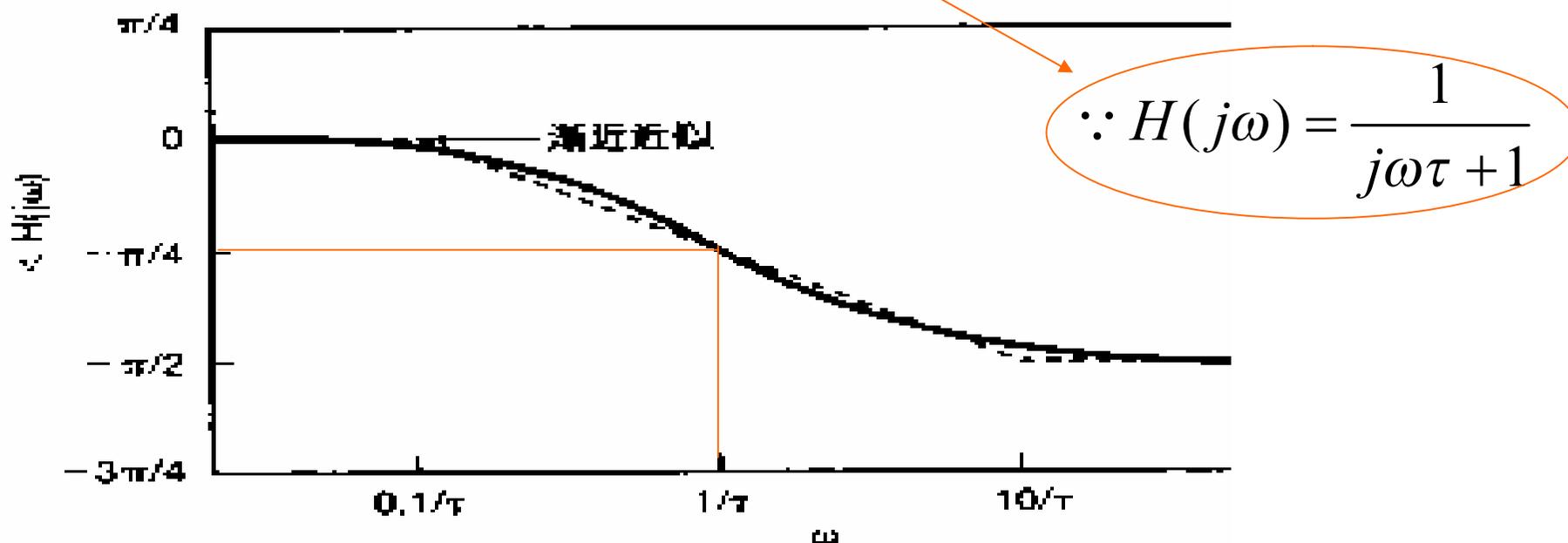


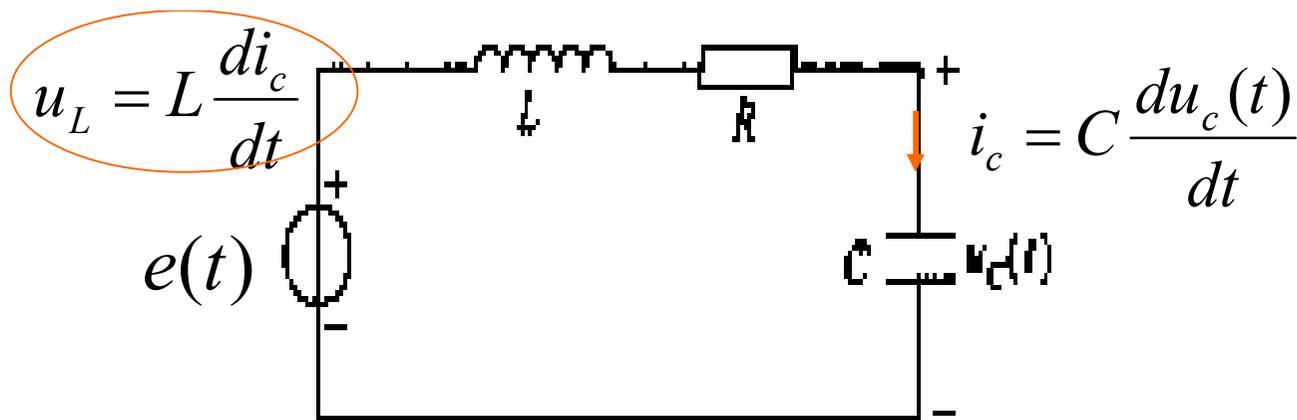
图 6.20 一个连续时间一阶系统的波特图

## 6.5.2 二阶连续时间系统

二阶系统的线性常系数微分方程的一般形式为

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t) \quad (6.31)$$

参数  $\zeta$  ——称阻尼系数;  
 $\omega_n$  ——称无阻尼自然频率。



例如,RLC串联电路,

可列出描述它的微分方程为

图 RLC 串联电路

$$\frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_c(t) = \frac{1}{LC} e(t)$$

令

$$\omega_n^2 = \frac{1}{LC}, \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$2\zeta\omega_n = 2 \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{R}{L}$$

得

$$\frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{du_c(t)}{dt} + \omega_n^2 u_c(t) = \omega_n^2 e(t)$$

即,RLC串联电路,就是一个二阶系统。

由(6.31)式可得

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \quad (6.33)$$

$$= \frac{\omega_n^2}{(j\omega - c_1)(j\omega - c_2)}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

其中

$$c_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (6.34)$$

$$c_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

二、1、若  $\zeta \neq 1$ , 则  $c_1 \neq c_2$ , 经部分分式展开后得

$$H(j\omega) = \frac{M}{j\omega - c_1} - \frac{M}{j\omega - c_2} \quad (6.35)$$

其中

$$M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (6.36)$$

单位冲激响应为

$$\begin{aligned} h(t) &= M[e^{c_1 t} - e^{c_2 t}]u(t) \\ &= \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}[e^{c_1 t} - e^{c_2 t}]u(t) \end{aligned} \quad (6.37)$$

2、如果  $\zeta = 1$  ,则  $c_1 = c_2 = -\omega_n$  ,这时有

$$c_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$c_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega - c_1)(j\omega - c_2)} \rightarrow H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega + \omega_n)^2}$$

(6.38)

由表4.2(P234页)可知,这时的单位冲激响应为

$$h(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} u(t) \quad (6.39)$$

$$te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{(a+j\omega)^2}$$

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

另外,(6.33)式还可写成

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega/\omega_n)^2 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + 1}$$

可见,频率响应  $H(j\omega)$  是  $\omega/\omega_n$  的函数,因此改变  $\omega_n$  ,实质上就是就是一个时间

和频率的尺度变换。即对  $H_1(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 2\zeta(j\omega) + 1}$  作了一次  $(\frac{1}{\omega_n})$  尺度变换

3、由(6.34)式可知,当  $0 < \zeta < 1$  时,  $c_1$  和  $c_2$  都是复数。因此可将(6.37)式写成

$$h(t) = \frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{2j\sqrt{1-\zeta^2}} [e^{j(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t} - e^{-j(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t}] u(t)$$

$$= \frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} [\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t] u(t)$$

$$c_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$c_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

由上式可见,对于  $0 < \zeta < 1$ , 二阶系统的单位冲激响应是一个衰减的振荡。这时系统称为欠阻尼。

4、若  $\zeta > 1$ , 则  $c_1$  和  $c_2$  都是实数, 并且是负的, 单位冲激响应就是两个衰减的指数之差。即  $h(t) = M[e^{c_1 t} - e^{c_2 t}]u(t)$

$$= \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} [e^{c_1 t} - e^{c_2 t}] u(t)$$

这时系统称为过阻尼;

5、当  $\zeta = 1$  时,  $c_1 = c_2 = -\omega_n$ , 这时系统称为临界阻尼。

图6.22(a)为不同阻尼系数下,二阶系统的单位冲激响应。

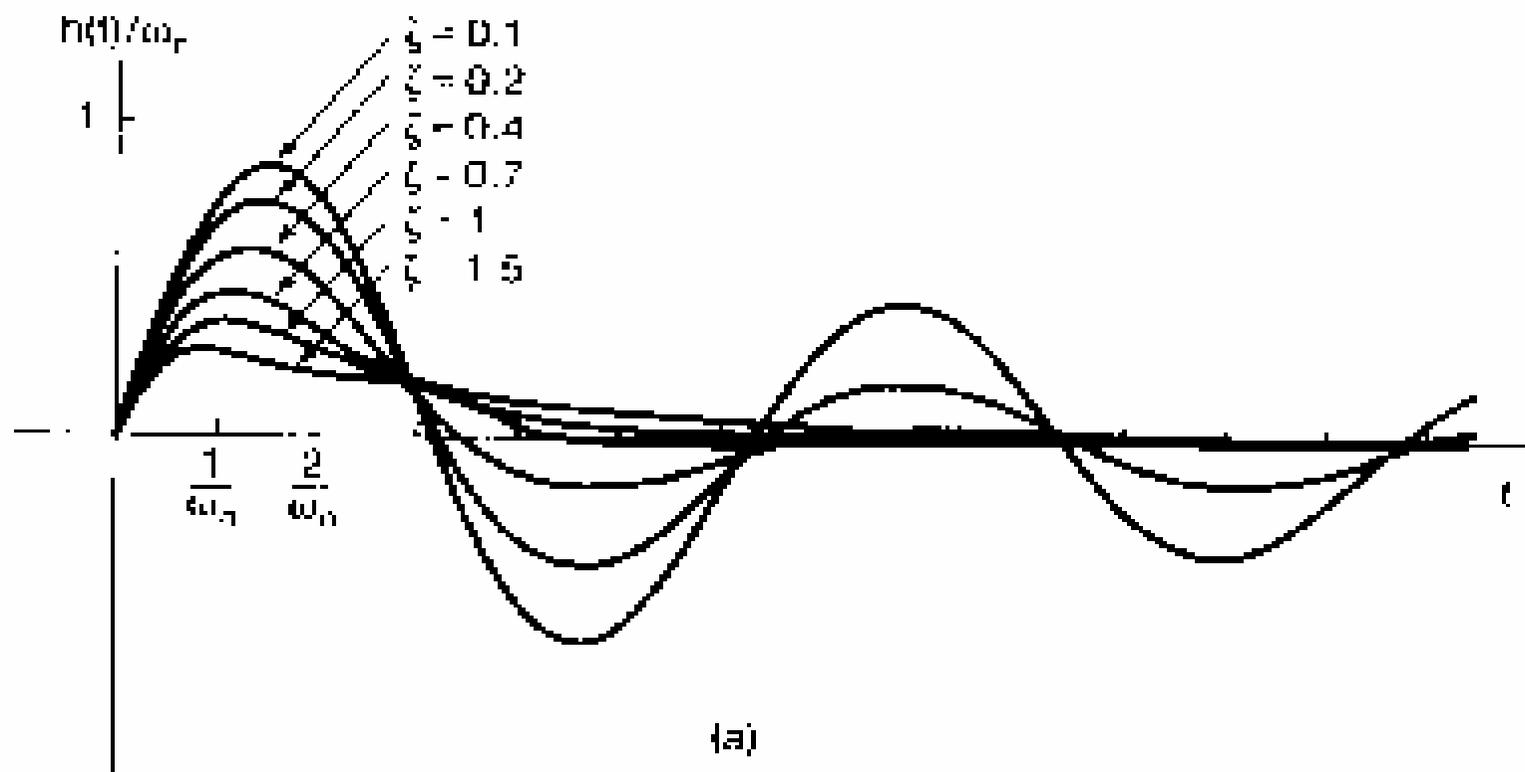


图6.22(a) 单位冲激响应

免费下载

### 三、二阶系统的阶跃响应

$$h(t) = M[e^{c_1 t} - e^{c_2 t}]u(t)$$

$$M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

- 若  $\zeta \neq 1$ , 二阶系统的阶跃响应可由 (6.37) 式算出, 其表达式为

$$\begin{aligned} s(t) &= h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t M[e^{c_1 \tau} - e^{c_2 \tau}]u(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t M[e^{c_1 \tau} - e^{c_2 \tau}]d\tau = M \left[ \frac{e^{c_1 \tau}}{c_1} - \frac{e^{c_2 \tau}}{c_2} \right] \Big|_0^t = \left\{ 1 + M \left[ \frac{e^{c_1 t}}{c_1} - \frac{e^{c_2 t}}{c_2} \right] \right\} u(t) \end{aligned}$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

(6.39) 式

- 若  $\zeta = 1$ , 二阶系统的阶跃响应可由  $h(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} u(t)$  得出

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{-\infty}^t \omega_n^2 \tau e^{-\omega_n \tau} u(\tau) d\tau = \int_0^t (\omega_n \tau) e^{-\omega_n \tau} d(\omega_n \tau) = e^{-\omega_n \tau} (-\omega_n \tau - 1) \Big|_0^t \\ &= [e^{-\omega_n t} (-\omega_n t - 1) + 1] u(t) = [1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}] u(t) \end{aligned}$$

图6.22 (b)为在不同阻尼系数  $\zeta$  值下, 二阶系统的阶跃响应。

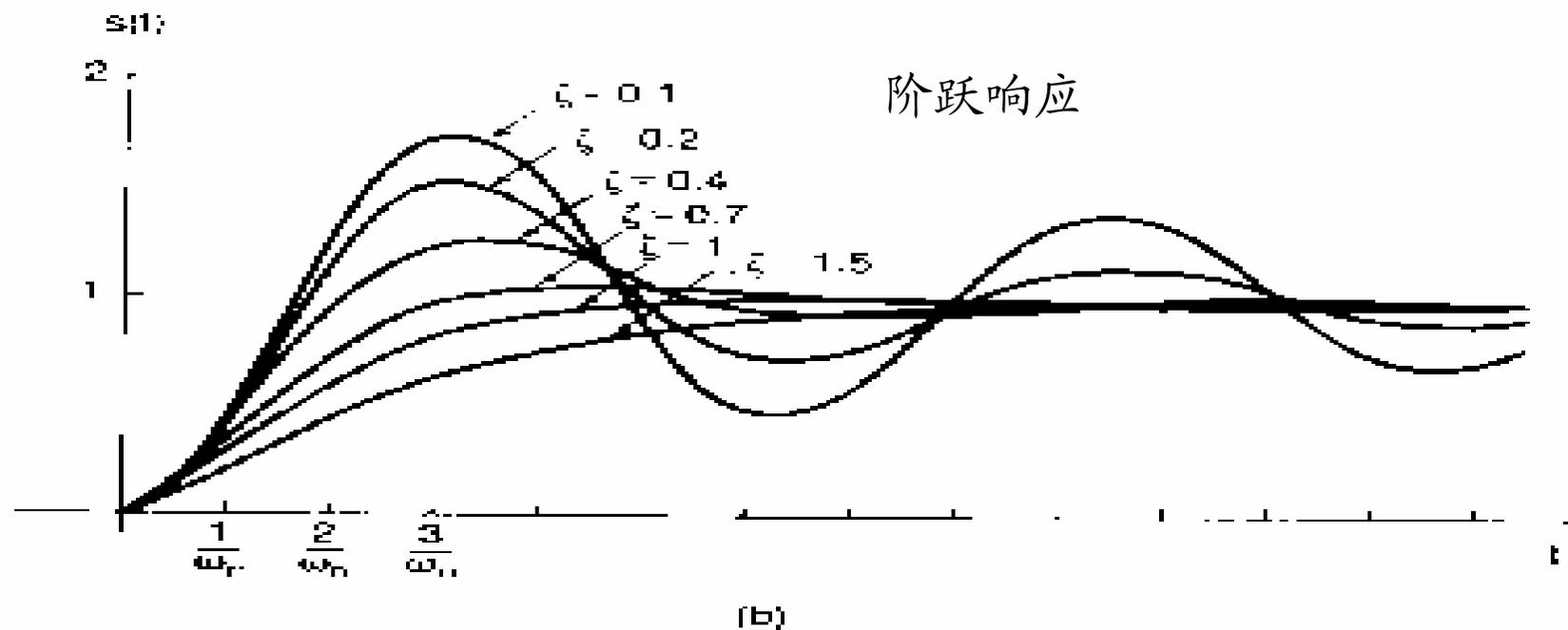


图 6.22 不同阻尼系数  $\zeta$  下的二阶系统响应：(a) 单位冲激响应；(b) 阶跃响应

由图可见：在欠阻尼时  $0 < \zeta < 1$ ，阶跃响应既有超量，又呈现出振荡。

当  $\zeta = 1$  时，阶跃响应没有超量，响应最快。

当  $\zeta > 1$  时，响应愈来愈慢。

#### 四、二阶系统的波特图

$$\begin{aligned}\therefore H(j\omega) &= \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{-(\omega/\omega_n)^2 + j2\zeta\omega/\omega_n + 1} \\ &= \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + j2\zeta\omega/\omega_n} \\ \therefore |H(j\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}}\end{aligned}$$

得

$$20\log_{10} |H(j\omega)| = -10\log_{10} \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + 4\zeta^2 \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\} \quad (6.43)$$

从上式可导出高、低频率两条线性渐近线为

$$20\log_{10} |H(j\omega)| = \begin{cases} 0 & , \quad \omega \ll \omega_n \\ -40\log_{10} \omega + 40\log_{10} \omega_n & , \quad \omega \gg \omega_n \end{cases} \quad (6.44)$$

因此，对数波特性的低频渐近线是 $0\text{dB}$ ，而高频渐近线则为  $-40\text{dB}/10$  倍频的斜线。这两条线在  $\omega = \omega_n$  处相交。为此称  $\omega_n$  为二阶系统的**折转频率**。

图6.23画出了由(6.33)式给出的频率响应对于几个不同的  $\zeta$  值下的波特图。

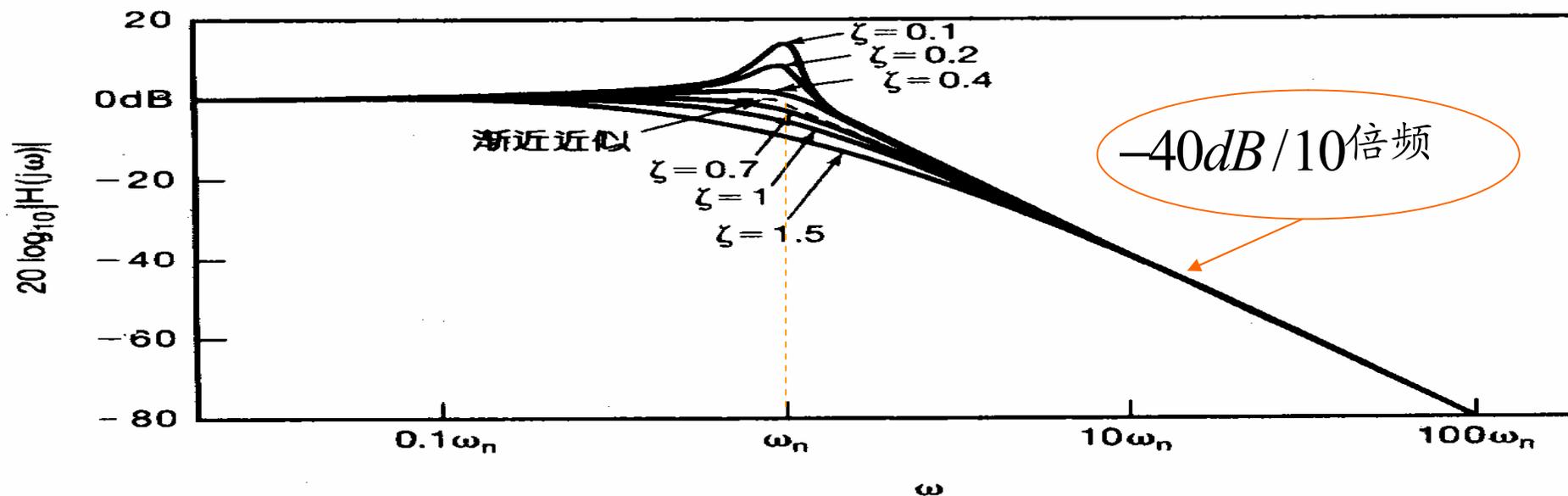


图6.23

$\angle H(j\omega)$  的准确表达式也可由(6.33)式得到,即

$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1} \left[ \frac{2\zeta (\omega / \omega_n)}{1 - (\omega / \omega_n)^2} \right]$$

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

$\angle H(j\omega)$  的近似式是:

$$\angle H(j\omega) \approx \begin{cases} 0 & , \omega \leq 0.1\omega_n \\ -\frac{\pi}{2} \left[ \log_{10} \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right) + 1 \right] & , 0.1\omega_n \leq \omega \leq 10\omega_n \\ -\pi & , \omega \geq 10\omega_n \end{cases} \quad (6.46)$$

如图6.23(b)所示

$$y = a \log_{10} \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right) + b$$

$$\omega / \omega_n = 10 \quad , \quad -\pi = a \log_{10} 10 + b = a + b$$

$$\omega / \omega_n = 0.1 \quad , \quad 0 = a \log_{10} 0.1 + b = -a + b$$

$$b = -\pi / 2 \quad , \quad a = -\pi / 2$$

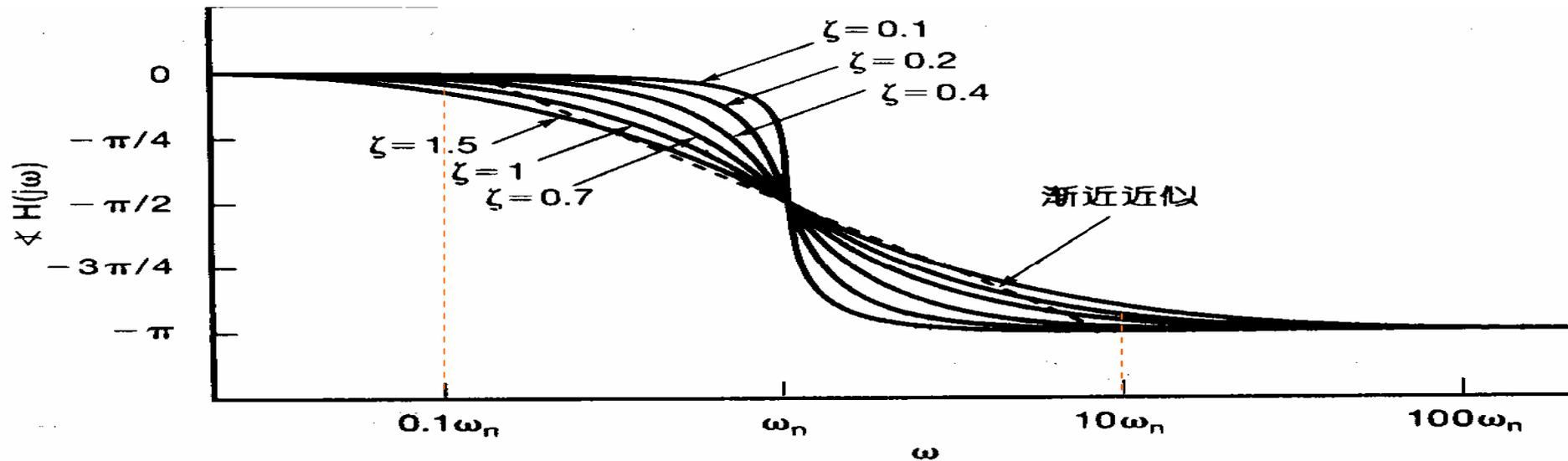


图 6.23 在几个不同阻尼系数  $\zeta$  值下，二阶系统的波特图

在折转频率  $\omega = \omega_n$  上,近似值和真值相等,且为  $\angle H(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$

免费下载网 600freq

---

作业: P352 题6.13 题 6.14  
题 6.19

### 6.5.3 有理型频率响应的波特图

用一阶和二阶系统作为基本单元可构成更为复杂的、具有有理型频率响应的LTI系统。

例6.4 求频率响应为  $H(j\omega) = \frac{2 \times 10^4}{(j\omega)^2 + 100j\omega + 10^4}$  的波特图。

解:

因为 
$$H(j\omega) = \frac{2 \times 10^4}{(j\omega)^2 + 100j\omega + 10^4} = \frac{2}{\left(\frac{j\omega}{100}\right)^2 + \frac{j\omega}{100} + 1}$$

所以 
$$H(j\omega) = 2 \hat{H}(j\omega)$$

于是有 
$$20 \log_{10} |H(j\omega)| = 20 \log_{10} 2 + 20 \log_{10} |\hat{H}(j\omega)|$$

将  $H(j\omega)$  与 **标准二阶频率响应**  $\hat{H}(j\omega)$  作一比较, 可得  $\omega_n = 100$ ,  $\zeta = 1/2$ 。

$$\hat{H}(j\omega) = \frac{1}{(j\omega / \omega_n)^2 + 2\zeta(j\omega / \omega_n) + 1}$$

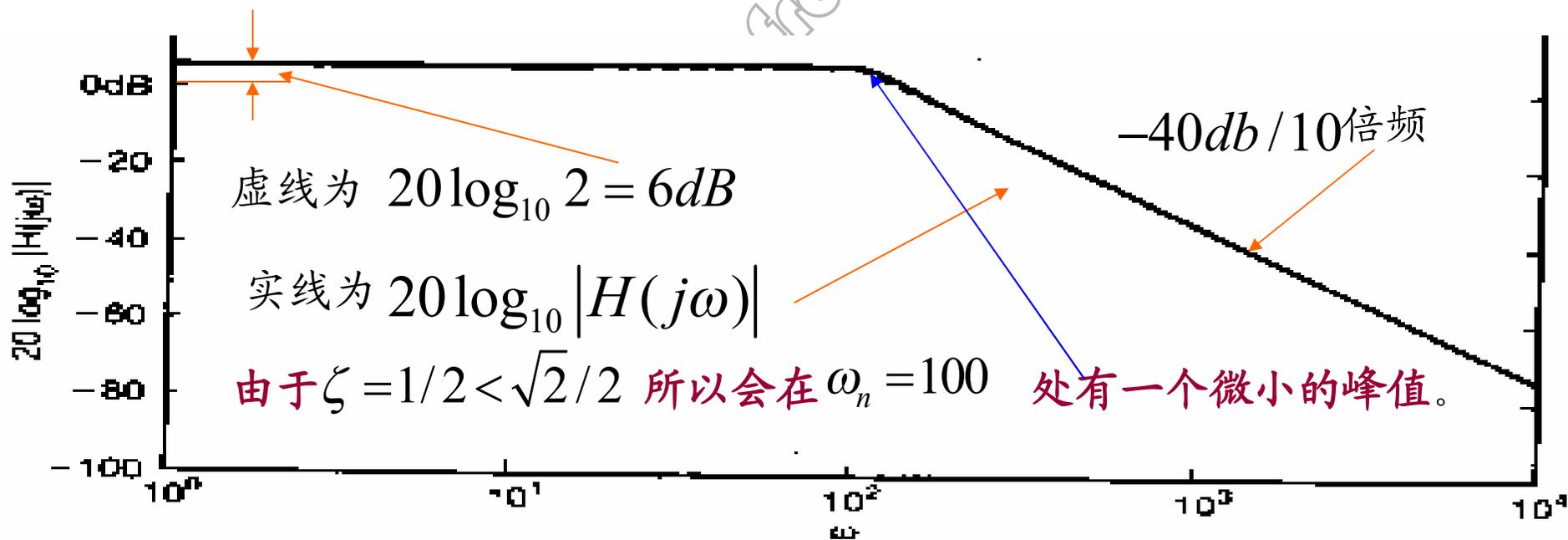
1、对  $20 \log_{10} |\hat{H}(j\omega)|$  作渐近线:

$$20\log_{10}|\hat{H}(j\omega)| = -10\log_{10}\left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{100}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{100}\right)^2 \right\}$$

$$\approx \begin{cases} 0 & , \omega \ll 100 \\ -40\log_{10}\frac{\omega}{100} & , \omega \gg 100 \end{cases}$$

2、而  $20\log_{10} 2 = 6dB$  为一个恒定值。

所以  $20\log_{10}|H(j\omega)|$  为上两项的合成。如图6.24(a)所示



(a)

因为  $\angle H(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{100} / [1 - (\frac{\omega}{100})^2]$

$$\approx \begin{cases} 0 & , \omega \leq 10 \\ -(\pi/2)[\log_{10}(\omega/100) + 1] & , 10 \leq \omega \leq 1000 \\ -\pi & , \omega \geq 1000 \end{cases}$$

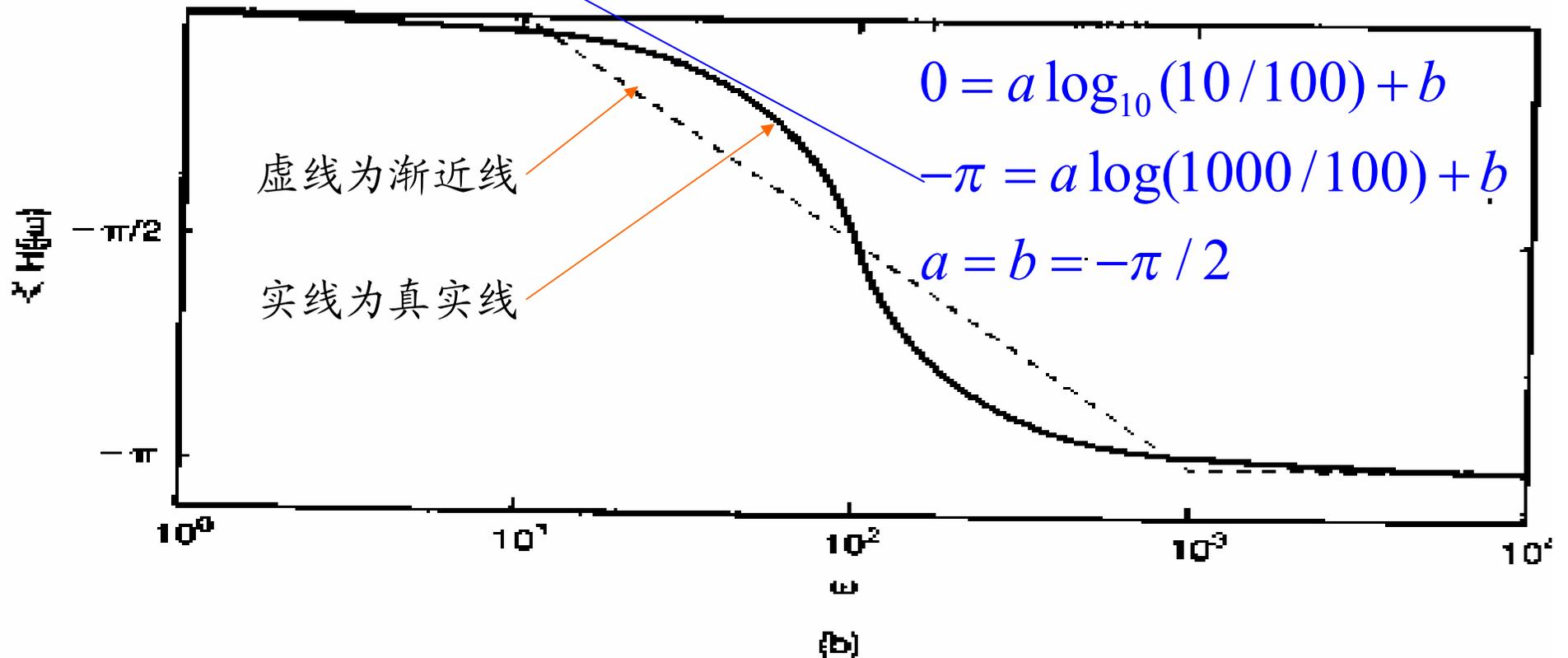


图 6.24 例 6.4 的系统函数波特图：(a) 模；(b) 相位

例6.5 求如下频率响应的波特图。  $H(j\omega) = \frac{100(1+j\omega)}{(10+j\omega)(100+j\omega)}$

解：将上式写成因式形式

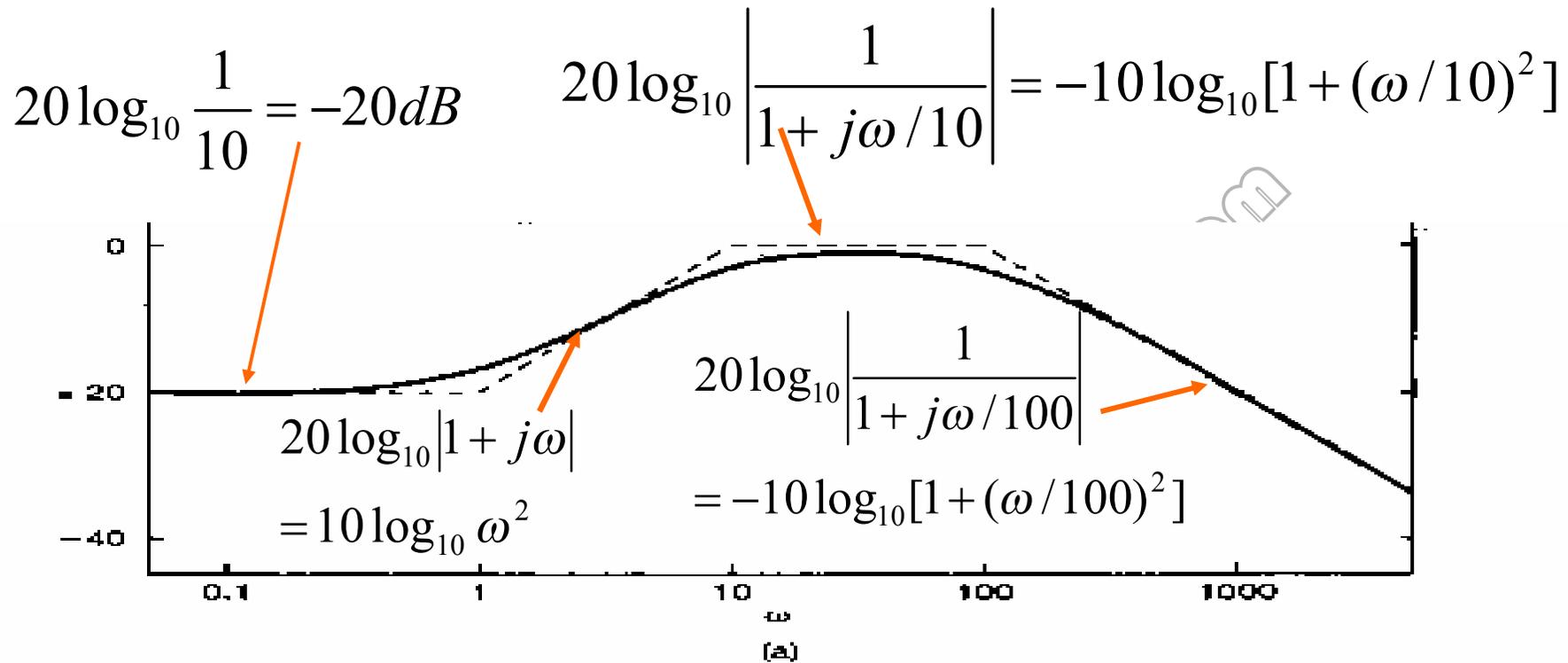
$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{100(1+j\omega)}{(10+j\omega)(100+j\omega)} = \frac{(1+j\omega)}{(10+j\omega)(1+j\omega/100)} \\ &= \frac{1}{10} \left( \frac{1}{1+j\omega/10} \right) \left( \frac{1}{1+j\omega/100} \right) (1+j\omega) \end{aligned}$$

因为，上式第一个因式是一个常数，第二、第三这两个因式有与一阶频率响应相同的标准形式；第四个因式为一阶标准形式的倒数。

因此， $20 \log_{10} |H(j\omega)|$  的波特图，就是相应于每个因式的波特图之和。即  $20 \log_{10} |H(j\omega)| = 20 \log_{10} \left( \frac{1}{10} \right) + 20 \log_{10} \left| \frac{1}{1+j\omega/10} \right|$

$$+ 20 \log_{10} \left| \frac{1}{1+j\omega/100} \right| + 20 \log_{10} |(1+j\omega)|$$

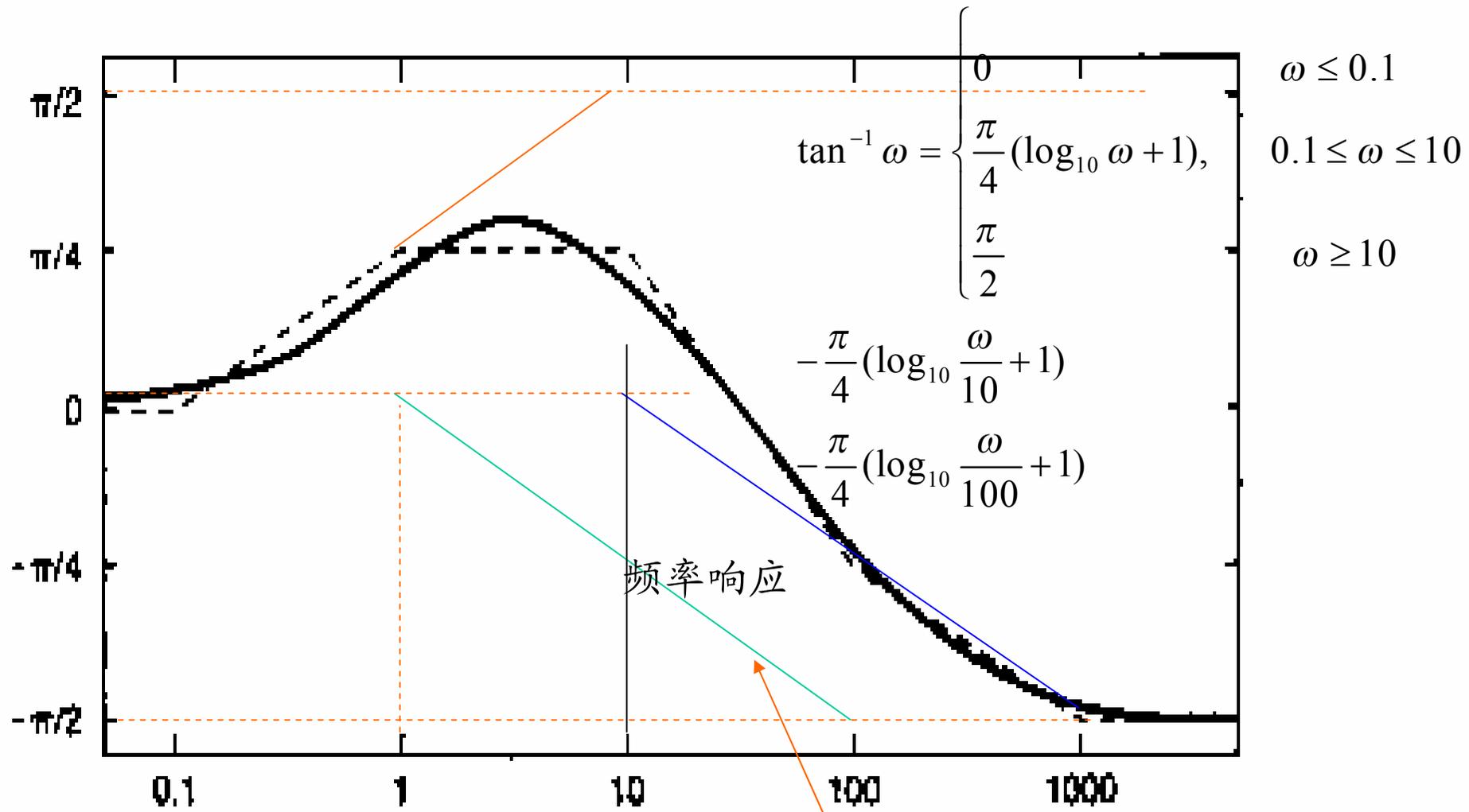
见图6.25(a)所示。



$\therefore H(j\omega) = \frac{1}{10} \left( \frac{1}{1 + j\omega/10} \right) \left( \frac{1}{1 + j\omega/100} \right) (1 + j\omega)$  则相位为:

$\frac{1}{10} \rightarrow 0$       $1 + j\omega \rightarrow \tan^{-1} \omega$       $\frac{1}{1 + j\omega/10} \rightarrow -\tan^{-1}(\omega/10)$

$\frac{1}{1 + j\omega/100} \rightarrow -\tan^{-1}(\omega/100)$



$$\frac{1}{10} \rightarrow 0$$

$$1 + j\omega \rightarrow \tan^{-1} \omega$$

$$\frac{1}{1 + j\omega/10} \rightarrow -\tan^{-1}(\omega/10)$$

$$\frac{1}{1 + j\omega/100} \rightarrow -\tan^{-1}(\omega/100)$$

## 6.6 一阶与二阶离散时间系统

对于一个LTI系统而言,其输出 $y[n]$ 和输入 $x[n]$ 间的线性常系数差分方程一般具有以下形式:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

若  $x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$  ,  $y[n] \xleftrightarrow{F} Y(e^{j\omega})$

则  $\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] \xleftrightarrow{F} \sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega} Y(e^{j\omega})$

$$\sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \xleftrightarrow{F} \sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$$

因此有  $\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$

可得 
$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega}}$$

和连续时间情况一样,具有频率响应为  $e^{-j\omega}$  的两个多项式之比的任何系统(即由线性常系数差分方程描述的任何离散时间LTI系统)都能够写成一阶和二阶系统的乘积或和。

### 6.6.1 一阶离散时间系统

描述一阶因果LTI系统的差分方程为

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \quad (6.51)$$

其中  $|a| < 1$

上式两边应用傅里叶变换得

$$Y(e^{j\omega})[1 - ae^{-j\omega}] = X(e^{j\omega})$$

1、 则该系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (6.52)$$

2、 查P278页表5.2可知其单位脉冲响应为

$$h[n] = a^n u[n] \quad (6.53)$$

对于不同的a值,其  $h[n]$  如图6.26所示.

免费考研网 bbs.freekaoyan.com  
yueshen22

3、该系统的阶跃响应为

$$s[n] = h[n] * u[n] = \sum_{m=-\infty}^n h[m] = \sum_{m=0}^n a^m = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} u[n] \quad (6.54)$$

图6.27为不同  $a$  时的阶跃响应.

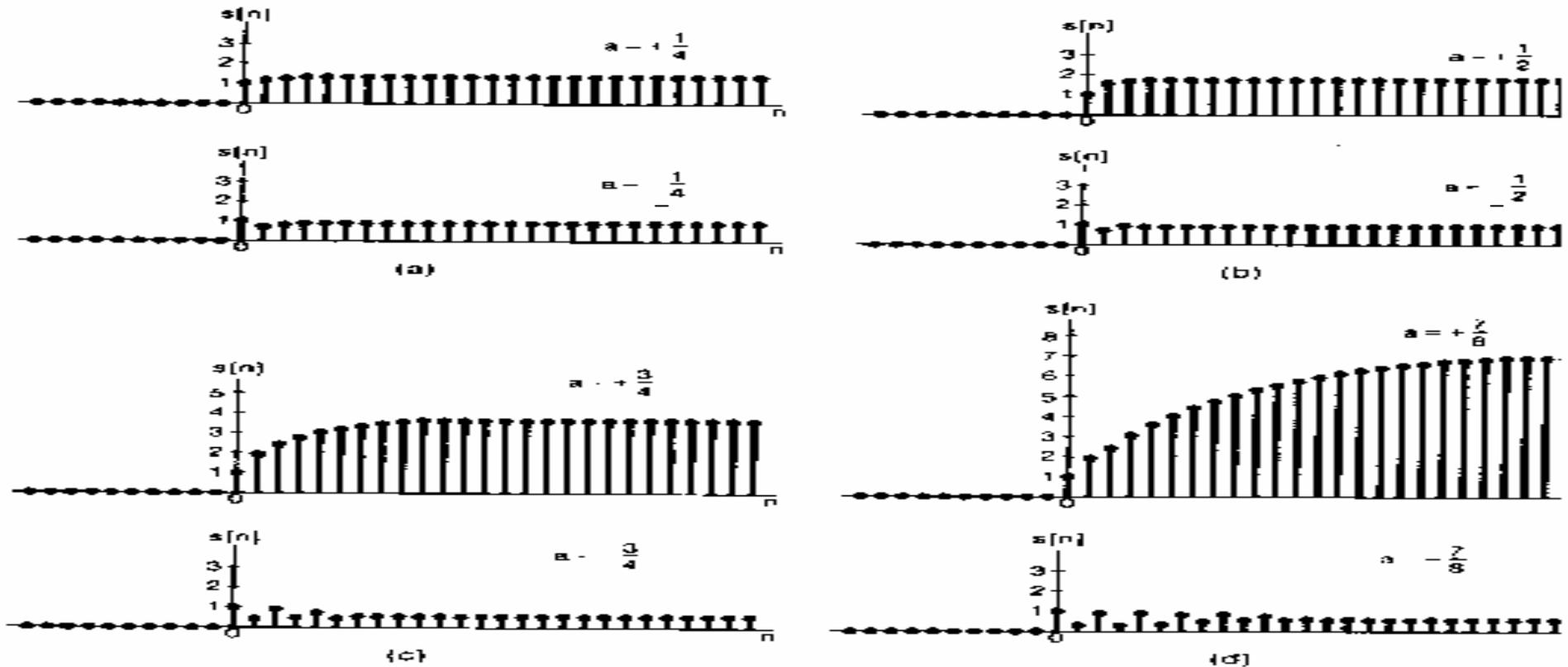


图 6.27 一阶系统的阶跃响应  $s[n]$ ：  
(a)  $a = \pm 1/4$ ; (b)  $a = \pm 1/2$ ; (c)  $a = \pm 3/4$ ; (d)  $a = \pm 7/8$

由图可见,参数  $a$  的模  $|a|$  所起的作用类似于连续时间一阶系统中的时间常数  $\tau$  的作用,它决定了离散时间一阶系统时域响应的速率。由(6.53)和(6.54)式可以看到, $h[n]$ 和 $s[n]$ 收敛于终值的速率就是 $|a|^n$ 收敛于0的速率。

- 1、因此对于小的  $|a|$  值,单位脉冲响应急剧衰减,而阶跃响应则很快地建立起来。
- 2、当  $|a| \rightarrow 1$  时,这些响应都比较慢。
- 3、当  $a < 0$  时,阶跃响应既呈现超量,又呈现出振荡特性。

一阶系统频率响应的模和相位分别是

$$\therefore H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - a \cos \omega + aj \sin \omega}$$

所以得

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{(1 + a^2 - 2a \cos \omega)^{1/2}}$$

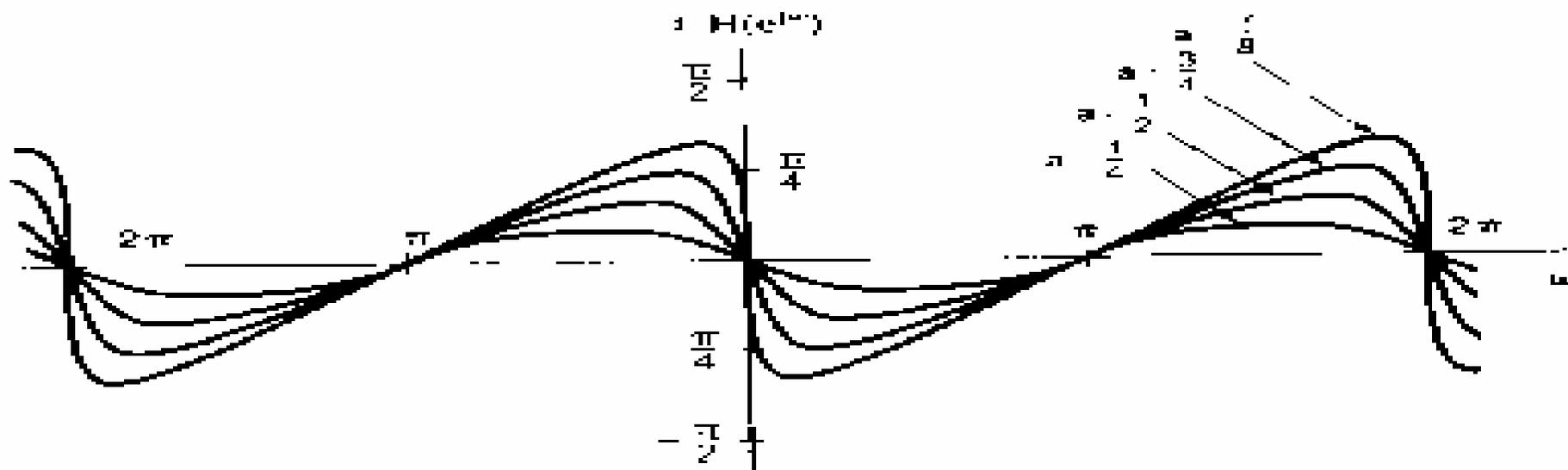
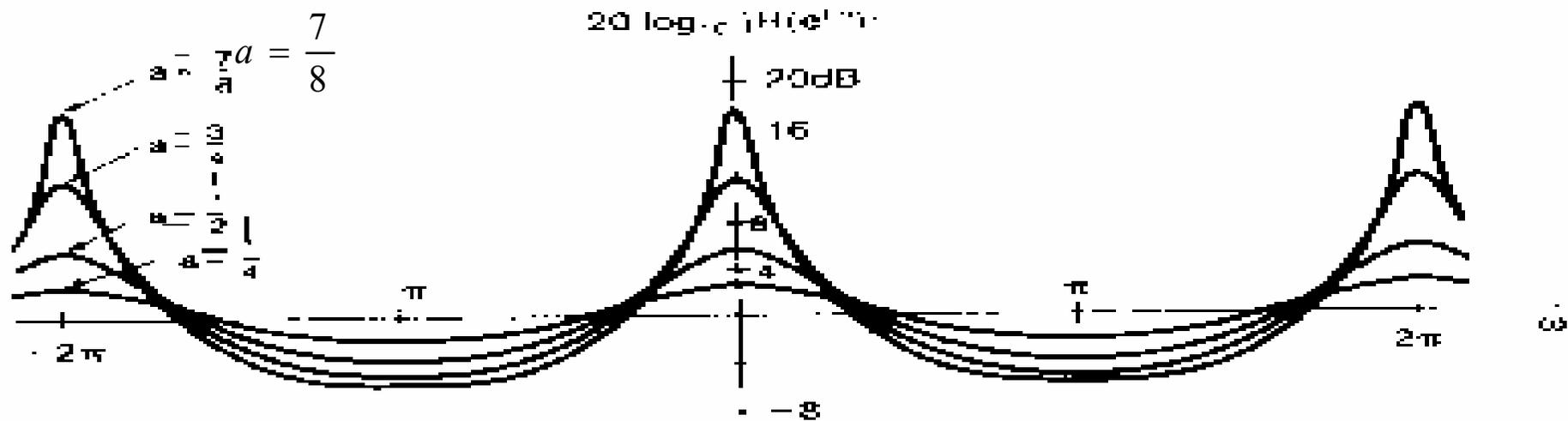
$$\angle H(e^{j\omega}) = -\tan^{-1} \left[ \frac{a \sin \omega}{1 - a \cos \omega} \right]$$

图6.28 (a)为  $a > 0$  的几个值时频率响应的对数模和相位特性。此时系统呈高频衰减的特性。

图6.28 (b)为  $a < 0$  时的情况。此时,系统对高频分量放大,而对低频分量衰减。

注意: 1、对于小的  $|a|$  值:  $|H(e^{j\omega})|$  的最大值  $1/(1+a)$  和最小值  $1/(1-a)$  在数值上逐渐靠近,因此,变化相对平坦。

2、当  $|a|$  接近 1 时，这两个值相差很大， $|H(e^{j\omega})|$  呈现出更为陡峭的峰值。这就为在一个较窄的频带内提供了具有良好选择性的滤波和放大。



(a)  $a > 0$  时几个不同  $a$  值的图

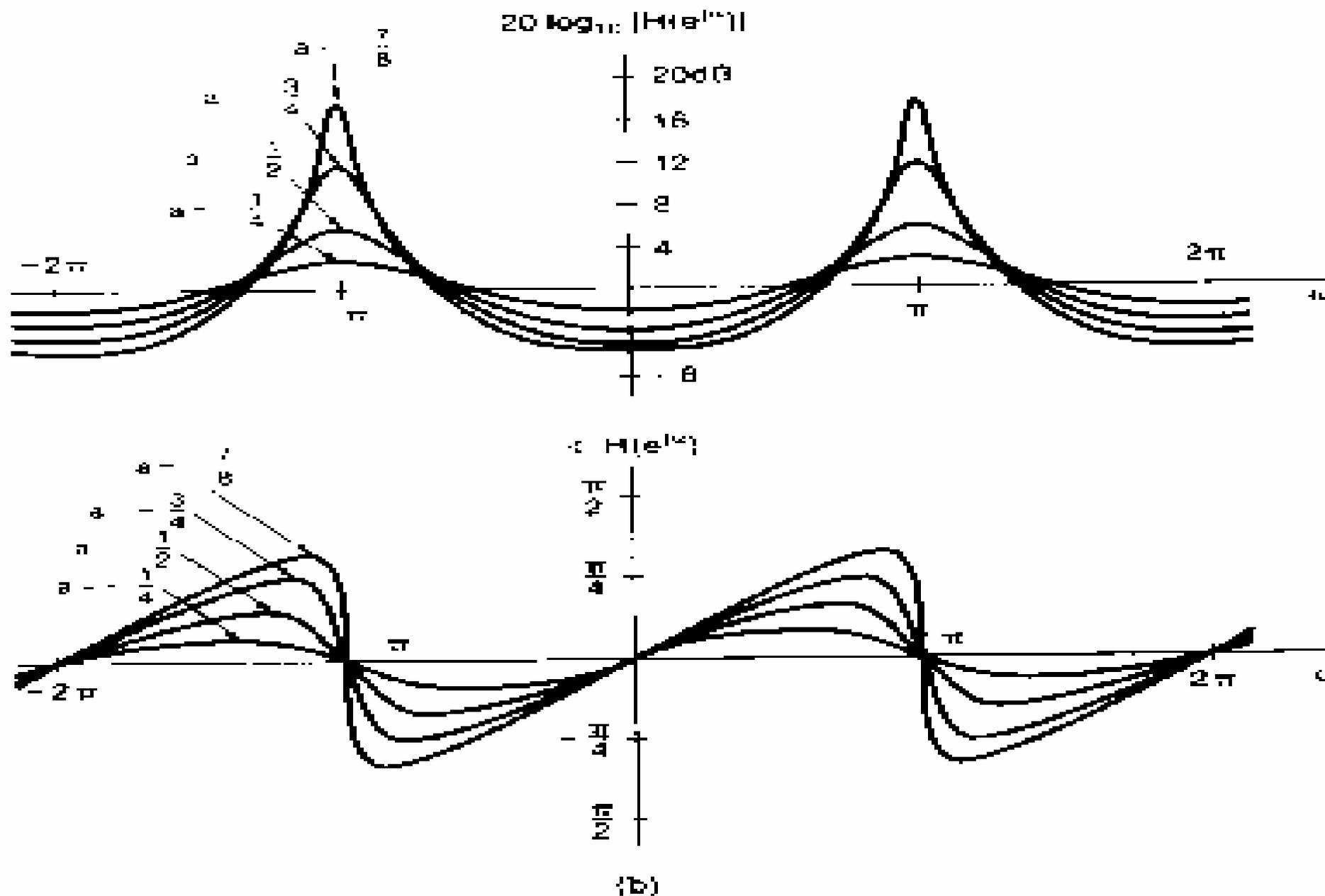


图 6.28 由(6.52)式确定的一阶系统频率响应的模和相位特性：  
 (a)  $\alpha < 1$  时几个不同  $\alpha$  值的图

## 6.6.2 二阶离散时间系统

一个二阶因果LTI系统,其差分方程为

$$y[n] - 2r \cos \theta y[n-1] + r^2 y[n-2] = x[n] \quad (6.57)$$

式中  $0 < r < 1$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$

该系统的频率响应为

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{1 - 2r \cos \theta e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}} = \frac{1}{1 - r(e^{j\theta} + e^{-j\theta})e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}} \\ &= \frac{1}{1 - re^{j\theta} e^{-j\omega} - re^{-j\theta} e^{-j\omega} + r^2 e^{j\theta} e^{-j\theta} e^{-j2\omega}} = \frac{1}{[1 - (re^{j\theta})e^{-j\omega}][1 - (re^{-j\theta})e^{-j\omega}]} \end{aligned}$$

1、 当  $\theta \neq 0$  或  $\pi$  时, 利用部分分式展开就可得

$$H(e^{j\omega}) = \frac{A}{1 - (re^{j\theta})e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - (re^{-j\theta})e^{-j\omega}}$$

其中

$$A = \frac{e^{j\theta}}{2j \sin \theta}, \quad B = \frac{e^{-j\theta}}{2j \sin \theta}$$

系统的单位脉冲响应为

$$\begin{aligned}h[n] &= [A(re^{j\theta})^n + B(re^{-j\theta})^n]u[n] \\&= \left[ \frac{e^{j\theta}}{2j\sin\theta} (re^{j\theta})^n + \frac{e^{-j\theta}}{2j\sin\theta} (re^{-j\theta})^n \right] u[n] \\&= \frac{r^n}{\sin\theta} \frac{e^{j(1+n)\theta} + e^{-j(1+n)\theta}}{2j} u[n] \\&= r^n \frac{\sin[(1+n)\theta]}{\sin\theta} u[n]\end{aligned}$$

2、若  $\theta = 0$  时,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{[1 - (re^{j\theta})e^{-j\omega}][1 - (re^{-j\theta})e^{-j\omega}]} = \frac{1}{(1 - re^{-j\omega})^2}$$

则有  $h[n] = (n+1)r^n u[n]$

3、当  $\theta = \pi$  时

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{[1 - (re^{j\theta})e^{-j\omega}][1 - (re^{-j\theta})e^{-j\omega}]} = \frac{1}{(1 + re^{-j\omega})^2}$$

则有  $h[n] = (1 + n)(-r)^n u[n]$

图6.29为不同  $r$  和  $\theta$  值时，二阶系统的脉冲响应。

由图可见：1)  $r$  影响  $h[n]$  的收敛速度， $r$  越小， $h[n]$  收敛的越快（即  $r$  愈接近1， $h[n]$  衰减的愈慢）；

2)  $\theta$  值决定振荡频率。

当  $\theta = 0$ ，在  $h[n]$  中就没有振荡；

当  $\theta > 0$  时，有振荡， $\theta$  越大振荡频率越高；

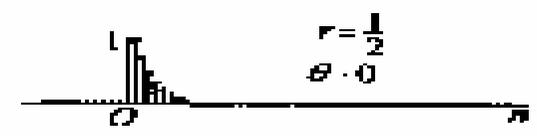
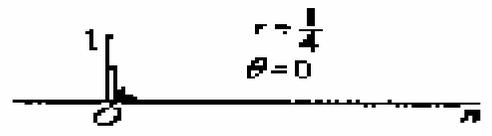
当  $\theta = \pi$  时，振荡加剧。

$r$ 影响 $h[n]$ 的收敛速度  $r = \frac{1}{4}$   $r$ 越小收敛的越快

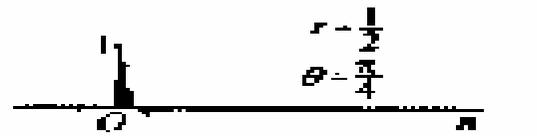
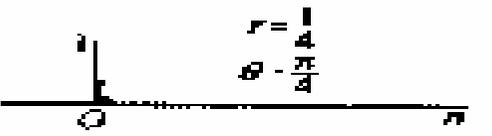
$r = \frac{1}{2}$

$r = \frac{3}{4}$

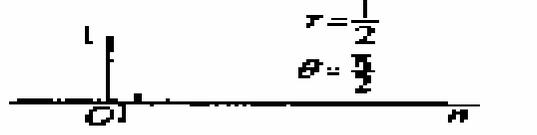
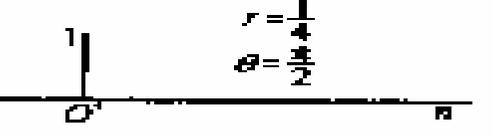
$\theta = 0$



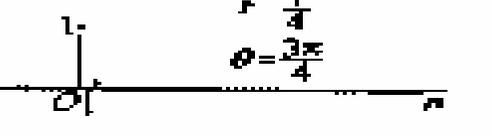
$\theta = \frac{\pi}{4}$



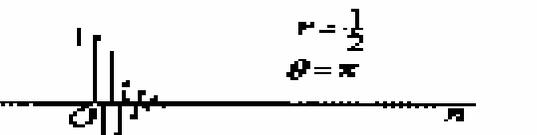
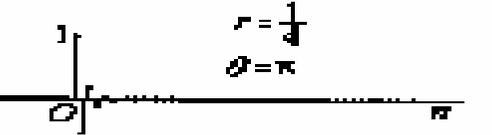
$\theta = \frac{\pi}{2}$



$\theta = \frac{3\pi}{4}$



$\theta = \pi$



$\theta$  值决定振荡频率

$\theta$  越大振荡频率越高;

图 6.29 由方程 (6.57) 式表示的二阶系统的单位脉冲响应

$r$  和  $\theta$  值的影响也可从阶跃响应中看到。

1) 当  $\theta \neq 0$  和  $\pi$  时,  $h[n] = [A(re^{j\theta})^n + B(re^{-j\theta})^n]u[n]$  可得

$$s[n] = h[n] * u[n] = \sum_{m=-\infty}^n h[m] = \sum_{m=0}^n [A(re^{j\theta})^m + B(re^{-j\theta})^m]$$

$$= \left[ A \left( \frac{1 - (re^{j\theta})^{n+1}}{1 - re^{j\theta}} \right) + B \left( \frac{1 - (re^{-j\theta})^{n+1}}{1 - re^{-j\theta}} \right) \right] u[n]$$

2) 当  $\theta = 0$  时,  $h[n] = (n+1)r^n u[n]$ , 可得

$$s[n] = \sum_{m=0}^n (m+1)r^m = \left[ \frac{1}{(r-1)^2} - \frac{r}{(r-1)^2} r^n + \frac{r}{r-1} (n+1)r^n \right] u[n]$$

$$\sum_{k=0}^N (k+1)a^k = \frac{d}{da} \sum_{K=0}^{N+1} a^k$$

3) 当  $\theta = \pi$  时,  $h[n] = (1+n)(-r)^n u[n]$  可得

$$s[n] = \left[ \frac{1}{(r+1)^2} + \frac{r}{(r+1)^2} (-r)^n + \frac{r}{r+1} (n+1)(-r)^n \right] u[n]$$

图6.30为一组不同  $r$  和  $\theta$  值的阶跃响应。对于任何不等于零的  $\theta$  值, 阶跃响应呈现不同的超量和起伏。

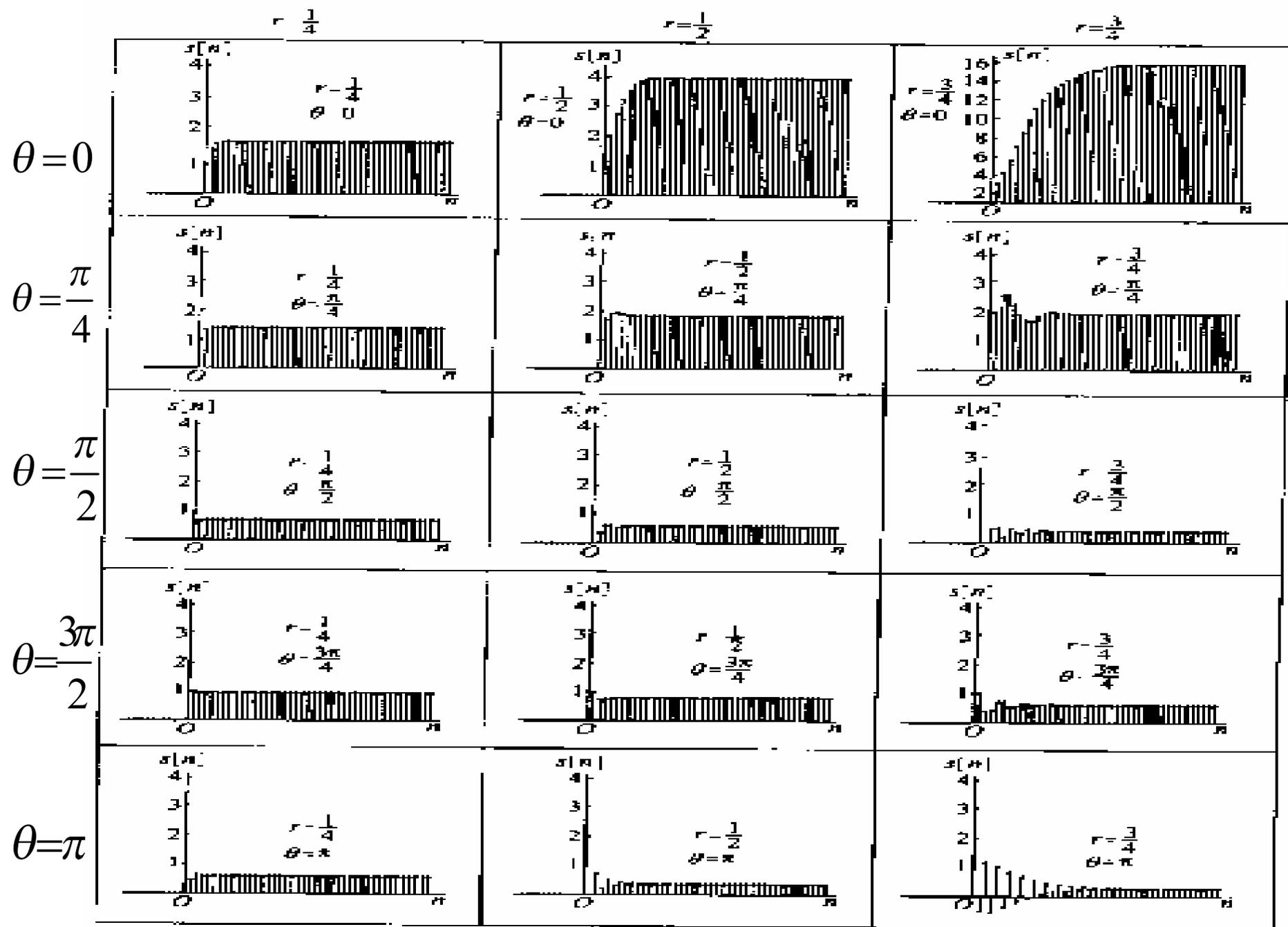


图6.30 对于一组不同的  $r$  和  $\theta$  值时的阶跃响应

因为,由图6.29可见,对于任何**不等于零的  $\theta$  值**,单位脉冲响应都有一个**衰减振荡的特性**,**(阶跃响应则呈现超量和起伏)**。由此可见,由(6.57)式所描述的二阶系统是**欠阻尼情况下的二阶系统**,而在 **$\theta = 0$  的特殊情况下就是临界阻尼情况**。

图6.31为不同的  $r$  和  $\theta$  值下,该系统的频率响应。

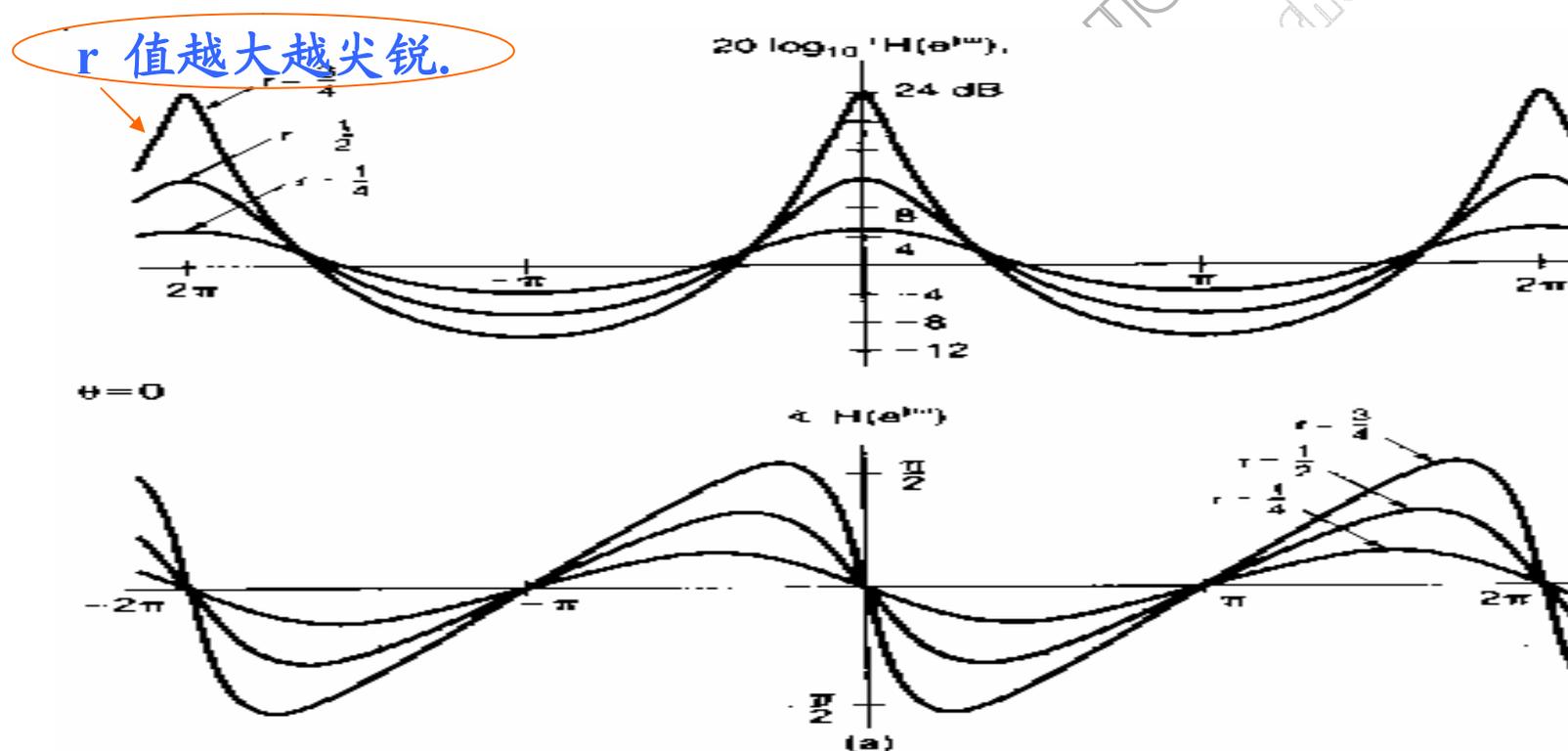
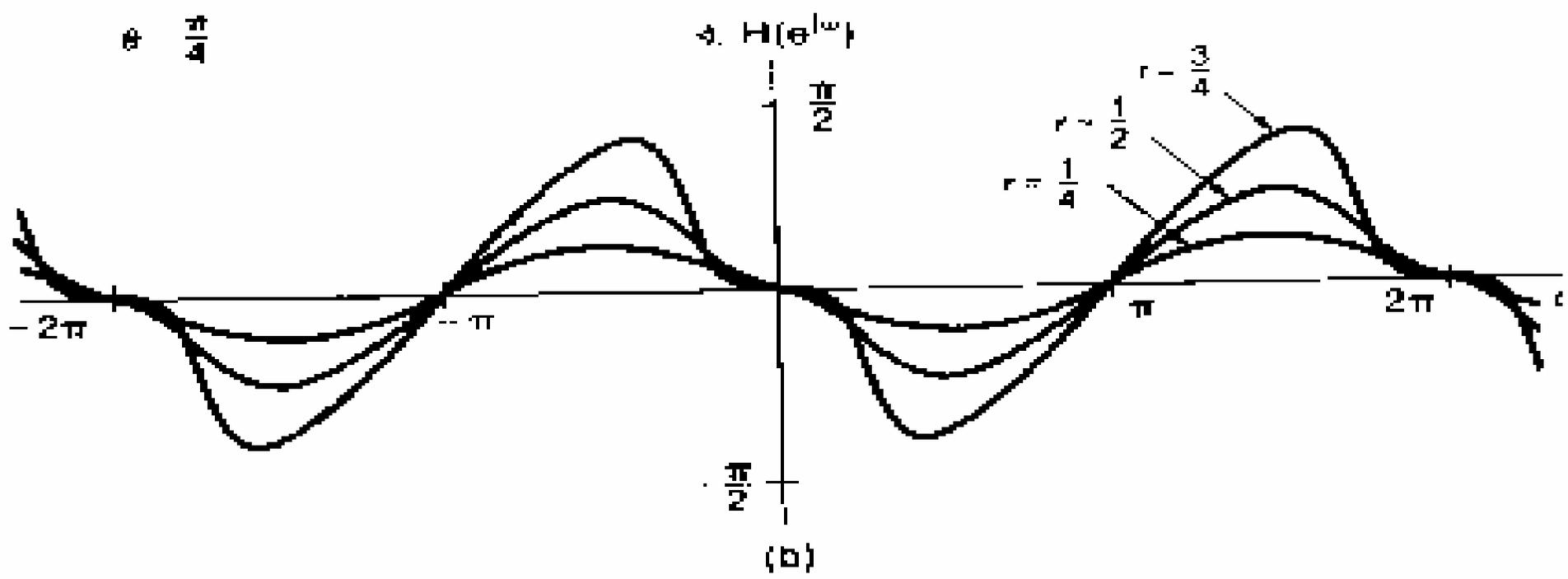
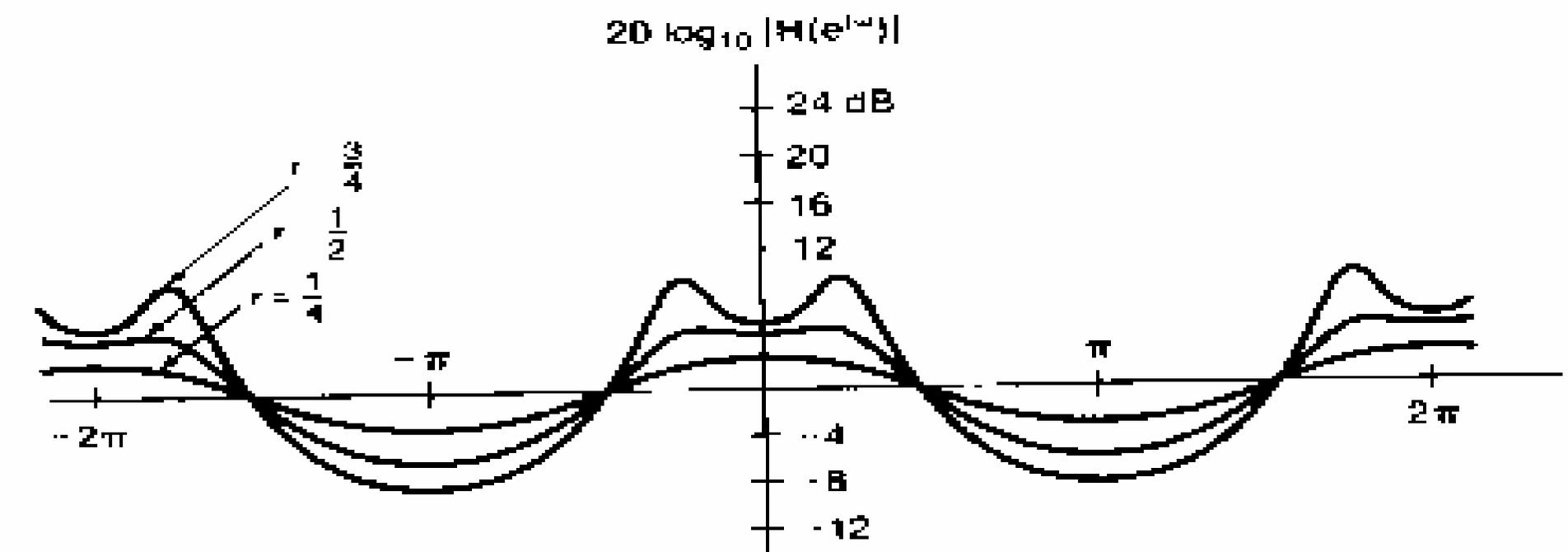


图 6.31 由(6.57)式所表示的二阶系统频率响应的模和相位特性:

在频域:  $r$  决定了  $|H(e^{j\omega})|$  峰值的大小,  $\theta$  确定着峰值的位置



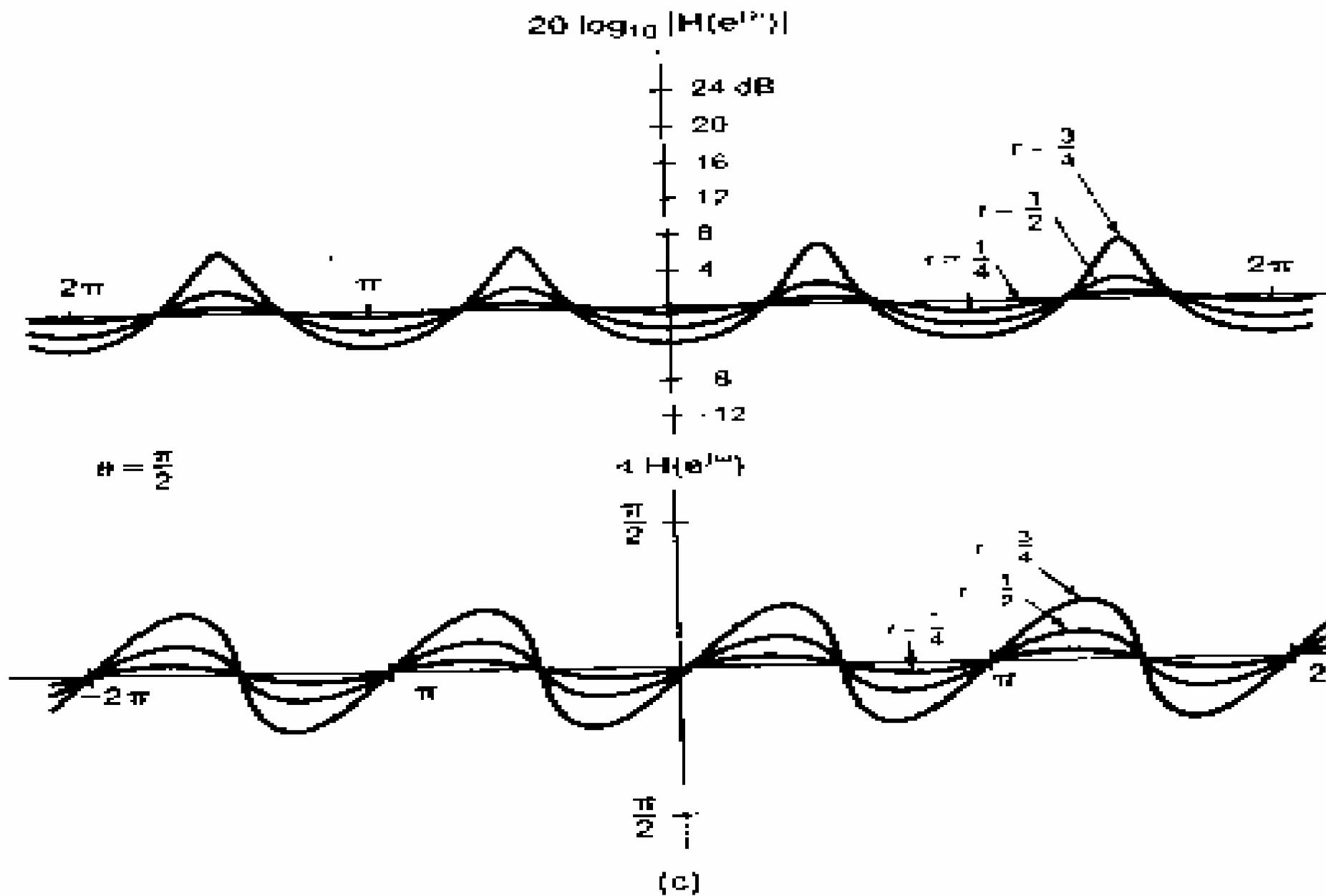
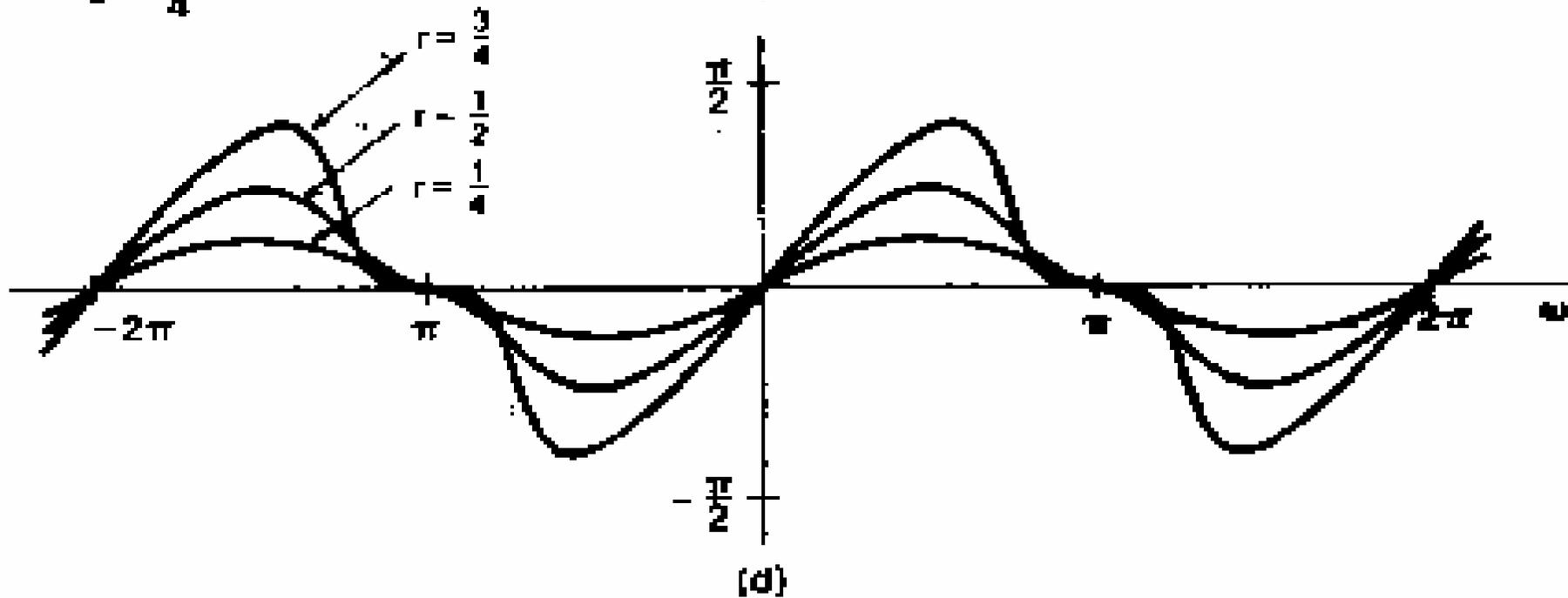
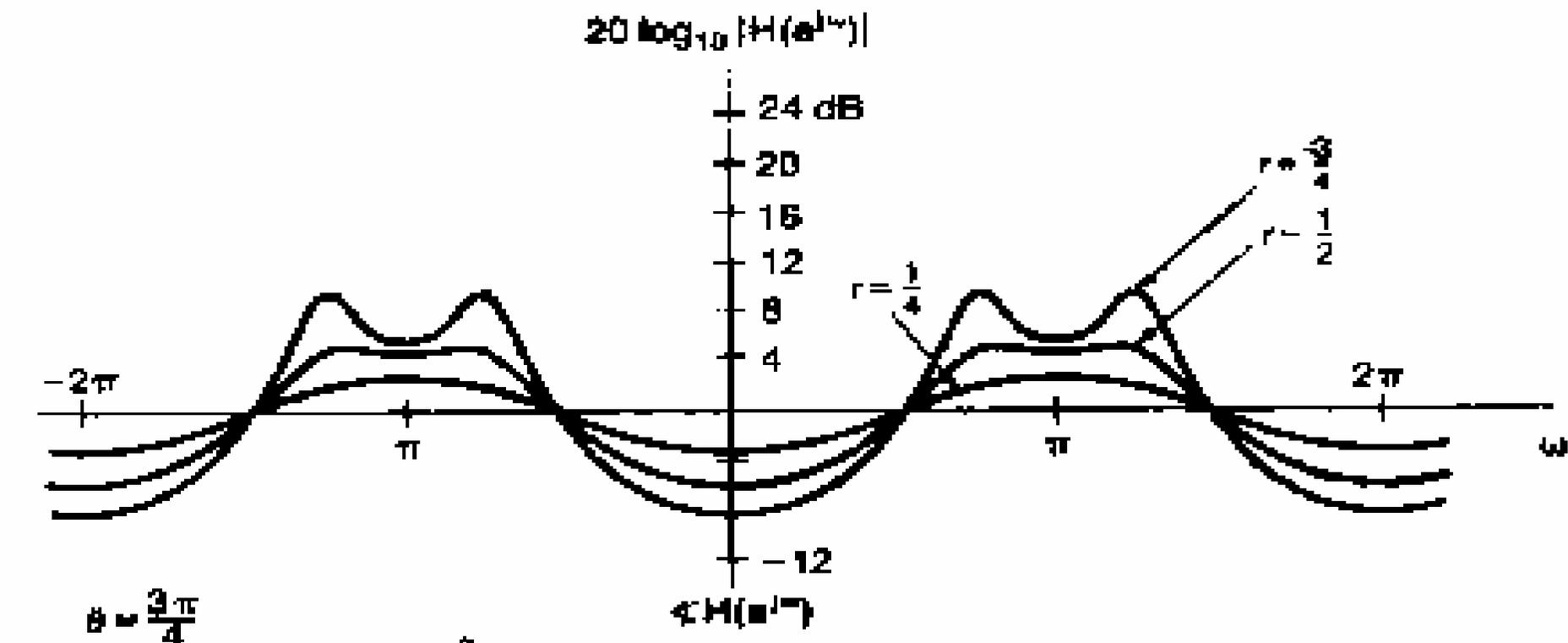


图 6.31(续)



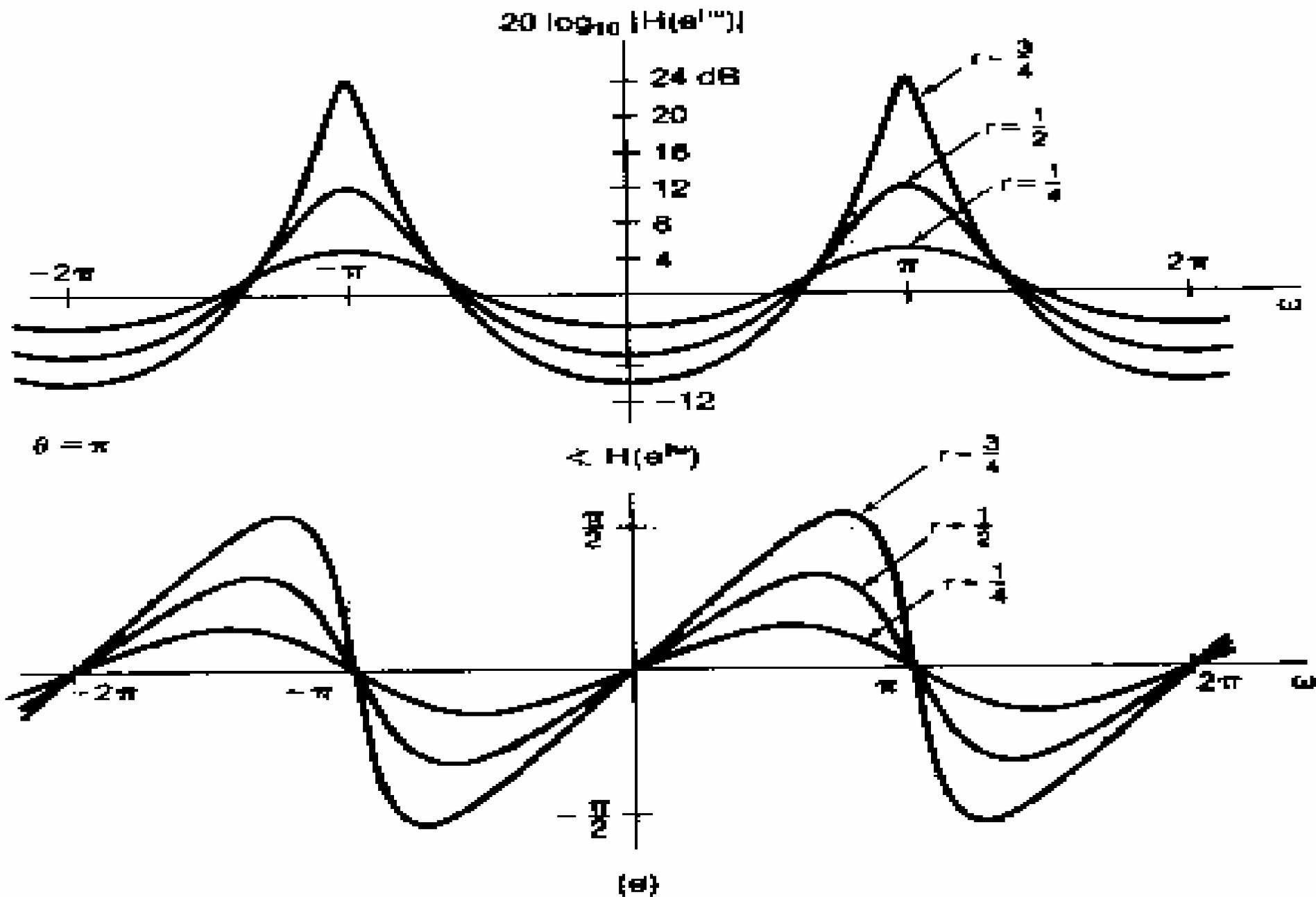


图 6.31(续)

从图6.31可见,系统在某一频率范围内具有放大作用,并且  $r$  决定了在这一频率范围内频率响应的尖锐程度:  $r$  值越大越尖锐。

当  $\theta$  从  $0$  到  $\pi$  逐渐增加时,  $|H(e^{j\omega})|$  峰值的位置则由  $0$  逐渐变为  $\pi$ , 此时系统的特性有低通变为带通,最后变成高通。

这说明, 在时域:  $r$  确定了  $h[n]$  的收敛速率,  $\theta$  决定着  $h[n]$  的振荡情况;

在频域:  $r$  决定了  $|H(e^{j\omega})|$  峰值的大小,  $\theta$  决定着峰值的位置。

$r$  和  $\theta$  的作用类似于连续时间系统中  $\omega$  和  $\zeta$ , 但情况比连续时间系统复杂。

由 (6.59) 式定义的二阶系统的部分分式展开式是具有复数系数因子(除了  $\theta = 0$  或  $\pi$ ) 的, 但是二阶系统也可能具有实系数因子。

现考虑如下实系数因子的系统的频率响应  $H(e^{j\omega})$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - d_1 e^{-j\omega})(1 - d_2 e^{-j\omega})} \quad (6.70)$$

式中  $d_1$  和  $d_2$  都是实数, 且  $|d_1|, |d_2| < 1$ 。 (6.70) 式所对应的差分方程为

$$\therefore H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-d_1e^{-j\omega})(1-d_2e^{-j\omega})}$$

$$= \frac{1}{1-(d_1+d_2)e^{-j\omega} + d_1d_2e^{-j2\omega}}$$

$$\therefore y[n] - (d_1 + d_2)y[n-1] + d_1d_2y[n-2] = x[n]$$

在该情况下( $d_1 \neq d_2$ ):

$$H(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-d_1e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-d_2e^{-j\omega}}$$

$$A = \frac{d_1}{d_1 - d_2}, \quad B = \frac{d_2}{d_2 - d_1}$$

其中

$$h[n] = [Ad_1^n + Bd_2^n]u[n]$$

由此得

$$s[n] = h[n] * u[n] = \left[ A \left( \frac{1-d_1^{n+1}}{1-d_1} \right) + B \left( \frac{1-d_2^{n+1}}{1-d_2} \right) \right] u[n]$$

由(6.70)式所给出的频率响应相应于两个一阶系统的级联。因此，可以从对一阶系统的研究中演绎出该系统的大部分性质。

例如：1、它的对数模和相位特性就可以通过把两个一阶系统的特性相加而得到。

2、如同在一阶系统中看到的，如果 $|d_1|, |d_2|$ 都小的话，系统相应就回快；如果其中一个接近1，系统就会有一个比较长的建立时间。

3、如果 $d_1, d_2$ 都是负数，响应就是振荡型的；如果都是正数，就相当于过阻尼的情况（因为这时单位脉冲响应和阶跃响应在建立过程中都没有振荡）。

## 6.7 系统的时域分析与频域分析举例

书中举了两个例子：

- 汽车减震系统的分析——讨论在连续时间情况下
- 离散时间非递归滤波器

这两个例子都用来说明在时域特性和频域特性之间进行某些权衡或折衷的意义。

下面主要看离散时间非递归滤波器：

1、递归——利用输入和以前的输出来求输出的过程是一个递归过程。

例如：n阶线性常系数差分方程就是递归方程

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

$$a_0 y[n] + \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right\} \quad \text{——是递归方程}_{06}$$

## 2、非递归方程

当上述方程的 $N=0$ 时，得  $y[n] = \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} x[n-k]$

这时 $y[n]$ 是以前的输入值和当前输入值的显函数。没有递归地利用前面计算出来的输出值来计算当前的输出值。——所以称**非递归方程**

## 3、非递归差分方程的一般形式：

$$y[n] = \sum_{k=-N}^M b_k x[n-k]$$

该方程可理解为：

- $y[n]$  是  $x[n-M]$  到  $x[n+N]$  的  $(N+M+1)$  个值的加权平均，其加权系数为  $b_k$ 。——导出了移动平均滤波器

$$y[n] = \frac{1}{N+M+1} \sum_{k=-N}^M x[n-k]$$

相应的单位脉冲响应是一个矩形脉冲，即当  $x[n-k] = \delta[n-k]$  时，可得

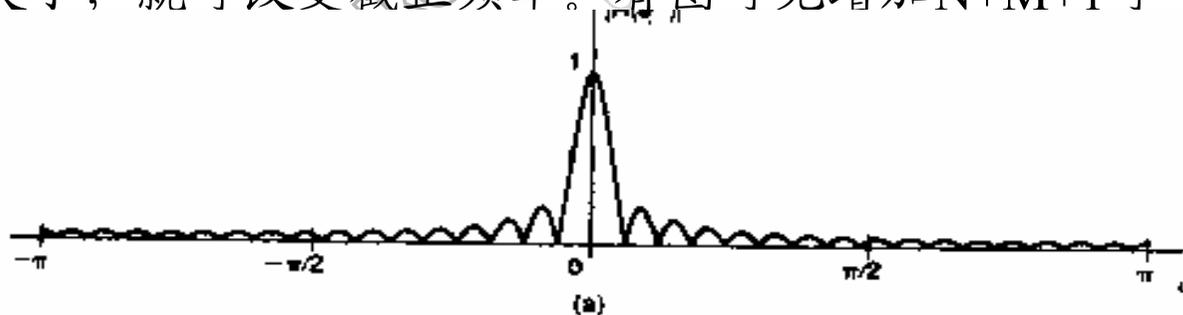
$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{N+M+1} & -N \leq n \leq M \\ 0 & \text{其余}n \end{cases}$$

该滤波器的频率响应为:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} = \frac{1}{N+M+1} \sum_{n=-N}^M e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{1}{N+M+1} e^{j\omega[(N-M)/2]} \frac{\sin[\omega(M+N+1)/2]}{\sin(\omega/2)}$$

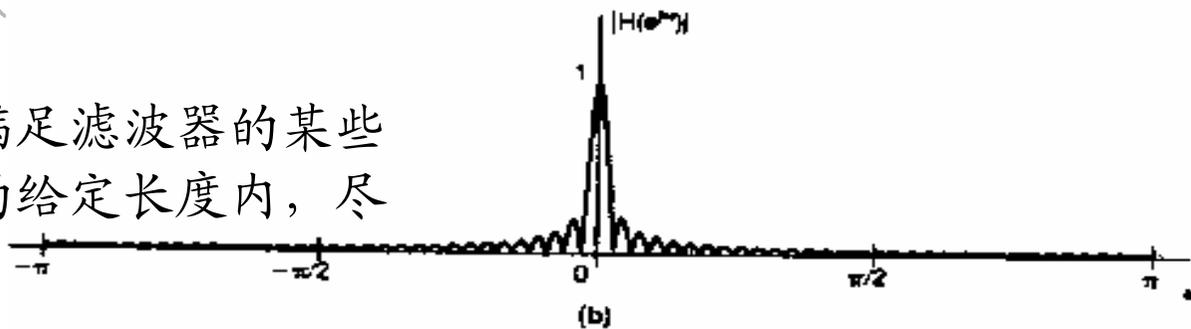
利用调节平均窗口  $N+M+1$  的大小, 就可改变截止频率。有图可见增加  $N+M+1$  可提高选择性, 但增加计算量。



但注意: 这里加权系数为同一值, 即

$$\frac{1}{N+M+1}$$

有很多方法来选择  $b_k$  以满足滤波器的某些特性要求。例如在滤波器的给定长度内, 尽可能锐化过渡带。



说明如下:

图 3.36 (3.162)式低通移动平均滤波器频率响应的模特性:(a)  $M=N=16$ ;(b)  $M=N=32$

现考虑一个 $N = M = 16$ 的形如下式的滤波器，

$$y[n] = \sum_{k=-N}^M b_k x[n-k]$$

其系数选为

$$b_k = \begin{cases} \frac{\sin(2\pi k / 33)}{\pi k}, & |k| \leq 32 \\ 0, & |k| \geq 32 \end{cases}$$

该滤波器的单位脉冲响应为

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\sin(2\pi n / 33)}{\pi n}, & |n| \leq 32 \\ 0, & |n| \geq 32 \end{cases}$$

$h[n]$ 相当于把截止频率为 $\omega_c = 2\pi/33$ 的理想低通滤波器的单位脉冲响应在 $|n| > 32$ 时截断的结果。一般来说， $b_k$ 可调整到使截止频率处于所要求的频率上。

再来看下式

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\sin(2\pi n / 33)}{\pi n}, & |n| \leq 32 \\ 0, & |n| \geq 32 \end{cases}$$

可见 $h[n]$ 是实的、且为偶序列，即它的频率响应具有零相位。但这样的滤波器是非因果。

因为 $h[n]$ 是以原点为中心的某一范围外为零因此可将 $h[n]$ 作 $N$ 位延迟而得到一个非递归的LTI系统。即  $h_1[n] = h[n - N]$  ——这时为因果的。

依据时移性质，该系统的频率相应为：

$$H_1[e^{j\omega}] = H(e^{j\omega})e^{-j\omega N}$$

# 第七章

# 采 样

免费下载研究资料  
www.freeyuan.com  
yueshen22

6.13 解:  $20\lg|H(j\omega)| = 6 - 20\lg\left|\frac{j\omega}{2} + 1\right| - 20\lg\left|\frac{j\omega}{80} + 1\right|$

$$H(j\omega) = \frac{A}{\left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{80}\right)}$$

若  $s_1 \rightarrow H_1(j\omega)$        $s_2 \rightarrow H_2(j\omega)$

$$\therefore H_1(j\omega) = \frac{M}{1 + \frac{j\omega}{2}}$$

$$H_2(j\omega) = \frac{N}{1 + \frac{j\omega}{80}}$$

若为级联:  $H_1(j\omega)H_2(j\omega) = H(j\omega)$

$$MN = A \quad \text{—— } M, N \text{ 不能唯一确定}$$

则  $S_1, S_2$  —— 的频率响应不能唯一确定

若为并联:  $H(j\omega) = \frac{M}{1 + \frac{j\omega}{2}} + \frac{N}{1 + \frac{j\omega}{80}} \quad \text{—— } M, N \text{ 可唯一确定}$

题6.14 解：因为二阶系统的频率响应为：
$$H(j\omega) = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + j2\zeta\omega/\omega_n}$$

假设  $\zeta = 1$ ，并认为波特图由二阶和一阶系统组成。则由图可得：

$$20\log_{10}|H(j\omega)| = 12 + 20\log\left|1 + j\frac{\omega}{0.2}\right|^2 - 20\log\left|1 + j\frac{\omega}{10}\right| - 20\log\left|1 + j\frac{\omega}{50}\right|$$

即：
$$H(j\omega) = \frac{4(1 + j\omega/0.2)^2}{(1 + j\omega/10)(1 + j\omega/50)}$$

$$\because h(t) * h_r(t) = \delta(t) \xrightarrow{F} H(j\omega)H_r(j\omega) = 1$$

得：
$$H_r(j\omega) = \frac{1}{H(j\omega)}$$

$$\begin{aligned} \therefore H_r(j\omega) &= \frac{(1 + j\omega/10)(1 + j\omega/50)}{4(1 + j\omega/0.2)^2} = \frac{1}{500} \frac{(10 + j\omega)(50 + j\omega)}{(4/0.04)(0.2 + j\omega)^2} \\ &= 0.2 \times 10^{-4} \frac{(10 + j\omega)(50 + j\omega)}{(0.2 + j\omega)^2} \end{aligned}$$

6.19解:

$$u_R = CR \frac{dy(t)}{dt}$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = CL \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

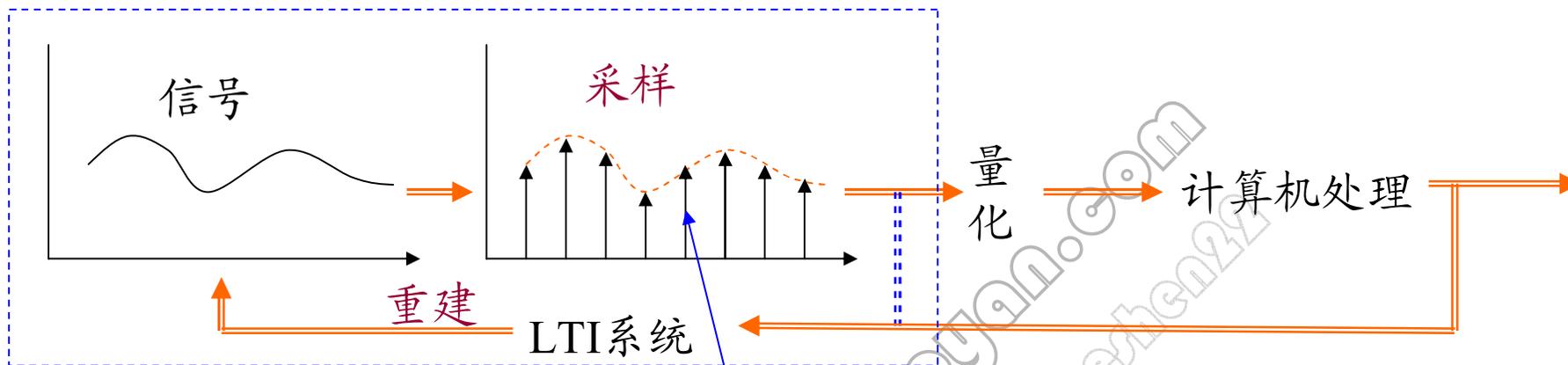
$$\therefore CL \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + CR \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{CL} y(t) = \frac{1}{CL} x(t)$$

$$\frac{R}{L} = 2\zeta\omega_i \quad \omega_i = \sqrt{\frac{1}{CL}}$$

$$\zeta = \frac{R}{2\omega_i L} = \frac{R}{2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

为使系统阶跃响应不振荡,则  $\zeta = \frac{R}{2\sqrt{\frac{L}{C}}} \geq 1$  , 即  $R \geq 2\sqrt{\frac{L}{C}}$



## 7.0 引言

本章1、首先介绍建立采样的概念和从样本值重建一个连续时间信号的过程；

2、接着研究对由采样得到的离散时间信号的处理；

3、最后讨论离散时间信号的采样，以及有关抽取和内插的概念。

### 7.1 用信号样本表示连续时间信号：采样定理

一个连续时间信号 $x(t)$ 经过采样后成为由样本组成的离散时间信号。

但因为由同一组等间隔样本可以生成无穷多个连续时间信号。例如图7.1是三个不同的连续信号,在 $T$ 的整数倍时刻点上有相同的值。即

$$x_1(kT) = x_2(kT) = x_3(kT)$$

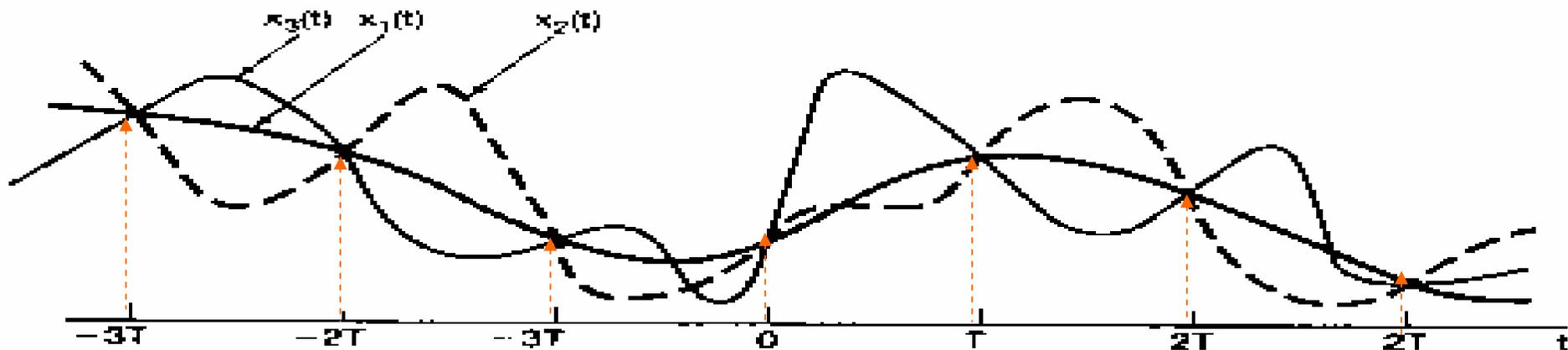
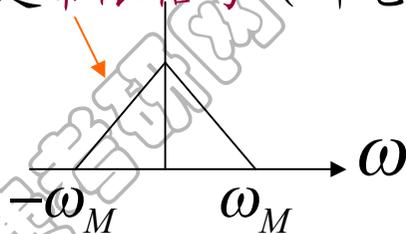


图 7.1 在  $T$  的整数倍时刻点上具有相同值的三个连续时间信号

因此，这些样本值不能表征原信号

这意味着**采样必须满足一定的条件**，信号才能唯一地用它的等间隔离散时间样本来表征。这个**一定的条件**指：

- 1、要求被采样的信号是**带限信号**（即它的傅立叶变换在某一有限频带范围以外均为零）。



- 2、样本取得足够密（相对于信号中的最高频率）——  $\omega_s > 2\omega_M$  。

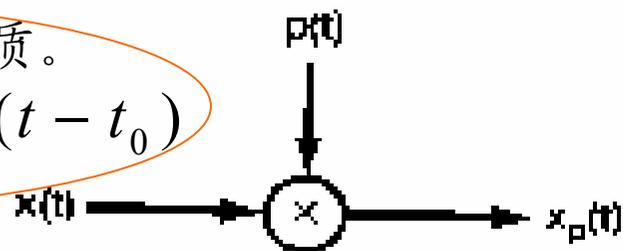
下面来看采样过程

### 7.1.1 冲激串采样

利用冲激函数的采样性质。

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$x(t)$  —— 连续时间信号



$p(t)$  —— 周期冲激串，称采样函数  $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$

$T$  —— 称采样周期，

$\omega_s$  —— 称采样频率（是  $p(t)$  的基

波频率， $\omega_s = 2\pi / T$ ）

在时域中有  $x_p(t) = x(t)p(t)$

其中  $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$

即  $x_p(t) = x(t)p(t)$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

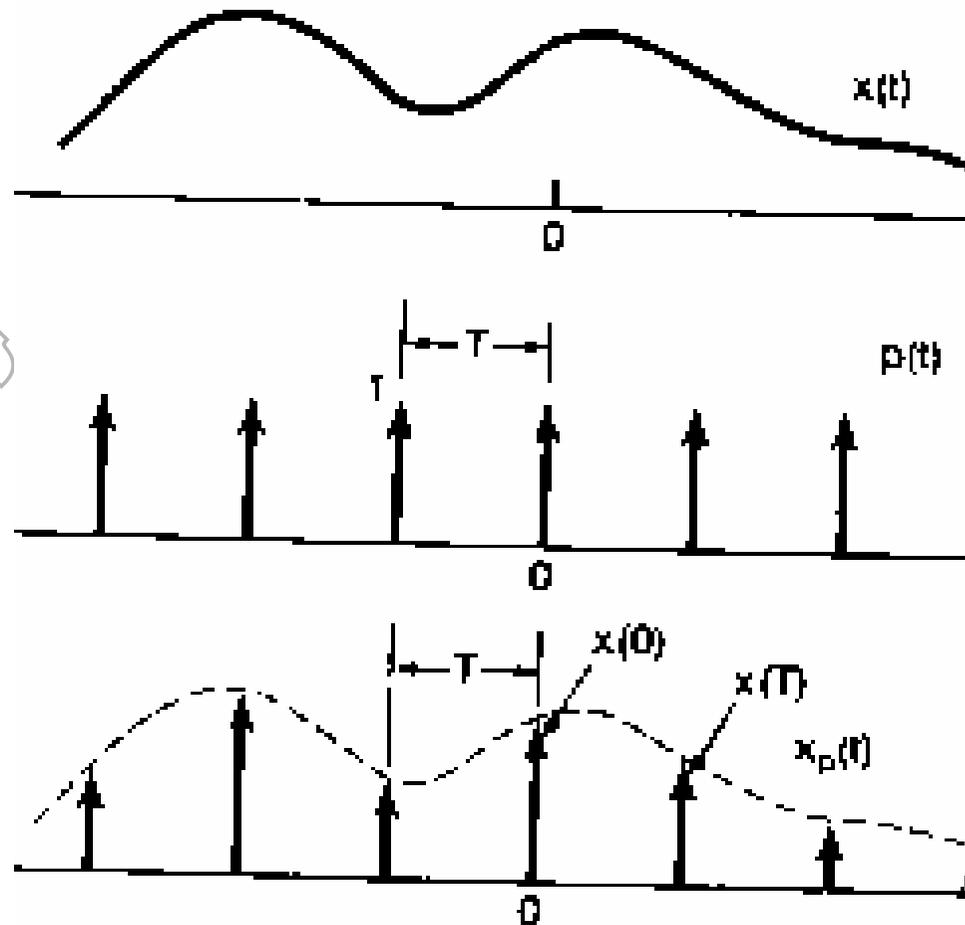


图 7.2 冲激串采样

从频域看：由相乘性质可知，时域相乘对应频域卷积。所以得

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [X(j\omega) * P(j\omega)]$$

$$\because p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_s t}$$

周期信号的傅立叶级数与傅立叶变换

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_s t} dt = \frac{1}{T} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\omega_s t}$$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

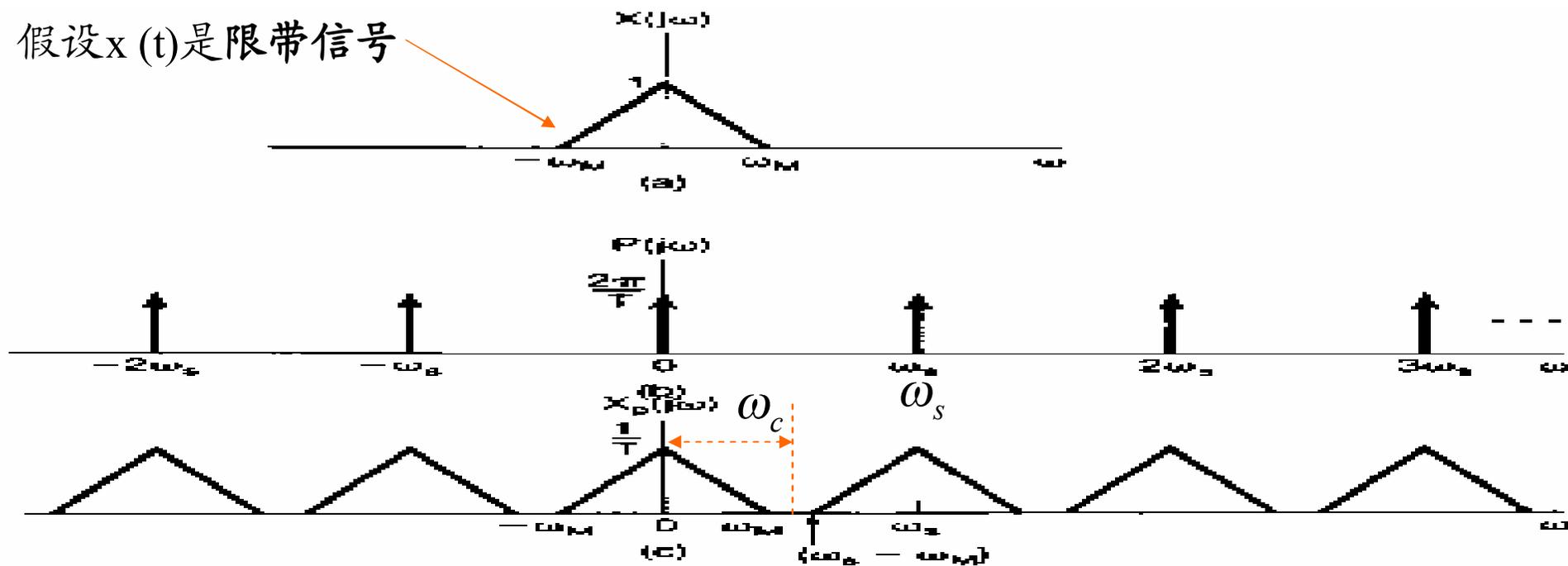
$$\because e^{jk\omega_s t} \xleftrightarrow{F} 2\pi \delta(\omega - k\omega_s)$$

$$\because p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\omega_s t} \xleftrightarrow{F} P(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

$$\because X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [X(j\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)]$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) \quad \text{—— 周期为 } \omega_s \quad 518$$

假设  $x(t)$  是限带信号



将各信号的频谱分别画在图7.3中。图中假设  $x(t)$  是限带信号。

1、当  $\omega_s - \omega_M > \omega_M$  (即  $\omega_s > 2\omega_M$ ) 时，频谱之间，没有重叠现象出现。也就是说， $X_p(j\omega)$  在  $k\omega_s$  频率点上精确重现原信号的频谱，仅在幅度上有  $1/T$  变化。因此，可用一个低通滤波器，把信号  $x(t)$  从  $X_p(j\omega)$  中恢复出来

(要求低通滤波器的截止频率满足  $\omega_M < \omega_c < (\omega_s - \omega_M)$ ，且增益为  $T$ 。如

图7.4所示。一般  $\omega_c$  取值为：
$$\omega_c = \frac{\omega_s}{2}$$

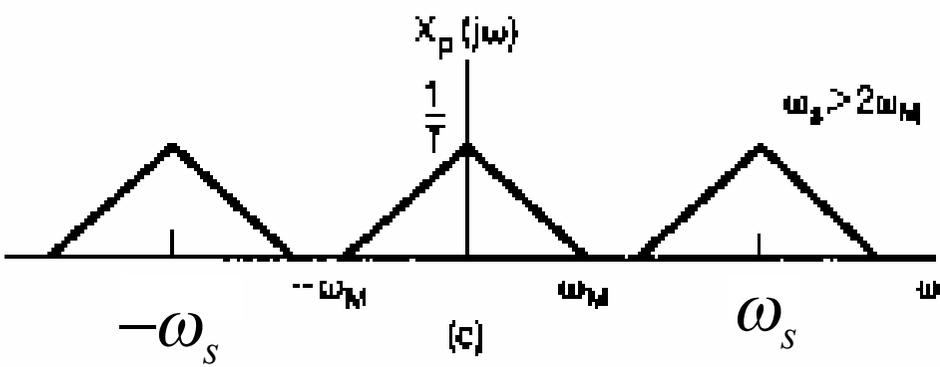
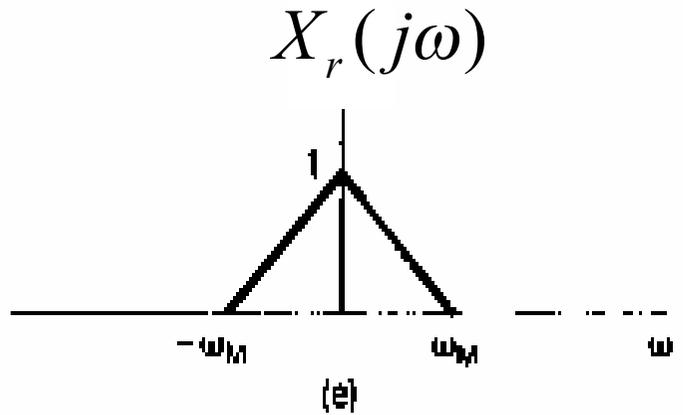
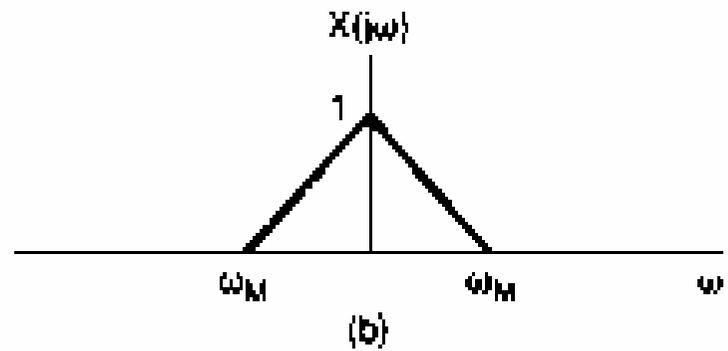
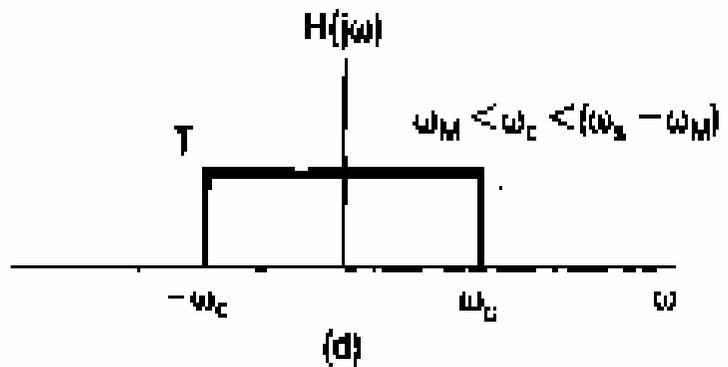
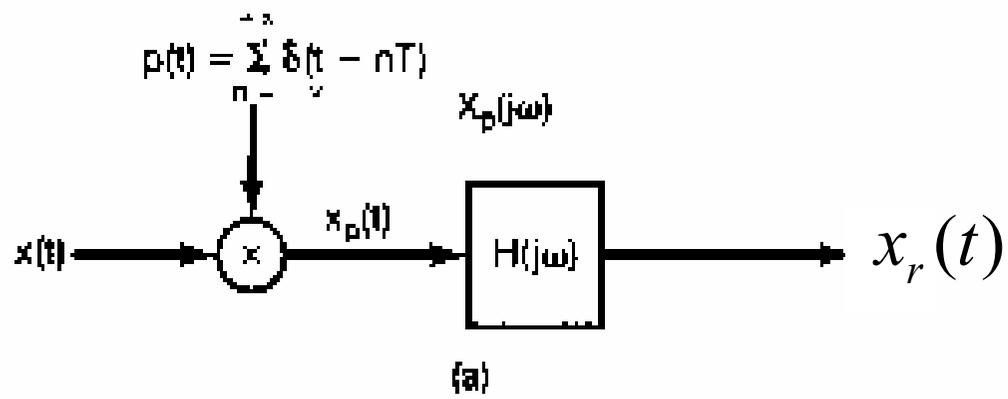


图 7.4 利用一个理想低通滤波器从信号的样本中完全恢复一个连续时间信号；

- (a) 采样与恢复系统；
- (b)  $x(t)$  的频谱；
- (c)  $x_p(t)$  的频谱；
- (d) 用于从  $X_p(j\omega)$  恢复  $X(j\omega)$  的理想低通滤波器；
- (e)  $x_r(t)$  的频谱

2、当  $\omega_s - \omega_M < \omega_M$ ，即  $\omega_s < 2\omega_M$  时， $X_p(j\omega)$  中各移位  $X(j\omega)$  之间存在重叠，这种现象称为**频谱的褶皱**。由于这种褶皱， $X(j\omega)$  在  $|\omega| > \frac{\omega_s}{2}$  部分的高频成分将叠加到  $X_p(j\omega)$  的  $|\omega| \leq \frac{\omega_s}{2}$  那部分上去。**出现假频现象**，导致不能恢复原信号。

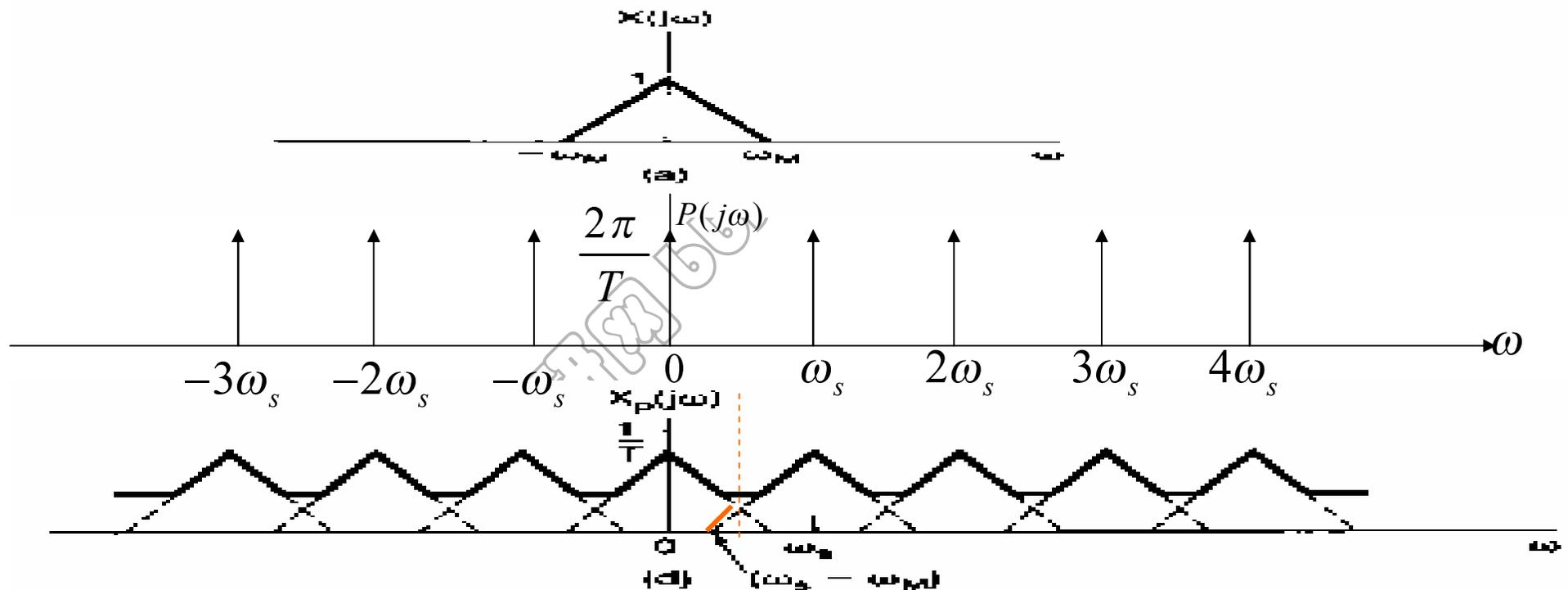


图 7.3 时域采样在频域中的效果：

(a)原始信号频谱；(b)采样函数的频谱；

(c)  $\omega_s > 2\omega_M$  时已采样信号的频谱；(d)  $\omega_s < 2\omega_M$  时已采样信号的频谱

至次，采样定理可叙述如下：

### 采样定理：

设  $x(t)$  是某一个带限信号，在  $|\omega| > \omega_M$  时， $X(j\omega) = 0$ 。如果  $\omega_s > 2\omega_M$  (其中  $\omega_s = 2\pi / T$ )，那么  $x(t)$  就唯一地由其样本  $x(nT)$ ， $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  所确定。已知这些样本值，我们能如下办法重建  $x(t)$ ：

产生一个周期冲激串，其冲激幅度就是这些依此而来的样本值；然后将该冲激串通过一个增益为  $T$ ，截止频率  $\omega_c$  为： $\omega_M < \omega_c < (\omega_s - \omega_M)$  的理想低通滤波器，该滤波器的输出就是  $x(t)$ 。

在采样定理中，采样频率必须大于  $2\omega_M$ ，该频率  $2\omega_M$  称为奈奎斯特率。

1/2奈奎斯特率的频率  $\omega_M$ ，称为奈奎斯特频率

可见,若已知奈奎斯特率,就等于告诉了  $\omega_M$

## 7.1.2 零阶保持采样

冲激串采样的数学模型其重要意义是在理论上建立采样定理,但在实际工程应用中是无法实现的。在实际工程应用中,往往采用零阶保持的方法来获取采样信号。如图7.5所示。



图 7.5 利用零阶保持采样

### 1、采样过程

在该系统中,某一个给定瞬时对信号采样,并保持这一样本值直到下一个样本被采到为止。如在信号的保持期间,对采样值进行量化,就可以获得  $x(t)$  的数字信号。

### 2、重建 $x(t)$

由一个零阶保持系统的输出来重建  $x(t)$  虽然仍可以用低通滤波的办法来实现。但在这一情况下,所要求的滤波特性不再是在通带内具有恒定的增益。

下面来求所要求的滤波器特性:

1、首先将这个零阶保持的输出  $x_0(t)$  在原理上看作是用冲激串采样, 再紧跟着一个LTI系统得到的。即

$$\because x_p(t) = x(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

$$\therefore x_0(t) = x_p(t) * h_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) * h_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h_0(t-nT)$$

2、为了由  $x_0(t)$  重建  $x(t)$ , 考虑用一个单位冲激响应为  $h_r(t)$  (频率响应为  $H_r(j\omega)$ ) 的LTI系统来处理  $x_0(t)$ 。

该系统结构如图7.7所示。如果  $h_0(t)$  和  $h_r(t)$  级联后的特性是一个理想低通滤波器的特性, 则得  $r(t) = x(t)$ 。

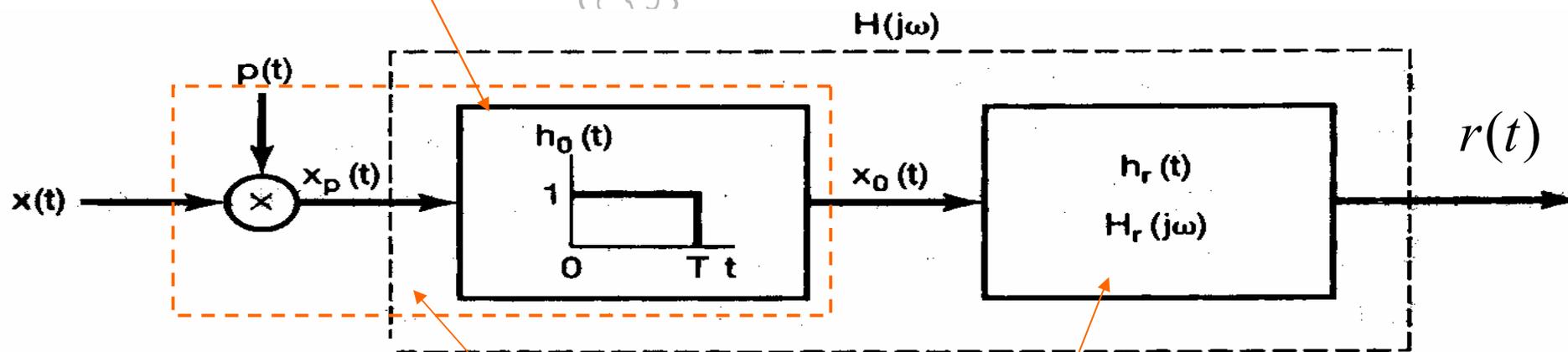
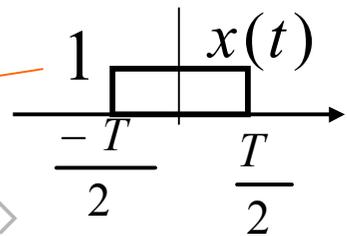


图 7.7 零阶保持(图 7.6)与一个重建滤波器的级联

图中  $h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$

$$X(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t} dt = 2 \frac{\sin \omega T / 2}{\omega}$$



右移 T/2

可得  $H_0(j\omega) = e^{-j\omega T/2} \left[ \frac{2 \sin(\omega T / 2)}{\omega} \right]$

因为  $H(j\omega) = H_0(j\omega) H_r(j\omega)$

所以要求  $H_r(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{H_0(j\omega)} = \frac{e^{j\omega T/2} H(j\omega)}{2 \sin(\omega T / 2)}$

若  $H(j\omega)$  的截止频率等于  $\omega_s/2$  则重建滤波器的理想模和相位特性如图 7.8 所示。

**注意：**实际上，上式的频率响应是不可能真正实现的，因此必须对它作一个充分近似的设计。

在很多情况下，零阶保持输出本身就被认为是一种对原始信号的充分近似，因而用不着附加任何低通滤波器。并且在实质上，它实现了**样本之间的内插**。<sup>525</sup>

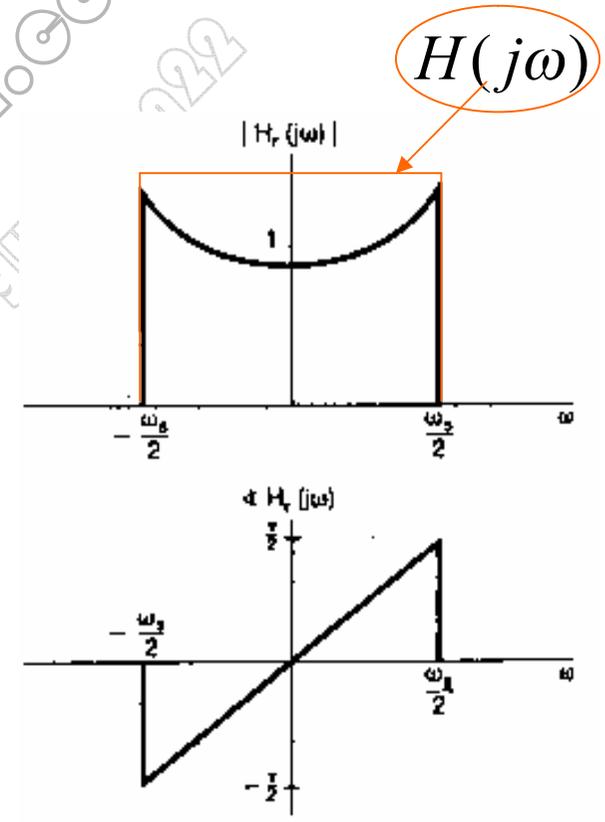


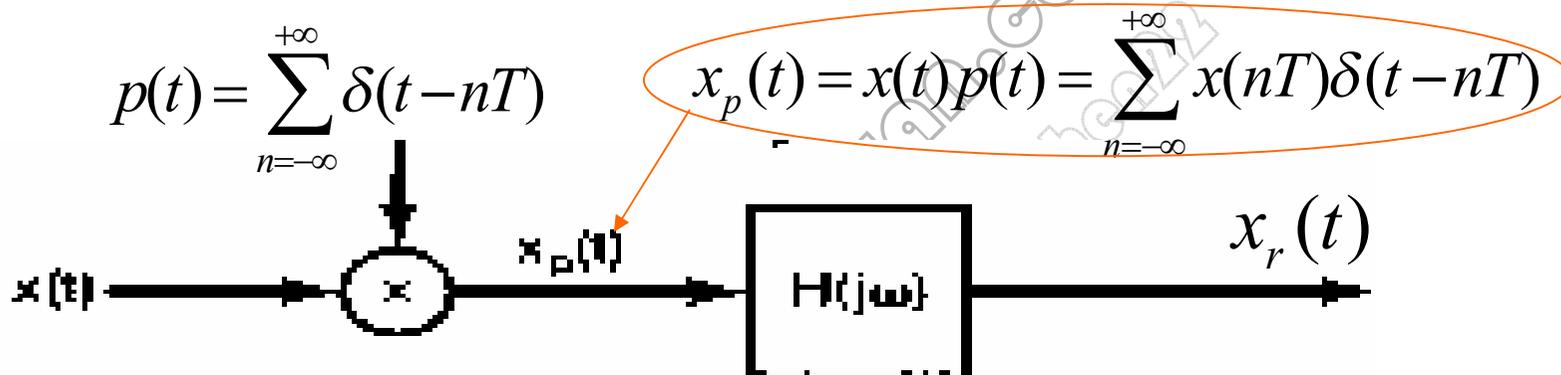
图 7.8 为零阶保持采样重建信号的重建滤波器的模和相位特性

## 7.2 利用内插由样本重建信号

内插——就是用一连续信号对一组样本值的**拟合**。例如



1、带限内插——利用理想低通滤波器的单位冲激响应的内插通常称为**带限内插**。



在上节，我们已经看到：一个带限信号，如果采样足够密的话，那么信号就能完全被恢复。

上图为冲激串采样的采样与恢复系统。图中  $H(j\omega)$  为一低通滤波器。设该低通滤波器的单位冲激响应为  $h(t)$ ；系统的输出为  $x_r(t)$ ，这样可得

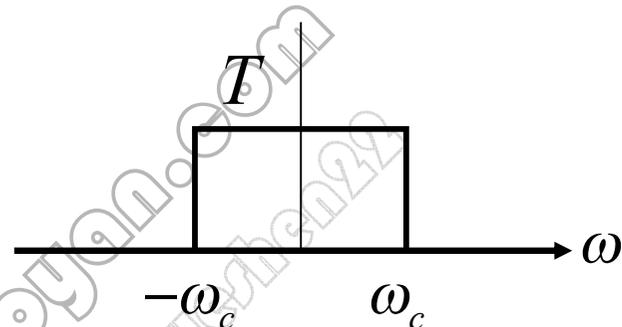
$$x_r(t) = x_p(t) * h(t) = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) \right) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t-nT)$$

上式表明  $x_r(t)$  是由  $h(t)$  的移位信号  $h(t-nT)$  的线性组合来重建信号，

而线性组合中的**系数为信号的样值序列**。因此上式为**重建信号的内插公式**

- 当  $h(t)$  为理想滤波器的冲激响应时，则

$$H(j\omega) = \begin{cases} T & , |\omega| < \omega_c \\ 0 & , |\omega| > \omega_c \end{cases}$$



得

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} T e^{j\omega t} d\omega = T \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} = \frac{\omega_c T}{\pi} \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t}$$

因为

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT)$$

所以可得

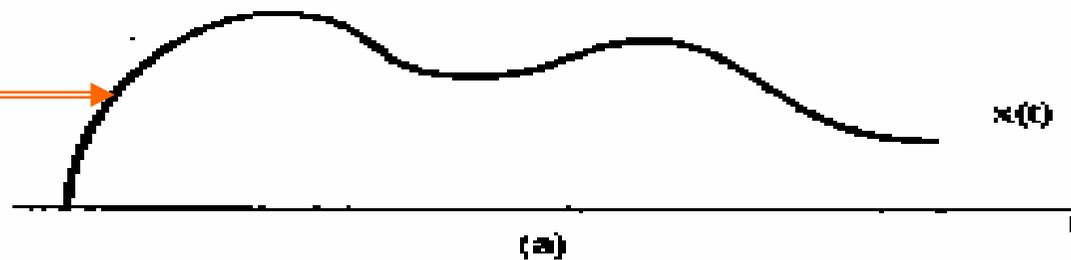
$$x_r(t) = x_p(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\omega_c T}{\pi} \frac{\sin(\omega_c(t - nT))}{\omega_c(t - nT)} \quad (7.11)$$

设带限信号的最高频率为  $\omega_M$ ，当  $\omega_c$  满足  $\omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M$  时，(7.11) 式重建是精确的。通常将该重建方法称为带限内插。

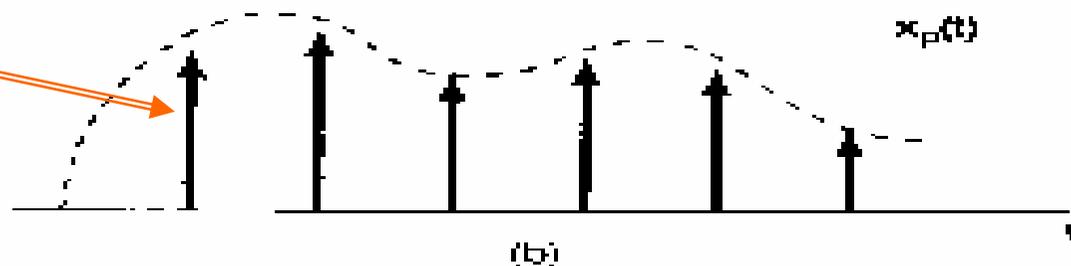
图7.10表示了按(7.11)式，在  $\omega_c = \omega_s / 2$  时的重建过程。

sinc函数

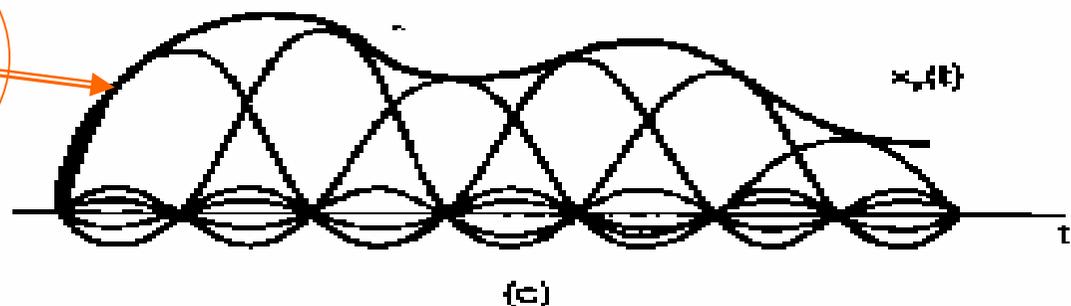
图 (a) 为原始信号



样本冲激串



用 (7.11) 式的  
 $\text{sinc}$  函数的叠加  
取代冲激串的理想带限内插



这种内插,只要  $x(t)$  是带限的,而且  
采样频率又满足要求,就能实现信  
号的真正重建。

图 7.10 利用  $\text{sinc}$  函数的理想带限内插:  
(a) 带限信号  $x(t)$  ;  
(b)  $x(t)$  的样本冲激串  
(c) 用 (7.11) 式的  $\text{sinc}$  函数的叠加  
取代冲激串的理想带限内插

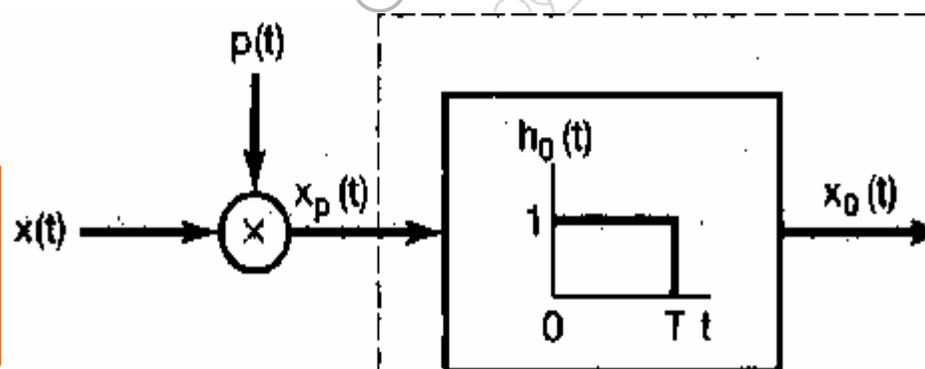
## 2、零阶保持

在零阶保持采样中，已经提到：零阶保持的输出在原理上可以用冲激串采样，再紧跟一个LTI系统（具有矩形的单位冲激响应  $h_0(t)$ ）来得到。如下图所示。

这时内插函数就是  $h_0(t)$ ，

它的傅里叶变换为：

$$H_0(j\omega) = e^{-j\omega T/2} \left[ \frac{2 \sin(\omega T / 2)}{\omega} \right]$$



可得图7.11。从图可见，零阶保持的频率特性在零频附近（或信号有效频带内）与理想内插滤波器的频率特性很接近。这时可通过一个非理想的低通滤波器（例如RC滤波器），就能得到满意的重建信号。

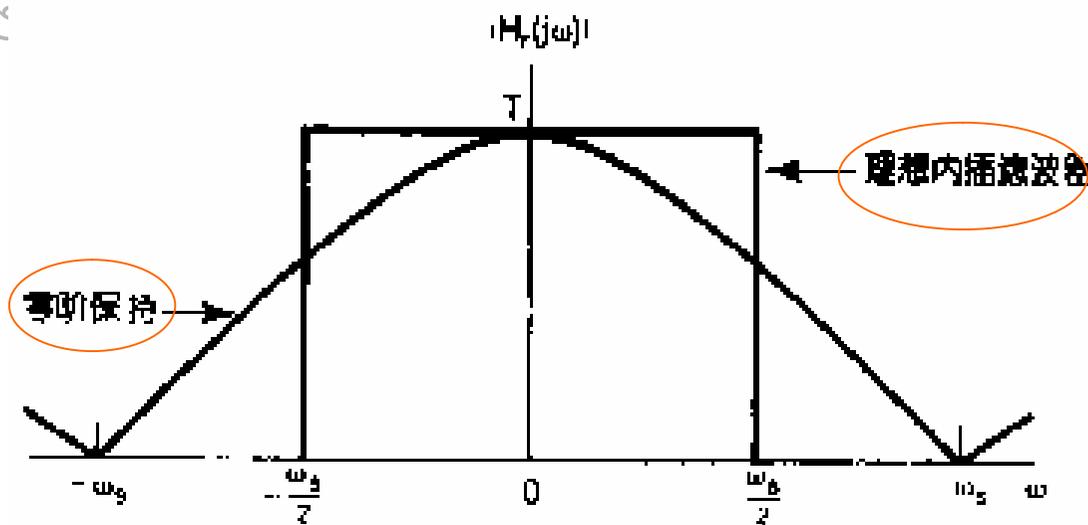


图 7.11 零阶保持和理想内插滤波器的传输函数

### 3、一阶保持

如果对零阶保持所给出的粗糙内插不够满意，可以通过选择  $h(t)$  使用其它各种平滑的内插手段。

当  $h(t)$  为三角形特性时，可求得称为一阶保持（或称线性内插）的重建信号。

$$h(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{T}|t|, & |t| < T \\ 0, & |t| \geq T \end{cases}$$

所以，可求得传输函数为

$$H(j\omega) = \frac{1}{T} \left[ \frac{\sin(\omega T / 2)}{\omega / 2} \right]^2$$

见图7.13

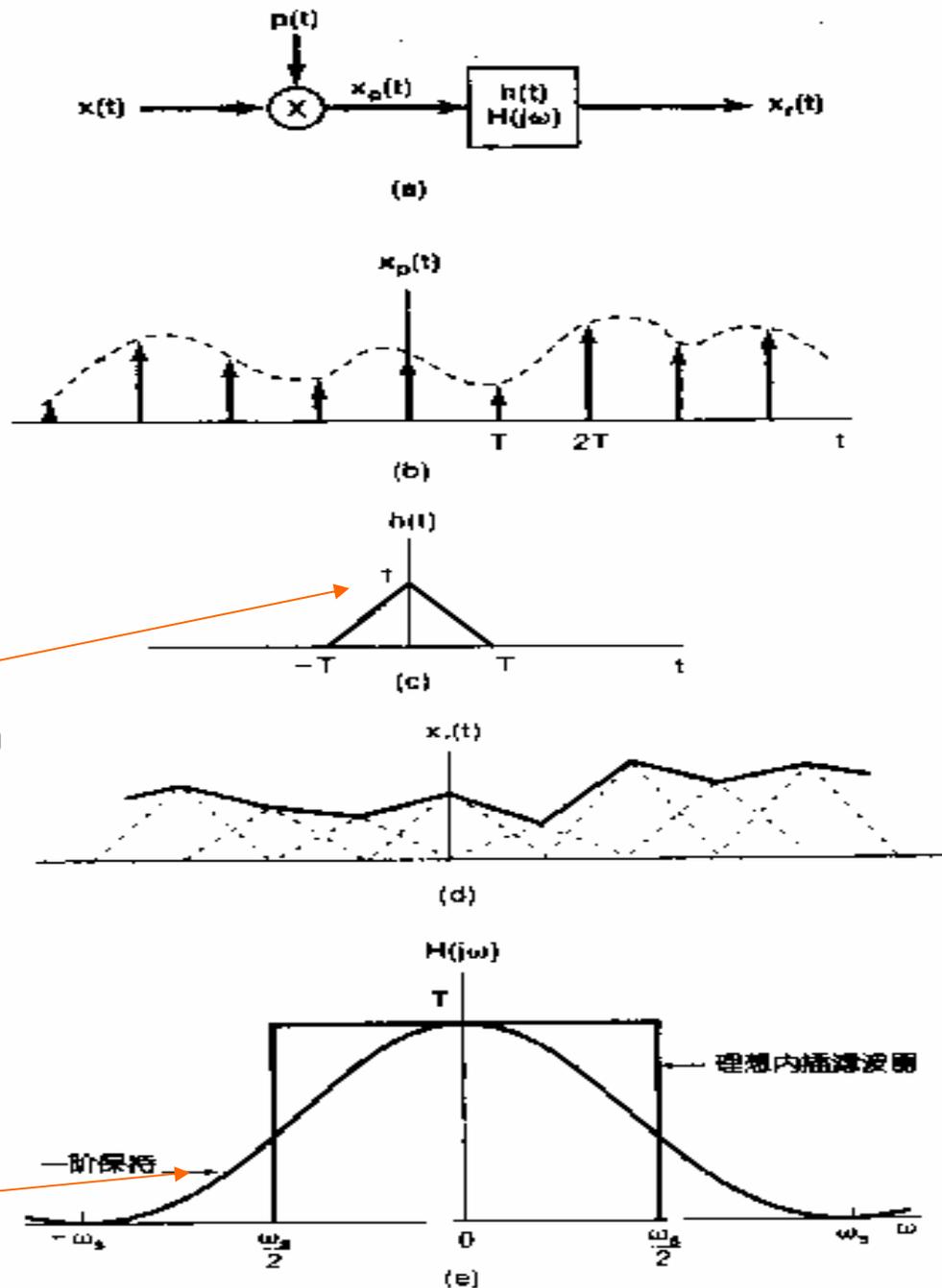
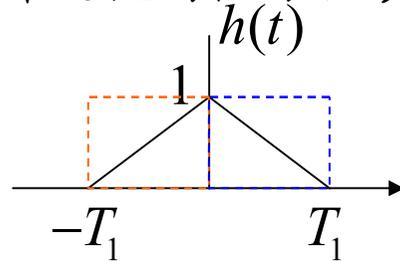


图 7.13 把线性内插(一阶保持)看作冲激串采样与三角形冲激响应特性卷积的结果:

说明：此传输函数可利用傅里叶变换的微分性质来得到。具体推导过程如下：



$$h(t) = \left(1 + \frac{1}{T}t\right)[u(t+T) - u(t)] + \left(1 - \frac{1}{T}t\right)[u(t) - u(t-T)]$$

$$\begin{aligned} \frac{dh(t)}{dt} &= \frac{1}{T}[u(t+T) - u(t)] + \left(1 + \frac{1}{T}t\right)[\delta(t+T) - \delta(t)] \\ &\quad - \frac{1}{T}[u(t) - u(t-T)] + \left(1 - \frac{1}{T}t\right)[\delta(t) - \delta(t-T)] \\ &= \frac{1}{T}[u(t+T) - u(t)] - \frac{1}{T}[u(t) - u(t-T)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2h(t)}{dt^2} &= \frac{1}{T}[\delta(t+T) - \delta(t)] - \frac{1}{T}[\delta(t) - \delta(t-T)] \\ &= \frac{1}{T}[\delta(t+T) + \delta(t-T) - 2\delta(t)] \end{aligned}$$

令

$$h(t) \xleftrightarrow{F} H(j\omega) \quad \delta(t-T) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega T}$$

则

$$\frac{d^2 h(t)}{dt^2} \xleftrightarrow{F} (j\omega)^2 H(j\omega) = \frac{1}{T} (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T} - 2)$$

$$= \frac{2}{T} [\cos(\omega T) - 1] = -\frac{2}{T} [1 - \cos(\omega T)]$$

$$= -\frac{4}{T} \sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

得

$$(j\omega)^2 H(j\omega) = -\frac{4}{T} \sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{T} \left[ \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2} \right]^2$$

倍角公式:  
 $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$   
 $2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$

# 证毕

### 7.3 欠采样的效果:混叠现象

对带限信号采样时,如不满足采样定理(即 $\omega_s < 2\omega_M$ ),此时在频域上将发生频谱重叠,通常把这种现象称为欠采样。此时可能无法从 $x_p(t)$ 的频谱中不失真地分离出 $X(j\omega)$ (即不能把 $x(t)$ 从采样信号中恢复出来)。这一现象称为混叠。

但可以证明,此时只要 $\omega_c = \omega_s / 2$ ,则经过带限内插所恢复的 $x_r(t)$ 在 $t = kT$ 点上将等于 $x(t)$ 。

因为 
$$x_r(t) = x_p(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\omega_c T \sin(\omega_c(t-nT))}{\pi \omega_c(t-nT)}$$

当 $t = kT$ 时,得:

$$\begin{aligned} x_r(kT) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\omega_c T \sin(\omega_c(kT-nT))}{\pi \omega_c(kT-nT)} && \because \omega_s = 2\pi / T \\ & && \omega_c = \omega_s / 2 = \pi / T \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(kT-nT)\right)}{\frac{\pi}{T}(kT-nT)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin(\pi k - n\pi)}{(k\pi - n\pi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \end{aligned}$$

$$\frac{\sin(k\pi - n\pi)}{(k\pi - n\pi)} = \begin{cases} 1 & , k = n \\ 0 & , k \neq n \end{cases}$$

为了更清楚地了解:由于欠采样导致频谱混叠对信号恢复的影响。下面来看一个例子: 设  $x(t) = \cos \omega_0 t$   $\because \cos \omega_0 t \xleftrightarrow{F} \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$

这信号的频谱如图7.15所示, 虚框是低通滤波器的通带 ( $\omega_c = \omega_s / 2$ )。

1、在图(b)、(c)中,

$$\omega_0 = \frac{\omega_s}{6}, \quad \omega_0 = \frac{2\omega_s}{6}$$

即  $\omega_0 < \omega_s / 2$ , 因此没有混叠。

经低通滤波器后的输出为

$$x_r(t) = \cos \omega_0 t = x(t)$$

2、在图(d)、(e)中,

$$\omega_0 = \frac{4\omega_s}{6}, \quad \omega_0 = \frac{5\omega_s}{6}$$

即  $\omega_0 > \omega_s / 2$  因此产生混叠。

经低通滤波器后的输出为

$$x_r(t) = \cos(\omega_s - \omega_0)t \neq x(t)$$

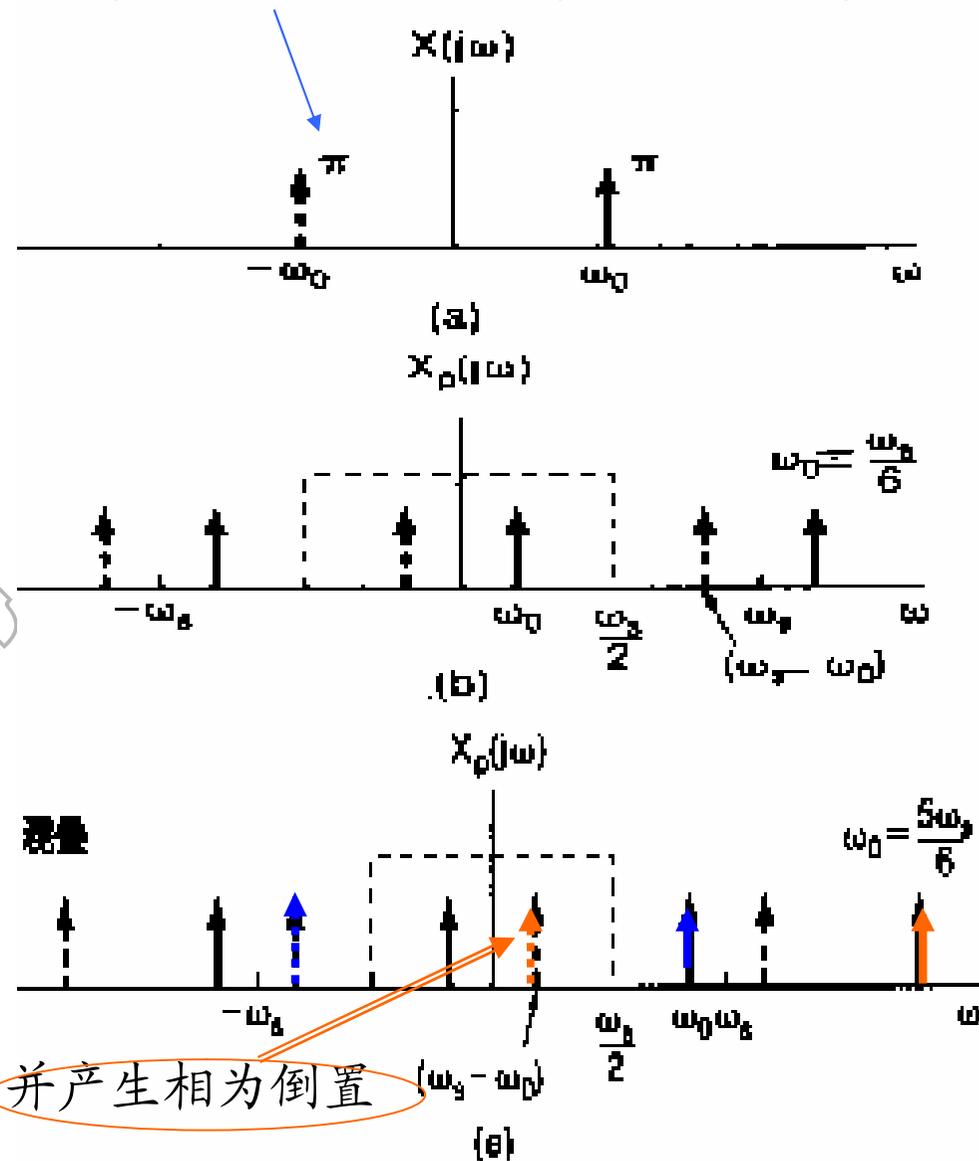


图 7.15 过采样和欠采样在频域中的效果:

当混叠现象发生时，原始频率 $\omega_0$ 就被混叠成一个较低的频率 $(\omega_s - \omega_0)$ 。

- 1、当  $\omega_s / 2 < \omega_0 < \omega_s$  时，随着 $\omega_0$  相对于 $\omega_s$  的增加输出频率 $(\omega_s - \omega_0)$ 就下降。
- 2、当  $\omega_s = \omega_0$  时，被重建的信号就**是一个常数**。这一点是与如下事实相一致的：即每一个周期只采样一次时，这些样本值都是相等的。

当  $\omega_0 = \omega_s$  时， $x_r(t) = \cos(\omega_s - \omega_0)t = 1$

见P383 图7.16 实线为原始信号，虚线为重建信号。

## 7.4 连续时间信号的离散时间处理

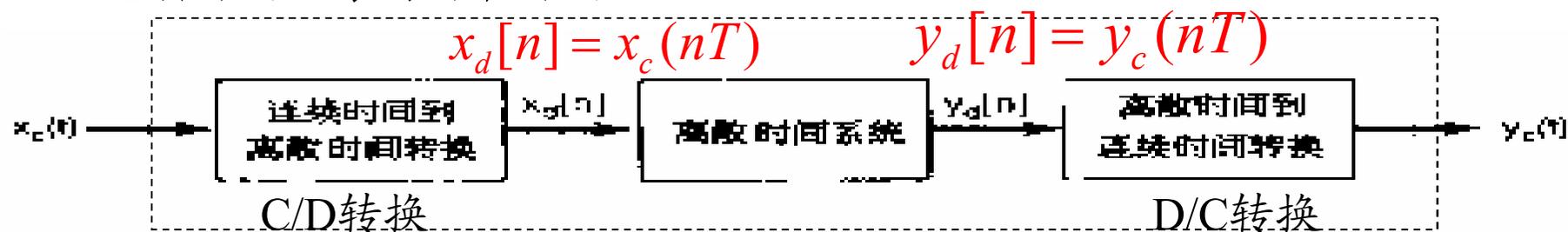


图 7.19 连续时间信号的离散时间处理

把一个连续时间信号转换为一个离散时间信号,然后进行处理,处理完后再把它转换为连续时间信号。——仍然是一个连续时间系统。

- 这种处理方式的**优点**是:可借助于微处理机、DSP等进行处理。
- 这样做的**理论基础**:是**采样定理**。

通过采样,一个连续时间信号  $x_c(t)$  可用一串瞬时样本值  $x_c(nT)$  来表示。离散时间序列  $x_d[n]$  以下式与  $x_c(t)$  相联系。离散时间信号  $y_d[n]$  以下式关联

$$x_d[n] = x_c(nT)$$

$$y_d[n] = y_c(nT)$$

C/D转换可看成是由**冲激串采样**和**从冲激串到离散时间序列的转换**这两部分组成。见图7.21

从时域角度看

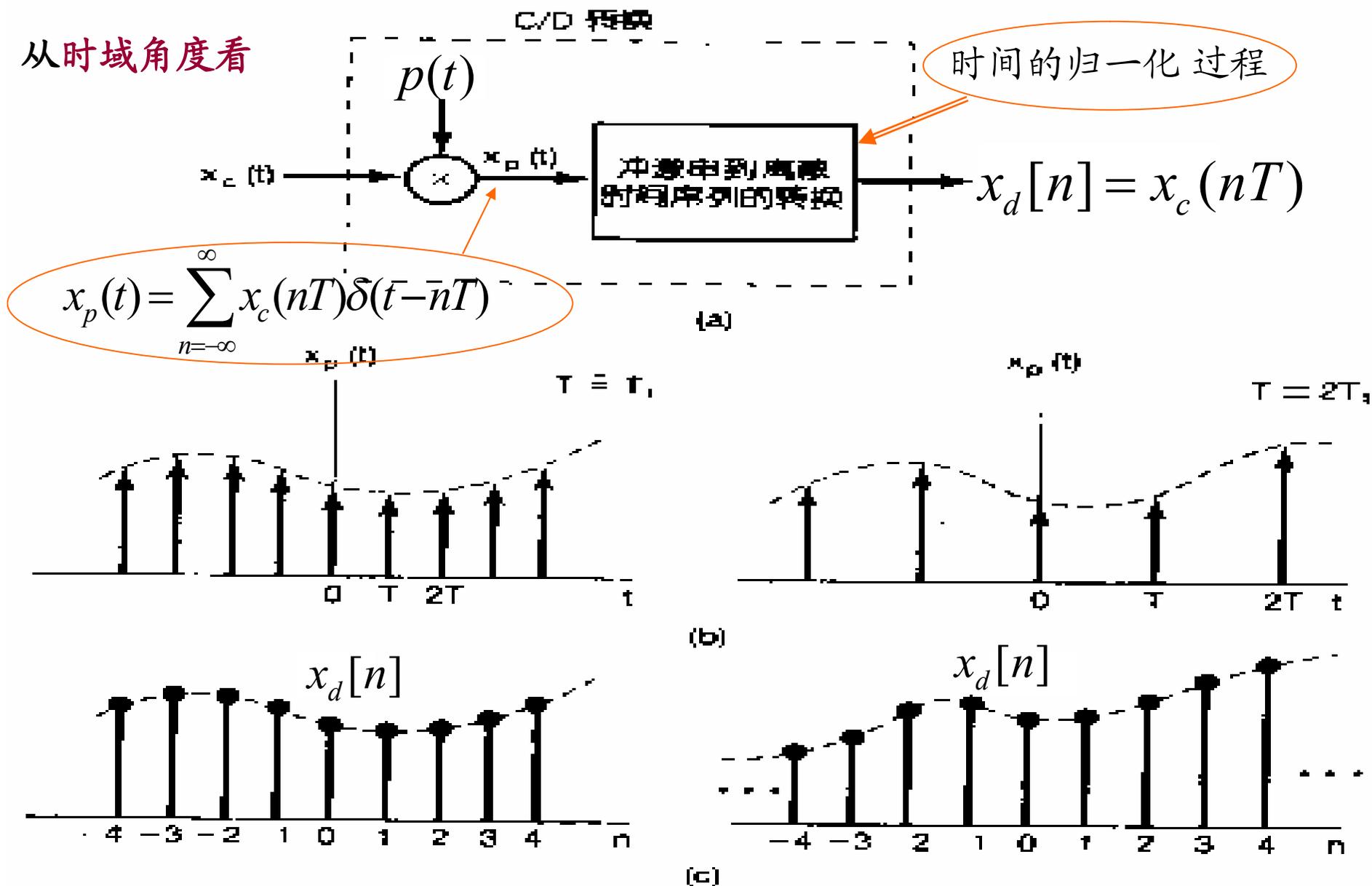


图 7.21 用一个周期冲激串采样,再跟着一个到离散时间序列的转换:  
 (a) 整个系统; (b) 两种采样率的  $x_p(t)$ , 虚线包络代表  $x_c(t)$ ;  
 (c) 两种不同采样率的输出序列。

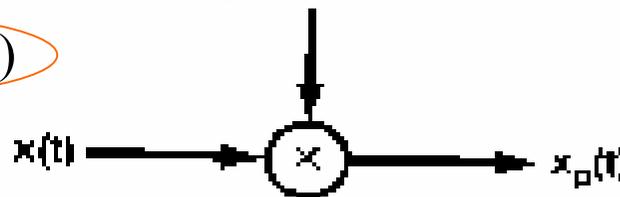
再从频域来看图7.21的处理过程:(设连续时间的频率变量用  $\omega$ ; 离散时间的频率变量用  $\Omega$ )

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

1、将  $x_p(t)$  进行傅里叶变换

因为  $x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \delta(t - nT)$

恒值(因为变量是t)



而  $\delta(t - nT) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega nT}$

用  $x_c(t)$  的样本值来表示  $X_p(j\omega)$

得  $X_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) e^{-j\omega nT}$  (7.18)

2、再看  $x_d[n]$  的离散时间傅里叶变换, 即

$\because x_d[n] = x_c(nT)$

$$X_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) e^{-j\Omega n}$$
 (7.20)

比较(7.18)和(7.20)式, 可知  $X_d(e^{j\Omega})$  和  $X_p(j\omega)$  有如下关系:

$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\Omega / T)$$

当  $\omega T = \Omega$

把样条归一成离散信号, 只要使  $\omega T = \Omega$  即可。——这个结论很重要。

3、而在讲冲激串采样时已求得  $X_p(j\omega)$  : (见P373页的 (7.6)式)

即: 
$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - k\omega_s))$$

可得到: 
$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\Omega/T) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - 2\pi k)/T)$$

$x_d[n]$  与  $x_c(t)$

的频谱关系可这样联系。

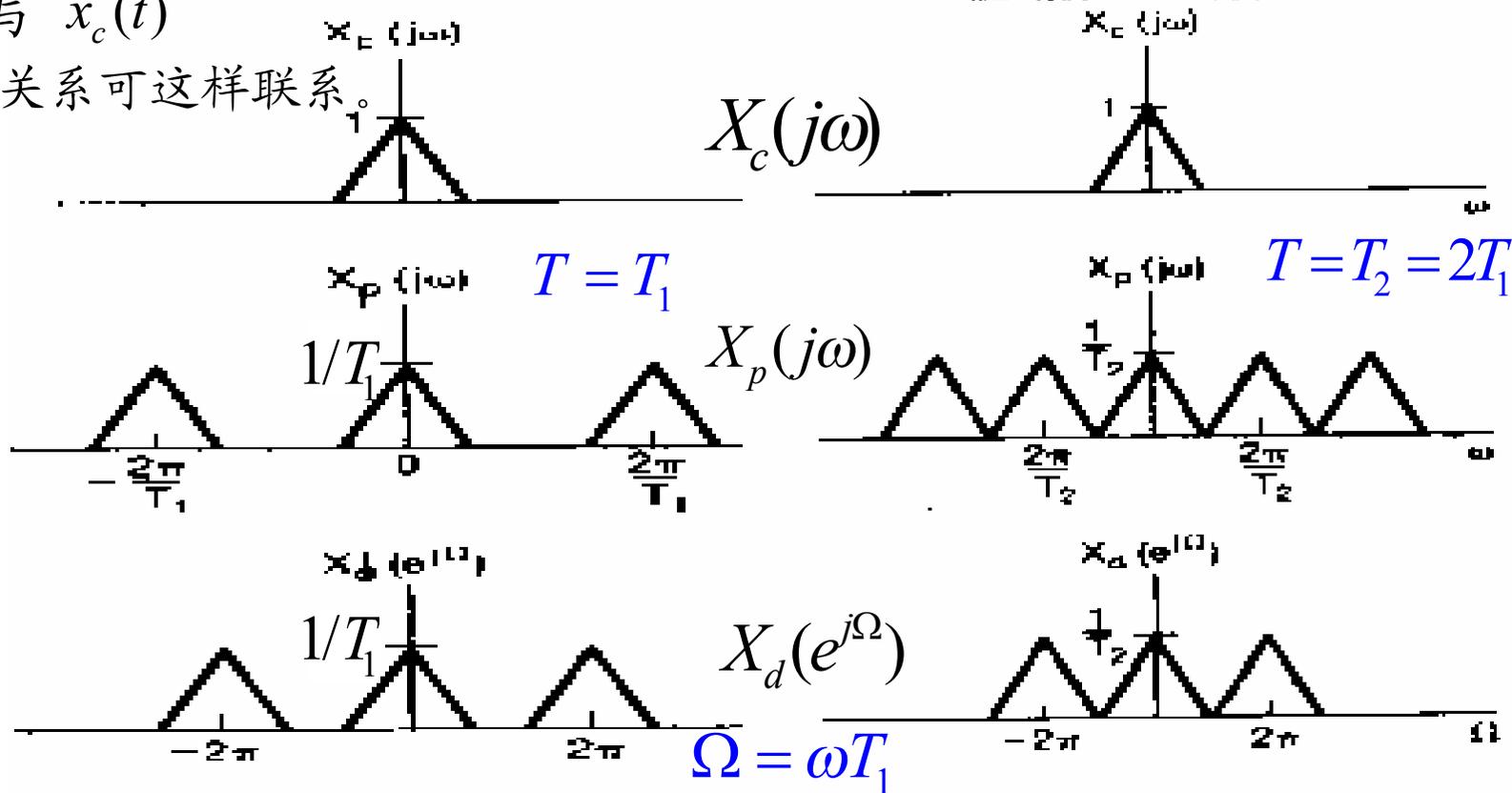


图7.22 在两种不同采样率下,  $X_c(j\omega)$ ,  $X_p(j\omega)$  和  $X_d(e^{j\Omega})$  的关系

由图可见:  $X_d(e^{j\Omega})$  就是  $X_p(j\omega)$  的重复, 只是频率坐标有一个尺度变换。<sup>539</sup>

$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - 2\pi k)/T)$$

由上式可见,  $X_d(e^{j\Omega})$  是由移位的  $X_c(j\omega)$  逐次叠加并做  $1/T$  尺度变换所形成的。

显然,  $X_d(e^{j\Omega})$  是周期的, 周期为  $2\pi$  (这种周期性是任何离散时间傅里叶变换都具有的特性)。

$$\Omega = T\omega$$

• 当  $\omega_s > 2\omega_M$  时,  $X_d(e^{j\Omega})$  频谱没有重叠; 并在  $\omega = 2\pi k$  点上精确重现原信号的频谱结构。只要将  $X_d(e^{j\Omega})$  乘以  $T$  倍和作  $T\omega$  的线性映射, 就可以精确重现原信号的频谱形状。——因此, 在  $\omega_s > 2\omega_M$  条件下, 序列  $x_d[n]$  保留了原始信号的所有信息。

•  $x_d[n]$  信号经离散时间系统处理后, 得到序列  $y_d[n]$ 。如果离散时间系统是一个恒等系统的话 (即  $x_d[n] = y_d[n]$ ), 而且假定满足采样条件, 那么整个系统也一定是一个恒等系统。

下面来加以证明: 先将图 7.19 用图 7.24 来表示。

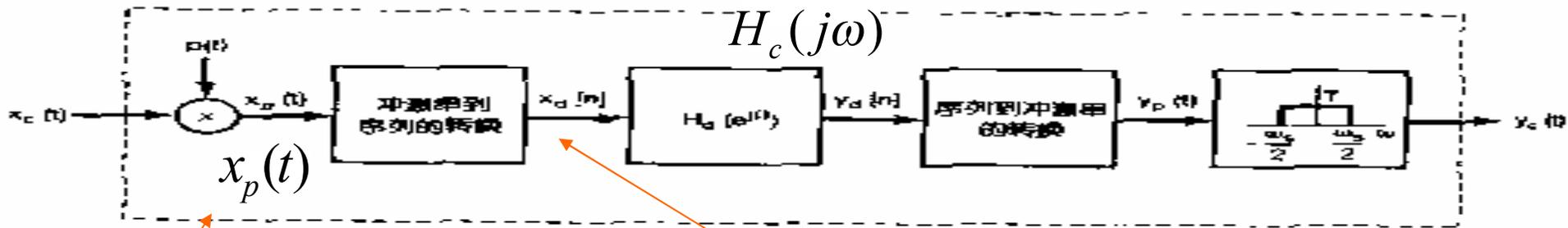


图 7.24 利用离散时间滤波器过滤连续时间信号的系统

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - k\omega_s))$$

$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\Omega/T)$$

因为

$$Y_d(e^{j\Omega}) = X_d(e^{j\Omega})H_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - 2\pi k)/T)H_d(e^{j\Omega})$$

$$Y_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - \omega_s k))H_d(e^{j\omega T})$$

$$\omega = \Omega/T$$

$$Y_c(j\omega) = X_c(j\omega)H_d(e^{j\omega T}) \quad \leftarrow \text{经滤波后得到}$$

$$H_d(e^{j\omega T}) = Y_c(j\omega) / X_c(j\omega) = H_c(j\omega)$$

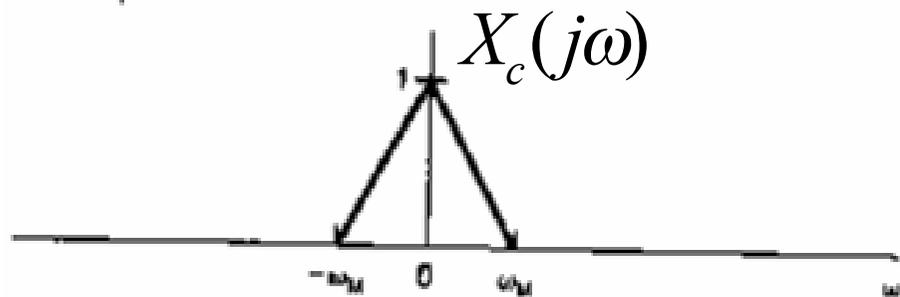
可见,  $H_c(j\omega)$  与离散时间频率响应  $H_d(e^{j\Omega})$  的关系为:

可见若  $H_d(e^{j\omega T})$  恒等系统

则  $H_c(j\omega)$  也为恒等系统

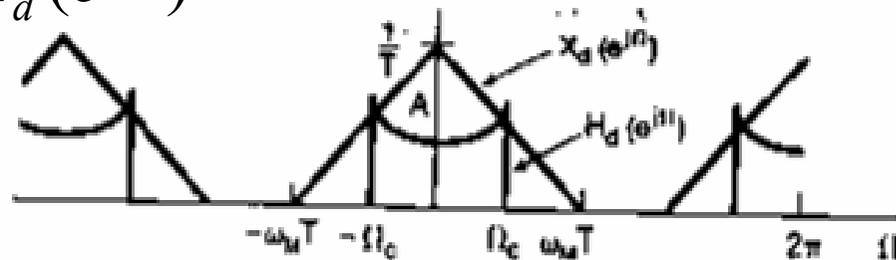
$$H_c(j\omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\omega T}), & |\omega| < \omega_s/2 \\ 0, & |\omega| > \omega_s/2 \end{cases} \quad (7.25)$$

图7.24和(7.25)式提供了利用离散时间滤波器来对连续时间信号进行处理的基础。

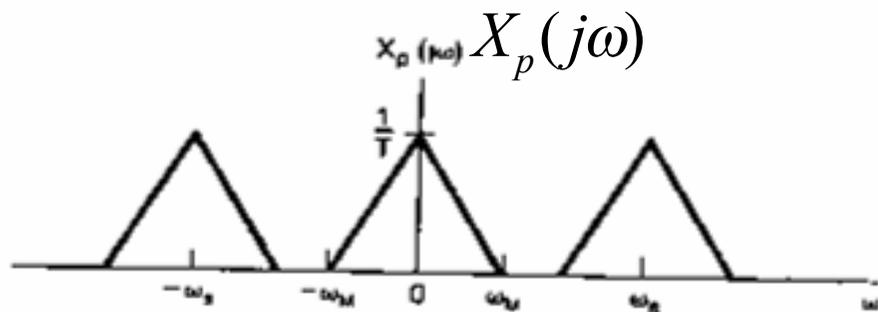


(a)

$$Y_d(e^{j\Omega}) = H_d(e^{j\Omega}) X_d(e^{j\Omega})$$

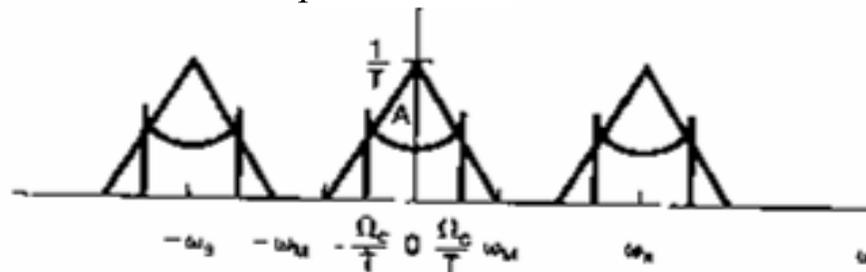


(d)

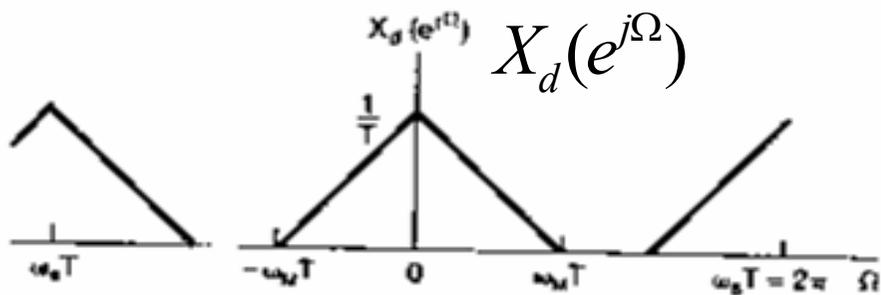


(b)

$$Y_p(j\omega)$$

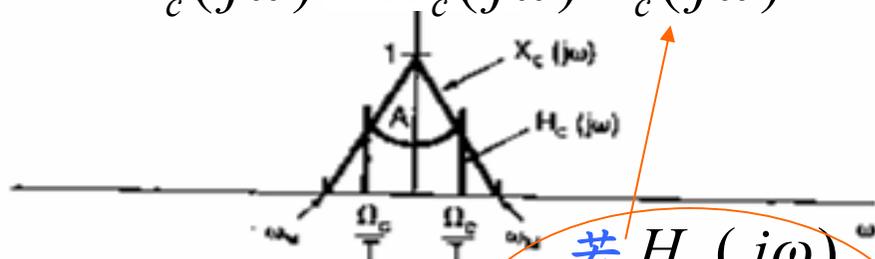


(e)



(c)

$$Y_c(j\omega) = X_c(j\omega) H_c(j\omega)$$



(f)

图 7.25 图 7.24 系统的频域说明:

- (a) 连续时间信号的频谱  $X_c(j\omega)$ ; (b) 冲激串采样以后的谱;  
 (c) 离散时间序列  $x_d[n]$  的谱; (d)  $H_d(e^{j\Omega})$  和  $X_d(e^{j\Omega})$  相乘以后得到的  $Y_d(e^{j\Omega})$ ;  
 (e)  $H_p(j\omega)$  和  $X_p(j\omega)$  相乘后得到的  $Y_p(j\omega)$ ; (f)  $H_c(j\omega)$  和  $X_c(j\omega)$  相乘后得到的  $Y_c(j\omega)$

若  $H_c(j\omega)$   
 为恒等系统  
 则  $Y_c(j\omega) = X_c(j\omega)$

下面将以例子做一些进一步的说明。

### 7.4.1 数字微分器

1. 考虑一个连续时间带限微分器（微分滤波器）的离散时间实现。

连续时间微分滤波器的频率响应可按以下求得：

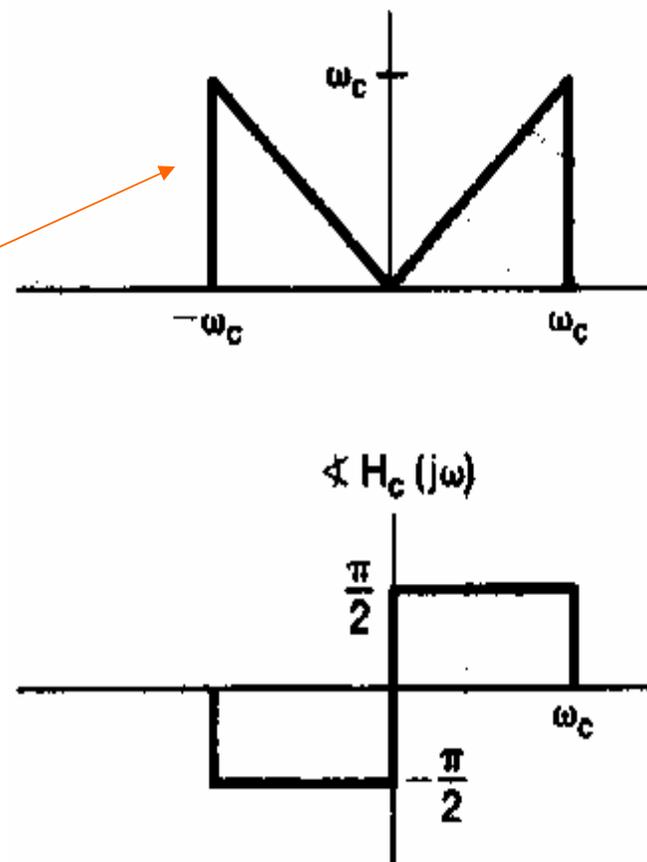
$$\text{若 } x(t) \xrightarrow{F} X(j\omega) \text{ 则 } y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{F} Y(j\omega) = j\omega X(j\omega) \quad |H_c(j\omega)|$$

$$\text{得 } H_c(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = j\omega$$

截止频率为  $\omega_c$  的带限微分器的频率响应为：

$$H_c(j\omega) = \frac{y(t)}{x(t)} = \begin{cases} j\omega, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

如右图所示。



因为:

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\omega T}), & |\omega| < \omega_s / 2 \\ 0, & |\omega| > \omega_s / 2 \end{cases}$$

所以,可知相应的离散时间的频率响应为

$$H_d(e^{j\Omega}) = j\left(\frac{\Omega}{T}\right), \quad |\Omega| < \pi$$

$$|\omega| < \omega_s / 2 \rightarrow \left| \frac{\Omega}{T} \right| < \frac{2\pi}{T} / 2 = \frac{\pi}{T}$$

如图7.28所示。

$$\text{又因为 } Y_c(j\omega) = X_c(j\omega)H_d(e^{j\omega T})$$

所以,只要在  $x_c(t)$  的采样中没有混叠产生,

$y_c(t)$  就一定是  $x_c(t)$  的导数。

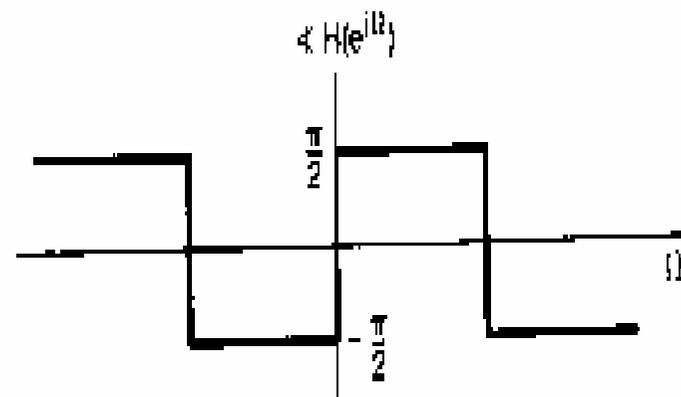
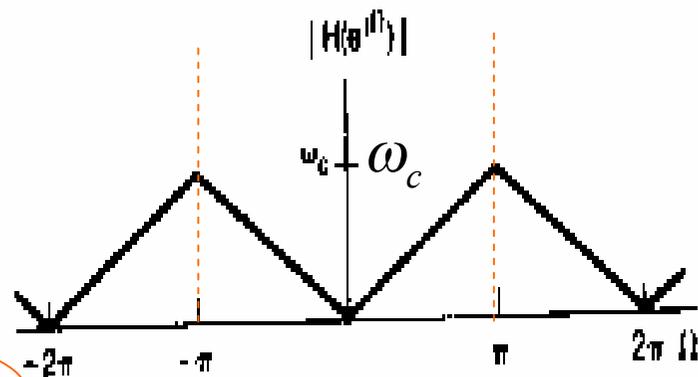


图 7.28 用于实现一个连续时间带限微分器的离散时间滤波器的频率响应

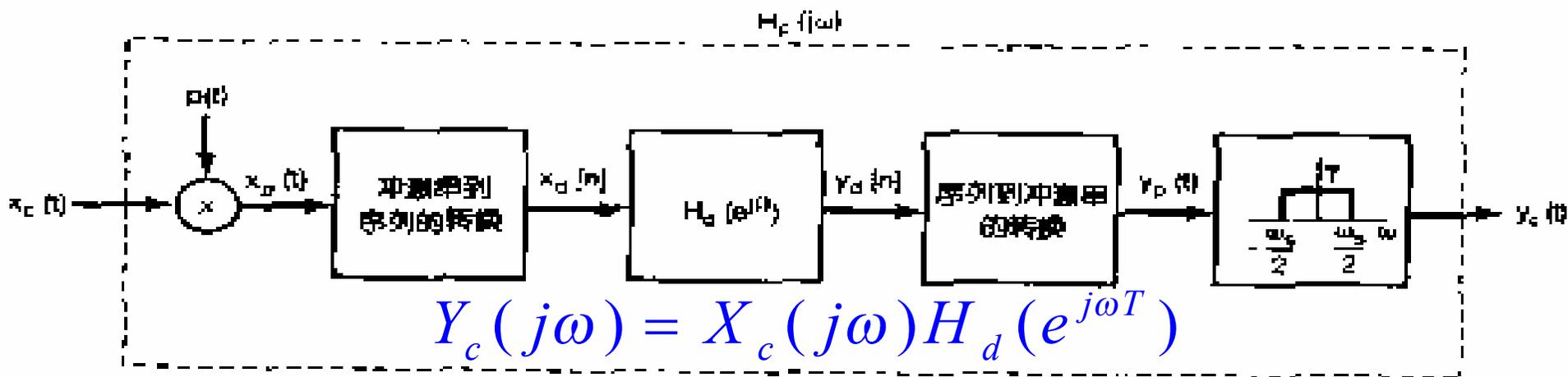


图 7.24 利用离散时间滤波器过滤连续时间信号的系統

例7.2 通过考虑该数字微分器在连续时间sinc函数输入时的输出,可方便地确定在

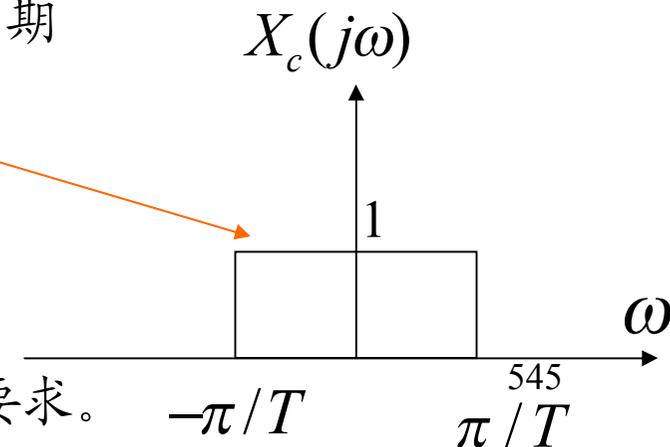
数字微分器的实现中,该离散时间滤波器的单位脉冲响应  $h_d[n]$  :

解: 1、看信号是否符合采样定理对输入信号的要求

$$x_c(t) = \frac{\sin(\pi t / T)}{\pi t} \quad \text{其中 } T \text{——为采样周期}$$

$$\text{则 } X_c(j\omega) = \begin{cases} 1 & , \omega < |\pi / T| \\ 0 & , \text{其余 } \omega \end{cases}$$

见P209例4.5



可见这是个带限信号。——符合采样定理的要求。

1、证明:

$$\therefore G_{\tau}(t) \xleftrightarrow{F} \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$\tau \text{Sa}\left(\frac{t\tau}{2}\right) \xleftrightarrow{F} 2\pi G_{\tau}(\omega)$$

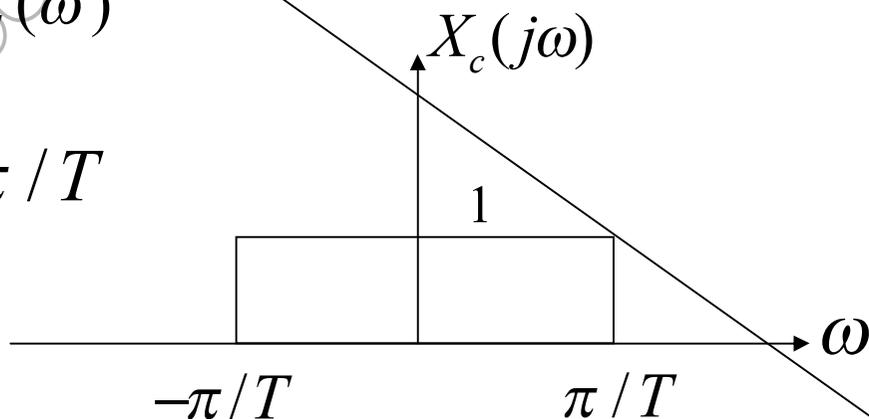
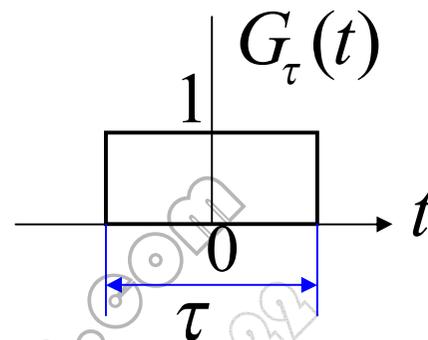
$$\tau = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2}$$

$$\tau \text{Sa}\left(\frac{t\tau}{2}\right) = \frac{2\pi}{T} \text{Sa}\left(\frac{\pi}{T}t\right) = \frac{2\pi \sin(\pi t/T)}{T \pi t/T} \xleftrightarrow{F} 2\pi G_{2\pi/T}(\omega)$$

$$\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t} \xleftrightarrow{F} G_{2\pi/T}(\omega)$$

$$\therefore X_c(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/T \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$



2、证明:

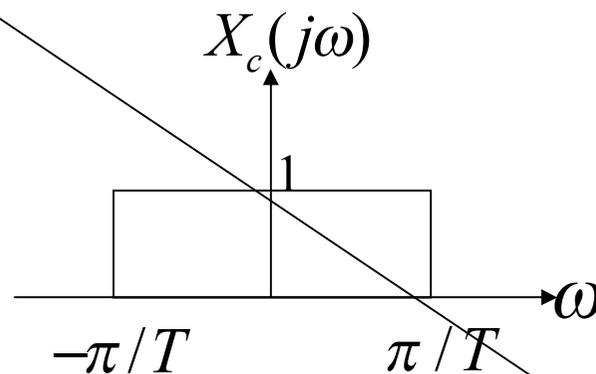
利用了P221中式(4.42)频域积分性质: 
$$-\frac{1}{jt} x(t) + \pi x(0)\delta(t) \xleftrightarrow{F} \int_{-\infty}^{\omega} X(j\eta) d\eta$$

$$\therefore \sin(\pi t / T) \xleftrightarrow{F} j\pi[\delta(\omega + \pi / T) - \delta(\omega - \pi / T)]$$

$$-\frac{1}{j} \frac{\sin(\pi t / T)}{t} + \pi \sin 0 \delta(t) \xleftrightarrow{F} \int_{-\infty}^{\omega} j\pi[\delta(\eta + \pi / T) - \delta(\eta - \pi / T)] d\eta$$

$$\frac{\sin(\pi t / T)}{\pi t} \xleftrightarrow{F} [u(\omega + \pi / T) - u(\omega - \pi / T)]$$

$$\therefore X_c(j\omega) = \begin{cases} 1 & , |\omega| < \pi / T \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$$



# 证毕

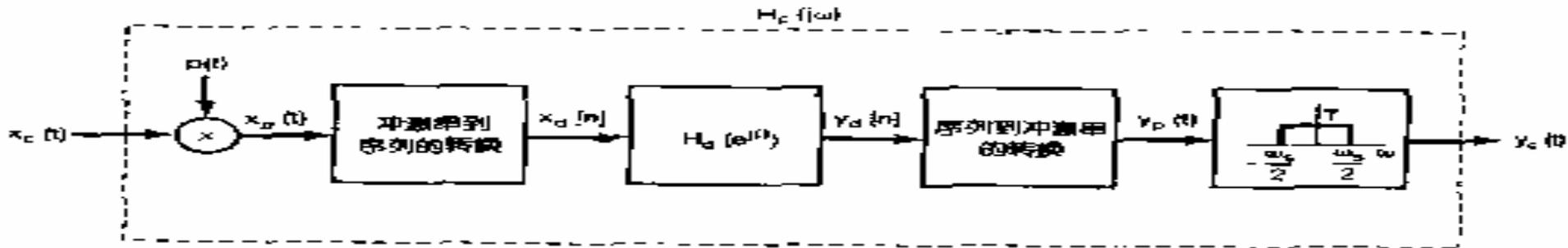


图 7.24 利用离散时间滤波器过滤连续时间信号的系統

2、求  $x_d[n]$

$$\because x_c(t) = \frac{\sin(\pi t / T)}{\pi t} \longrightarrow \boxed{\text{数字微分器}} \longrightarrow y_c(t) \quad (7.30)$$

$$\text{得: } x_c(nT) = \frac{1}{T} \frac{\sin \pi n}{\pi n} = \begin{cases} \frac{1}{T} & , n = 0 \\ 0 & , n \neq 0 \end{cases}$$

所以  $x_d[n] = x_c(nT) = \frac{1}{T} \delta[n]$

3、求  $y_d[n]$

$$y_c(t) = \frac{d}{dt} x_c(t) = \frac{\cos(\pi t/T)\pi t/T - \sin(\pi t/T)}{\pi t^2} = \frac{\cos(\pi t/T)}{Tt} - \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t^2}$$
$$\therefore y_d[n] = y_c(nT) = \frac{\cos \pi n}{nT^2} - \frac{\sin \pi n}{\pi T^2 n^2} = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{nT^2}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases} \quad (7.32)$$

4、求  $h_d[n]$

因为  $y_d[n] = x_d[n] * h_d[n] = \frac{1}{T} \delta[n] * h_d[n] = \frac{1}{T} h_d[n]$

其中  $x_d[n] = x_c(nT) = \frac{1}{T} \delta[n]$

所以，该滤波器的单位脉冲响应为

$$h_d[n] = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{nT}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

## 7.4.2 半采样间隔延时

这一节要讨论利用图7.19的系统实现一个连续时间信号的时间移位(延时)问题。

当输入是带限的,且采样率足够高时,整个系统的输入输出是用下列关系联系起来的:  $y_c(t) = x_c(t - \Delta)$  ,  $\Delta$  —— 延时时间 (7.33)

根据时移性有  $Y_c(j\omega) = e^{-j\omega\Delta} X_c(j\omega)$

要求等效连续系统必须是带限的,因此选取

$$H_c(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \begin{cases} e^{-j\omega\Delta} & , |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{其余} \end{cases} \quad (7.34)$$

$\omega_c$  —— 是该连续时间滤波器的截止频率

由上式可见,  $H_c(j\omega)$  对于带限内的信号只产生一个频移。

若取  $\omega_c = \omega_s / 2$ , 则相应的离散时间频率响应为

$$H_d(e^{j\Omega}) = H_c\left(j\frac{\Omega}{T}\right) = e^{-j\Omega\Delta/T} \quad , \quad |\Omega| < \pi$$

现在来看  $H_d(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega\Delta/T}$  ,  $|\Omega| < \pi$

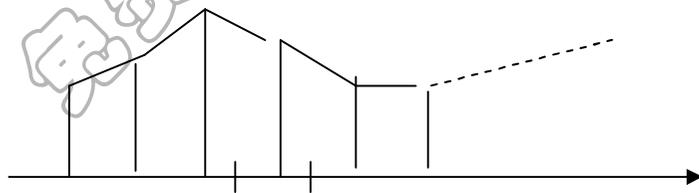
1、若  $\Delta/T$  ——是一个整数

则  $y_d[n] = x_d[n - \Delta/T]$  (7.36)

2、若  $\Delta/T$  ——不是整数, 则 (7.36)式就没有意义, 因为序列仅仅是在整数值上才有意义.

然而, 我们却能够利用带限内插来解释在这种情况下  $x_d[n]$  和  $y_d[n]$  之间的关系。因为  $x_c(t)$  和  $x_d[n]$  是通过采样和内插联系在一起的,

• 当  $\Delta/T = 1/2$  (即  $\Delta = \frac{1}{2}T$ ) 时, 称为半采样间隔延时。



例7.3 确定半采样间隔延时系统中的离散时间滤波器的单位冲激响应。

令 
$$x_c(t) = \frac{\sin(\pi t / T)}{\pi t}$$

得 
$$X_c(j\omega) = \begin{cases} 1 & , |\omega| < \pi / T \\ 0 & , \text{其余} \end{cases}$$

- 由例7.2可知  $x_d[n] = x_c(nT) = \frac{\sin \pi n}{\pi n T} = \frac{1}{T} \delta[n]$
- 而半采样间隔延时系统的输出就是

$$y_c(t) = x_c(t - T/2) = \frac{\sin(\pi(t - T/2)/T)}{\pi(t - T/2)}$$

$$y_d[n] = y_c(nT) = \frac{\sin(\pi(n - 1/2))}{T\pi(n - 1/2)}$$

$$\because y_d[n] = x_d[n] * h[n] = \frac{1}{T} \delta[n] * h[n] = \frac{1}{T} h[n]$$

所以可得 
$$h[n] = \frac{y_d[n]}{1/T} = \frac{\sin(\pi(n - 1/2))}{\pi(n - 1/2)}$$

## 7.5 离散时间信号采样

周期信号的傅  
立叶变换公式

### 7.5.1 脉冲串采样

图7.31为离散时间采样。N为采样周期。

$$x_p[n] = \begin{cases} x[n], & n = kN \\ 0, & n \neq kN \end{cases} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\therefore x_p[n] = x[n]p[n]$$

$$\therefore X_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} P(e^{j\theta}) X(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

$$P(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

$$X_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(e^{j(\omega - k\omega_s)})$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N})$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=N} x[n] e^{jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N}$$

$$p[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$$

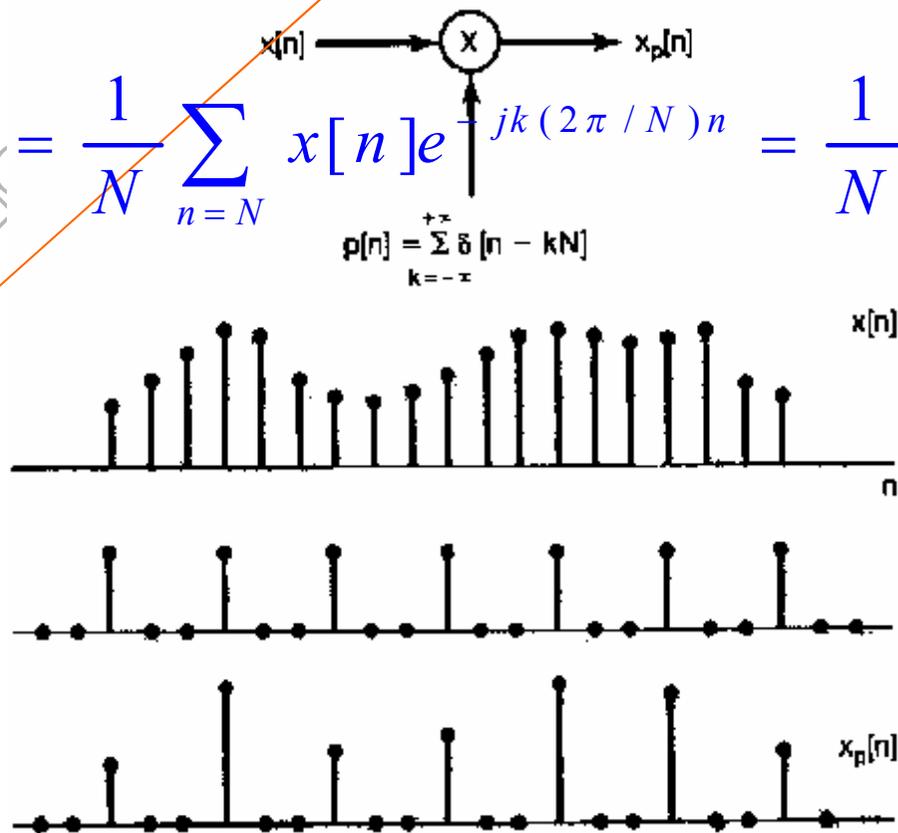
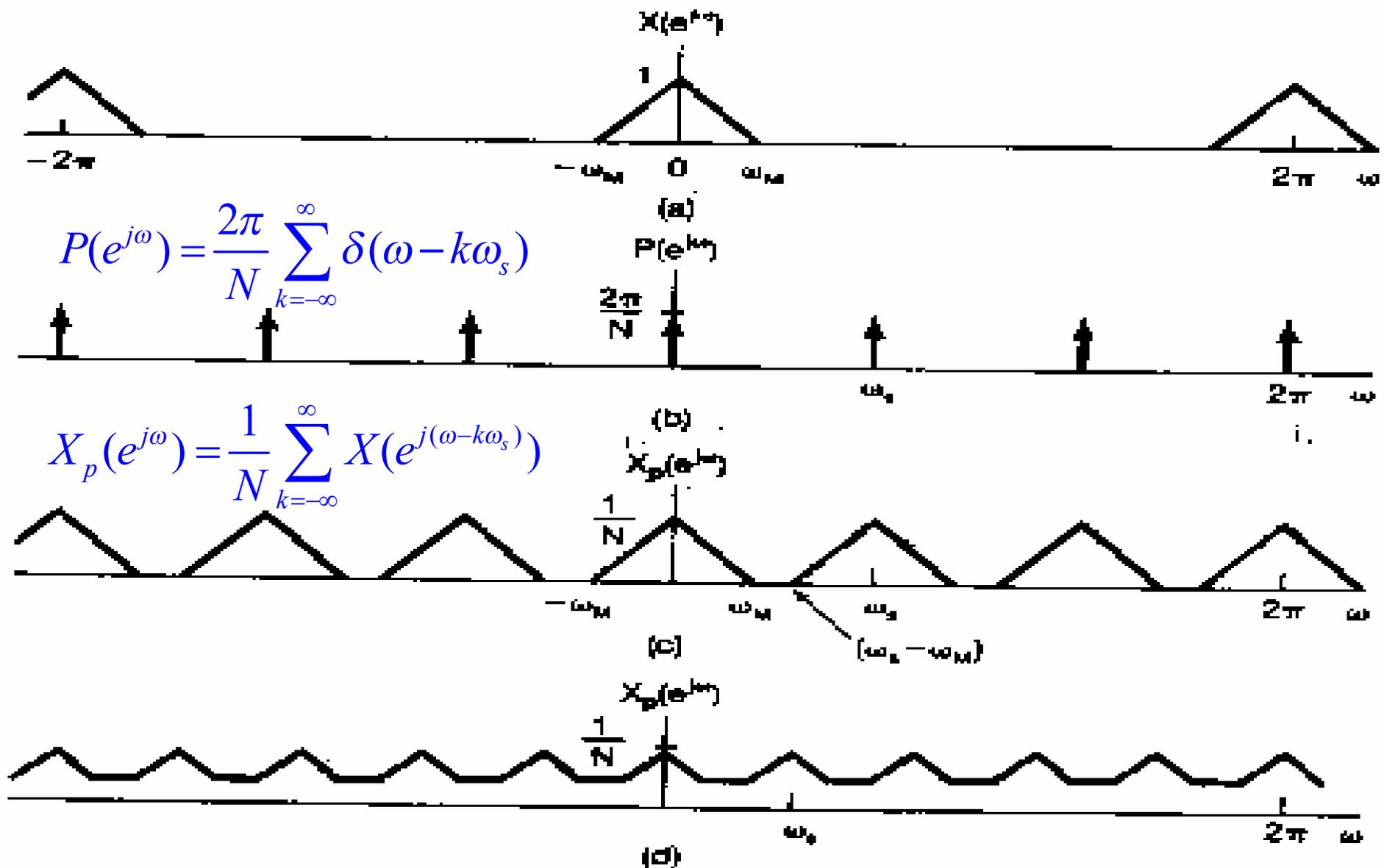


图 7.31 离散时间采样



$$P(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

$$X_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(e^{j(\omega - k\omega_s)})$$

图 7.32 一个离散时间信号经脉冲串采样后的频域效果：

- (a) 原始信号的频谱；(b) 采样序列的频谱；(c) 在  $\omega_s > 2\omega_M$  时已采样信号的频谱；
- (d) 在  $\omega_s < 2\omega_M$  时已采样信号的频谱，这时发生了混叠

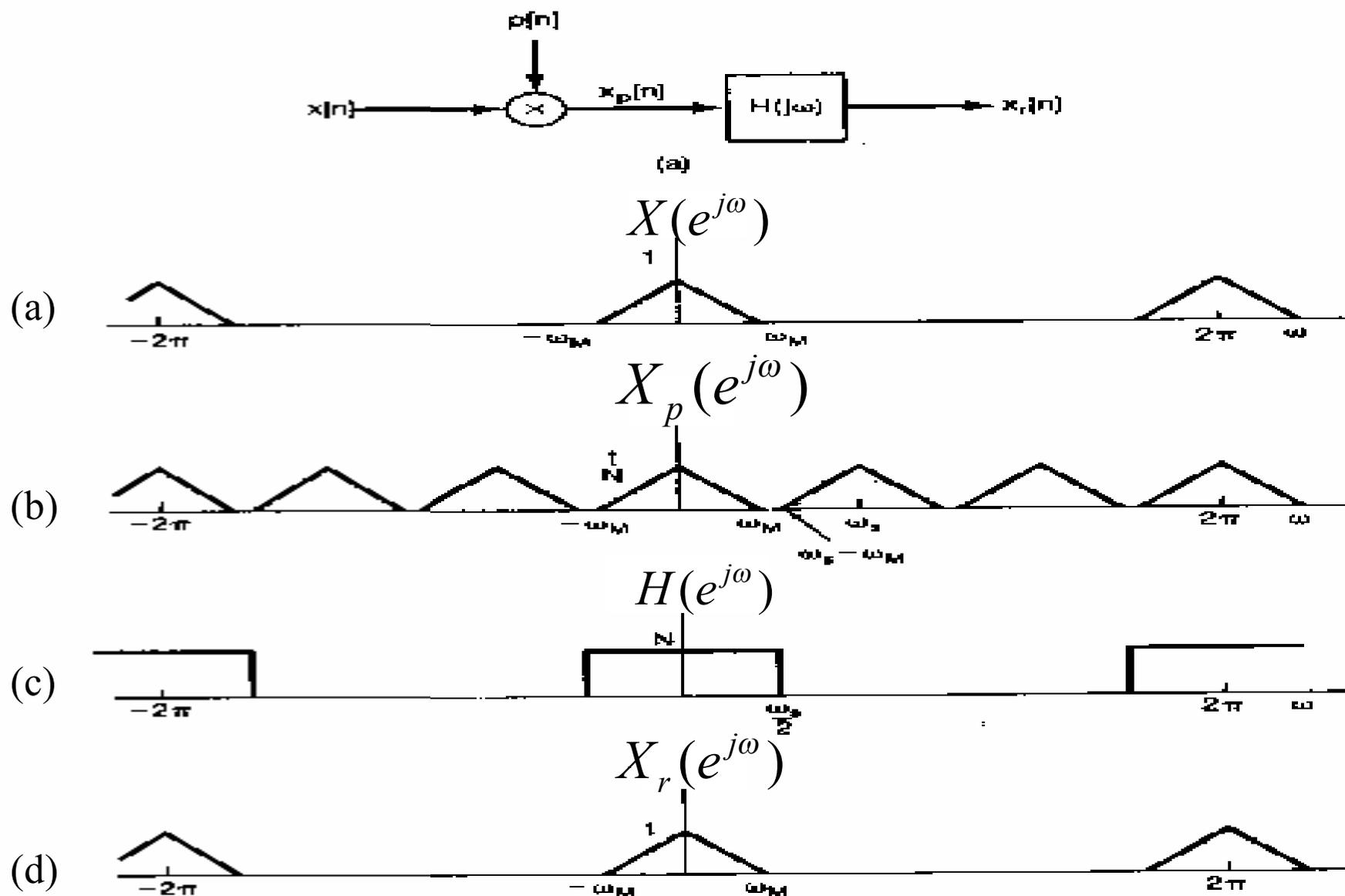


图 7.33 利用理想低通滤波器从样本中完全恢复一个离散时间信号:

(a) 一个带限信号采样并从样本中恢复的方框图; (b) 信号  $x[n]$  的频谱;

(c)  $x_p[n]$  的频谱; (d) 截止频率为  $\omega_s/2$  的理想低通滤波器的频率响应;

(e) 重建信号  $x_r[n]$  的频谱。由于此图是对应于  $\omega_s > 2\omega_M$  画的, 所以没有混叠,  $x_r[n] = x[n]$

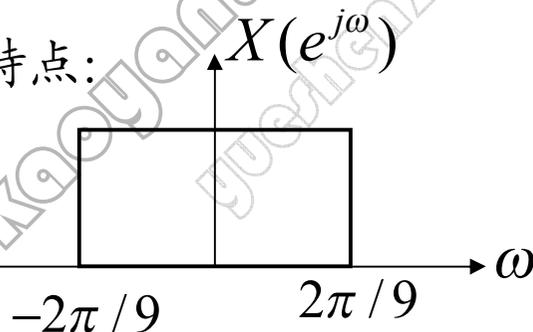
**注意:** 当  $\omega_s < 2\omega_M$  时, 虽然会产生混叠, 使得  $x_r[n] \neq x[n]$ 。但这两个序列在采样周期的整数点上总是相等的; 这就是说, 存在着

$$x_r[kN] = x[kN] \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

这一点与是否存在混叠无关。

例7.4 有一序列  $x[n]$ , 其傅里叶变换具有如下特点:

$$X(e^{j\omega}) = 0 \quad , \quad 2\pi/9 \leq |\omega| \leq \pi$$



求: 最低采样率。

解: 为了确保不发生混叠, 就必须求出最低的采样率 (或最大的采样周期  $N$ )

$$\omega_s = \frac{2\pi}{N} \geq 2\omega_M = 2\left(\frac{2\pi}{9}\right)$$

$$N \leq 9/2$$

从而可得  $N_{\max} = 4$ , 对应的最低采样频率为  $\omega_{s\min} = \frac{2\pi}{N_{\max}} = 2\pi/4 = \pi/2$

## 7.5.2 离散时间抽取与内插

在许多应用中,直接按图7.31的形式来表示、传输或存储这个已采得的序列  $x_p[n]$  是很**不经济**的。因为,该序列在采样点之间明知都是零。为此,往往将该序列用一个新序列  $x_b[n]$  来代替。而  $x_b[n]$  就是用  $x_p[n]$  中的每隔  $N$  点上的序列值所构成,即

$$x_b[n] = x_p[nN]$$

因为  $x_p[n]$  和  $x[n]$  在  $N$  的整数倍上都是相等的,所以又可写成

$$x_b[n] = x[nN]$$

**抽取**——把提取每第  $N$  个点上的

样本这样的过程称为**抽取**。

$x[n]$ ,  $x_p[n]$  和  $x_b[n]$  之间

的关系如图7.34所示。

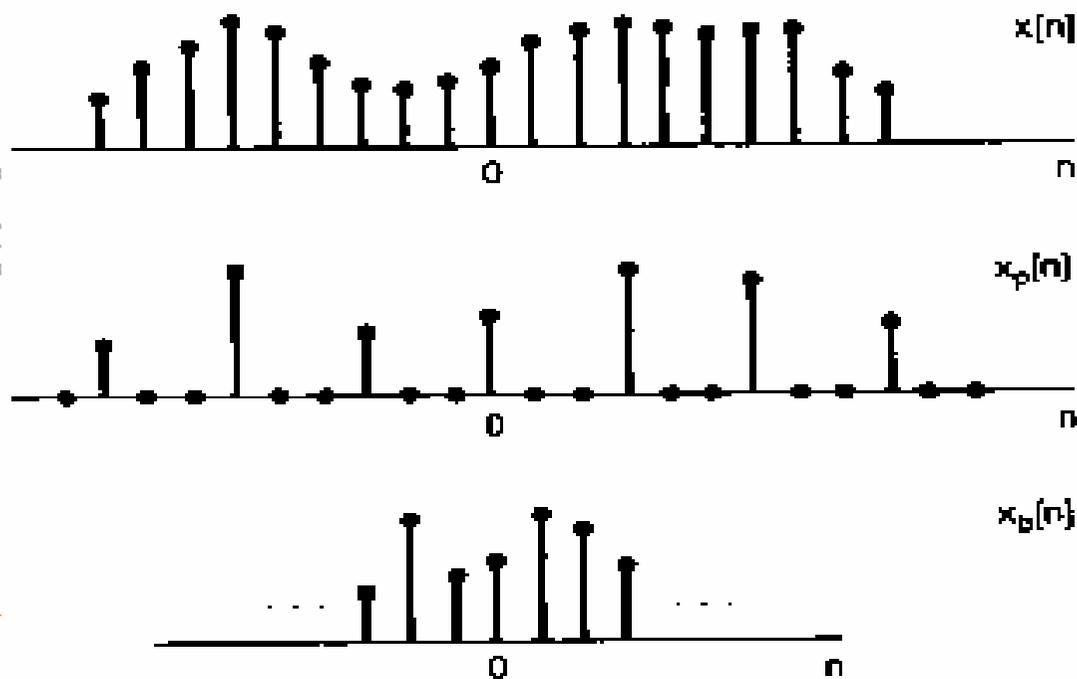


图 7.34 已采样序列  $x_p[n]$  和抽取序列之间的关系

为了确定抽取在频域中的效果,希望能求得  $x_b[n]$  的傅里叶变换  $X_b(e^{j\omega})$  和  $X(e^{j\omega})$  的关系。为此,注意到

$$X_b(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_b[k] e^{-j\omega k}$$

因为

$$x_b[n] = x_p[nN]$$

所以有

$$X_b(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_p[kN] e^{-j\omega k}$$

如果令  $n = kN$ , 则有  $X_b(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_p[n] e^{-j\omega n/N}$  (7.52)

上式右边就是  $x_p[n]$  的傅里叶变换, 即

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_p[n] e^{-j\omega n/N} = X_p(e^{j\omega/N})$$

因此可得  $X_b(e^{j\omega}) = X_p(e^{j\omega/N})$  ——这一关系如图7.35所示

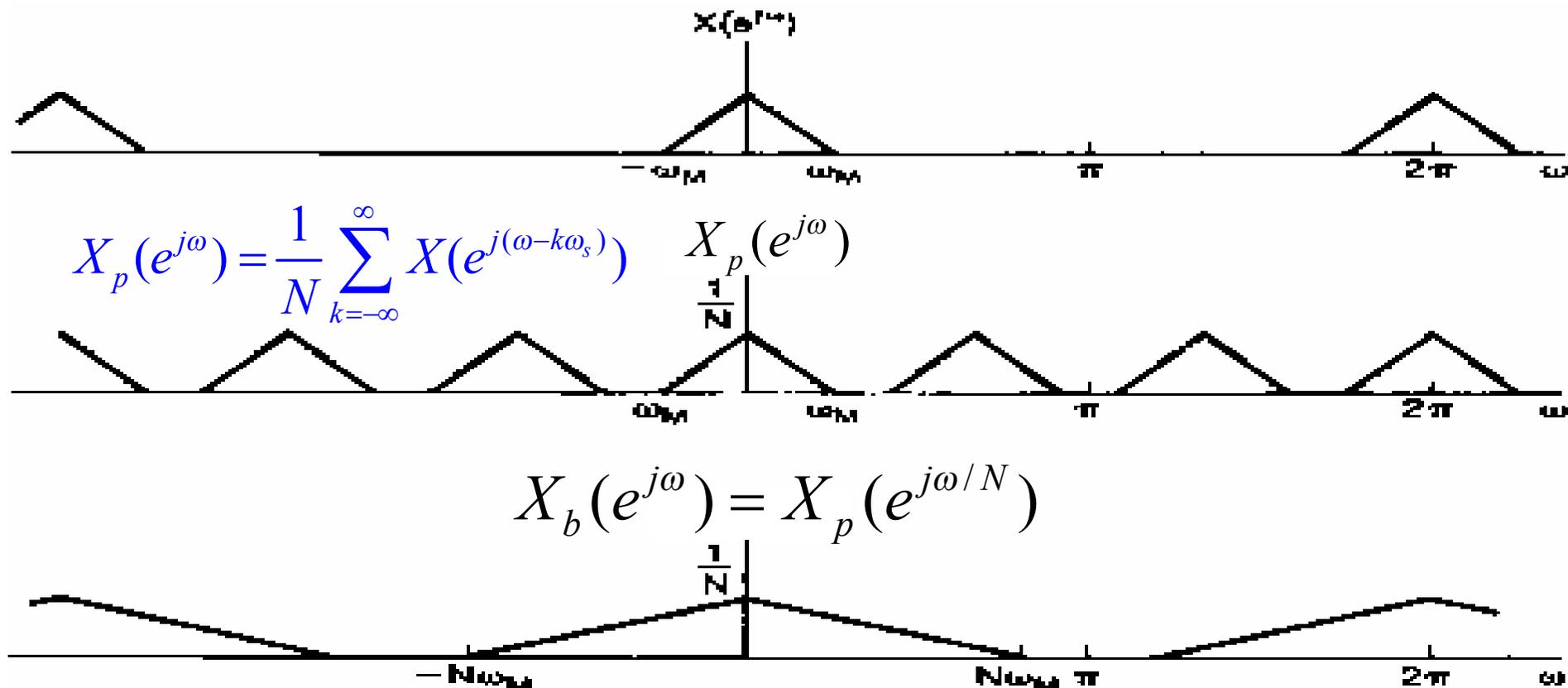


图 7.35 采样与抽取之间的关系在频域中的说明

已采样序列  $x_p[n]$  和抽取序列  $x_b[n]$  的频谱差别,只在频率尺度上或归一化上.如果原来的频谱  $X(e^{j\omega})$  被适当地带限,以致于在  $X_p(e^{j\omega})$  中不存在混叠。那么,抽取的效果就是将原来序列的频谱扩展到一个较宽的频带部分。

如果原始序列  $x[n]$  是由连续时间信号采样而得到,那么抽取过程就可以看成是在连续时间信号上将采样率减小  $N$  倍的结果。因此抽取的过程往往称减采样。

——在工程上，通过抽取。可使信号扩展至整个频带，提高频带利用率，使系统达到最大的减速采样，从而降低离散时间系统所要求的处理速度和规模。

**增采样**——把一个序列转换到一个较高的等效采样率上去，这称为增采样或内插

**增采样**基本上是抽取或减采样的逆过程。

- 考虑将序列  $x_b[n]$  增采样以得到  $x[n]$  的过程：

由  $x_b[n]$  形成序列  $x_p[n]$ ，只需要在  $x_b[n]$  的每一个序列值之间插入  $(N-1)$  个幅度为零的序列值即可。然后就可以利用低通滤波器从  $x_p[n]$  中得到这个被内插了的序列  $x[n]$ 。

整个过程见图7.37



$$X_b(e^{j\omega})$$

免费考研网 [bbs.freekaoyan.com](http://bbs.freekaoyan.com) yueshenzhi

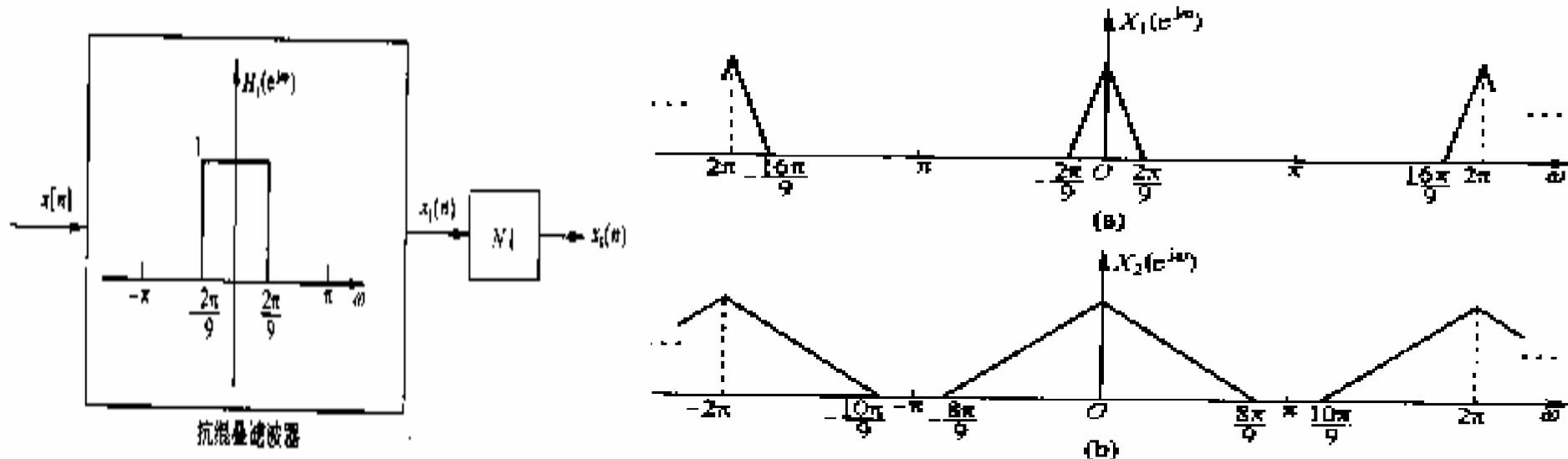
(b)

图 7.37 增采样:(a)整个系统方框图;(b)增采样(一倍)后的序列与频谱

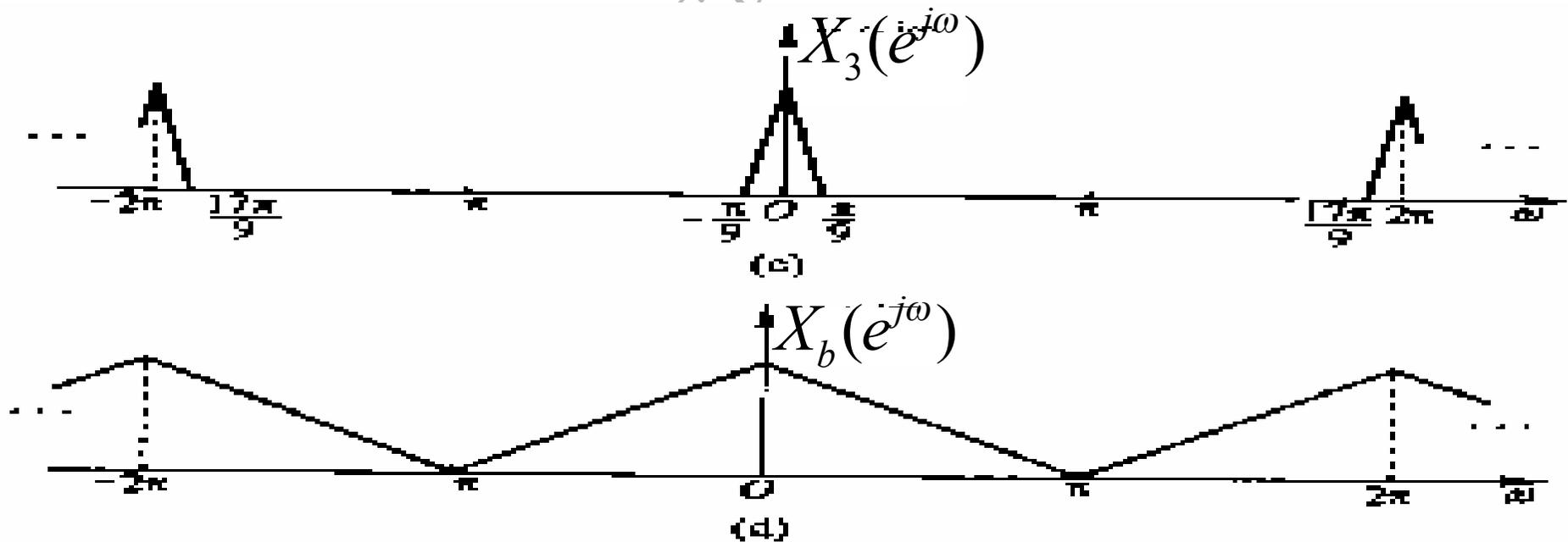
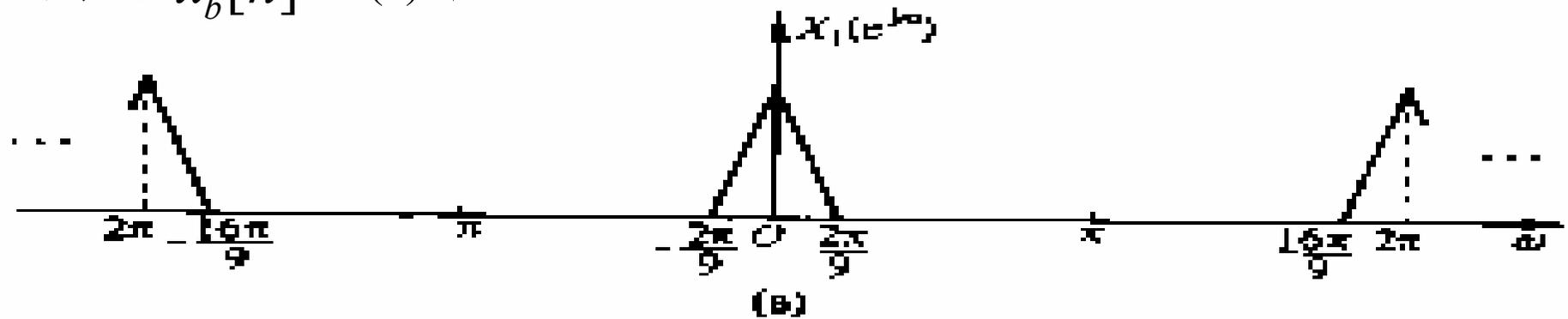
例： 下图为一抽取系统.图中  $H_1(e^{j\omega})$  为一抗混叠滤波器,滤去信号中无用的高频分量,并将信号的最高频率限制为  $\omega_M = 2\pi/9$ ,试问此时系统所能达到的最大抽取N是多少?

解： 要获得最大的抽取,就必须使  $X_b(e^{j\omega})$  占据整个频带. 由于信号  $x_1[n]$  的最高频率  $\omega_M = 2\pi/9$  如对信号直接进行抽取,要不产生混叠,必须

满足  $\omega_s = \frac{2\pi}{N} > 2 \times \frac{2\pi}{9}$  , 即  $N < 9/2$ , 取  $N=4$ 。对  $x_1[n]$  进行  $N=4$ 的抽取,就得到  $x_2[n]$  , 它的频谱如图 (b)所示。其中在  $\frac{8\pi}{9} \leq |\omega| \leq \pi$  这段频带内频谱还是零。因此仍有进一步抽取的余地。具体做法如下:



- 先对信号进行  $N=2$  的内插，获得相应的内插序列  $x_3[n]$ ，其频谱如图(c)所示  
其最高频率为  $\pi/9$ 。
- 然后对  $x_3[n]$  信号进行  $N=9$  的抽取，使其占据整个频带。最终获得最大抽取的序列  $x_b[n]$ ，(d)所示



小结:

- 1、采样定理——信号必须是带限的;  $\omega_s > 2\omega_M$
- 2、信号的重建——内插 (带限内插、零阶保持、线性内插等)
- 3、采用离散时间系统来处理连续时间信号;
- 4、离散时间采样——采样、抽取

作业: P402页

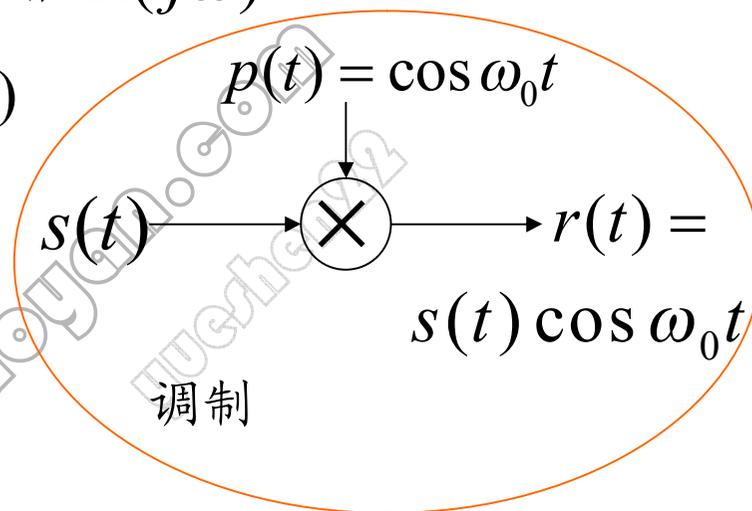
题7.6    题7.10    题7.27

题7.31    题7.43

二、例： 设信号  $s(t)$  的频谱为  $S(j\omega)$  ,另一个信号  $p(t)$  为  $p(t) = \cos \omega_0 t$   
 求  $r(t) = s(t)p(t) = s(t) \cos \omega_0 t$  的频谱  $R(j\omega)$  。

解： 因为 
$$p(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

而  $1 \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega)$   
 据频移性, 可得  $1 \times e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$   
 $1 \times e^{-j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$



所以 
$$p(t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \xleftrightarrow{F} P(j\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

又因为 
$$r(t) = s(t)p(t) \xleftrightarrow{F} R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * P(j\omega)$$

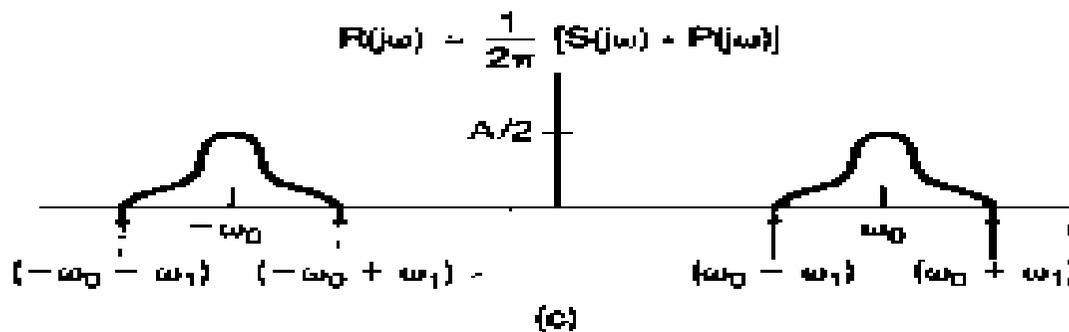
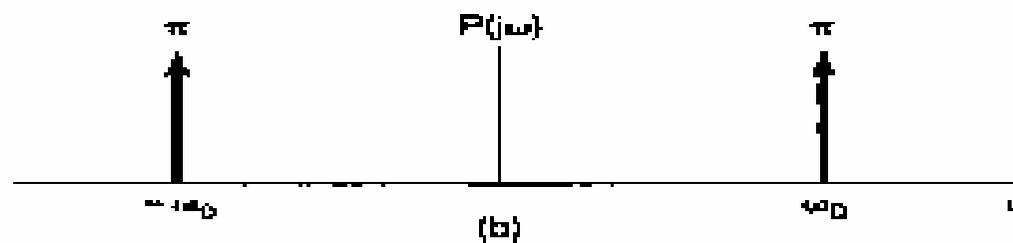
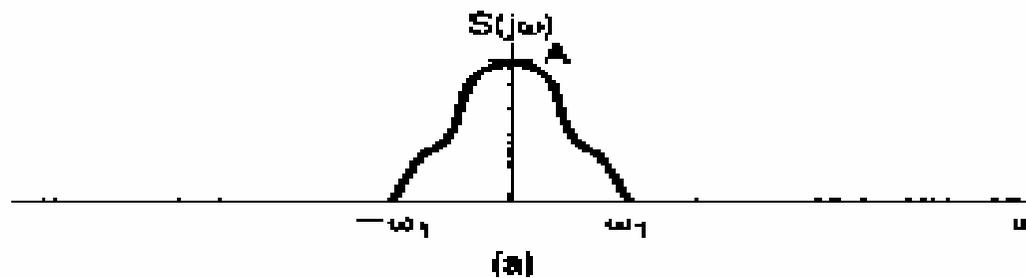
所以 
$$= \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$= \frac{1}{2} S[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} S[j(\omega + \omega_0)]$$

设信号的频谱如图所示,最高频率为:  $\omega_1$ ,则可画出  $R(j\omega)$

注意: 图中已假设  $\omega_0 > \omega_1$  。

若  $\omega_0 < \omega_1$  时, 就会产生重叠。



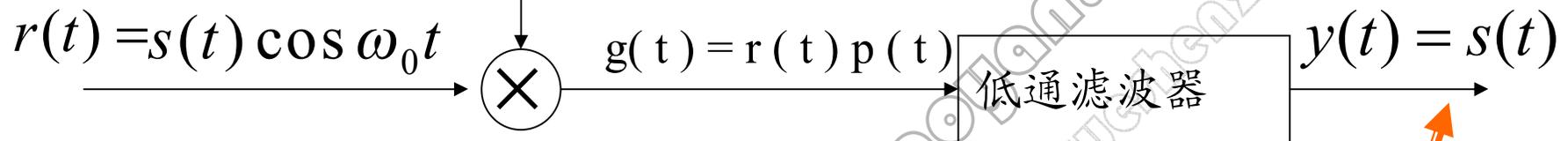
这在通信中称**调制**。

图 4.23 例 4.21 中相乘性质的应用:

三、例：其中  $p(t) = \cos \omega_0 t$ ，求低通滤波器的频谱  $H_c(j\omega)$ 。

解：

$$p(t) = \cos \omega_0 t$$



$$\because r(t) = s(t)p(t) \quad p(t) = \cos \omega_0 t$$

$$\because g(t) = r(t)p(t) = s(t) \cos^2 \omega_0 t = s(t)[1 + \cos 2\omega_0 t] / 2$$

$$= \frac{1}{2} [s(t) + s(t) \cos 2\omega_0 t]$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{2} S(j\omega) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * \pi [\delta(\omega - 2\omega_0) + \delta(\omega + 2\omega_0)] \right\}$$

$$= \frac{1}{2} S(j\omega) + \frac{1}{4} \{ S[j(\omega + 2\omega_0)] + S[j(\omega - 2\omega_0)] \}$$

解调

由图可知，当  $g(t)$  通过理想低通滤波器时，只要使该滤波器幅度为 2，截止频率  $\omega_c$  满足  $\omega_1 < \omega_c < 2\omega_0 - \omega_1$

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} 2 & \omega_1 < \omega_c < 2\omega_0 - \omega_1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

就可使调制信号  $s(t)$  得到恢复，得  $y(t) = s(t)$

这就是解调

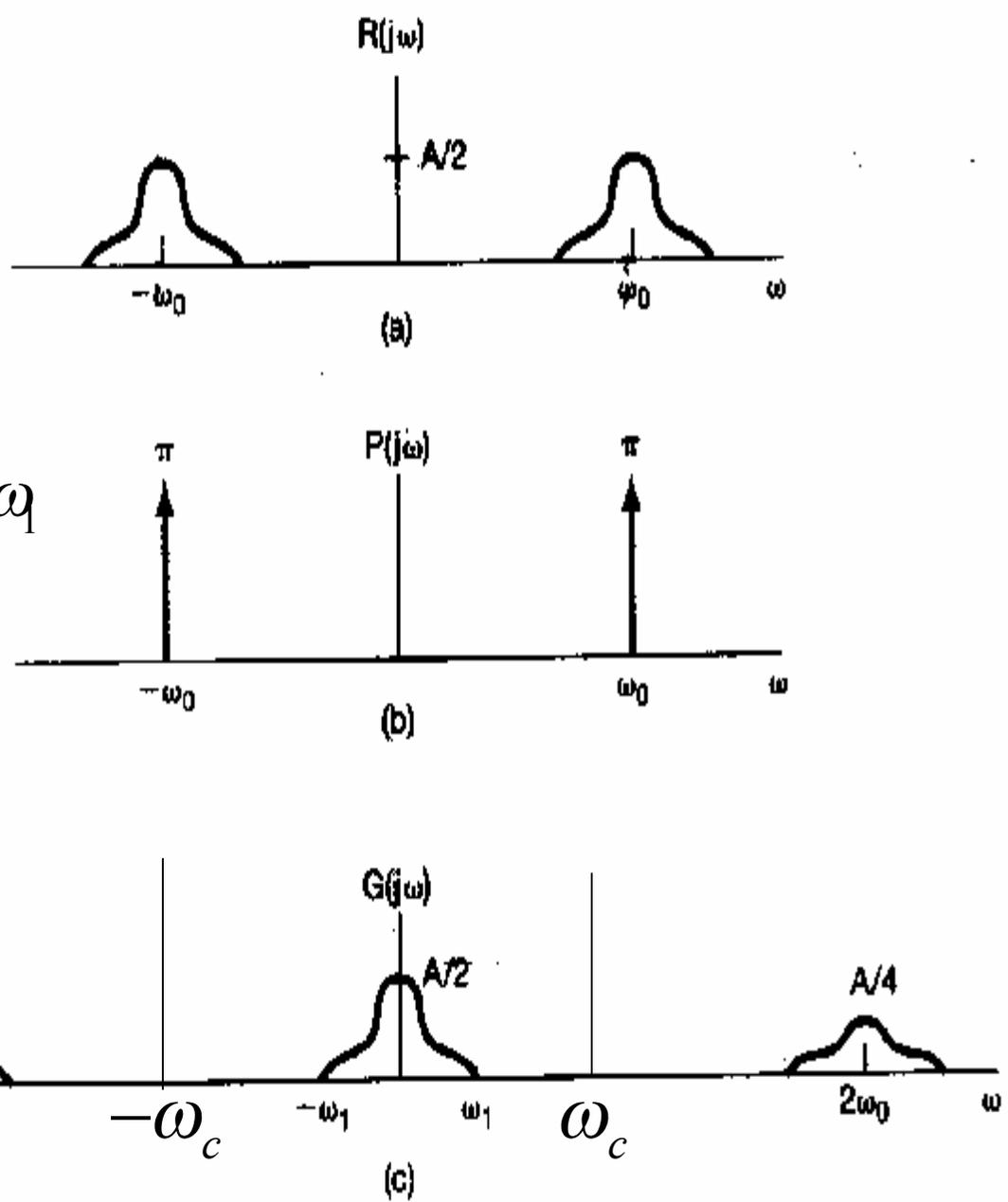


图 4.24 例 4.22 中考虑的各信号的频谱：(a)  $R(j\omega)$ ；(b)  $P(j\omega)$ ；(c)  $G(j\omega)$

#### 四、具有可变中心频率的频率选择性滤波

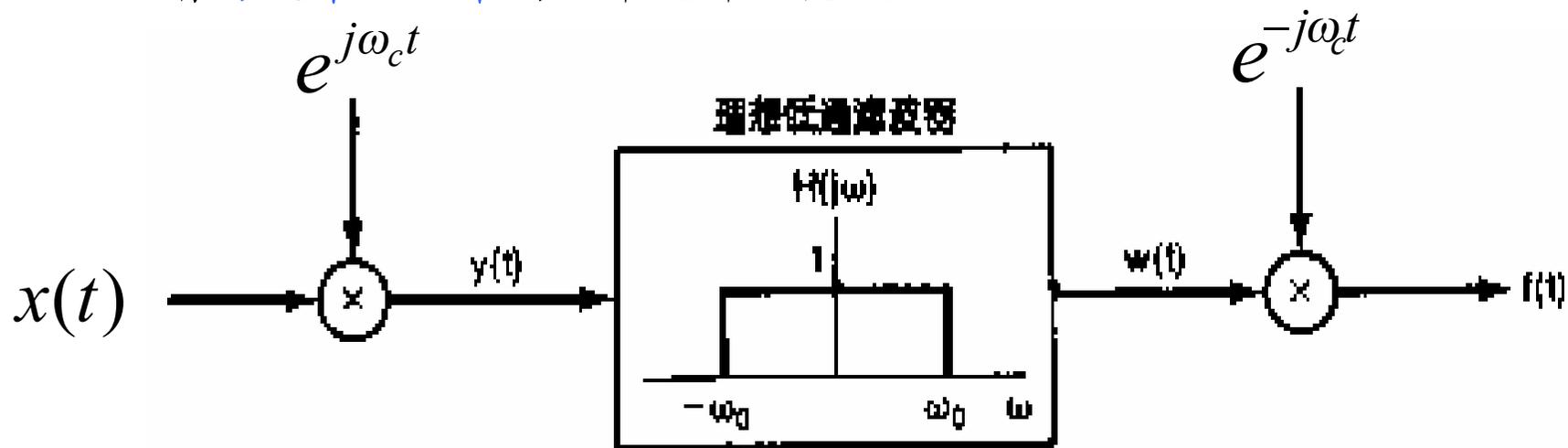


图 4.26 利用复指数载波的幅度调制实现带通滤波器

$$y(t) = e^{j\omega_c t} x(t) \xleftrightarrow{F} Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [2\pi\delta(\omega - \omega_c) * X(j\omega)] = X[j(\omega - \omega_c)]$$

即  $Y(j\omega)$  等于  $X(j\omega)$  向右移  $\omega_c$  ;

同样可得:

$$f(t) = e^{-j\omega_c t} w(t) \xleftrightarrow{F} F(j\omega) = W[j(\omega + \omega_c)]$$

即  $F(j\omega)$  就等于  $W(j\omega)$  向左移  $\omega_c$  。

可见，整个系统等效于一个中心频率为  $-\omega_c$  带宽为  $2\omega_0$  的理想带通滤波器。随着  $\omega_c$  的改变，该带通滤波器的中心频率也就改变了。

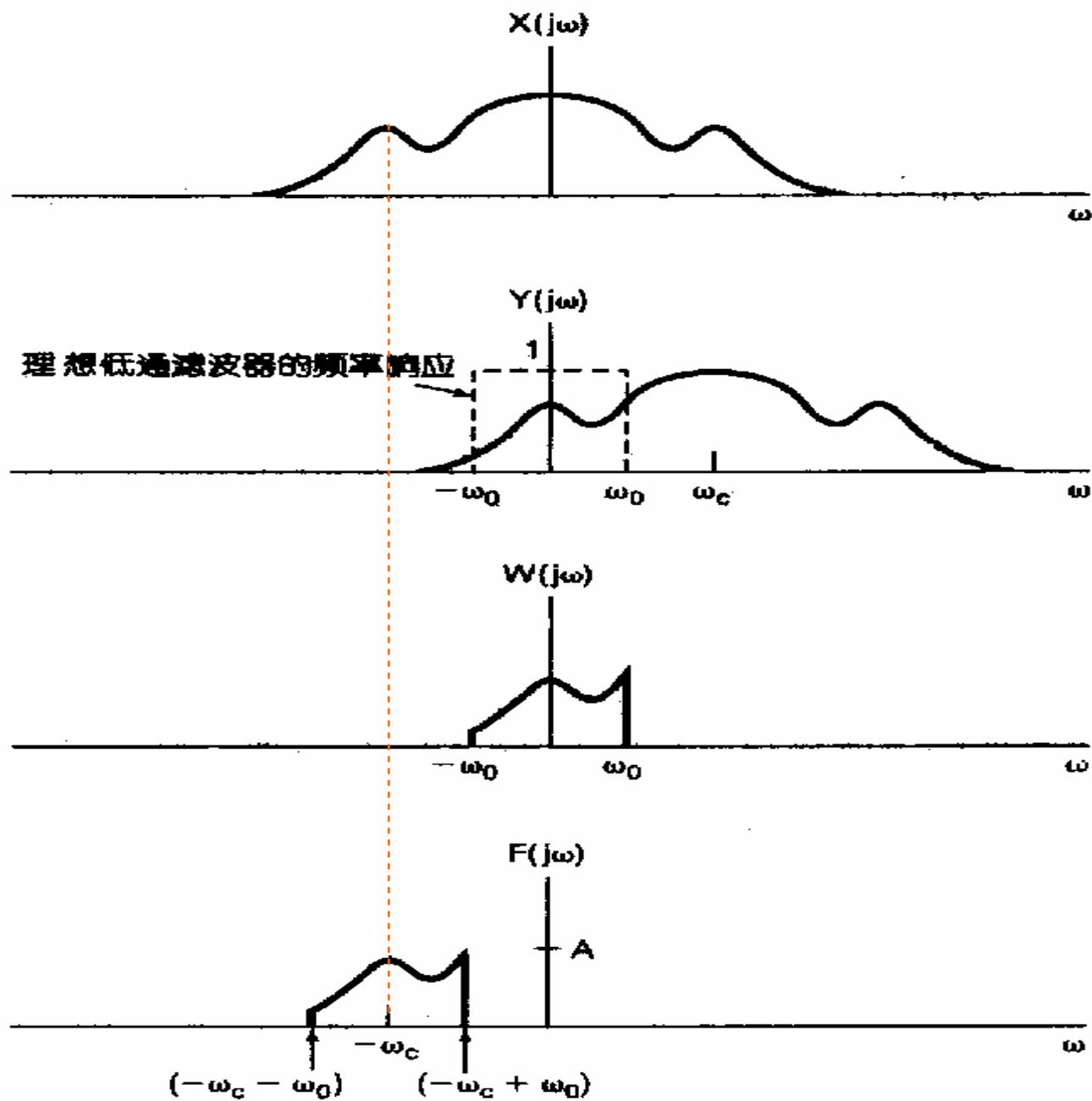
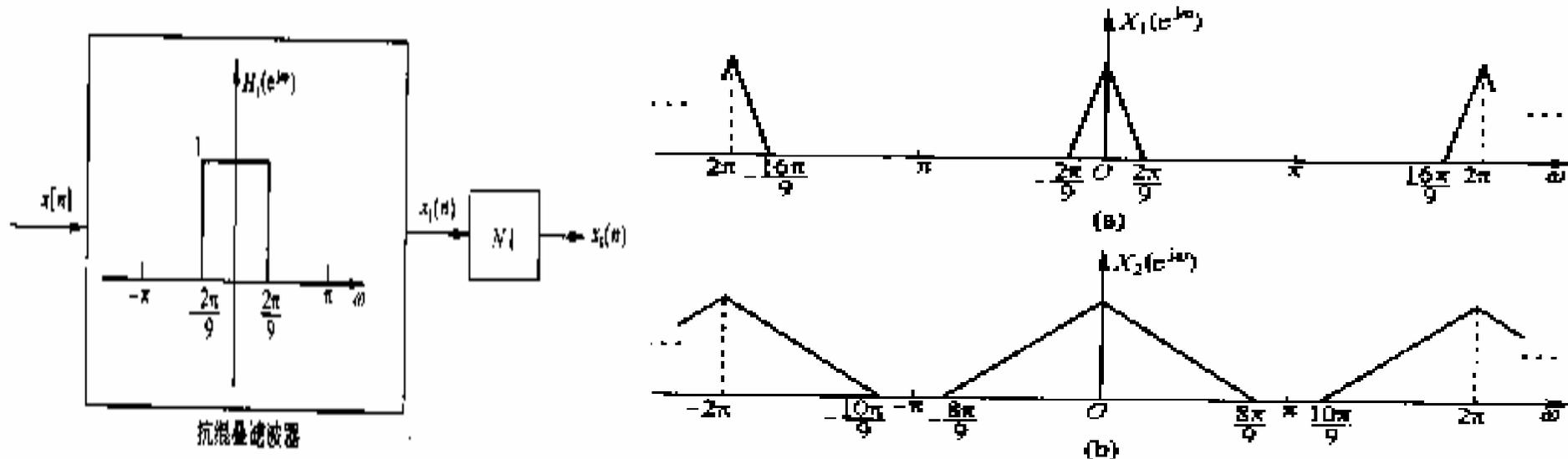


图 4.27 图 4.26 系统中各信号的频谱

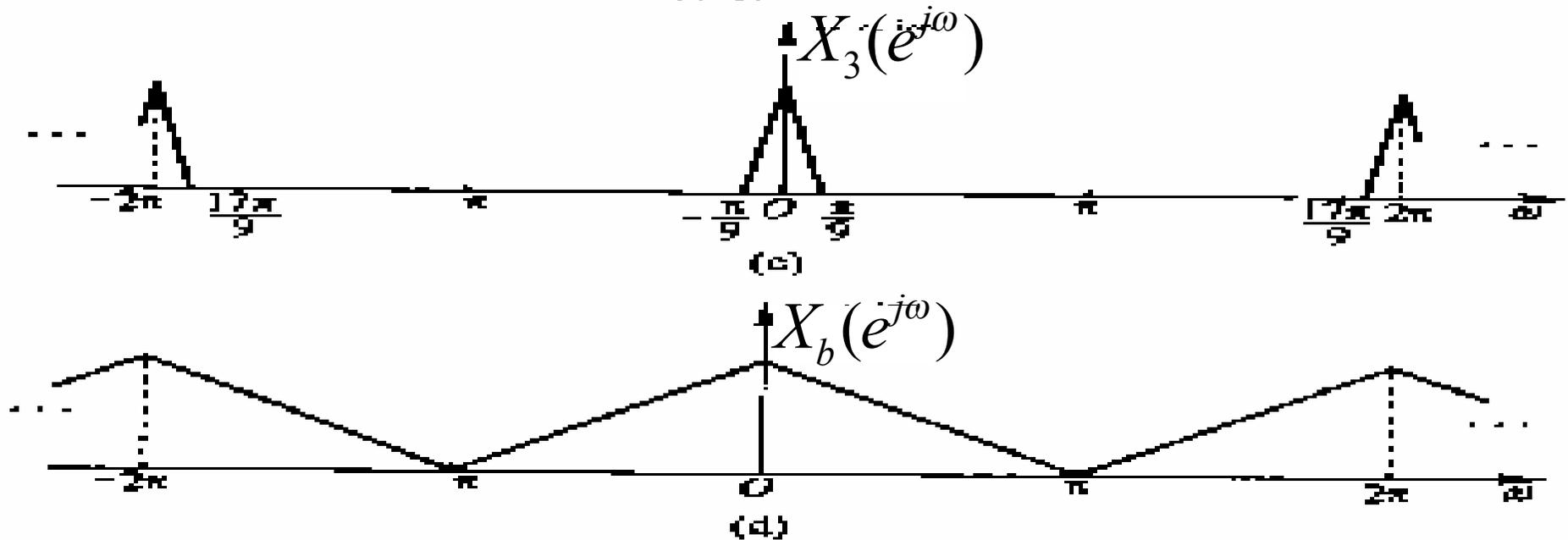
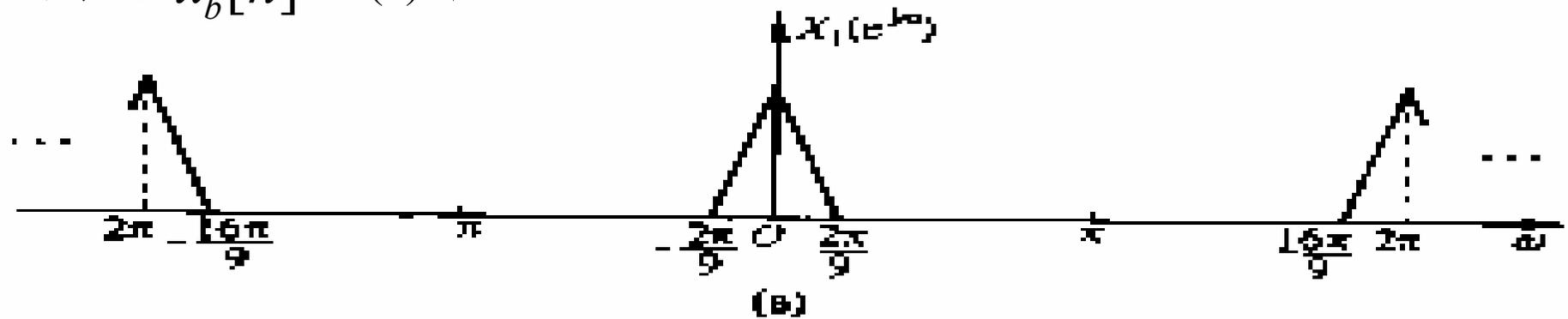
例： 下图为一**抽取系统**.图中  $H_1(e^{j\omega})$  为一抗混叠滤波器,滤去信号中无用的高频分量,并将信号的最高频率限制为  $\omega_M = 2\pi/9$ ,试问此时系统所能达到的最大抽取N是多少?

解： 要获得**最大的抽取**,就必须使  $X_b(e^{j\omega})$  占据**整个频带**. 由于信号  $x_1[n]$  的最高频率  $\omega_M = 2\pi/9$  如对信号直接进行抽取,要不产生混叠,必须

满足  $\omega_s = \frac{2\pi}{N} > 2 \times \frac{2\pi}{9}$  , 即  $N < 9/2$ , 取  $N=4$ 。对  $x_1[n]$  进行  $N=4$ 的抽取,就得到  $x_2[n]$  , 它的频谱如图 (b)所示。其中在  $\frac{8\pi}{9} \leq |\omega| \leq \pi$  这段频带内频谱还是零。因此仍有进一步抽取的余地。具体做法如下:



- 先对信号进行  $N=2$  的内插，获得相应的内插序列  $x_3[n]$ ，其频谱如图(c)所示  
其最高频率为  $\pi/9$ 。
- 然后对  $x_3[n]$  信号进行  $N=9$  的抽取，使其占据整个频带。最终获得最大抽取的序列  $x_b[n]$ ，(d)所示

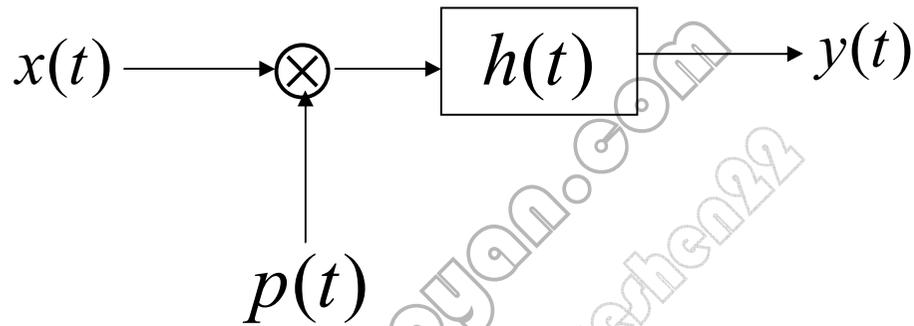


例：系统如图所示，其中

$$x(t) = \frac{\sin(3\omega_0 t / 2)}{\pi t}$$

$$p(t) = \cos 2\omega_0 t + 4 \cos 8\omega_0 t$$

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$



求：y(t)的傅立叶级数表示式。

$$\text{解：} \because e(t) = x(t)p(t) \xleftrightarrow{F} E(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

$$\begin{aligned} \sin(3\omega_0 t / 2) &= \frac{1}{2j} [e^{j3\omega_0 t / 2} - e^{-j3\omega_0 t / 2}] \xleftrightarrow{F} \frac{2\pi}{2j} [\delta(\omega - \frac{3}{2}\omega_0) - \delta(\omega + \frac{3}{2}\omega_0)] \\ &= j\pi [\delta(\omega + \frac{3}{2}\omega_0) - \delta(\omega - \frac{3}{2}\omega_0)] \end{aligned}$$

$$\text{据频域积分性：} -\frac{1}{jt} x(t) + \pi x(0)\delta(t) \xleftrightarrow{F} \int_{-\infty}^{\omega} X(j\eta) d\eta$$

$$-\frac{\sin(3\omega_0 t / 2)}{jt} \xleftrightarrow{F} \int_{-\infty}^{\omega} j\pi [\delta(\eta + \frac{3}{2}\omega_0) - \delta(\eta - \frac{3}{2}\omega_0)] d\eta$$

$$= j\pi [U(\omega + \frac{3}{2}\omega_0) - U(\omega - \frac{3}{2}\omega_0)]$$

$$\frac{\sin(3\omega_0 t / 2)}{\pi t} \xleftrightarrow{F} U(\omega + \frac{3}{2}\omega_0) - U(\omega - \frac{3}{2}\omega_0) = \begin{cases} 1 & , |\omega| < \frac{3}{2}\omega_0 \\ 0 & , |\omega| > \frac{3}{2}\omega_0 \end{cases}$$

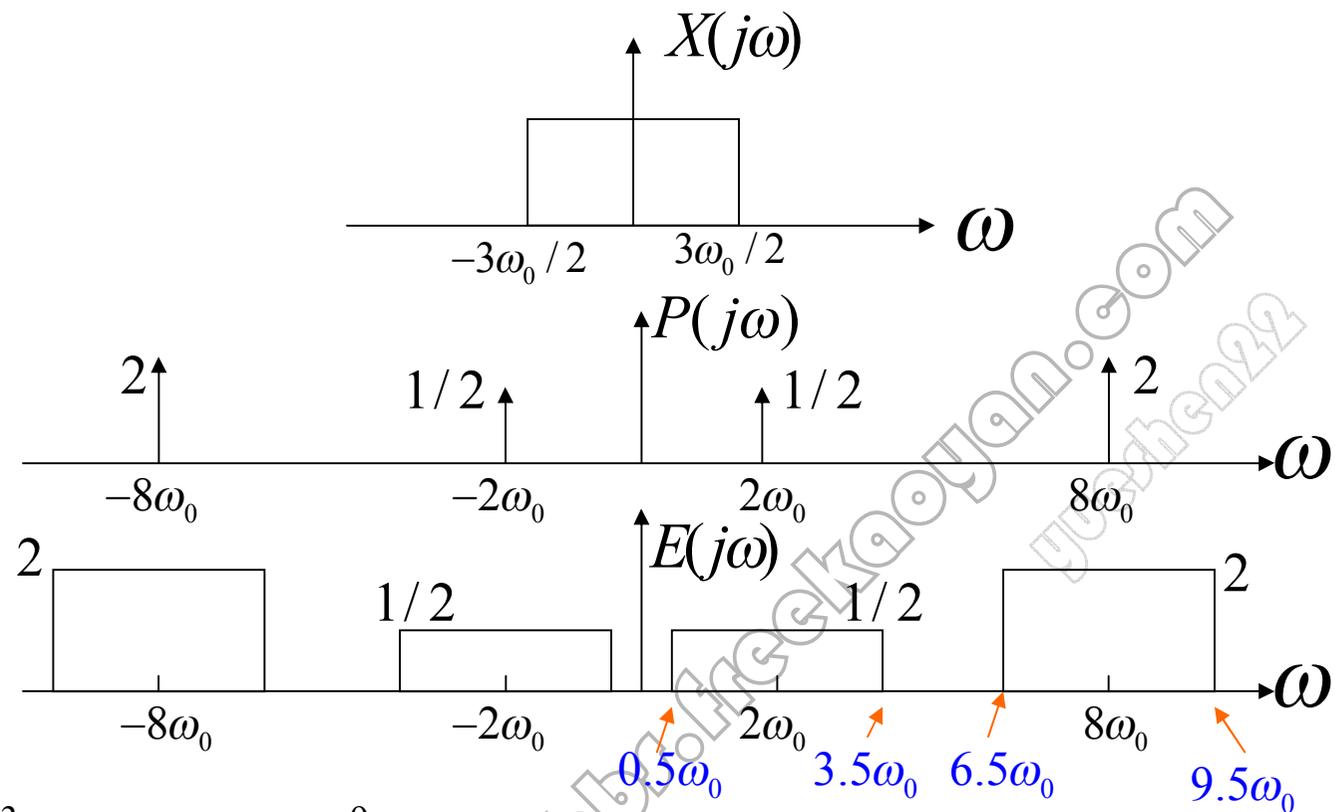
$$P(j\omega) = \pi[\delta(\omega + 2\omega_0) + \delta(\omega - 2\omega_0) + 4\delta(\omega + 8\omega_0) + 4\delta(\omega - 8\omega_0)]$$

$$E(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

$$= \frac{1}{2} X[j(\omega + 2\omega_0)] + \frac{1}{2} X[j(\omega - 2\omega_0)] + 2X[j(\omega + 8\omega_0)] + 2X[j(\omega - 8\omega_0)]$$

$$H(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$Y(j\omega) = E(j\omega)H(j\omega) = \pi \sum_{|k|=1}^3 c_k \delta(\omega - k\omega_0) + 4\pi \sum_{|k|=7}^9 c_k \delta(\omega - k\omega_0)$$



$$y(t) = \frac{1}{2} \sum_{|k|=1}^3 c_k e^{jk\omega_0 t} + 2 \sum_{|k|=7}^9 c_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$y_k = \begin{cases} \frac{1}{2} c_k & , \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \\ 2c_k & , \quad k = \pm 7, \pm 8, \pm 9 \\ 0 & , \end{cases}$$

注意：1、在实际中  $x(t)$  是一个具体的信号——即必须掌握信号的变换

$$\sin \omega_0 t \xleftrightarrow{F} j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] = \frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\cos \omega_0 t \xleftrightarrow{F} \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$\frac{\sin \omega_0 t}{\pi t} \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = U(\omega + \omega_0) - U(\omega - \omega_0) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_0 \\ 0 & |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\sin \omega_0 t}{\pi t}\right)^2 \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * X(j\omega)$$

$$\left(\frac{\sin \omega_0 t}{\pi t}\right)^2 \cos \omega_0 t \xleftrightarrow{F}$$

$$te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{(a + j\omega)^2}$$

题7.2、题7.4、题7.21、题7.28

# 第十章 Z变换

- 10.0 引言
- 10.1 z变换
- 10.2 z变换的收敛域
- 10.3 z反变换
- 10.4 由零极点图对傅立叶变换进行几何求值
- 10.5 z变换的性质
- 10.6 几个常用z变换对
- 10.7 利用z变换分析与表征LTI系统
- 10.8 系统函数的代数属性与方框图表示
- 10.9 单边z变换

## 10.0 引言

- 离散时间信号的 $z$ 变换对应连续时间信号的拉普拉斯变换
- $z$ 变换比傅立叶变换的适用范围更广，是傅立叶变换的推广形式
- 在分析问题中， $z$ 变换概念往往比傅立叶变换更方便

免费者研网 bbs.freemove.com

## 10.1 Z变换

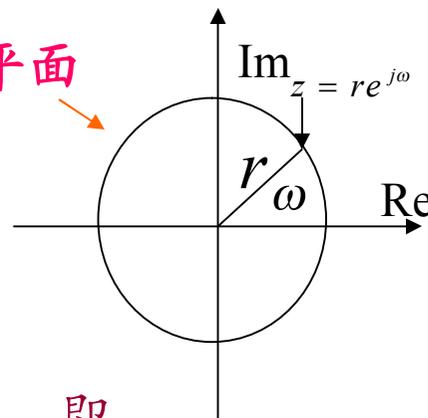
- 1、 一个离散时间信号z变换定义为： $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$  称双边z变换
- 式中：z为复变量

为了方便，也将x[n]的z变换写为： $Z\{x[n]\}$

而x[n]和它的z变换之间的关系记作： $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$

- 2、 z变换和离散时间傅立叶变换之间的一些重要关系。为了说明这些关系，将复变量z表示成极坐标形式： $z = re^{j\omega}$  —— z平面

$$\text{则： } X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\omega n}$$



- 由上式可见， $X(re^{j\omega})$ 就是  $x[n]r^{-n}$  的傅立叶变换，即

$$X(re^{j\omega}) = F\{x[n]r^{-n}\}$$

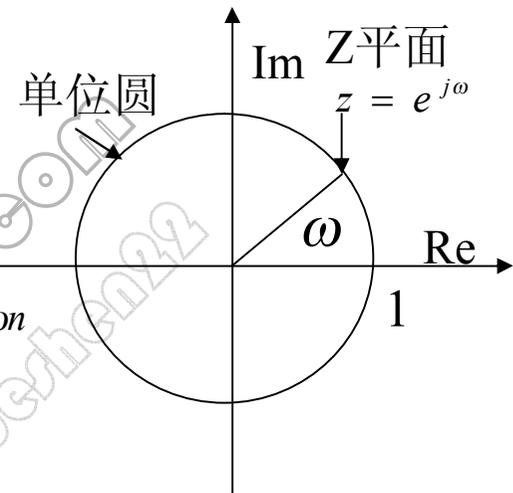
- 适当选取r会使许多原来傅立叶变换不收敛的函数具有z变换。(例如： $u[n]$ )
- 当r=1时(即 $|z|=1$ )，z变换就演变为傅立叶变换  $X(z)|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) \stackrel{\text{def}}{=} F\{x[n]\}$

因此，傅立叶变换是z变换的一个特例。表现在z平面上，是一个单位圆。

这也解释了：傅立叶变换以 $2\pi$ 为周期的原因。

## 2、z变换的收敛问题

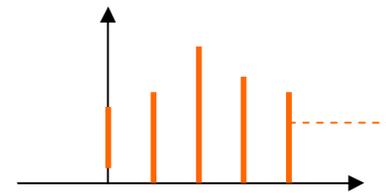
$$\text{因为 } X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\omega n}$$



- 为了使z变换收敛，就要求  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty$ ，即：要求 $x[n]r^{-n}$ 的傅立叶变换收敛。
- 一般来说，对于某一序列的z变换，存在着一个z值的范围，对该范围内的z， $X[z]$ 收敛。这样一些值的范围就称为收敛域[ROC]。

为了说明z变换及其有关的收敛域ROC，看下面例题。

例 10.1 有一序列  $x[n] = a^n u[n]$  ——这是右序列



$$\text{它的 } z \text{ 变换为 } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

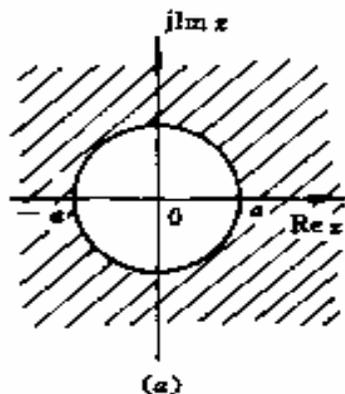
为使  $X(z)$  收敛, 就要求  $|az^{-1}| < 1$

$$\because |AB| = |A||B|$$

于是  $z$  变换收敛域为:  $|z| > |a|$

$$\text{即 } X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad |z| > |a| \quad (10.9)$$

$|z| > |a|$ , 指在  $z$  平面上为以原点为中心, 半径  $r = |a|$  的圆外部区域, 如下图(a)所示。



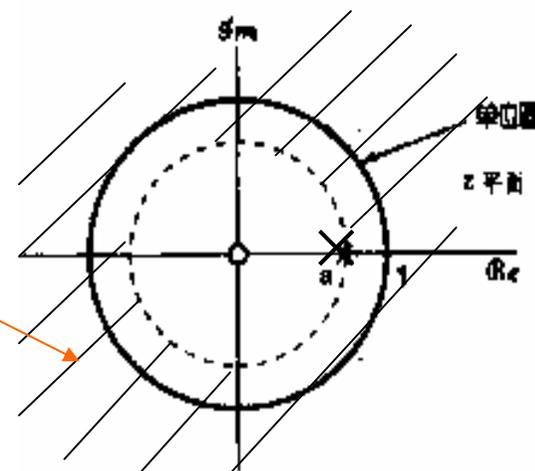
• 因为  $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$

上式可见，它有一个零点 $z=0$ （分子多项式的根）和一个极点 $z=a$ （分母多项式的根）。

若  $0 < |a| < 1$ ，则**ROC包含单位圆**，所以傅立叶变换也收敛。

• 若  $|a| > 1$ ，ROC就不包括单位圆， $a^n u[n]$  的傅立叶变换不收敛。

即 
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a^n u[n]| \rightarrow \infty$$



(b) 对于  $0 < a < 1$  时，例 10.1 的零极点图 and 收敛域

**结论:**

- 右序列z变换的收敛域一般位于z平面半径为 r 的圆外区域。
- 只有当ROC包括单位圆时， $x[n]$ 的傅立叶变换才绝对收敛。

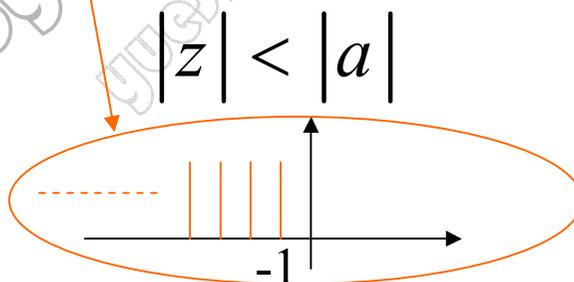
例 10.2 设  $x[n] = -a^n u[-n-1] = -a^n u[-(n+1)]$  ——这是一个左序列

$$\text{那么 } X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n$$

• 若使该级数收敛，则应使  $|a^{-1}z| < 1$ ，即  $z$  变换的收敛域为： $|z| < |a|$

$$\text{这时 } X(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

它有一个零点  $z = 0$  和一个极点  $z = a$ 。



**结论:**

1. 左序列  $z$  变换的收敛域位于  $z$  平面收敛半径为  $a$  的圆内区域。
2. 由例1、例2可见：只要  $x[n]$  是实指数或复指数的线性组合， $X(z)$  就一定是有理的。

**注意:** 例10.1和10.2中,两者的  $X(z)$  代数表示式和零极点图都是一样的,不同的仅是  $z$  变换的收敛域。因此,  $z$  变换的表述既要求它的代数表示式, 又要求相应的收敛域。

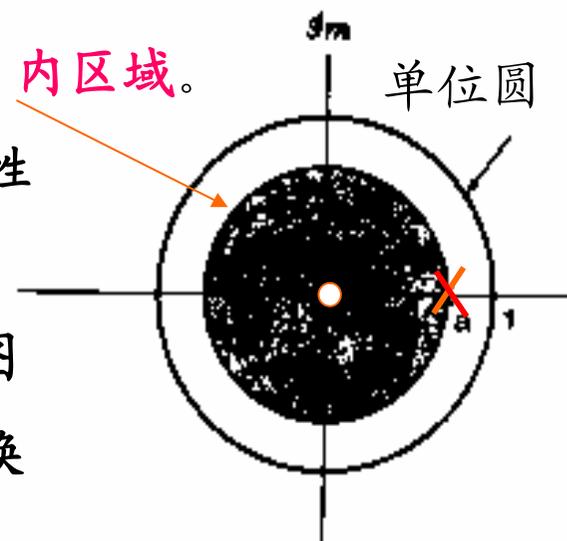


图 10.3 对于  $0 < a < 1$  时, 例 10.2 的零极点图和收敛域

## 10.2 z变换的收敛域性质

z变换的收敛域的几个性质:

**性质1:**  $X(z)$  的ROC是在z平面内以原点为中心的圆环。

因为: 根据z变换的定义, 有

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

若将上式中的复变量z表示成极坐标形式  $z = re^{j\omega}$ , 可得

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)r^{-n}]e^{-j\omega n}$$

当  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty$  时, 信号的z变换一定存在。

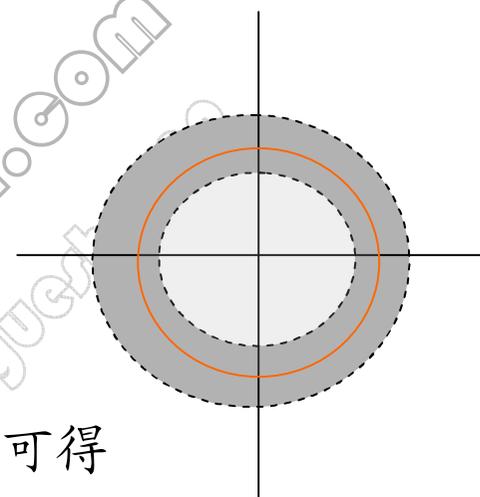
可见, 对于给定的  $x[n]$ , 它的z变换是否收敛, 仅决定于  $r$  的取值, 而与  $\omega$  无关。

由于收敛域仅取决于  $r$ , 所以若有某一特定的  $z$  值在收敛域内, 那么在同一圆

上的全部  $z$  值都位于收敛域内——这就说明收敛域是由同心圆环组成。在某些情

584

况下, ROC的内圆的边界可向内延伸到零点, 外圆边界可向外延伸到无限远。



性质2: ROC 内不包含任何极点。

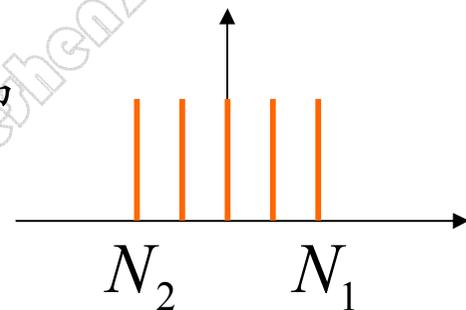
因为在极点处,  $X(z)$  为无穷大。因此根据定义,  $z$  变换不收敛。

性质3: 如果  $x[n]$  是有限长序列, 那么 ROC 就是整个  $z$  平面, 可能除去  $z=0$  和/或

$z=\infty$  —— 这要看上下限的具体情况。

因为对于有限长序列  $x[n]$ , 其  $z$  变换为一有限项级数, 即

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n}, \quad N_2 \geq N_1$$



- 若  $z$  不等于零和无穷大时, 和式中的每一项均为有限值, 所以  $X(z)$  一定收敛。
- 若  $N_1 < 0$  和  $N_2 > 0$ , 和式中既有  $z$  的正幂项, 又包含  $z$  的负幂项, 此时收敛域不包括  $z=0$  和  $|z|=\infty$ 。(当  $|z| \rightarrow 0$  时,  $z$  的负幂项  $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$  变为无界; 而当  $|z| \rightarrow \infty$  时,  $z$  的正幂项变为无界。)
- 如果  $N_1 \geq 0$ , 和式中仅有  $z$  的负幂项, 这时收敛域就包含  $|z|=\infty$ , 但不包括  $z=0$ 。
- 如果  $N_2 \leq 0$ , 和式中只有  $z$  的正幂项, 这时收敛域包括  $z=0$ , 但不包括  $|z|=\infty$ 。

性质4: 如果 $x[n]$ 是一个右边序列, 并且 $|z|=r_0$ 的圆位于ROC内, 那么 $|z|>r_0$

的全部有限 $z$ 值都一定在这个ROC内。

可能除去无限大

一个右边序列是指 $n < N_1$ 时,  $x[n]=0$ 的序列。其 $z$ 变换式可写成为

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

式中 $N_1$ 是有限值, 可以正也可以负。

1、当 $N_1$ 是负时, 和式中包括 $z$ 的正幂次项, 这些项将随 $|z| \rightarrow \infty$ 而变成无界。

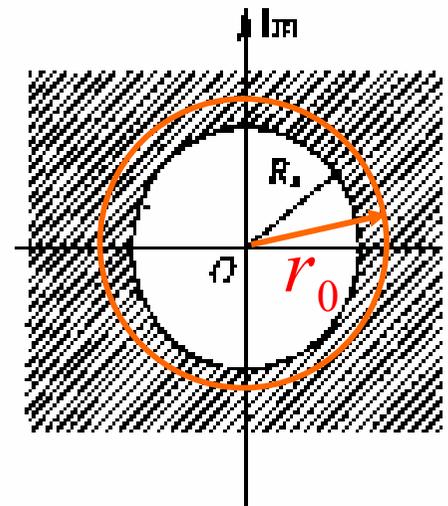
此时, 右边序列的ROC不包括无穷远点。

2、当 $N_1 \geq 0$ 时, 和式中只有 $z$ 的负幂次项, 这些项将随

为因果序列

$|z| \rightarrow 0$ 而变成无界。此时ROC不包含 $z=0$ ,

但包括 $z = \infty$ 。



右边序列的R

性质5: 如果 $x[n]$ 是一个左边序列, 而且 $|z|=r_0$ 的圆位于ROC内。那么, 满足

$0 < |z| < r_0$  的全部 $z$ 值都一定在这个ROC内。

一个左边序列的 $z$ 变换有如下形式:

可能除去 $z=0$

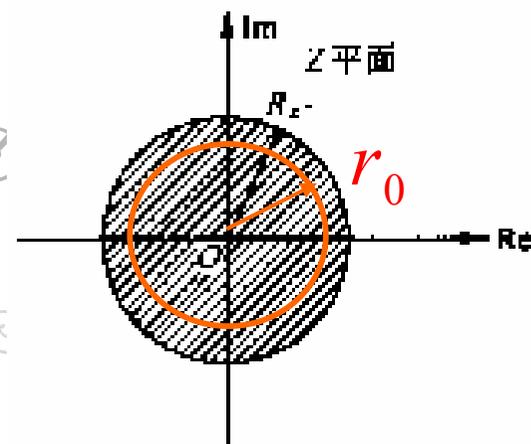
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{N_2} x[n]z^{-n}$$

这里 $N_2$ 可正可负。

1、当 $N_2$ 为正时, 则上式中将包括 $z$ 的负幂次项, 这些项

将随 $|z| \rightarrow 0$ 而变成无界。因此一般左边序列的 $z$ 变换, 其ROC不包括 $z=0$ ;

2、如果 $N_2 \leq 0$ , ROC一定包括 $z=0$ 。

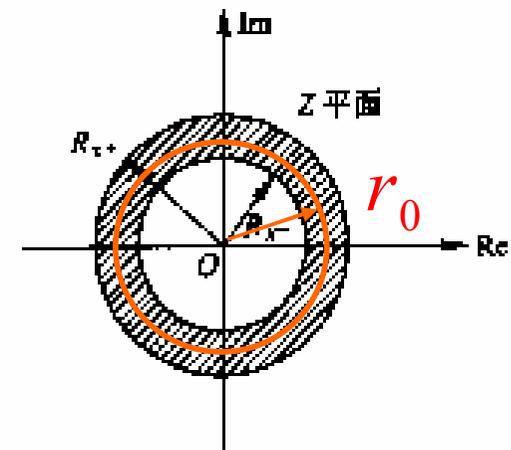


左边序列的 ROC

性质6: 如果 $x[n]$ 是双边序列, 而且 $|z|=r_0$ 的圆位于ROC内, 那么该ROC一定是由包括 $|z|=r_0$ 的圆环所组成。

双边序列的ROC可以把 $x[n]$ 表示成一个右边序列和一个左边序列之和来确定

- 1、对于右边分量的ROC在内部被一个圆所界定, 而向外延伸到无限远点;
- 2、对于左边分量的ROC向外被一个圆所界定, 而向内延伸到原点。
- 3、整个序列的ROC就是这两部分ROC的相交。重叠部分就是在 $z$ 平面内的一个圆环。



双边序列的  
ROC (阴影区)

下面将用几个例子来说明上面几个性质。

性质7: 如果 $x[n]$ 的 $z$ 变换 $X(z)$ 是有理的, 那么它的ROC就被极点所界定, 或者延伸至无限远。——即ROC内不包含极点。说明一定有极点

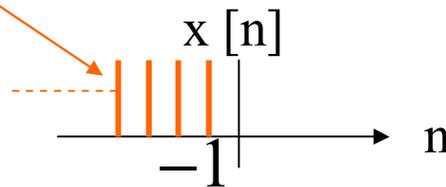
性质8: 如果 $x[n]$ 的 $z$ 变换 $X(z)$ 是有理的, 而且

- 若 $x[n]$ 是右边序列, 那么, ROC就位于 $z$ 平面内最外层极点的外边; (但可能不包括无穷远点)。
- 若 $x[n]$ 是因果序列 (即 $x[n]$ 为 $n < 0$  等于0的右边序列), 那么, ROC也包括  $z = \infty$  。

(这是将性质7与性质4、5结合在一起得到的)

性质9: 如果 $x[n]$ 的 $z$ 变换 $X(z)$ 是有理的, 而且

- 若 $x[n]$ 是左边序列, 那么, ROC就位于 $z$ 平面内最里层的非零极点的里边; 并且向内延伸到可能包括 $z = 0$ 。
- 若 $x[n]$ 是反因果序列 (即 $x[n]$ 当 $n > 0$  时等于0的左边序列), 那么, ROC也包括 $z = 0$  。



### 10.3 z 反变换

一个离散时间信号  $x[n]$  可以变换成  $z$  域函数  $X(z)$ ，同样一个  $z$  域函数  $X(z)$  也可以变换为时域信号  $x[n]$ 。前者称为  $z$  变换，后者则称  $z$  反变换，记作

$$x[n] = Z^{-1} \{ X(z) \}$$

我们知道信号  $x[n]$  的  $z$  变换可以看作  $x[n]r^{-n}$  的离散时间傅立叶变换，即

$$X(z) = X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\omega n} = F \{ x[n]r^{-n} \}$$

对上式两边进行傅立叶反变换，得

$$x[n]r^{-n} = F^{-1} \{ X(re^{j\omega}) \}$$

即：
$$x[n] = r^n F^{-1} \{ X(re^{j\omega}) \}$$

根据傅立叶反变换的定义，可得

$$x[n] = r^n \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\omega}) (re^{j\omega})^n d\omega$$

取  $z = re^{j\omega}$ ， $r$  固定不变，则有  $dz = re^{j\omega} d(j\omega) = jz d\omega$ ，即  $d\omega = \frac{1}{j} z^{-1} dz$

因为上式积分是对  $\omega$  在整个  $2\pi$  间隔内进行。当  $z$  作积分变量后，就相当于沿着  $|z|=r$  的圆环绕一周，所以有

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz \quad (10.41)$$

其中  $\oint_c$  代表逆时针沿着中心在原点、半径为  $r$  的圆作闭合路径积分。

(10.41) 式就是  $z$  反变换的表达式，它与 (10.3) 式一起构成  $z$  变换对。即

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz$$
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

显然，用 (10.41) 式来求  $z$  反变换要利用  $z$  平面的围线积分。然而，对有理  $z$  变换， $z$  反变换更为方便的方法是：幂级数展开法和部分分式法。

## 一、部分分式法

如z变换式X(z)具有如下形式:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_m z^{-M} + B_{m-1} z^{-(M-1)} + \cdots + b_1 z^{-1} + b_0}{a_n z^{-N} + a_{n-1} z^{-(N-1)} + \cdots + a_1 z^{-1} + a_0}$$

当  $M \geq N$  时, 可写为 
$$= \sum_{n=0}^{M-N} B_n z^{-n} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - z_k z^{-1}}$$

其中:  $z_k$  —— 是X(z)的一阶极点 ( $k=1,2,3,\dots$ )

$B_n$  —— 是X(z)的整数部分的系数, 可用长除法求得。

例10.9 有一z变换X(z)为: 
$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, |z| > \frac{1}{3}$$

求: x[n]

解: 由题可见: 1、有两个极点,  $z = 1/3$  和  $z = 1/4$ 。

2、ROC位于最外边极点的外边。——由性质4可知, **反变换是一个右边序列。**

其展开式为: 
$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{A_1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

可求得: 
$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

为了确定每一项的反变换, 必须标出每一项的ROC。由于X(z)的ROC是位于最外层极点的外边, **所以每一项的ROC都必须位于自己极点的外边。** 否则z变换不存在。

设  $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$

则  $x_1[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{4}$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{z} \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{3}$$

可得  $x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n], x_2[n] = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

例10.10 若将上例中的ROC改为  $1/4 < |z| < 1/3$ 。即

$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, \quad 1/4 < |z| < \frac{1}{3}$$

求  $x[n]$

解：用部分分式法将上式展开得： $X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$

设  $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$

$$x_1[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{4} \quad \text{与上题相同, 即 } x_1[n] \text{ 不变。}$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{z} \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{3} \quad \text{与上题不同, 由例10.2可得}$$

$$x_2[n] = -2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

所以  $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$  595

前面这些例子说明了利用部分分式法来确定z变换的基本步骤。

假定X(z)的部分分式具有如下形式:

$$X(z) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{1 - a_i z^{-1}}$$

X(z)的反变换就等于每一项反变换之和。

1、若X(z)的ROC是位于极点 $z = a_i$ 的外边,那么与上式相应项的反变换就是:

$$A_i a_i^n u[n]$$

2、若X(z)的ROC是位于极点 $z = a_i$ 的里边,那么对应于这一项的反变换就是:

$$-A_i a_i^n u[-n-1]$$

## 二、幂级数展开法

幂级数展开法是通过将z变换X(z) 展开成z的幂级数形式，进而求得z反变换。

由z变换定义可知，信号x [n] 的z变换为：

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= \cdots + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + \cdots + x[n]z^{-n} + \cdots \end{aligned}$$

这就是z的幂级数。并且幂级数展开式的通项的系数就是要求的信号序列。

因此只要将z变换展开为上述幂级数形式，就可以得到信号x[n] 的序列。

•对于z变换的幂级数展开可以借助于代数中的长除法进行，即将X(z)的分子和分母多项式按z的降幂或升幂排列，然后用分子多项式除以分母多项式，所得的商就是X(z)的幂级数展开式。

下面分三种情况进行说明：

当为反因果信号时

当为因果信号时

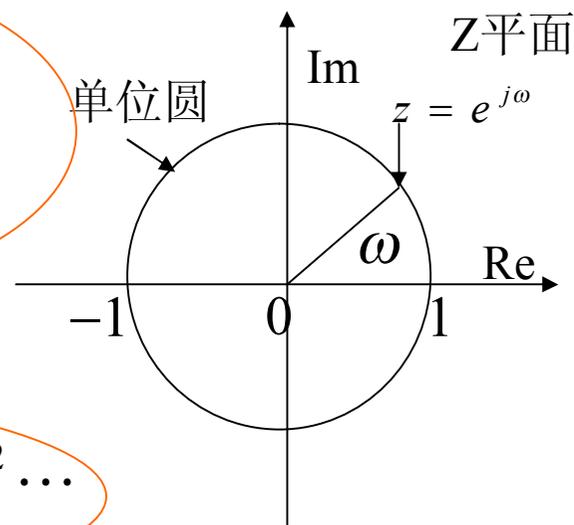
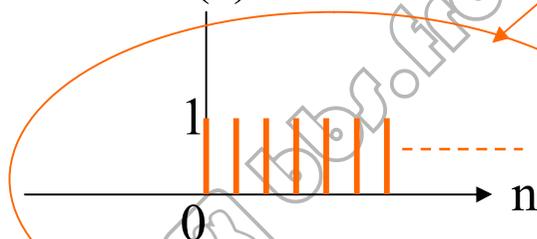
1、若  $X(z)$  的收敛域为  $|z| > 1$

例：已知  $X(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$  ,  $|z| > 1$  , 求  $x[n]$

解：由于  $X(z)$  的收敛域为  $|z| > 1$ ，这表示 ROC 在单位圆外，且包含无限远点。

所以  $X(z)$  所对应的时域信号  $x[n]$  一定是一个因果序列，幂级数展开式中只有  $z$  的负幂次项。因此对  $X(z)$  用长除法展开幂级数时，分子和分母多项式应

按降幂排列，即



$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[0]z^0 + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} \dots$$

$$\begin{array}{r}
1 + 2z^{-1} + \frac{5}{2}z^{-2} + \dots \\
\hline
1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} \left( \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2}z^{-1} \\ -) 1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} \\ \hline 2z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} \\ \hline 2z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3} \\ \hline \frac{5}{2}z^{-2} - z^{-3} \\ \hline \frac{5}{2}z^{-2} - \frac{15}{4}z^{-3} + \frac{5}{4}z^{-4} \\ \hline \frac{11}{4}z^{-3} - \frac{5}{4}z^{-4} \\ \hline \dots \end{array} \right)
\end{array}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = 1 + 2z^{-1} + \frac{5}{2}z^{-2} + \dots$$

因为单位脉冲的 $z$ 变换为:

$$\delta[n] \xleftrightarrow{Z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]z^{-n} = 1$$

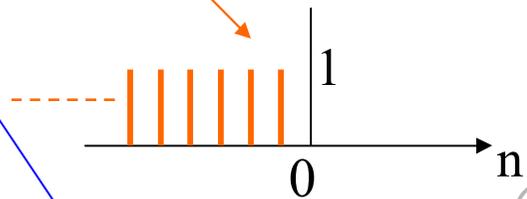
$$\delta[n - n_0] \xleftrightarrow{Z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_0]z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[m]z^{-(m+n_0)} = z^{-n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[m]z^{-m} = z^{-n_0}$$

$$\therefore x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \frac{5}{2}\delta[n-2]$$

2、如果收敛域变为  $|z| < \frac{1}{2}$  (即收敛域在圆内, 且一定包括  $z=0$ )

那么, 所对应的时域信号是一个反因果信号, 幂级数展开式中只有  $z$  的正幂次项。

此时必须按升幂排列, 即



$$\therefore X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]z^{-n} = z + 5z^2 + 13z^3 + \dots$$

当  $n \geq 0$  时  $x[n] = 0, x[-1] = 1, x[-2] = 5, x[-3] = 13, \dots$

$$\because \delta(n+n_0) \xleftrightarrow{z} z^{n_0}$$

$$x[n] = \delta[n+1] + 5\delta[n+2] + 13\delta[n+3] + \dots$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1 \\ \frac{1}{2}z^{-1} + 1 \end{array} \right) \frac{z + 5z^2 + 13z^3 + \dots}{\frac{1}{2}z^{-1} + 1}$$

$$-) \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{3}{2} + z$$

$$\frac{5}{2} - z$$

$$-) \frac{5}{2} - \frac{15}{2}z + 5z^2$$

$$\frac{13}{2}z - 5z^2$$

$$-) \frac{13}{2}z - \frac{39}{2}z^2 + 13z^3$$

$$\frac{29}{2}z^2 - 13z^3$$

3、如果 $X(z)$ 的收敛域是一个圆环（即所对应的时域信号为双边信号），必须把 $X(z)$ 分为收敛域为圆环的外圆以内的部分（对应的时域信号为反因果信号）和收敛域为圆环的内圆以外的部分（对应的时域信号为因果信号）之和，然后再分别应用幂级数展开法。

例如：双边信号为 $x[n]$ 的 $z$ 变换为：

$$X(z) = \frac{\frac{3}{2}z^{-1} - \frac{3}{2}z^{-2} + \frac{3}{4}z^{-3}}{(1-3z^{-1}+2z^{-2})(1-\frac{1}{4}z^{-2})} = \frac{z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}} + \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}, \quad \frac{1}{2} < |z| < 1$$

在用幂级数展开法求 $z$ 反变换时，首先应该把 $X(z)$ 分为

$$\frac{z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}, \quad |z| < 1 \quad \text{和} \quad \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$\swarrow$   $z_1=1, z_2=2$                        $\swarrow$   $z_1=1/2, z_2=-1/2$

然后再对这两项分别用长除法进行幂级数展开。

**注意：**用这种方法求得的结果通常只有 $x[n]$ 的若干个值，不容易据此写出 $x[n]$ 的表达式。但用幂级数展开法来求 $z$ 反变换对非有理的 $z$ 变换式特别有用。见下例

例 10.14 考虑如下z变换X(z)

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}) \quad , |z| > |a|$$

由于  $|z| > a$  , 可将上式展开为泰勒级数

因为

$$\log(1+v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} v^n}{n}, |v| < 1$$

所以

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n} z^{-n}$$

据此, 可确认出

$$x[n] = \begin{cases} (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n} & , n \geq 1 \\ 0 & , n \leq 0 \end{cases}$$

或等效为

$$x[n] = \frac{-(-a)^n}{n} u[n-1]$$

### 10.4 由零极点图对傅立叶变换进行几何求值

现考虑一个LTI系统,其输入、输出满足如下线性常系数差分方程:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \xrightarrow{z} \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = G \frac{\prod_{r=1}^m (1 - z_r z^{-1})}{\prod_{i=1}^n (1 - p_i z^{-1})} = G \frac{\prod_{r=1}^m (z - z_r)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)}$$

因式分解后得

当  $r=1$  时, 得

$$H(e^{j\omega}) = G \frac{\prod_{r=1}^m (e^{j\omega} - z_r)}{\prod_{i=1}^n (e^{j\omega} - p_i)} = G \frac{B_1 B_2 \cdots B_m e^{j(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_m)}}{A_1 A_2 \cdots A_n e^{j(\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_n)}} = G \frac{\prod_{r=1}^m B_r}{\prod_{i=1}^n A_i} e^{j(\sum_{r=1}^m \theta_r - \sum_{i=1}^n \phi_i)}$$

零点指向单位圆的向量

$$e^{j\omega} - z_r = B_r e^{j\theta_r}$$

$$e^{j\omega} - p_i = A_i e^{j\phi_i}$$

$$|H(e^{j\omega})| = G \frac{\prod_{r=1}^m B_r}{\prod_{i=1}^n A_i}$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{r=1}^m \theta_r - \sum_{i=1}^n \phi_i$$

因此，利用z平面内零极点向量能对傅立叶变换进行几何求值。

为了说明这一点，请看一阶和二阶系统

### 10.4.1 一阶系统

一阶因果离散时间系统的单位脉冲响应 $h[n]$ 具有如下形式：

$$h[n] = a^n u[n]$$

它的z变换为 
$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > a \quad (10.65)$$

若  $|a| < 1$ ，ROC包括单位圆。结果， $h[n]$ 的傅立叶变换收敛。

一阶系统的频率响应为：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - a} = \frac{|v_1| e^{j\omega_1}}{|v_2| e^{j\omega_2}} = \frac{|v_1|}{|v_2|} e^{j(\omega_1 - \omega_2)} \quad (10.66)$$

图(a)画出了(10.65)式的零极点图：极点  $z = a$  ; 零点  $z = 0$

频率响应在  $\omega$  处的模就是向量  $v_1$  的长度与向量  $v_2$  的长度之比。

频率响应的相位是：向量  $v_1$

相对于实轴的角度减去

向量  $v_2$  相对于实轴的角度。

• 由于向量  $v_1$  的长度为1，

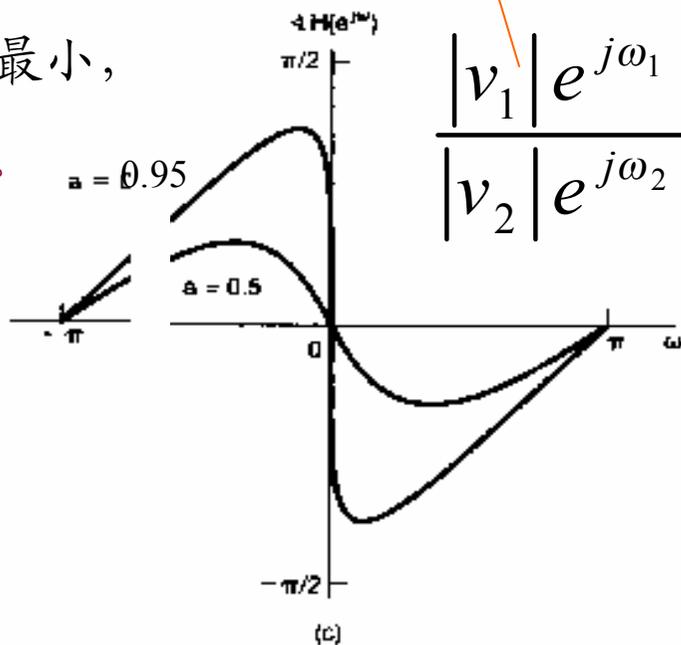
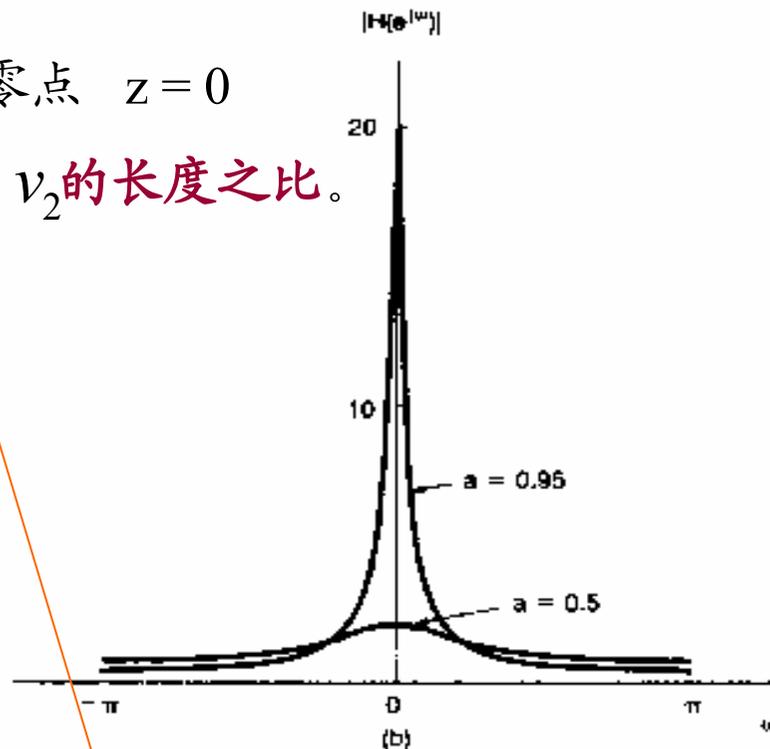
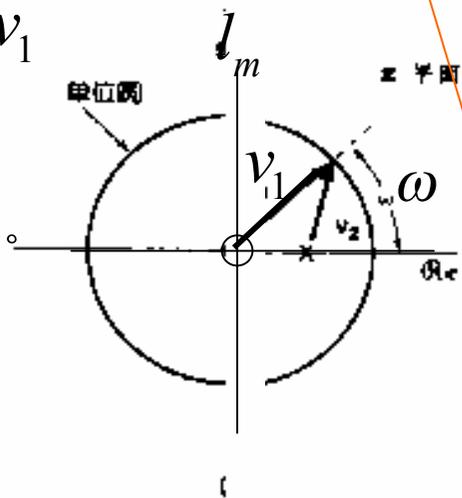
所以对模特性无影响，

它的相位为  $\omega$ 。

• 而向量  $v_2$  的长度在  $\omega = 0$  时最小，

所以在  $\omega = 0$  时，模有最大值。

图(b),(c)为不同  $a$  时的模和相位变化情况。



$$\frac{|v_1| e^{j\omega_1}}{|v_2| e^{j\omega_2}} = \frac{|v_1|}{|v_2|} e^{j(\omega_1 - \omega_2)}$$

## 10.4.2 二阶系统

一个二阶因果LTI系统，其差分方程为（式中  $0 < r < 1, 0 \leq \theta \leq \pi$ ）

$$y[n] - 2r \cos \theta y[n-1] + r^2 y[n-2] = x[n] \quad \leftarrow \text{见 P336 (6.75) 式}$$

求得系统函数为：

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1 - (2r \cos \theta)z^{-1} + r^2 z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - (2r \cos \theta)z + r^2} \\ &= \frac{z^2}{z^2 - r(e^{j\theta} + e^{-j\theta})z + r^2 e^{j\theta} e^{-j\theta}} = \frac{z^2}{z(z - re^{j\theta}) - re^{-j\theta}(z - re^{j\theta})} \\ &= \frac{z^2}{(z - re^{j\theta})(z - re^{-j\theta})} \end{aligned}$$

可求得极点为  $z_1 = re^{j\theta}$ ， $z_2 = re^{-j\theta}$

在  $z=0$  有二阶零点。

$H(z)$ 的零极点图如图10.14(a)所示。

频率响应的模等于

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|v_1|^2}{|v_2||v_3|}$$

频率响应的相位等于  $v_1$  相对于实轴的角度的两倍减去向量  $v_2$  和  $v_3$  的角度之和。

图 (b)、(c) 为不同  $r$  时频率响应的模和特性。

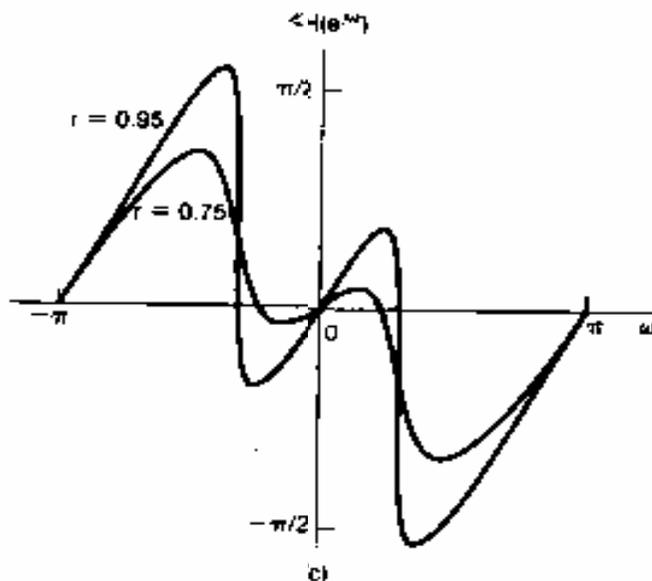
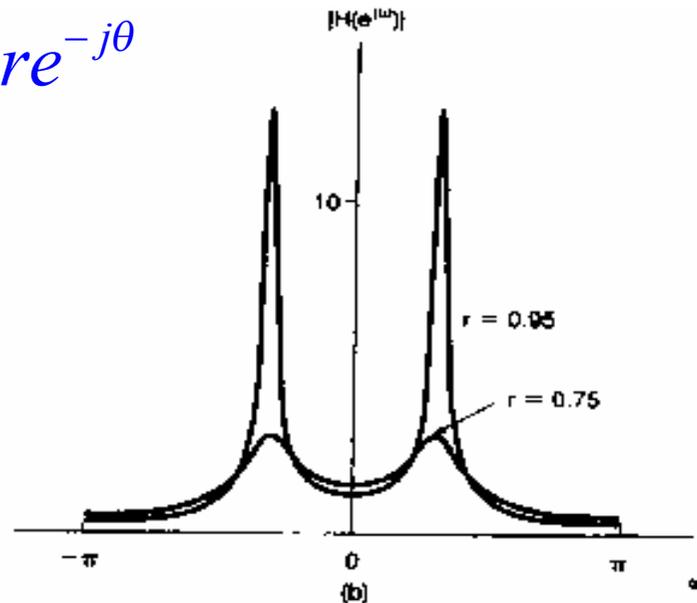
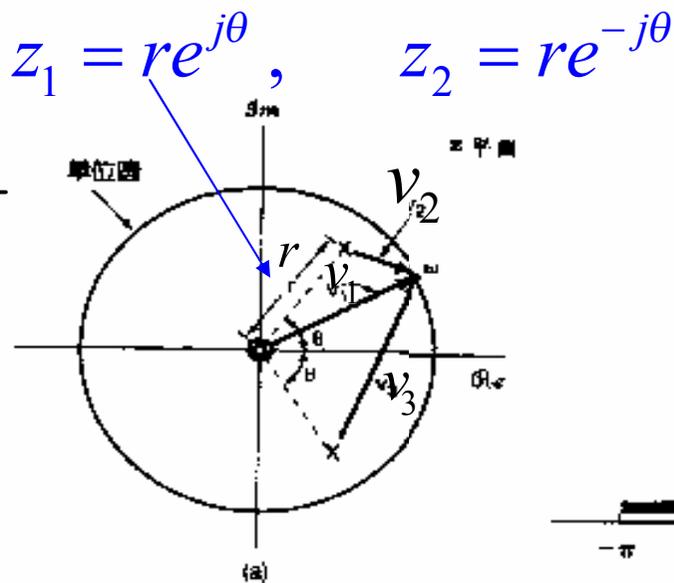


图 10.14 (a)用于二阶系统频率响应几何求值中的零点向量  $v_1$  和极点向量  $v_2$  和  $v_3$ ;  
 (b) 对于  $r=0.95$  和  $r=0.75$  时, 对应于极点向量长度乘积的倒数的频率响应模特性;  
 (c)  $r=0.95$  和  $r=0.75$  时频率响应的相位特性

## 10.5 z变换的性质

### 10.5.1 线性

$$\text{若 } x_1[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z) \quad , ROC = R_1 \quad (R_{1-} < |z| < R_{1+})$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_2(z) \quad , ROC = R_2 \quad (R_{2-} < |z| < R_{2+})$$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{z} aX_1(z) + bX_2(z) \quad ROC \text{ 包括 } R_1 \cap R_2$$

- 1、这里a和b为常数。
- 2、 $aX_1(z) + bX_2(z)$ 的收敛域，在一般情况下是各信号（即  $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ ）z变换收敛域的公共部分。
- 3、若在相加过程中出现零极点相消现象，则收敛域可能要比各信号z变换收敛域的公共部分大。

例如：求序列  $y[n] = a^n u[n] - a^n u[n-1]$  的Z变换。

解：令  $x_1[n] = a^n u[n]$ ,  $x_2[n] = a^n u[n-1]$

由Z变换定义，可得

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

$$X_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{m=0}^{\infty} a^{m+1} z^{-(m+1)} = \frac{a}{z} \sum_{m=0}^{\infty} (az^{-1})^m = \frac{a}{z} \cdot \frac{1}{(1-az^{-1})} = \frac{a}{z-a}, \quad |z| > a$$

所以有： 设  $m = n - 1$  则  $n = m + 1$

$$Y(z) = X_1(z) - X_2(z) = \frac{z}{z-a} - \frac{a}{z-a} = \frac{z-a}{z-a} = 1, \quad 0 \leq |z| \leq \infty$$

可见，线性叠加后可能使得新序列Z变换的零极点相互抵消，导致新序列的Z变换的ROC边界发生改变。此例中ROC就由旧序列的  $|z| > a$  扩展到新序列的**全部Z平面**。

## 10.5.2 时移性质

$$\text{若 } x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad \text{ROC} = R$$

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z) \quad \text{ROC} = R, \text{ 原点或无限远点可能加上或除掉.}$$

证明:

$$\begin{aligned} Z \{x[n - n_0]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n - n_0] z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-(m+n_0)} \\ &= z^{-n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-m} = z^{-n_0} X(z) \end{aligned}$$

**上述性质表明:** 信号在时域平移一个  $n_0$ , 相当于 Z 域乘以  $z^{-n_0}$ 。其收敛域在  $z=0$  或  $|z|=\infty$  处可能发生变化。这是因为  $n_0$  是一个可正可负的整数。

1、当  $n_0 > 0$  时,  $z^{-n_0}$  将会在  $z=0$  引入极点, 因此说,  $z^{-n_0} X(z)$  的 ROC 等于  $X(z)$  的 ROC, 但原点要除去。

2、当  $n_0 < 0$  时, 在这种情况下,  $z=\infty$  是  $z^{-n_0} X(z)$  的一个极点, 因此,  $z^{-n_0} X(z)$  的 ROC 等于  $X(z)$  的 ROC, 但要除去  $z=\infty$ 。

### 10.5.3 z域尺度变换

$$\text{若 } x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \quad \text{ROC} = R \quad ( \rho_1 < |z| < \rho_2 )$$

$$\text{则 } z_0^n x[n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad \text{ROC} = |z_0| R \quad ( \rho_1 < \left| \frac{z}{z_0} \right| < \rho_2 )$$

证明：据定义

$$Z\{z_0^n x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_0^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\frac{z}{z_0}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad \text{ROC} = |z_0| R$$

此性质表明：信号在时域乘以  $z_0^n$ ，在z域等效进行尺度变换。这里  $z_0$  通常是一个复常数。

1、如果  $z_0 = e^{j\omega_0}$ ，这时  $|z_0| R = R$ ，并且  $e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{z} X(e^{-j\omega_0} z)$

上式左边相应于乘以复指数序列；而右边可以看作在z平面内旋转。即全部零极点的位置在z平面内旋转一个  $\omega_0$  的角度。如图10.15所示。

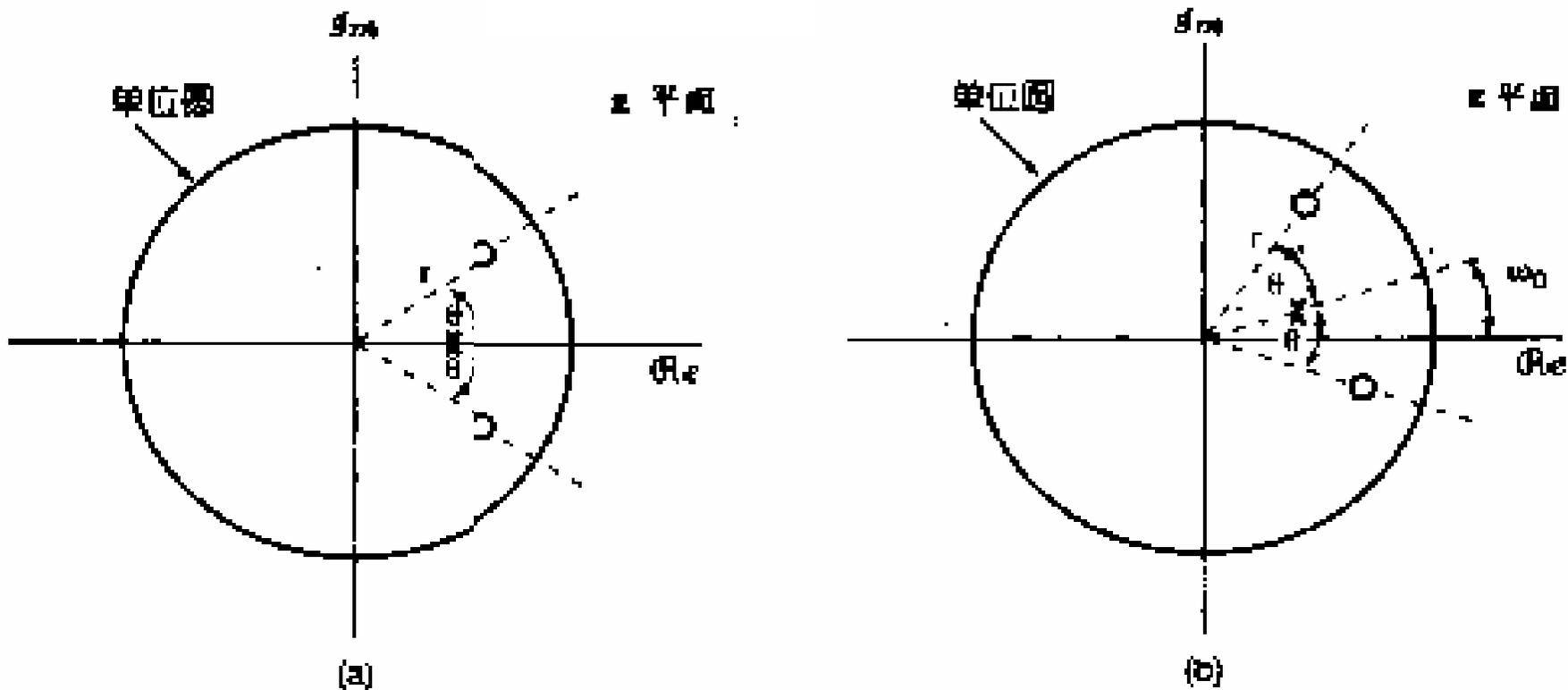


图 10.15 对域乘以复指数序列  $e^{j\omega_0 n}$  在零极点图上的效果:

(a) 信号  $x[n]$  的  $z$  变换的零极点图; (b)  $x[n]e^{j\omega_0 n}$  的  $z$  变换的零极点图

这一过程可以这样来看: 如果  $X(z)$  中有一个因式  $(1 - az^{-1})$ , 那么,  $X(e^{-j\omega_0} z)$  中将有一个因式为  $(1 - ae^{j\omega_0} z^{-1})$ 。于是  $X(z)$  在  $z = a$  的一个极点或零点就变成  $X(e^{-j\omega_0} z)$  中在  $z = ae^{j\omega_0}$  的一个极点或零点。因此  $z$  变换在单位圆上的特性也将移动一个角度  $\omega_0$ 。

2、若  $z_0 = r_0 e^{j\omega_0}$  ，则除了零点和极点有一个  $\omega_0$  旋转外，在大小上还要有  $r_0$  倍的变化。即  $(1 - ar_0 e^{j\omega_0} z^{-1})$

免费考研网 [bbs.freekaoyan.com](http://bbs.freekaoyan.com)  
yueshen22

#### 10.5.4 时间反转

若  $x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \quad ROC = R$

则  $x[-n] \xleftrightarrow{z} X(z^{-1}) \quad ROC = \frac{1}{R}$

证明:  $Z\{x[-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m](z^{-1})^{-m} = X(z^{-1})$

信号在时域进行反转等效于z域坐标变换为  $z^{-1}$ 。其收敛域为R的倒置。

说明: 如果  $X(z)$  的收敛域为  $a < |z| < b$  , 则  $X(z^{-1})$  对应的收敛域为:

$$a < |z^{-1}| < b \quad \text{则有} \quad b^{-1} < |z| < a^{-1}$$

### 10.5.5 时间扩展

因为离散时间变量是仅仅定义在整数值上。所以在5.3.7节引入了 $x_{(k)}[n]$ 其定义为

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k] & , n \text{ 是 } k \text{ 的整数倍} \\ 0 & , n \text{ 不是 } k \text{ 的整数倍} \end{cases}$$

它在原有序列 $x[n]$ 的各连续值之间插入 $(k-1)$ 个零值序列。

在这种情况下, 若  $x[n] \xrightarrow{Z} X(z) \quad ROC = R$

则  $x_{(k)}[n] \xrightarrow{Z} X(z^k) \quad ROC = R^{1/K}$

证明:  $Z\{x[n/k]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n/k]z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-mk} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m](z^k)^{-m} = X(z^k)$

其收敛域为:  $ROC = R^{1/K}$

说明: 如果  $X(z)$  的收敛域为  $|z| > a$ , 则  $X(z^k)$  对应的收敛域为:

$$|z^k| > a \quad \text{则有} \quad |z| > a^{1/K}$$

### 10.5.6 共轭

$$\text{若 } x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad \text{ROC} = R$$

$$\text{则 } x^*[n] \xleftrightarrow{z} X^*(z^*) \quad \text{ROC} = R$$

$$\text{证明: } Z\{x^*[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]z^{-n} = \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](z^*)^{-n} \right]^* = X^*(z^*) \quad \text{ROC} = R$$

1、若  $x[n]$  是实序列，可得  $X(z) = X^*(z^*)$

2、若  $X(z)$  有一个  $z = z_0$  的极点（或零点），那么就一定有一个与  $z_0$  共轭成对的  $z = z_0^*$  的极点（或零点）。例如，在例10.4(P537)中实序列  $x[n]$  的  $z$  变换就有一对共轭的极点。

### 10.5.7 卷积性质

$$\text{若 } x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z) \quad \text{ROC} = R_1$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_2(z) \quad \text{ROC} = R_2$$

$$\text{则 } x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z) \quad \text{ROC} = R_1 \cap R_2$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } Z\{x_1[n] * x_2[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_1[n] * x_2[n]]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [x_1[m] \cdot x_2[n-m]]z^{-n} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-m]z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m][z^{-m}X_2(z)] \\ &= X_2(z) \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]z^{-m} = X_2(z)X_1(z) \end{aligned}$$

可见，两序列在时域中的卷积等效于在 $z$ 域中两序列 $z$ 变换的乘积。乘积的收敛域是  $X_1(z)$  和  $X_2(z)$  的收敛域的**重叠部分**。

如果在收敛域边界上一个 $z$ 变换的极点与另一个 $z$ 变换的零点相互抵消，则收敛域还可扩大。

注意到这个系统有

$$y[n] = [\delta[n] - \delta[n-1]] * x[n] = x[n] - x[n-1]$$

可见 $y[n]$ 是序列 $x[n]$ 的一次差分。其 $z$ 变换为：

$$y[n] \xleftrightarrow{z} (1 - z^{-1})X(z) \quad ROC = R$$

例10.16 现在考虑一次差分的逆运算，即累加器或求和器。

$$\text{若 } x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \quad ROC = R$$

$$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - z^{-1}} X(z) \quad ROC \text{ 至少包括 } R \cap |z| > 1$$

证明：由 $u[n]$ 的卷积性质可得

$$\sum_{k=-\infty}^n x[k] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[n-k] * x[k] = u[n] * x[n]$$

$$\text{而 } u[n] \xleftrightarrow{z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad |z| > 1$$

$$\therefore \sum_{k=-\infty}^n x[k] = u[n] * x[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - z^{-1}} X(z) \quad ROC = R \cap |z| > 1$$

### 10.5.8 Z 域微分

若  $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad ROC = R$

则  $nx[n] \xleftrightarrow{Z} -z \frac{dX(z)}{dz} \quad ROC = R$

证明:

因为  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$

对上式求导得  $\frac{dX(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{d}{dz} (z^{-n}) = -n \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n-1}$

$$= -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n} = -z^{-1} Z \{nx[n]\}$$

所以有  $nx[n] \xleftrightarrow{Z} -z \frac{dX(z)}{dz} \quad ROC = R$

### 10.5.9 初值定理

若  $n < 0, x[n] = 0$

则  $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$

证明:

因为  $n < 0$  时,  $x[n] = 0$ , 即该信号为因果信号。所以这信号的  $z$  变换可表示为:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} x[n]z^{-n} + x[0]$$

上式第一部分由于包含  $z$  的负幂次项, 因而当  $z \rightarrow \infty$  时趋近于零。

于是有  $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$

从初值定理可以看到: 若因果序列  $x[n]$  的初值 (即  $x[0]$ ) 有限, 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} X(z)$

也是有限值。

此外，对因果序列有  $X(z) = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + x[3]z^{-3} + \dots$

则当  $x[0]$  求出后，可求得  $x[1]$  等，即

$$z[X(z) - x[0]] = x[1] + x[2]z^{-1} + x[3]z^{-2} + \dots$$

所以

$$x[1] = \lim_{z \rightarrow \infty} z[X(z) - x[0]]$$

以此类推，可得

$$z^2[X(z) - x[0] - x[1]z^{-1}] = x[2] + x[3]z^{-1} + \dots$$

$$x[2] = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2[X(z) - x[0] - x[1]z^{-1}]$$

$$x[n] = \lim_{z \rightarrow \infty} z^n \left[ X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x[k]z^{-k} \right]$$

这说明，可以直接从  $X(z)$  递推出  $x[n]$  的任何一点的值。

补充: 终值定理

若因果序列  $x[n]$  的  $z$  变换为  $X(z)$ , 而且  $X(z)$  的极点除了在  $z=1$  允许有一阶极点外, 其余极点均在单位圆内。则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)]$$

证明:  $\because (z-1)X(z) = Z\{x[n+1]-x[n]\} = \sum_{n=-1}^{\infty} x[n+1]z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$

$$= zx[0] + \sum_{n=0}^{\infty} x[n+1]z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = zx[0] + \sum_{n=0}^{\infty} [x[n+1]-x[n]]z^{-n}$$

两边取  $z \rightarrow 1$  的极限得

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ zx[0] + \sum_{n=0}^{\infty} [x[n+1]-x[n]]z^{-n} \right\}$$

$$= x[0] + \sum_{n=0}^{\infty} [x[n+1]-x[n]] = x[0] + [x[1]-x[0]] + [x[2]-x[1]] + \dots$$

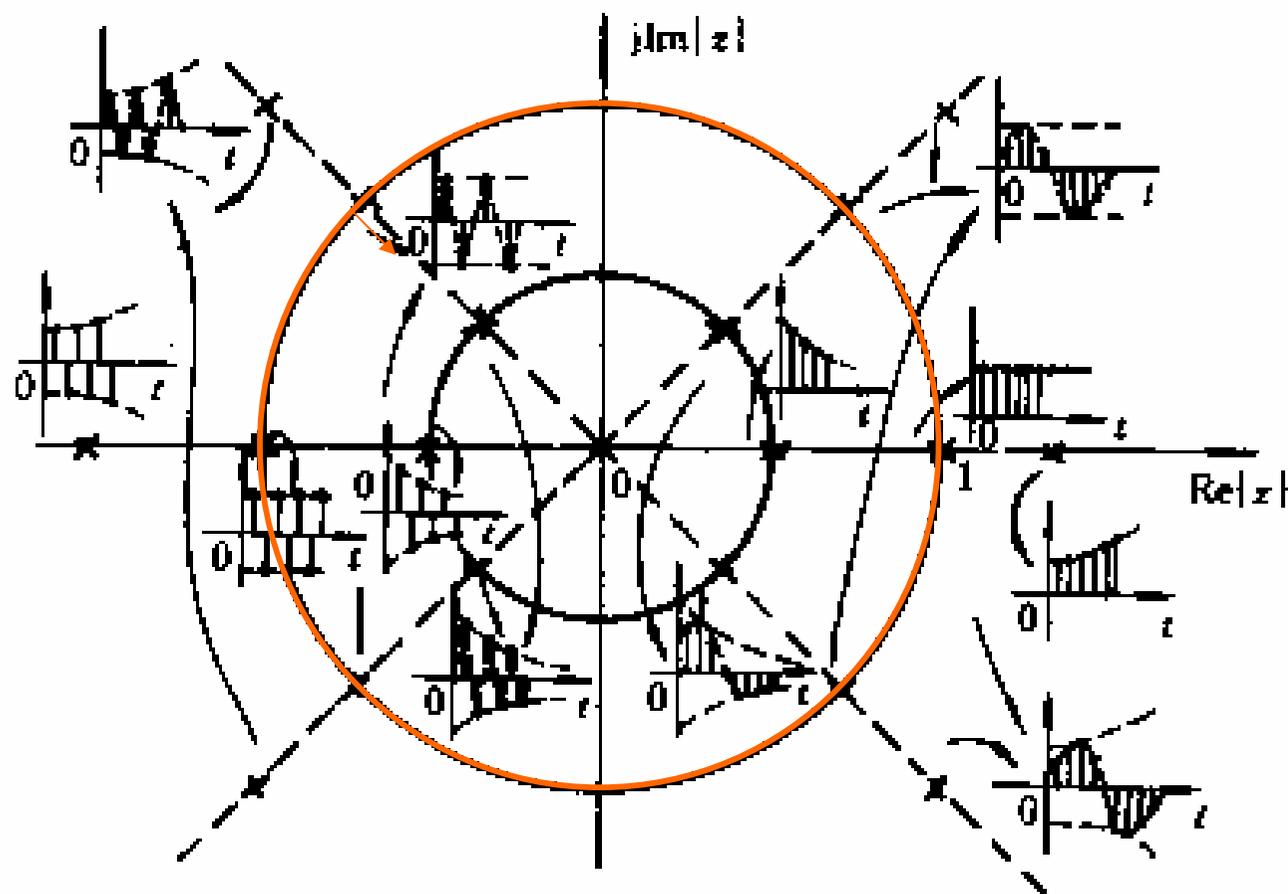
$$= x[\infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} x[n]$$

即得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)]$

应注意: 1、只有当 $x[n]$ 的终值存在,才能保证  $\lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)]$  收敛于终值。

2、要使 $x[n]$ 的终值存在,  $X(z)$  的极点必须在单位圆内, 在单位圆上只能在 $z=1$ 处有一阶极点。(因为若 $z < 1$ 则 $X(z)$ 为衰减;  $z=1$ 为常数)

下图绘出了部分信号 $z$ 变换的极点分布与信号特性的关系



部分信号 $z$ 变换的极点分布与信号特性的关系

初值和终值定理提供了一种在z域求时域的初值和终值的方法。利用这种方法，可以从信号的z变换中获得信号的初值和终值。这对离散时间LTI系统的分析是十分有用的。

例：设信号为： $x[n] = (a^n + 1)u[n]$        $0 < |a| < 1$

求：z变换、 $x[0]$ 、 $x[1]$ 、终值  $x[\infty]$ 。

解：1、z变换

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{2-(a+1)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})}$$

2、由初值定理得

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2-(a+1)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})} = 2$$

$$x[1] = \lim_{z \rightarrow \infty} z[X(z) - x[0]] = \lim_{z \rightarrow \infty} z \left[ \frac{2-(a+1)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})} - 2 \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z[2-(a+1)z^{-1} - 2(1-az^{-1})(1-z^{-1})]}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})} = a+1$$

3、由终值定理得

$$\begin{aligned}x[\infty] &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (z-1) \frac{2 - (a+1)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)[2z - (a+1)]}{(1-az^{-1})(z-1)} = 1\end{aligned}$$

10.5.10 性质小结 —— P 559 表10.1 z变换性质

10.6 几个常用z变换对——见 P 560 表10.2

10.7 利用z变换分析与表征LTI系统

离散时间LTI系统的分析方法有：

1、时域分析法；  $y[n] = x[n] * h[n]$

2、频域分析法；先求  $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ ，再对  $Y(e^{j\omega})$  进行反变换得系统响应  $y[n]$ 。

3、z域分析法；先求  $Y(z) = X(z)H(z)$ ，再对  $Y(z)$  进行反变换得系统响应  $y[n]$ 。

称系统的频率响应

称系统函数或转移函数

显然，z域分析法和频域分析法类似，都是将时域问题转换到另一个域进行。事实上当  $z = e^{j\omega}$ （即z变换在单位圆上求值）时，z域分析就是频域分析，此时的系统函数  $H(z)$  就是系统的频率响应  $H(e^{j\omega})$ 。

一个系统的很多性质都能够直接与系统函数的零极点和收敛域的性质相联系。

本节将通过考察几个重要的系统性质和一类重要的系统来说明这些关系。<sup>627</sup>

### 10.7.1 因果性

- 一个**因果**离散LTI系统的单位脉冲响应  $h[n]$  满足:

$$n < 0, h[n] = 0$$

即因果离散LTI系统的单位脉冲响应  $h[n]$  是一右边序列。因此,  $H(z)$  的ROC是位于  $z$  平面内某一个圆的外边;

- 再看它的  $z$  变换式:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

可见,  $H(z)$  的幂级数不包含任何  $z$  的正幂次项, 因此ROC包含  $z = \infty$ 。

#### 结论:

一个离散时间LTI系统当且仅当它的系统函数的ROC是在某一个圆的外边, 且包括无限远点, **该系统就是因果的**。

如果  $H(z)$  又是有理的, 则随着  $z \rightarrow \infty$ ,  $H(z)$  的极限必须是有限的。这意味着: 当  $H(z)$  的分子和分母都是表示成  $z$  的多项式时, 其分子的阶次<sup>628</sup>不会

大于分母的阶次。即：

一个具有有理系统函数 $H(z)$ 的LTI系统要是因果的，则：

- a)、ROC位于最外层极点外边某一个圆的外面；
- b)、若 $H(z)$ 表示成 $z$ 的多项式之比，其分子的阶次**不能大于分母的阶次**。

利用这些结论可对系统进行判别。

例 1 0.20 考虑一系统的系统函数，其代数表示式为：

$$H(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + z}{z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}}$$

解：因为分子的阶次大于分母的阶次，所以该系统不是因果的。

例 10.21 考虑一系统，其系统函数是

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, \quad |z| > 2$$

解:

$$\begin{aligned} \therefore H(z) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2z^{-1}} = \frac{2 - \frac{5}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})} \\ &= \frac{2 - \frac{5}{2}z^{-1}}{1 - 2z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-1} + z^{-2}} = \frac{2z^2 - \frac{5}{2}z}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1} \end{aligned}$$

其极点为  $z_1 = 1/2$  ,  $z_2 = 2$

可见: 1、该函数的ROC是在最外层极点外边的某一个圆的外边——说明它的单位脉冲响应是右边序列。

2、 $H(z)$  的分子阶次等于分母的阶次。

**结论:** 该系统是因果的 (计算出  $H(z)$  的反变换可证实这一点) 630

$$\therefore H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, \quad |z| > 2$$

$$\therefore h[n] = [(1/2)^n + 2^n]u[n]$$

可见，当  $n < 0$  时， $h[n] = 0$ 。——说明系统是因果的

### 10.7.2 稳定性

离散时间系统稳定的充要条件是：单位脉冲响应  $h[n]$  绝对可和，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

见 P 81

由  $z$  变换定义和系统函数定义可知：
$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

当  $z = 1$  (在  $z$  平面单位圆上) 
$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]$$

为使系统稳定，应满足 
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] < \infty$$

这表明：对于稳定系统， $H(z)$  的收敛域 ROC 应包含单位圆在内。

综上所述, 可得以下**结论**:

一个LTI系统当且仅当它的系统函数  $H(z)$  的ROC 包括单位圆 ( $|z|=1$ ) 时, 该系统就是稳定的.

例10.22 已知系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, \quad |z| > 2$$

分析系统的性质.

解: 1、因为  $|z| > 2$ , 所以ROC不包含单位圆, 所以系统不稳定.

这点也能从单位脉冲响应看出:——不是绝对可和。即

$$h[n] = [(1/2)^n + 2^n]u[n]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] = \sum_{n=0}^{\infty} [(1/2)^n + 2^n] \rightarrow \infty$$

2、若改变ROC为  $1/2 < |z| < 2$ , 那么ROC包括单位圆, 这样对应的系统是稳定的, 但是非因果的。

这也可利用反变换, 求出相应的单位脉冲响应  $h[n]$  来判别:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, \quad 1/2 < |z| < 2$$

$$h[n] = (1/2)^n u[n] - 2^n u[-n-1]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (1/2)^n - \sum_{n=-1}^{+\infty} 2^n \right\} < \infty$$

$h[n]$ 是绝对可和,所以是稳定的。但由于  $n < 0, h[n] \neq 0$  所以是非因果的。

3、若  $|z| < 1/2$  , 则ROC不包含单位圆, 所以系统不稳定。同时, ROC不是在最外层极点的外边, 所以也不是因果系统。

这也可求出相应的单位脉冲响应  $h[n]$  来判别:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, \quad |z| < 1/2$$

$$h[n] = -[(1/2)^n + 2^n]u[-n-1]$$

$h[n]$ 不绝对可和

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] = \sum_{n=-1}^{-\infty} -[(1/2)^n + 2^n] \rightarrow \infty$$

由上述可知:

一个具有有理系统函数的因果LTI系统, 当且仅当  $H(z)$  的全部极点都位于单位圆内时, 也即全部极点其模均小于1时, 系统就是稳定的。

意味着: ROC包括单位圆

免费考研网 bbs.freekaoyan.com yueshen22

### 10.7.3 具有线性常系数差分方程表征的LTI系统

对于由线性常系数差分方程表征的系统,  $z$  变换的这些性质对于求得系统的系统函数、频率响应、或时域响应等都提供了一个特别方便的方法。现用一个例子来说明。

例10.25 考虑一LTI系统,其输入和输出满足如下线性常系数差分方程:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3}x[n-1] \quad (10.102)$$

解: 上式两边应用 $z$ 变换, 可得

$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) = X(z) + \frac{1}{3}z^{-1}X(z)$$

系统函数

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

1、若ROC选为  $|z| > 1/2$ , 则得

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{3} \delta[n-1] \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

是稳定的

2、若  $|z| < 1/2$  , 即

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| < 1/2$$

可得

$$\begin{aligned} h[n] &= -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] * \delta[n-1] \\ &= -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[-n] \end{aligned}$$

可见, 这时为反因果的 ( $n > 0, h[n] = 0$ ); 且是不稳定的 (因为收敛域不是在最外层极点的外边; 不包含单位圆)。

对于一般的N阶差分方程，也可用类似的方法进行。

设一个LTI系统，其输入、输出满足如下线性常系数差分方程：

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

在上式两边取z变换，可得

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z)$$

则有

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

由于差分方程本身没有提供关于与代数表示式  $H(z)$  有关的ROC的信息。因此，像因果性、稳定性等这些附加的限制应该用来作为标定收敛域的条件。

例如：

- 1、如果知道系统是因果的，那么ROC就一定位于最外层极点的外边，包括  $z=\infty$
- 2、如果系统是稳定的，ROC就必定包括单位圆。

## 10.7.4 系统特性与系统函数的关系举例

离散时间系统的很多性质**直接与系统函数和它的特性有关**.这一节将给出几个例子来表明 **$z$ 变换是如何用于系统分析**.

**例10.26** 假设一个LTI系统**给出**下列信息:

1、若系统的输入是  $x_1[n] = (1/6)^n u[n]$  , 则输出是:

$$y_1[n] = \left[ a\left(\frac{1}{2}\right)^n + 10\left(\frac{1}{3}\right)^n \right] u[n]$$

*a为实数*

2、若  $x_2[n] = (-1)^n$  , 则输出是:  $y_2[n] = \frac{7}{4}(-1)^n$

现在要说明, **从这两条信息中就能确定该系统的系统函数  $H(z)$ 、 $a$ 的值**,  
同时**也能立即推出该系统的几个性质**.

• 由第一条信息, 可得出这信号的 $z$ 变换是:

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6}z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{6}$$

因果的

$$Y_1(z) = \frac{a}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{10}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{(a+10) - (5 + \frac{a}{3})z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$H(z) = \frac{Y_1(z)}{X_1(z)} = \frac{[(a+10) - (5 + \frac{a}{3})z^{-1}][1 - \frac{1}{6}z^{-1}]}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}$$

- 对于  $x_2[n] = (-1)^n$  的响应必须等于  $(-1)^n$  乘以系统函数  $H(z)$  在  $z = -1$  的值。说明如下：

$$\begin{aligned} y_2[n] &= h[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k](-1)^{n-k} \\ &= (-1)^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k](-1)^{-k} = (-1)^n H(-1) \end{aligned}$$

而由第2条可知： $y_2[n] = \frac{7}{4}(-1)^n$  ； 所以  $H(-1) = \frac{7}{4}$

即:

$$\frac{7}{4} = H(-1) = \frac{[(a+10) + (5 + \frac{a}{3})][1 + \frac{1}{6}]}{(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3})} = \frac{[a+10+5+\frac{a}{3}][\frac{7}{6}]}{(\frac{3}{2})(\frac{4}{3})}$$

可求得  $a = -9$

所以:

$$H(z) = \frac{(1-2z^{-1})(1-\frac{1}{6}z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{1-\frac{13}{6}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}} = \frac{z^2-\frac{13}{6}z+\frac{1}{3}}{z^2-\frac{5}{6}z+\frac{1}{6}}$$

由卷积性质可知： $Y_1(z)$  的ROC必须包括  $X_1(z)$  和  $H(z)$  ROC 的相交部分，对  $H(z)$  检查一下三种可能的ROC（即  $|z| < 1/3$ ,  $1/3 < |z| < 1/2$ ,  $|z| > 1/2$ ）可以发现，只有  $|z| > 1/2$ ，才能与  $X_1(z)$  和  $Y_1(z)$  的ROC相符。

由此可得：

- 因为该系统  $H(z)$  的ROC  $|z| > 1/2$ （即包括单位圆），所以系统是稳定的。
- 因为该系统  $H(z)$  的ROC  $|z| > 1/2$ （即为右边序列），同时由  $H(z)$  表达式可知，其分子的阶次不超过分母的阶次，因此系统是因果的。
- 由  $H(z)$  可写出在初始松弛条件下表征该系统的差分方程为：

$$y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n] - \frac{13}{6}x[n-1] + \frac{1}{3}x[n-2]$$

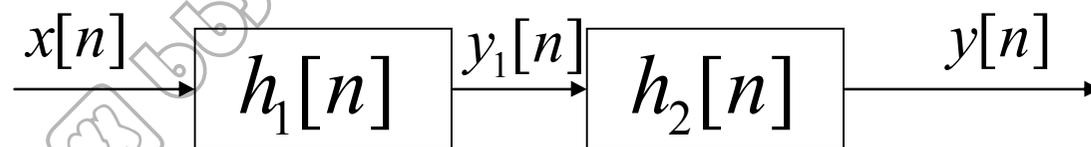
$$H(z) = \frac{1 - \frac{13}{6}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

## 10.8 系统函数的代数属性与方框图表示

离散时间中的z变换能将时域中诸如卷积和时移等运算用代数运算来代替。Z变换的这种作用在分析LTI系统的互联,以及用基本系统的构造单元的互联来综合出其它的系统中也是很有帮助的。

### 10.8.1 LTI系统互联的系统函数

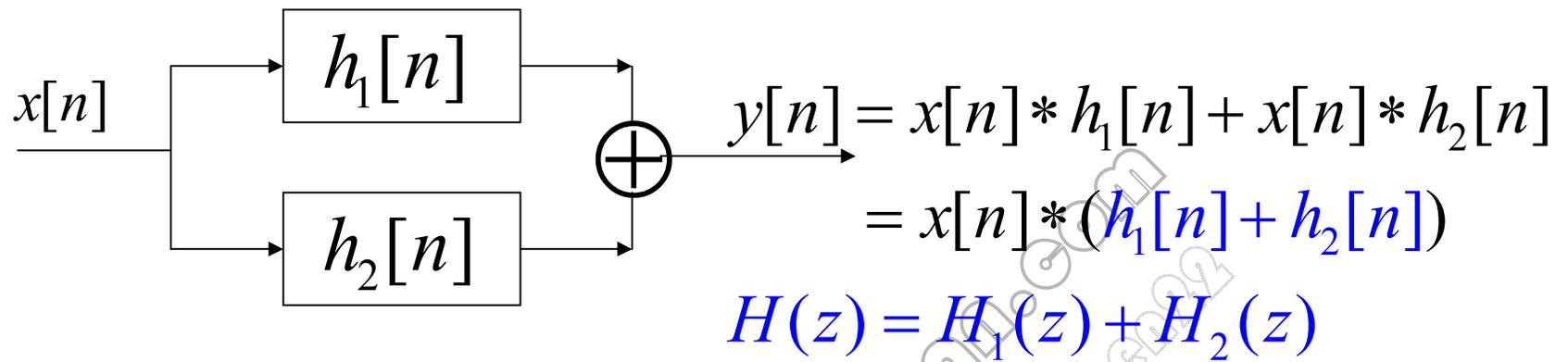
#### 1、 级联



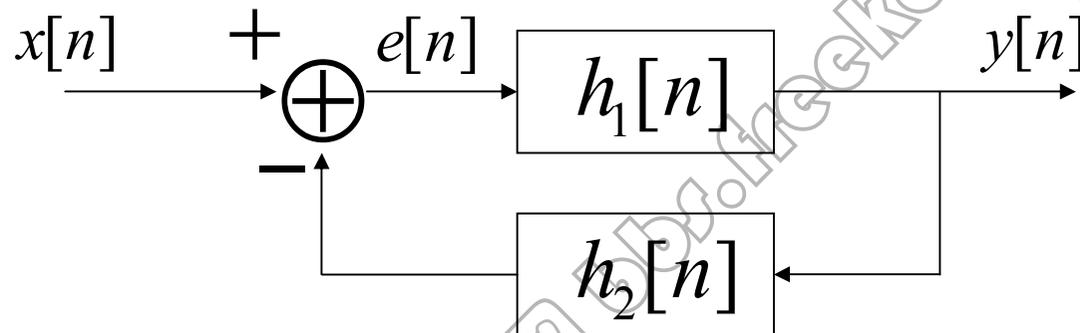
$$y_1[n] = x[n] * h_1[n] \quad y[n] = y_1[n] * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$$

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

## 2、并联



## 3、反馈



$$y[n] = (x[n] - y[n] * h_2[n]) * h_1[n] = x[n] * h_1[n] - y[n] * h_2[n] * h_1[n]$$

$$y[n] + y[n] * h_2[n] * h_1[n] = x[n] * h_1[n]$$

$$Y(z) + Y(z)H_2(z)H_1(z) = X(z)H_1(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H_1(z)}{1 + H_2(z)H_1(z)}$$

### 10.8.2 由差分方程和有理系统函数描述的因果LTI系统的方框图表示

可用三种基本运算,即相加、乘以系数和单位延时的方框图来表示由差分方程描述的因果LTI系统。

例10.28 考虑一因果LTI系统,其系统函数为:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

可求得该系统的差分方程为:  $y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n]$

即

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + x[n]$$

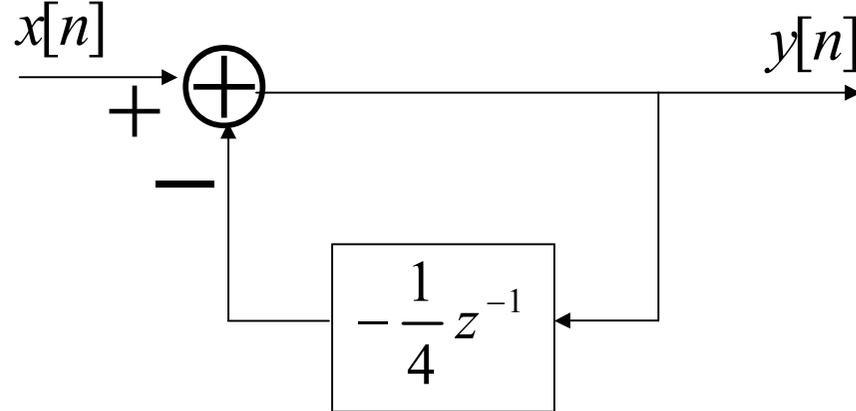
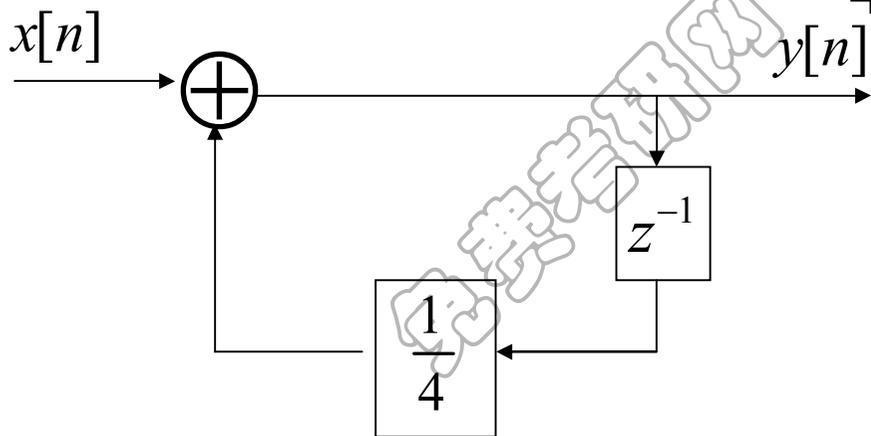


图10.18 (a)因果LTI系统的方框图

(b)等效方框图

例10.30 有一个二阶系统函数为:

$$H(z) = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}$$

它的差分方程为  $y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]$

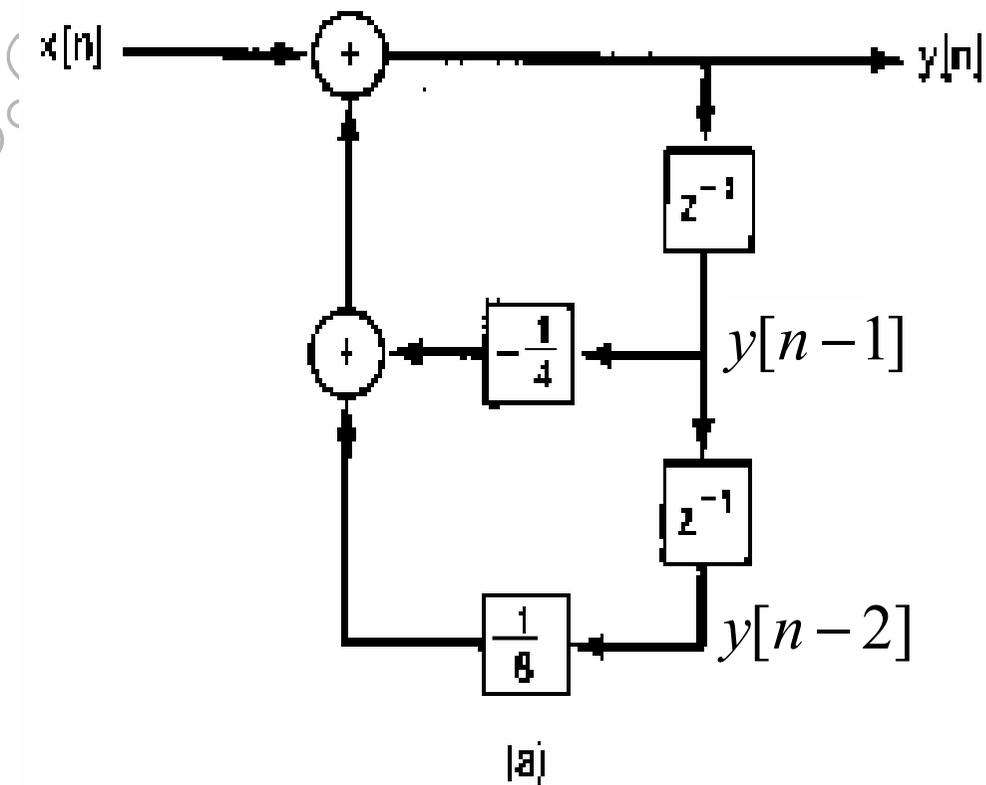
可得该系统的方框图为:

1、直接型——方框图中的系数可直接

根据差分方程或系统函数中的系数来确定。

$$y[n] = x[n] - \frac{1}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2]$$

$z^{-1}$  ——单位延时

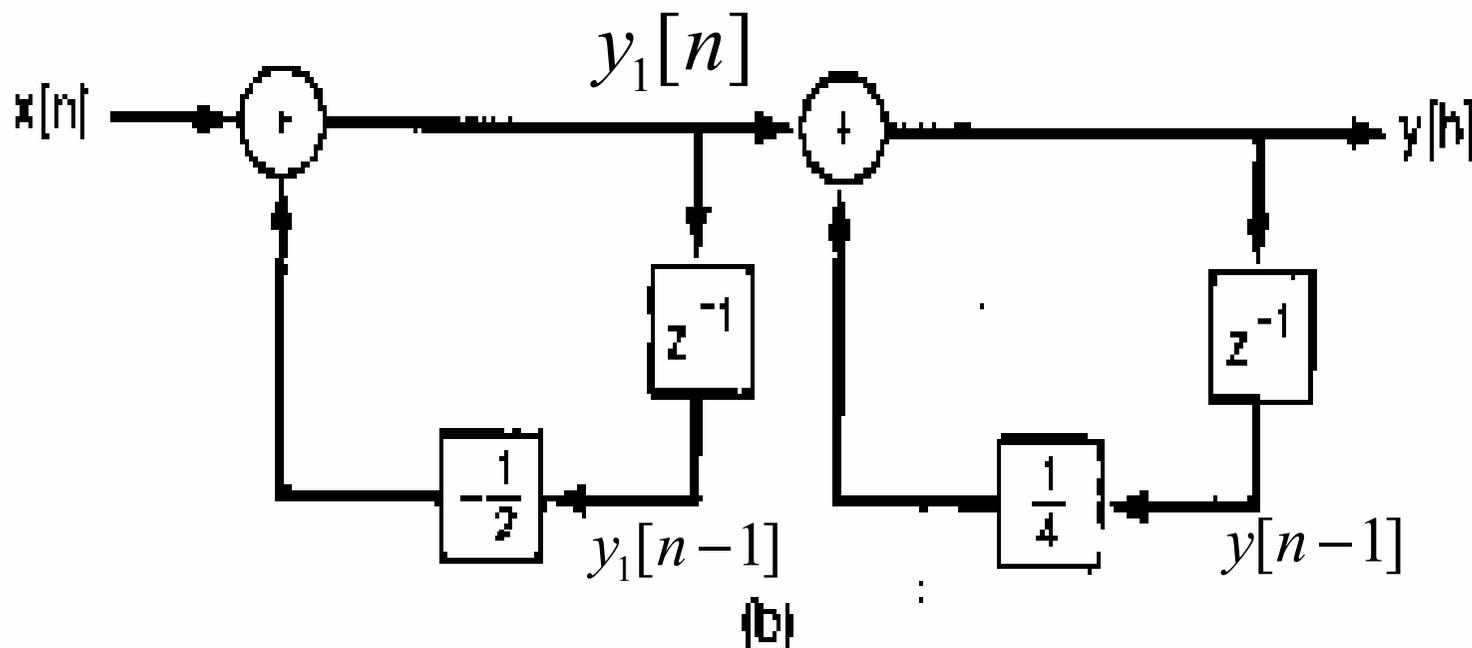


2、级联型

$$H(z) = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})} \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{y_1[n]}{x[n]} \frac{y[n]}{y_1[n]}$$

$$y_1[n] + \frac{1}{2}y_1[n-1] = x[n] \quad \text{得} \quad y_1[n] = x[n] - \frac{1}{2}y_1[n-1]$$

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = y_1[n] \quad \text{得} \quad y[n] = y_1[n] + \frac{1}{4}y[n-1]$$

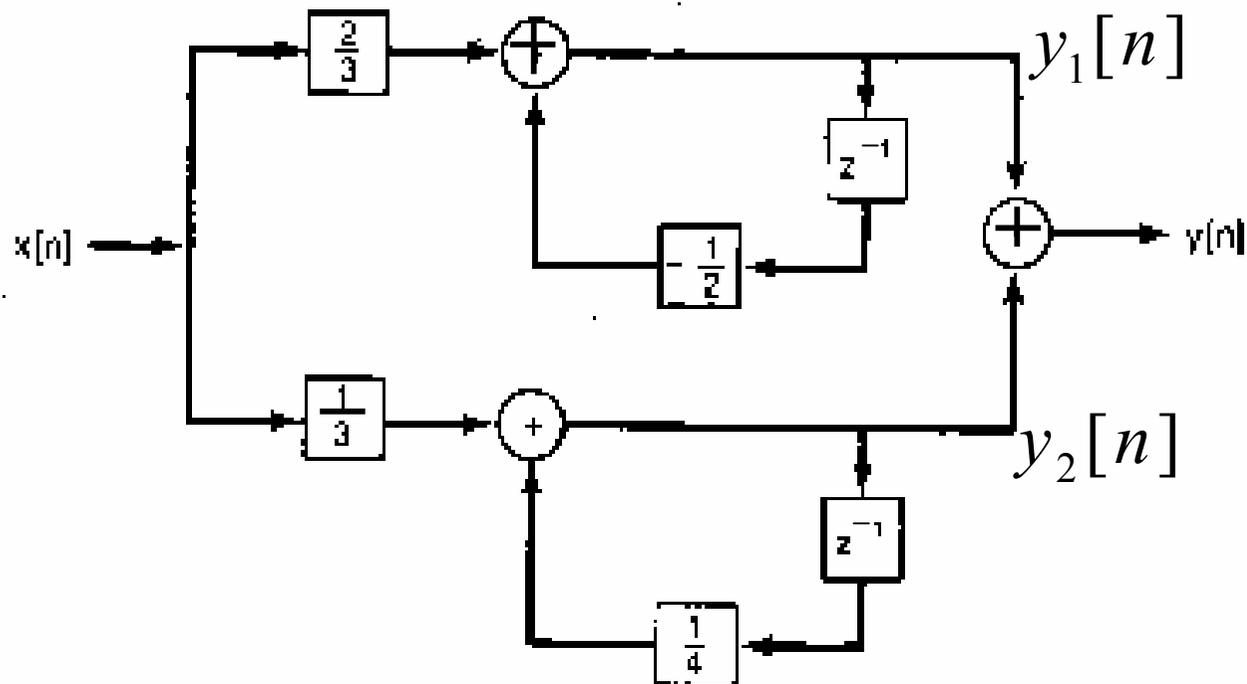


3、并联型

$$H(z) = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{2/3}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{1/3}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}$$

$$y_1[n] + \frac{1}{2}y_1[n-1] = \frac{2}{3}x[n] \quad y_1[n] = \frac{2}{3}x[n] - \frac{1}{2}y_1[n-1]$$

$$y_2[n] - \frac{1}{4}y_2[n-1] = \frac{1}{3}x[n] \quad y_2[n] = \frac{1}{3}x[n] + \frac{1}{4}y_2[n-1]$$



## 10.9 单边z变换

一个序列  $x[n]$  的单边z变换定义为:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

简化符号为:  $x[n] \xleftrightarrow{UZ} X(z) = UZ \{x[n]\}$

- 单边z变换与双边z变换的差别在于: 求和仅在n的非负值上进行. 因此  $x[n]$  的单边z变换可看作是  $x[n]u[n]$  的双边变换.
- 因为  $x[n]u[n]$  总是一个右边序列, 所以  $X(z)$  的收敛域总是位于一个圆的外边.
- 由于双边和单边z变换的紧密联系, 因此单边变换的计算和双边变换相差不多. 只要考虑变换的求和中的极限是对  $n \geq 0$  进行的;
- 同理单边反变换的计算也基本上与双边变换相同. 只要考虑单边变换的ROC总是位于某一圆的外边.

### 10.9.1 单边z变换和单边z反变换举例

例10.32 考虑信号x[n]为  $x[n] = a^n u[n]$

求：它的变换

解： 
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

例 10.33 设x[n]为  $x[n] = a^{n+1} u[n+1]$

则单边z变换为 
$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} u[n+1] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} z^{-n} \\ &= a \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{a}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a| \end{aligned}$$

注意：该信号的双边z变换为：

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{n+1} u[n+1] z^{-n} = \sum_{n=-1}^{\infty} a^{n+1} z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n+1} = z \sum_{n=-1}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{z}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a| \end{aligned}$$

例10.34 考虑下面单边z变换X(z)的反变换 x[n]

已知: 
$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

可写为: 
$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

则有: 
$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad , n \geq 0$$

## 10.9.2 单边z变换的性质

### 1、时间延迟

$$\text{若 } [n] \xleftrightarrow{Z} X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$m = n - n_0$$

$$n = m + n_0$$

$$\text{则 } [n] = x[n - n_0] \xleftrightarrow{Z} Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n - n_0]z^{-n} = \sum_{m=-n_0}^{\infty} x[m]z^{-m-n_0}$$

$$= z^{-n_0} \sum_{m=-n_0}^{\infty} x[m]z^{-m} = z^{-n_0} \left\{ \sum_{m=-n_0}^{-1} x[m]z^{-m} + \sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m} \right\}$$

$$= z^{-n_0} \left\{ \sum_{m=-n_0}^{-1} x[m]z^{-m} + X(z) \right\} = z^{-n_0} \sum_{m=-n_0}^{-1} x[m]z^{-m} + z^{-n_0} X(z)$$

$$\text{双边 } \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n - n_0]z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-(m+n_0)} = z^{-n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-m} = z^{-n_0} X(z)$$

## 2、时间超前

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$\begin{aligned} x[n+n_0] \xleftrightarrow{Z} \sum_{n=0}^{\infty} x[n+n_0]z^{-n} &= \sum_{m=n_0}^{\infty} x[m]z^{-m+n_0} = z^{n_0} \sum_{m=n_0}^{\infty} x[m]z^{-m} \\ &= z^{n_0} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m} - \sum_{m=0}^{n_0-1} x[m]z^{-m} \right\} = z^{n_0} \left\{ X(z) - \sum_{m=0}^{n_0-1} x[m]z^{-m} \right\} \end{aligned}$$

## 3、一次差分

若  $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$

则  $x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{Z} \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} x[n-1]z^{-n}$

$$= X(z) - \sum_{m=-1}^{\infty} x[m]z^{-m-1} = X(z) - z^{-1} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m} + x[-1]z \right\}$$

$$= X(z) - z^{-1}X(z) - x[-1] = [1 - z^{-1}]X(z) - x[-1]$$

### 10.9.3 利用单边z变换求解差分方程

例10.37 已知系统的差分方程为  $y[n] + 3y[n-1] = x[n]$

输入为:  $x[n] = au[n]$       初始条件为:  $y[-1] = \beta$

求:  $y[n]$

解: 对方程求单边z变换得:  $Y(z) + 3y[-1] + 3z^{-1}Y(z) = X(z)$

$$3z^{-1} \left\{ \sum_{m=-1}^{-1} y[m]z^{-m} + Y(z) \right\} \quad Y(z) + 3\beta + 3z^{-1}Y(z) = \frac{a}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{\left[ \frac{a}{1-z^{-1}} - 3\beta \right]}{1+3z^{-1}} = \frac{a}{(1-z^{-1})(1+3z^{-1})} - \frac{3\beta}{1+3z^{-1}}$$

上式第一项等于初始条件为零时系统响应的单边z变换——零状态响应

上式第二项可看作零输入响应的单边z变换——即零输入响应

$$Y(z) + 0 + 3z^{-1}Y(z) = \frac{a}{1-z^{-1}} \quad Y(z) + 3\beta + 3z^{-1}Y(z) = 0$$

若  $a = 8, \beta = 1$  则  $Y(z) = \frac{3}{1+3z^{-1}} + \frac{2}{1-z^{-1}} \xleftrightarrow{z} y[n] = [3(-3)^n + 2]u[n]$

## 10.10 小结:

1、z变换的定义

2、z变换的收敛域性质

3、z变换的性质、常用的z变换对 P 560

4、系统的因果性、稳定性的判别。

5、方块图表示

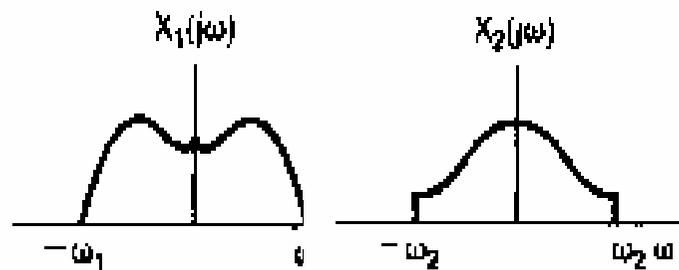
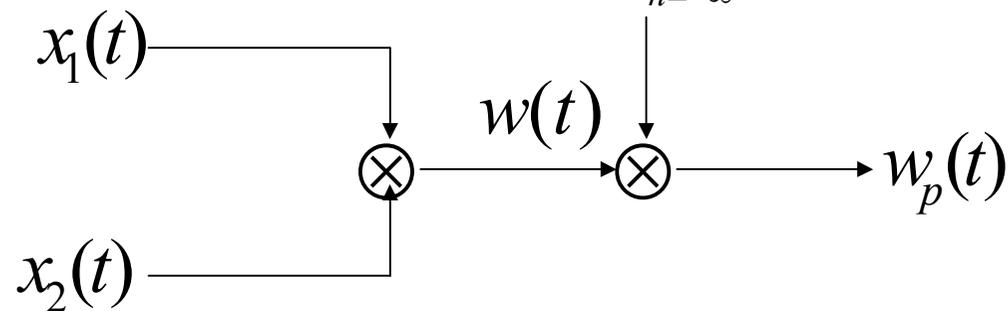
6、利用单边z变换求解差分方程(零输入响应, 零状态响应)

$$\begin{aligned} [\cos \omega_0 n]u[n] & \xleftrightarrow{z} \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}]u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}} \right] \\ & = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1} + 1 - e^{j\omega_0} z^{-1}}{(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1})} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{2 - (e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0})z^{-1}}{1 - (e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0})z^{-1} + z^{-2}} \right] \\ & = \frac{1 - \cos \omega_0 z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}} \quad |z| > 1 \end{aligned}$$

$$\cos n\pi = (-1)^n, \quad e^{jn\pi} = \cos n\pi + j \sin n\pi = \cos n\pi = (-1)^n$$

P402 题7.6

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

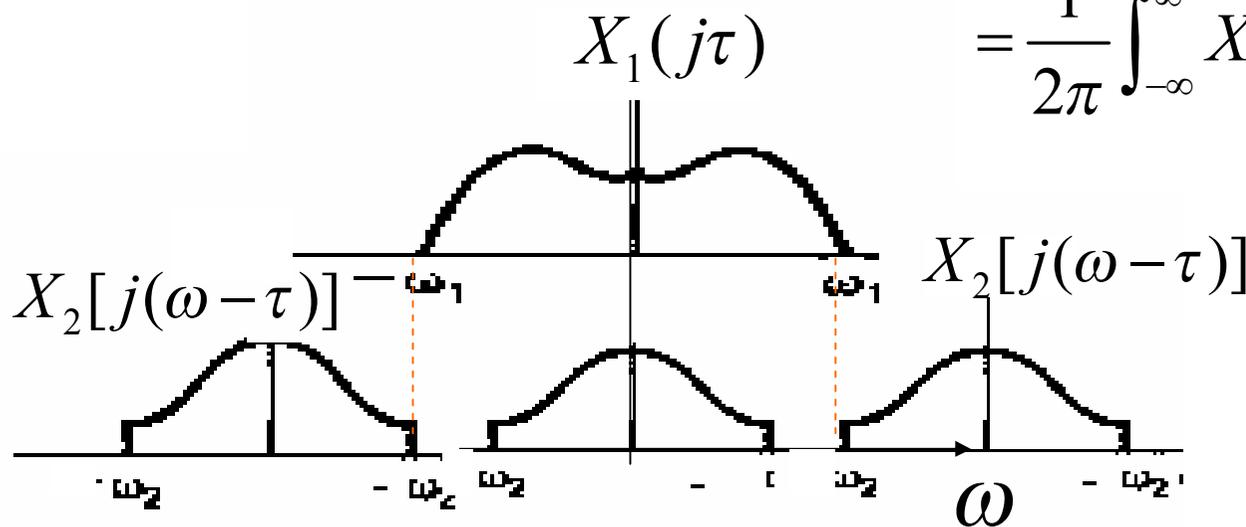


求:最大的采样间隔T

解1:

$$\because w(t) = x_1(t)x_2(t) \xrightarrow{F} W(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\tau) X_2[j(\omega - \tau)] d\tau$$



- 1、最大的采样间隔T
- 2、频域卷积
- 3、信号的最高频率

$$\text{得: } \omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2(\omega_1 + \omega_2), \quad T < \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_2}, \quad T_{\max} = \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_2}$$

解2:  $\because w(t) = x_1(t)x_2(t) \xrightarrow{F} W(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\tau) X_2[j(\omega - \tau)] d\tau$$

要使  $W(j\omega) \neq 0$  则  $X_1(j\tau) \neq 0, X_2[j(\omega - \tau)] \neq 0$

即有  $-\omega_1 \leq \tau \leq \omega_1 \quad -\omega_2 \leq \omega - \tau \leq \omega_2$

$$\therefore -(\omega_1 + \omega_2) \leq \omega \leq \omega_1 + \omega_2$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2(\omega_1 + \omega_2), \quad T < \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_2}, \quad T_{\max} = \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_2}$$

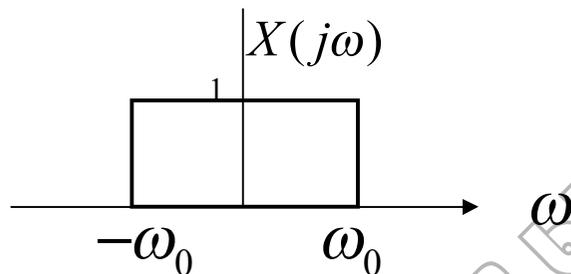
### 题7.10

a)、只要采样周期  $T < 2T_0$  , 信号  $x(t) = u(t + T_0) - u(t - T_0)$  的冲激串采样不会有混叠.

解: **错**. 因为信号的傅立叶变换为:  $X(j\omega) = 2 \frac{\sin \omega T_0}{\omega}$  ——不是带限信号

b)、只要采样周期  $T < \pi / \omega_0$  , 傅立叶变换为  $X(j\omega) = u(\omega + \omega_0) - u(\omega - \omega_0)$  的信号  $x(t)$  的冲激串采样不会有混叠.

解: **正确**.



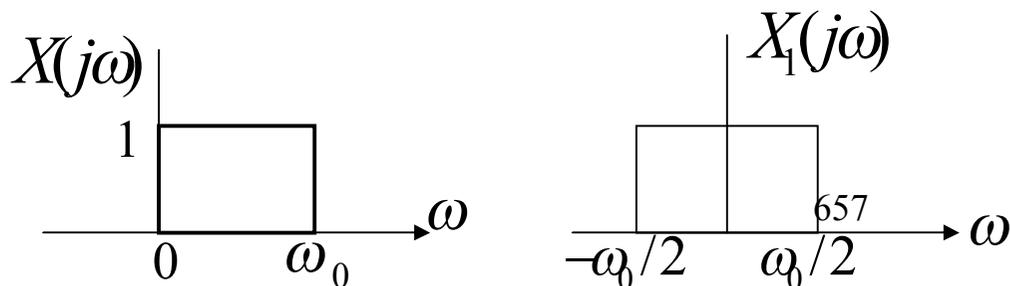
可见, 要求  $\omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2\omega_0$ ,  $T < \frac{\pi}{\omega_0}$

c)、只要采样周期  $T < 2\pi / \omega_0$  , 傅立叶变换为  $X(j\omega) = u(\omega) - u(\omega - \omega_0)$  的信号  $x(t)$  的冲激串采样不会有混叠.

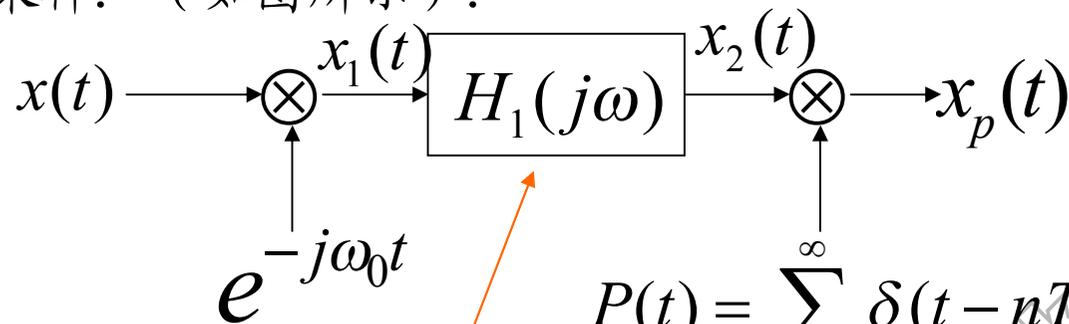
解: **正确**.  $\because x(t) = e^{j\frac{\omega_0}{2}t} x_1(t)$

对信号  $x_1(t)$  的最高频率为:  $\omega_0 / 2$

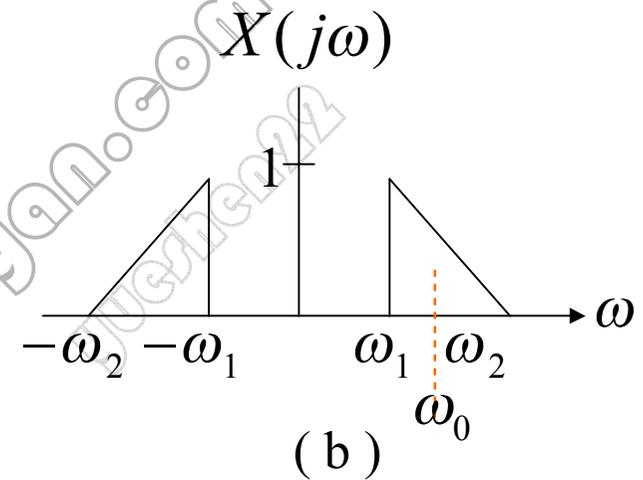
$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2 \times \frac{\omega_0}{2} \quad \text{即} \quad T < \frac{2\pi}{\omega_0}$$



当  $x(t)$  为实信号时，可用带通采样的方法。这种方法是：先进行复指数调制再采样。（如图所示）。



$$(a) \quad P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

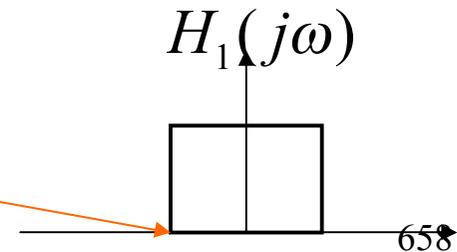


1. 若  $X(j\omega)$  如图(b)所示，画出  $X_p(j\omega)$
2. 确定最大的采样周期  $T$ ，使得  $x(t)$  可以从  $x_p(t)$  恢复。
3. 确定一个从  $x_p(t)$  恢复  $x(t)$  的系统。

由于  $x(t)$  为实数，且  $X(j\omega)$  仅在  $\omega_1 < |\omega| < \omega_2$  为非零，调制频率选为：

$$\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

低通滤波器  $H_1(j\omega)$  的截止频率为  $\left| \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) \right|$



解: 1.  $\because x_1(t) = x(t)e^{-j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} X_1(j\omega) = X[j(\omega + \omega_0)]$  如图(a)所示

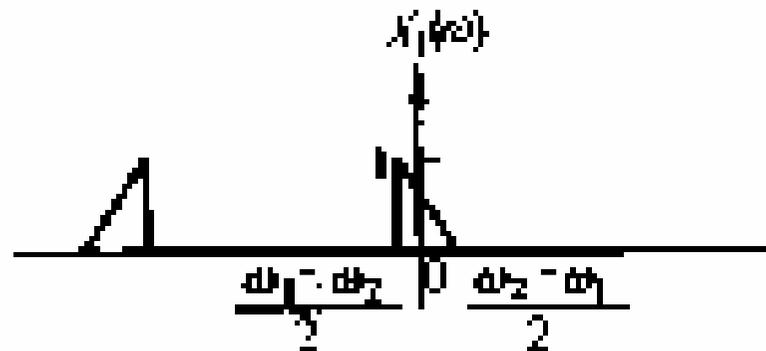
$$X_2(j\omega) = X[j(\omega + \omega_0)] \left\{ U\left[\omega + \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)\right] - U\left[\omega - \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)\right] \right\}$$

如图(b)所示

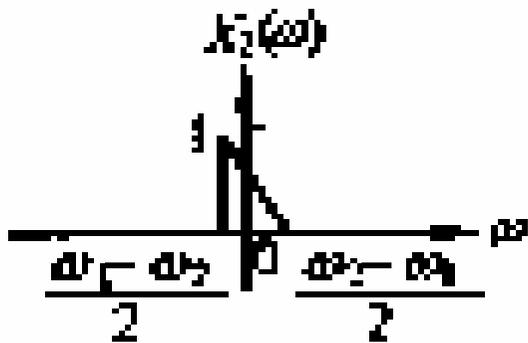
$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [X_2(j\omega) * P(j\omega)]$$

$$\because P(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

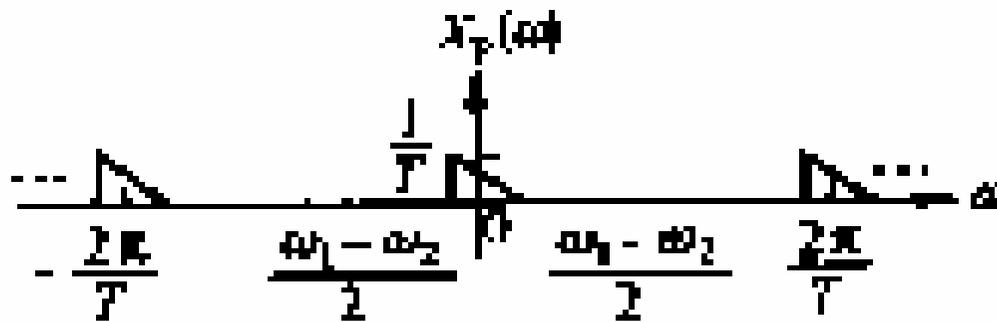
$$\therefore X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_2\left[j\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right]$$



如图(c)所示 (a)



(b)

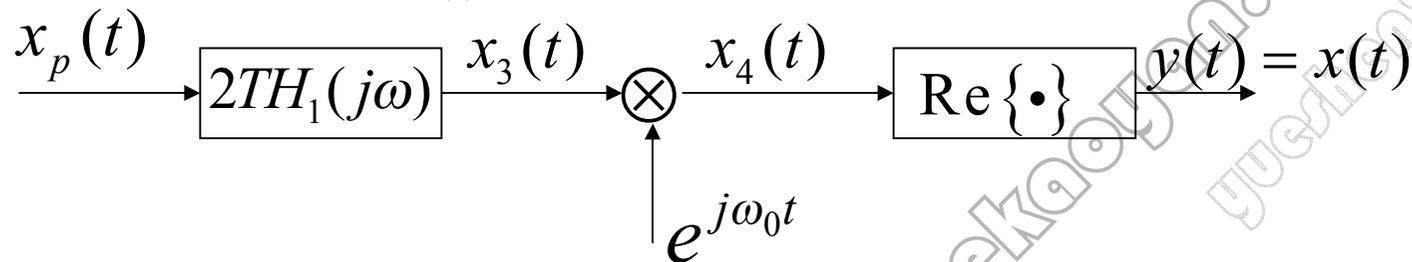


(c)

2、由图b可见,  $X_2(j\omega)$  的带宽为  $\omega_2 - \omega_1$ , 所以最大采样周期为:

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}, \quad T_{\max} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

3、可用下图来恢复  $x(t)$



$$\because X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_2[j(\omega - \frac{2\pi n}{T})] \quad \therefore X_3(j\omega) = X_p(j\omega) 2TH_1(j\omega) = 2X_2(j\omega)$$

$$X_4(j\omega) = 2X_2[j(\omega - \omega_0)] \quad \text{见图 (d)}$$

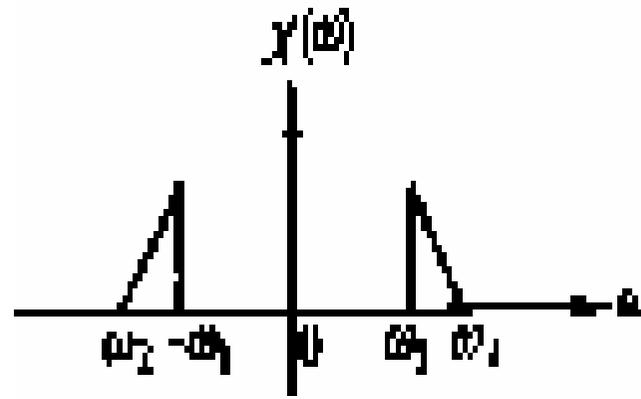
$$x(t) = \text{Re}\{x_4(t)\} \xleftrightarrow{F} \frac{X_4(j\omega) + X_4^*(-j\omega)}{2} = X_2[j(\omega - \omega_0)] + X_2^*[j(-\omega + \omega_0)] = X(j\omega) \quad \text{见图 (e)}$$

设:  $x(t) = a - jb \quad x^*(t) = a + jb$

则  $\text{Re}\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x^*(t)] = \frac{1}{2}[(a - jb) + (a + jb)] = a$



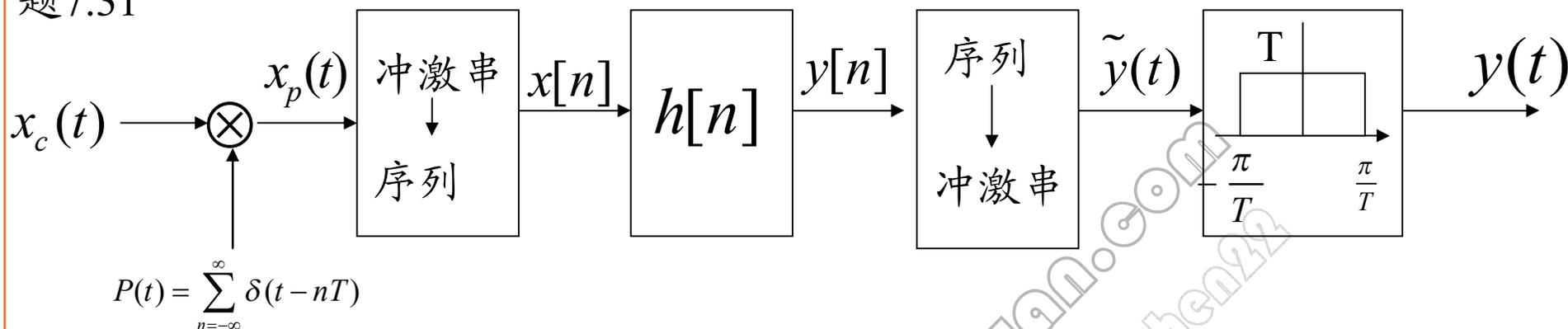
(d)



(e)

免费下载网 [bbs.firg.com](http://bbs.firg.com)

题7.31



已知:  $h[n]$  ——线性的、因果的。  $y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + x[n]$

求: 系统的等效频率响应  $H_c(j\omega)$

解:  $X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - k\omega_s))$        $X(e^{j\Omega}) = X_p(j\Omega/T)$

$$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - 2\pi k)/T)H(e^{j\Omega})$$

$$\tilde{Y}(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - \omega_s k))H(e^{j\omega T})$$

$$Y(j\omega) = X_c(j\omega)H(e^{j\omega T})$$

$$H(e^{j\omega T}) = Y_c(j\omega) / X_c(j\omega) = H_c(j\omega)$$

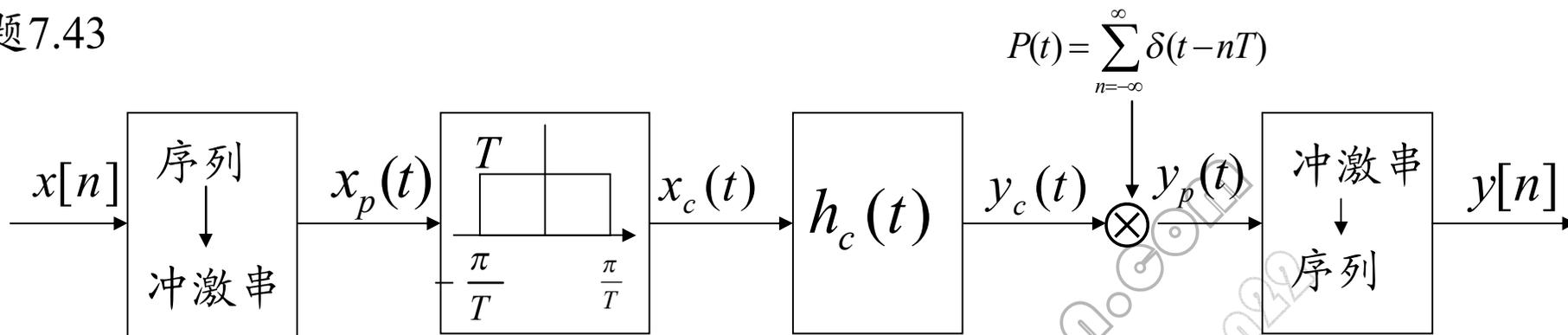
因为  $y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n]$  ,  $\therefore H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - (1/2)e^{-j\Omega}}$

$$\therefore H_c(j\omega) = \begin{cases} H(e^{j\omega T}) & |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \end{cases}$$

$$\therefore H_c(j\omega) = \frac{1}{1 - (1/2)e^{-j\omega T}}, |\omega| < \frac{\pi}{T}$$

免费下载网 [bbs.freekyan.com](http://bbs.freekyan.com) yueshen22

### 题7.43



解:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}, \quad \therefore X(e^{j\Omega}) = X_p(j\frac{\Omega}{T})$$

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t-nT)$$

$$\therefore X_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n T}, \quad X_c(j\omega) = TX_p(j\omega)$$

$$y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_c(nT)\delta(t-nT)$$

$$y[n] = y_c(nT)$$

$$Y_c(j\omega) = X_c(j\omega)H_c(j\omega) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n T} H_c(j\omega)$$

因为周期为  $2\pi$   
所以可简化为

$$Y_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [Y_c(j\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - k\omega_s)] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_c[j(\omega - k\omega_s)]$$

$$Y(e^{j\Omega}) = Y_p(j\frac{\Omega}{T}) = \frac{1}{T} Y_c(j\frac{\Omega}{T}) = \frac{1}{T} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} H_c(j\frac{\Omega}{T}), \quad H(e^{j\Omega}) = H_c(j\frac{\Omega}{T})$$

$$\therefore \frac{d^2 y_c(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy_c(t)}{dt} + 3 y_c(t) = x_c(t)$$

$$\therefore H_c(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 3} \xleftarrow{F} h_c(t) = \frac{1}{2} [e^{-t} - e^{-3t}] u(t)$$

$$\therefore H(e^{j\Omega}) = H_c\left(j \frac{\Omega}{T}\right) = \frac{1}{\left(j \frac{\Omega}{T}\right)^2 + 4j \frac{\Omega}{T} + 3}$$

写成一般形式后,为:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{\left(j \frac{\omega}{T}\right)^2 + 4j \frac{\omega}{T} + 3}$$

2、单位脉冲响应h[n]为:

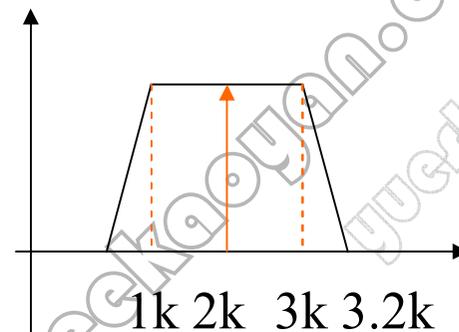
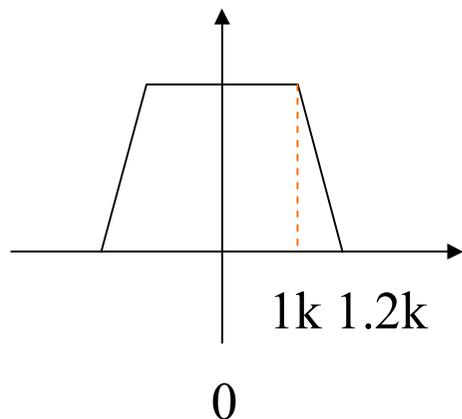
$$\therefore h_c(Tt) \xleftarrow{F} \frac{1}{|T|} H_c\left(\frac{j\omega}{T}\right) \text{ 即: } |T| h_c(Tt) \xleftarrow{F} H_c\left(\frac{j\omega}{T}\right)$$

$$\therefore h[n] = T h_c(nT) = \frac{T}{2} [e^{-nT} - e^{-3nT}] u[n]$$

#结束 665

题 6.7 一连续时间低通滤波器设计成通带频率为1000Hz,阻带频率为1200Hz,通带波纹为0.1,阻带波纹为0.05。该滤波器的单位冲激响应记为:  $h(t)$ 。现把它转换成  $g(t) = 2h(t) \cos(4000\pi t)$

解:



$$g(t) = 2h(t) \cos(4000\pi t)$$

$$g(t) = 2h(t) \cos(4000\pi t) = 2h(t) \left[ \frac{1}{2} (e^{j4000\pi t} + e^{-j4000\pi t}) \right]$$

$$= h(t) (e^{j4000\pi t} + e^{-j4000\pi t}) \xleftrightarrow{F} H[j(\omega - 4000\pi)] + H[j(\omega + 4000\pi)]$$

$$\because \omega_0 = 2\pi f_0 = 4000\pi \quad , \quad \therefore f_0 = 2000\text{Hz}$$

题7.5 设 $x(t)$ 是一个奈奎斯特率为 $\omega_0$ 的信号，同时设 $y(t) = x(t)p(t-1)$

$$\text{式中: } p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT), \quad T < \frac{2\pi}{\omega_0}$$

当某一滤波器以 $y(t)$ 作为输入， $x(t)$ 作为输出时，请给出该滤波器频率响应和相位特性上的限制。

解：1、因为信号的奈奎斯特率为 $\omega_0$  ——意味着：1)  $\omega_s = \omega_0$ ；2) 信号的最

$$\text{高频率 } \omega_M \leq \frac{\omega_0}{2},$$

$$2、 \because p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \xleftrightarrow{F} \frac{2\pi}{T} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$\therefore p(t-1) \xleftrightarrow{F} \frac{2\pi}{T} \sum_{K=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega} \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{T} \sum_{K=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega} \delta(\omega - k\omega_0) * X(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk\omega_0} X[j(\omega - k\omega_0)]$$

$$\text{滤波后得: } Y(j\omega) = \frac{1}{T} X(j\omega), \quad H(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{Y(j\omega)} = T, \quad \angle H(j\omega) = 0$$

# 信号与系统复习

免费考研网 [bbs.freekaoyan.com](http://bbs.freekaoyan.com) yueshen22

# 第十章 Z变换

10.10 小结:

1、z变换的定义

2、z变换的收敛域性质

3、z变换的性质、常用的z变换对 P 560

4、系统的因果性、稳定性的判别。

5、方块图表示

6、利用单边z变换求解差分方程(零输入响应, 零状态响应)

## 一、部分分式法求z反变换

假定 $X(z)$ 的部分分式具有如下形式:

$$X(z) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{1 - a_i z^{-1}}$$

$X(z)$ 的**反变换**就等于每一项反变换之和。

1、若 $X(z)$ 的**ROC是位于极点 $z = a_i$ 的外边**，那么与上式相应项的反变换就是:

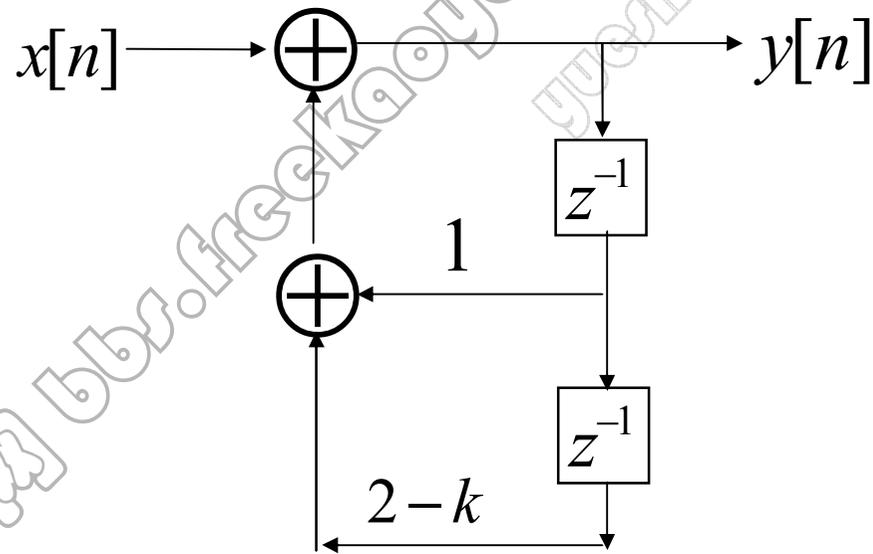
$$A_i a_i^n u[n]$$

2、若 $X(z)$ 的**ROC是位于极点 $z = a_i$ 的里边**，那么对应于这一项的反变换就是:

$$-A_i a_i^n u[-n-1]$$

例1、已知某因果离散时间系统如图所示：

- 1、写出表征该系统的差分方程；
- 2、若极点为实数，试确定使系统稳定的K值的最大范围；
- 3、取 $K=2.5$ ，若输入  $x[n] = \cos \pi n$ ， $-\infty < n < \infty$ ，求输出  $y[n]$ 。



解： 1、 
$$y[n] = y[n-1] + (2-k)y[n-2] + x[n]$$

$$y[n] - y[n-1] - (2-k)y[n-2] = x[n]$$

$$2、 \quad H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}-(2-k)z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2-z-(2-k)}$$

因为极点为实数，则

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4(2-k) = 9 - 4k \geq 0, \quad k \leq \frac{9}{4}$$

又要求系统稳定，则所有极点都必须在单位圆内

$$p_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4(2-k)}}{2} < 1, \quad k > 2$$

得  $2 < k \leq \frac{9}{4}$

$$3、 \quad H(z) = \frac{z^2}{z^2 - z + 0.5}$$

$$x[n] = \cos \pi n = (-1)^n$$

$$y[n] = H(z)x[n] = (-1)^n H(z) \Big|_{z=-1} = \frac{2}{5} (-1)^n$$

$$\cos n\pi = (-1)^n$$

**例10.26** 假设一个LTI系统给出下列信息:

1、若系统的输入是  $x_1[n] = (1/6)^n u[n]$  , 则输出是:

$$y_1[n] = \left[ a\left(\frac{1}{2}\right)^n + 10\left(\frac{1}{3}\right)^n \right] u[n]$$

$a$ 为实数

因果的

2、若  $x_2[n] = (-1)^n$  , 则输出是:  $y_2[n] = \frac{7}{4}(-1)^n = \frac{7}{4} \cos n\pi$

要求: 从这两条信息中就能确定该系统的系统函数  $H(z)$ 、 $a$ 的值,

推出该系统的几个性质、并写出表征该系统的差分方程。

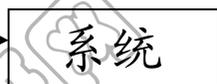
• 由第一条信息, 可得出这信号的z变换是:

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6}z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{6}$$

$$Y_1(z) = \frac{a}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{10}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{(a+10) - (5 + \frac{a}{3})z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$H(z) = \frac{Y_1(z)}{X_1(z)} = \frac{[(a+10) - (5 + \frac{a}{3})z^{-1}][1 - \frac{1}{6}z^{-1}]}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}$$

- 对于  $x_2[n] = (-1)^n$  的响应必须等于  $(-1)^n$  乘以系统函数  $H(z)$  在  $z = -1$  的值 (即若  $x[n] = z^n$ , 则  $y[n] = H(z)z^n$ ), 因为  $y_2[n] = 7/4(-1)^n$



因此根据第二条信息, 有

$$\frac{7}{4} = H(-1) = \frac{[(a+10) + (5 + \frac{a}{3})][1 + \frac{1}{6}]}{(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3})} = \frac{[a+10+5+\frac{a}{3}][\frac{7}{6}]}{(\frac{3}{2})(\frac{4}{3})}$$

可得  $a = -9$

则有

$$H(z) = \frac{(1-2z^{-1})(1-\frac{1}{6}z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{1-\frac{13}{6}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}} = \frac{z^2-\frac{13}{6}z+\frac{1}{3}}{z^2-\frac{5}{6}z+\frac{1}{6}}$$

由卷积性质可知： $Y_1(z)$  的ROC必须包括  $X_1(z)$  和  $H(z)$  ROC 的相交部分，对  $H(z)$  检查一下三种可能的ROC（即  $|z| < 1/3$ ,  $1/3 < |z| < 1/2$ ,  $|z| > 1/2$ ）可以发现，只有  $|z| > 1/2$ ，才能与  $X_1(z)$  和  $Y_1(z)$  的ROC相符。

由此可得：

- 因为该系统  $H(z)$  的ROC  $|z| > 1/2$ （即包括单位圆），所以系统是稳定的。
- 因为该系统  $H(z)$  的ROC  $|z| > 1/2$ （即为右边序列），同时由  $H(z)$  表达式可知，其分子的阶次不超过分母的阶次，因此系统是因果的。
- 由  $H(z)$  可写出在初始松弛条件下表征该系统的差分方程为：

$$y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n] - \frac{13}{6}x[n-1] + \frac{1}{3}x[n-2]$$

## 第七章 采样

### 1、采样定理

- 冲激串采样
- 零阶保持采样

### 2、重建信号

- 带限内插
- 零阶保持
- 线性内插

### 3、欠采样的效果：——混叠现象

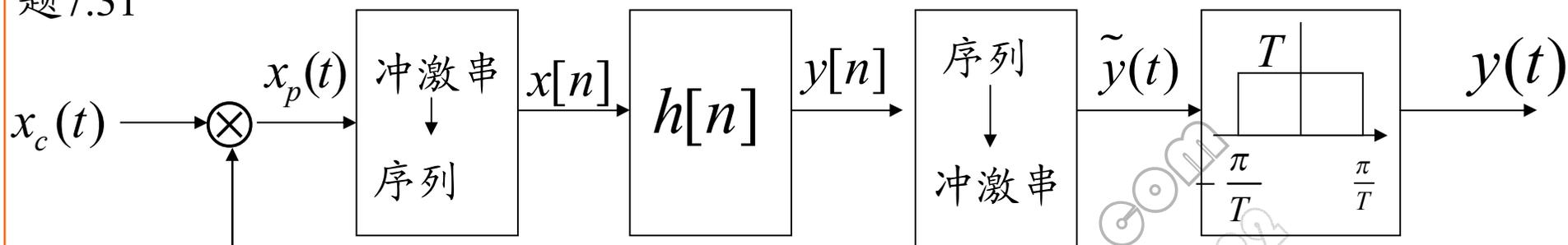
### 4、连续时间信号的离散时间处理

- 数字微分器
- 半采样间隔延时

### 5、离散时间信号采样

- 脉冲串采样
- 离散时间抽取与内插

题7.31



$$P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

已知:  $h[n]$  ——线性的、因果的。

$$y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + x[n]$$

求: 系统的等效频率响应  $H_c(j\omega)$  ——如果是证明又该如何

解: 因为 
$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [X_c(j\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c[j(\omega - k\omega_s)]$$

$$X[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{T} X_c(j\frac{\Omega}{T})$$

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} X_c(j\frac{\Omega}{T}) H(e^{j\Omega})$$

$$Y(j\omega) = X_c(j\omega) H(e^{j\omega T})$$

$$H_c(j\omega) = H(e^{j\omega T}) = Y(j\omega) / X_c(j\omega)$$

因为  $y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n]$  ,  $\therefore H_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - (1/2)e^{-j\Omega}}$

$$\therefore H_c(j\omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\omega T}) & |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \end{cases}$$

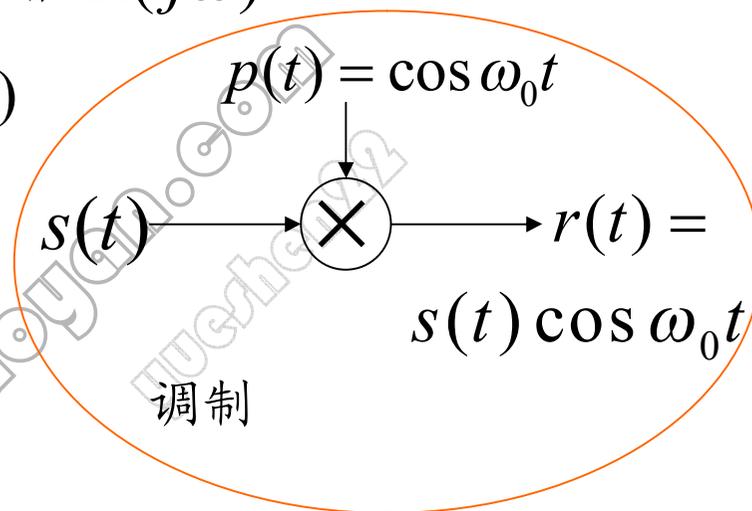
$$\therefore H_c(j\omega) = \frac{1}{1 - (1/2)e^{-j\omega T}} , |\omega| < \frac{\pi}{T}$$

免费下载网 [bbs.freeitzyan.com](http://bbs.freeitzyan.com) yueshen22

二、例： 设信号  $s(t)$  的频谱为  $S(j\omega)$  ,另一个信号  $p(t)$  为  $p(t) = \cos \omega_0 t$   
 求  $r(t) = s(t)p(t) = s(t) \cos \omega_0 t$  的频谱  $R(j\omega)$  。

解： 因为 
$$p(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

而  $1 \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega)$   
 据频移性, 可得  $1 \times e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$   
 $1 \times e^{-j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$



所以 
$$p(t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \xleftrightarrow{F} P(j\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

又因为 
$$r(t) = s(t)p(t) \xleftrightarrow{F} R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * P(j\omega)$$

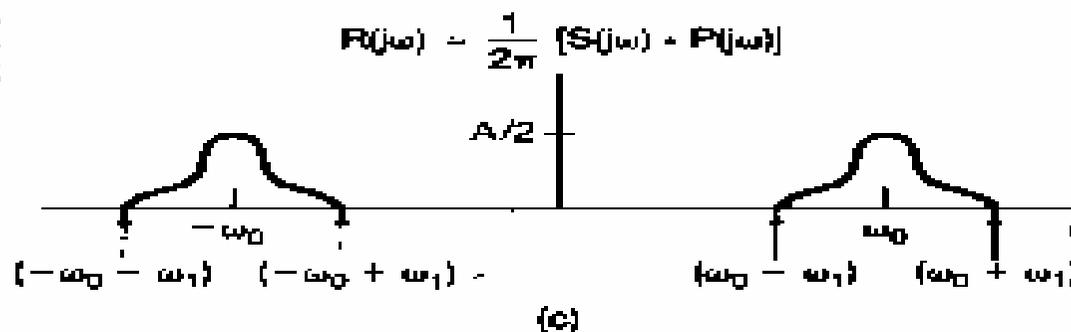
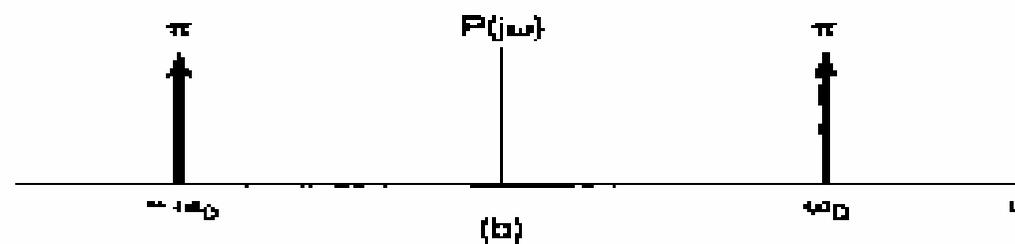
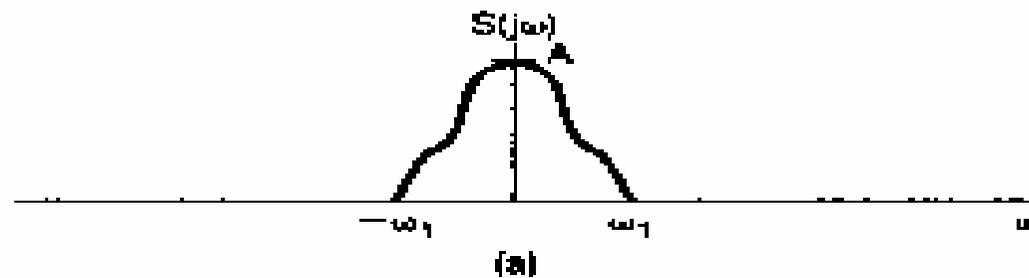
所以 
$$= \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$= \frac{1}{2} S[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} S[j(\omega + \omega_0)]$$

设信号的频谱如图所示,最高频率为:  $\omega_1$ ,则可画出  $R(j\omega)$

注意: 图中已假设  $\omega_0 > \omega_1$  。

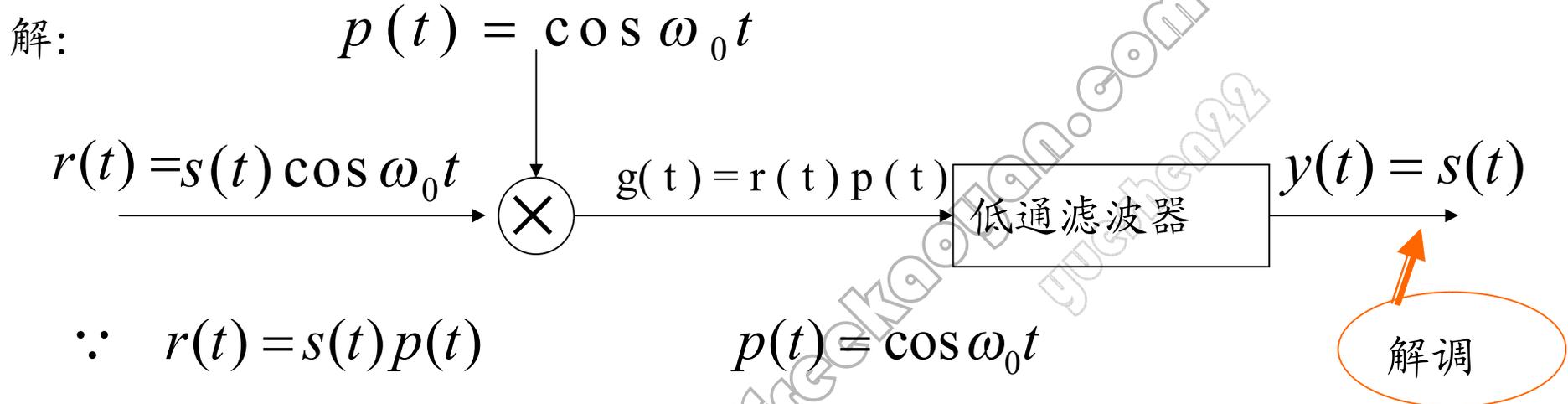
若  $\omega_0 < \omega_1$  时, 就会产生重叠。



这在通信中称**调制**。

图 4.23 例 4.21 中相乘性质的应用:

三、例：其中  $p(t) = \cos \omega_0 t$  ,求低通滤波器的频谱  $H_c(j\omega)$  。



$$\because r(t) = s(t)p(t)$$

$$p(t) = \cos \omega_0 t$$

$$\because g(t) = r(t)p(t) = s(t) \cos^2 \omega_0 t = s(t)[1 + \cos 2\omega_0 t] / 2$$

$$= \frac{1}{2} [s(t) + s(t) \cos 2\omega_0 t]$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{2} S(j\omega) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * \pi [\delta(\omega - 2\omega_0) + \delta(\omega + 2\omega_0)] \right\}$$

$$= \frac{1}{2} S(j\omega) + \frac{1}{4} \{ S[j(\omega + 2\omega_0)] + S[j(\omega - 2\omega_0)] \}$$

由图可知，当  $g(t)$  通过理想低通滤波器时，只要使该滤波器幅度为 2，截止频率  $\omega_c$  满足  $\omega_1 < \omega_c < 2\omega_0 - \omega_1$

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} 2 & \omega_1 < \omega_c < 2\omega_0 - \omega_1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

就可使调制信号  $s(t)$  得到恢复，得  $y(t) = s(t)$

这就是解调

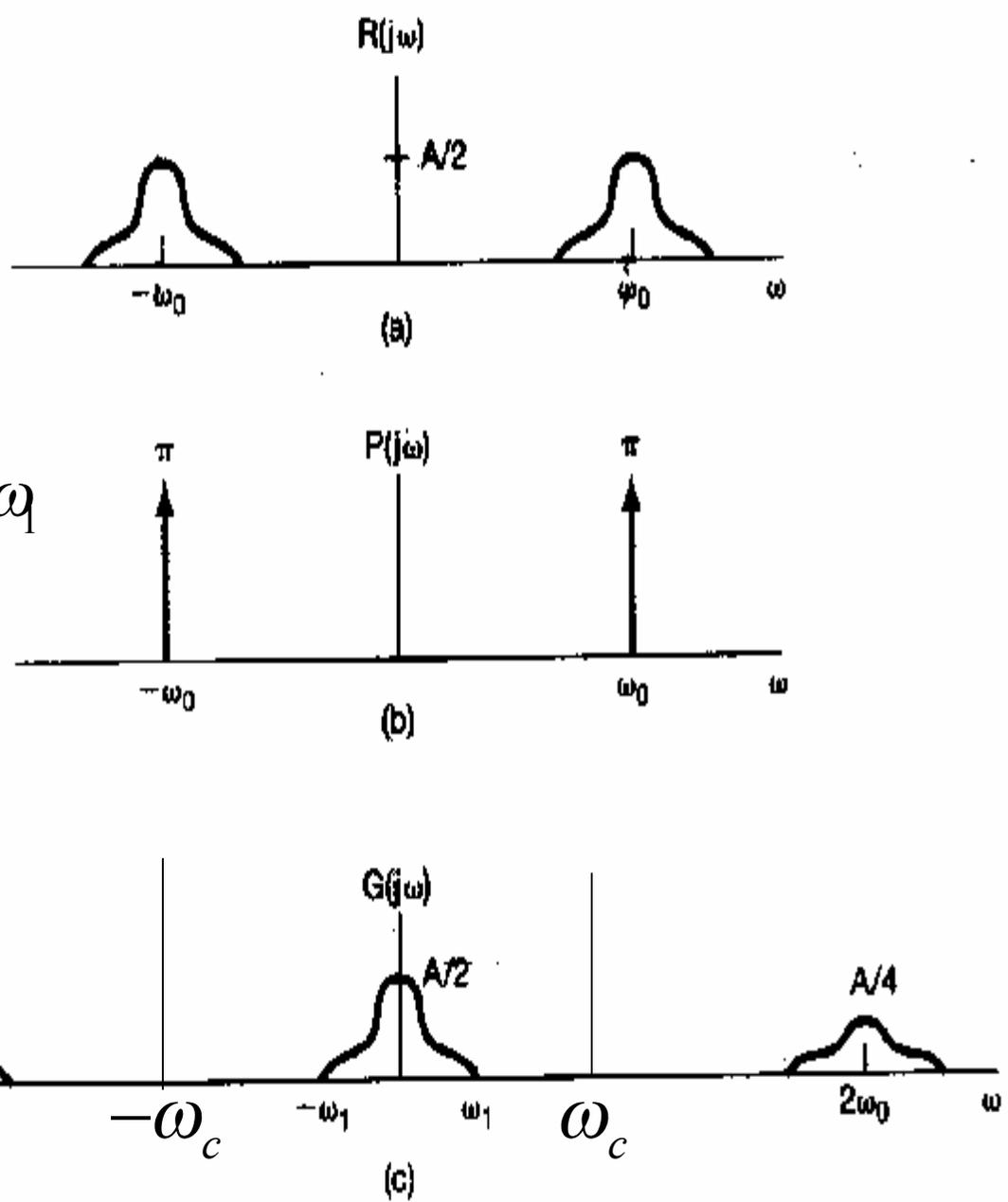


图 4.24 例 4.22 中考虑的各信号的频谱：(a)  $R(j\omega)$ ；(b)  $P(j\omega)$ ；(c)  $G(j\omega)$

#### 四、具有可变中心频率的频率选择性滤波

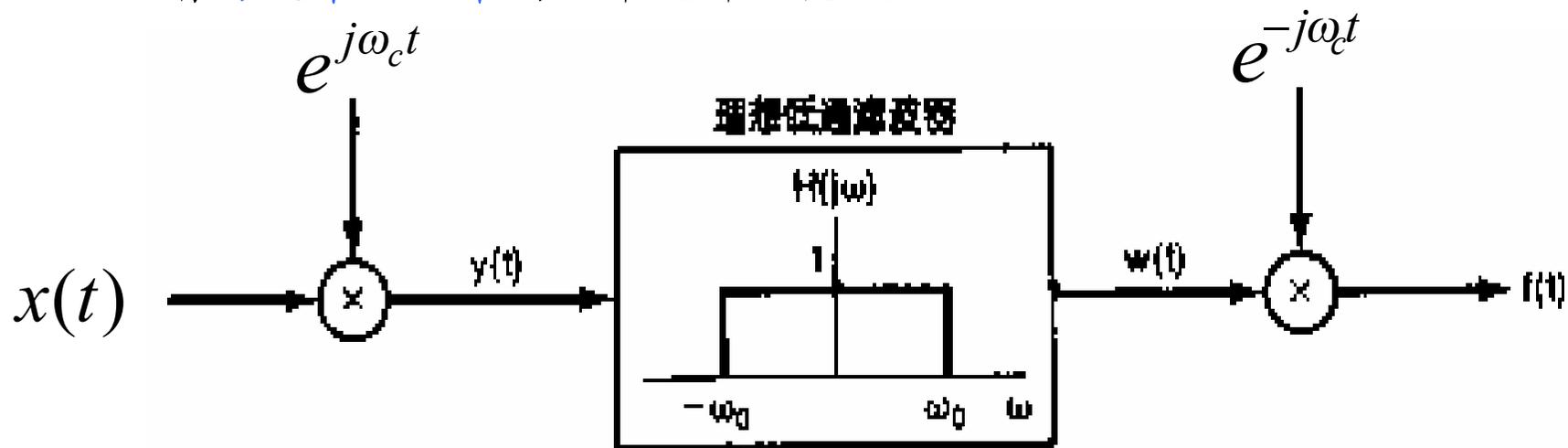


图 4.26 利用复指数载波的幅度调制实现带通滤波器

$$y(t) = e^{j\omega_c t} x(t) \xleftrightarrow{F} Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [2\pi\delta(\omega - \omega_c) * X(j\omega)] = X[j(\omega - \omega_c)]$$

即  $Y(j\omega)$  等于  $X(j\omega)$  向右移  $\omega_c$  ;

同样可得:

$$f(t) = e^{-j\omega_c t} w(t) \xleftrightarrow{F} F(j\omega) = W[j(\omega + \omega_c)]$$

即  $F(j\omega)$  就等于  $W(j\omega)$  向左移  $\omega_c$  。

可见，整个系统等效于一个中心频率为  $-\omega_c$  带宽为  $2\omega_0$  的理想带通滤波器。随着  $\omega_c$  的改变，该带通滤波器的中心频率也就改变了。

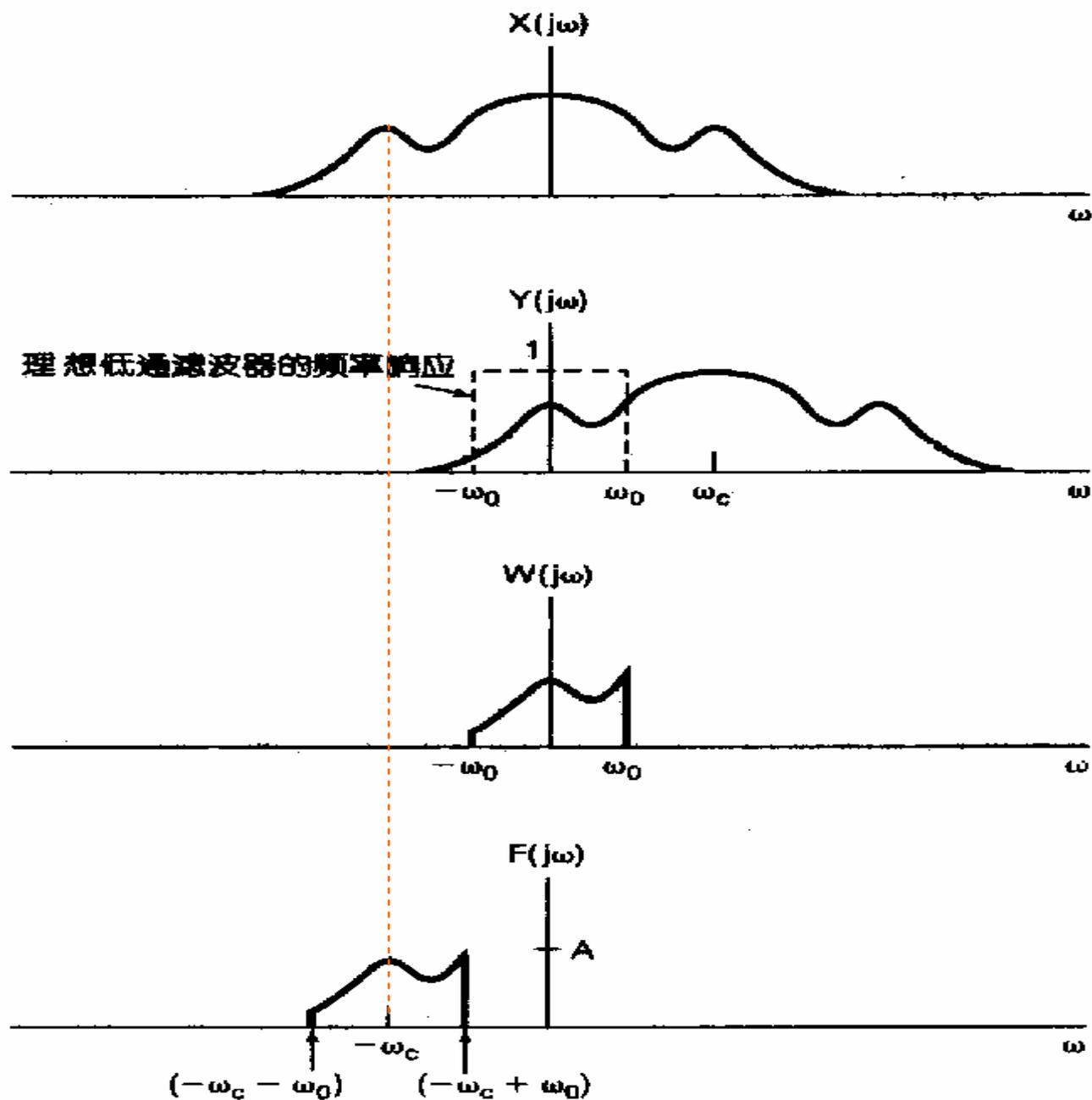
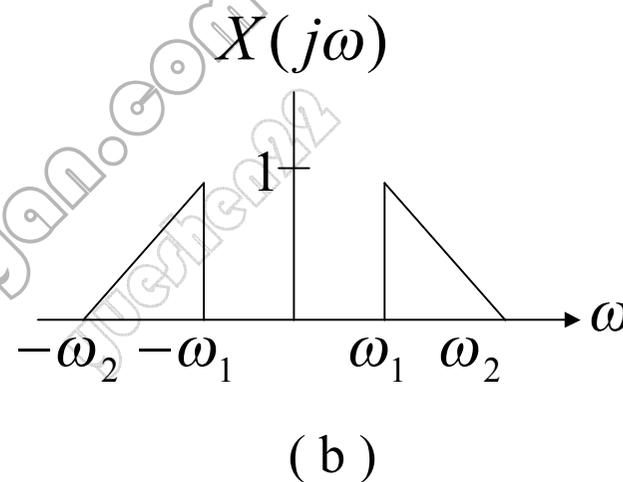
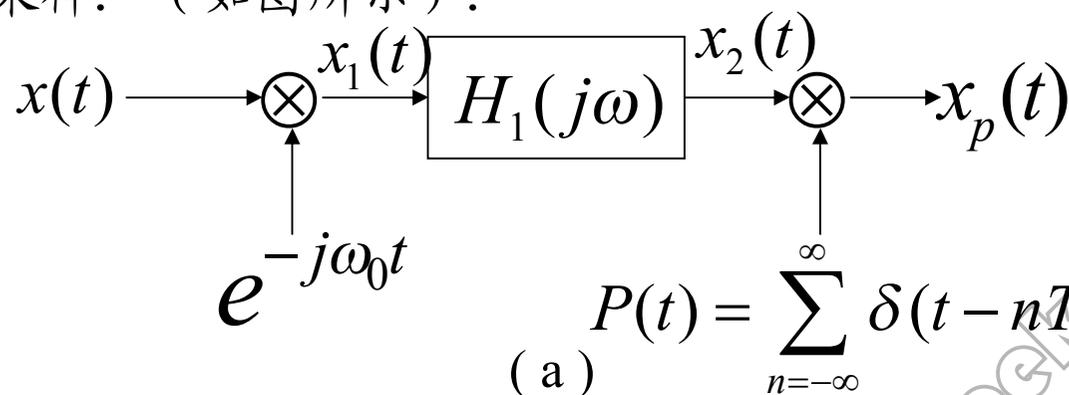


图 4.27 图 4.26 系统中各信号的频谱

当  $x(t)$  为实信号时，可用带通采样的方法。这种方法是：先进行复指数调制再采样。（如图所示）。

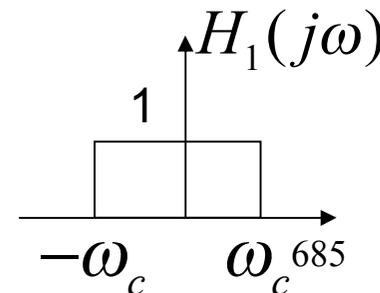


1. 若  $X(j\omega)$  如图(b)所示，画出  $X_p(j\omega)$
2. 确定最大的采样周期  $T$ ，使得  $x(t)$  可以从  $x_p(t)$  恢复。
3. 确定一个从  $x_p(t)$  恢复  $x(t)$  的系统。

由于  $x(t)$  为实数，且  $X(j\omega)$  仅在  $\omega_1 < |\omega| < \omega_2$  为非零，调制频率选为：

$$\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

理想低通滤波器  $H_1(j\omega)$  的截止频率为  $\omega_c = \left| \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) \right|$



解: 1.  $\because x_1(t) = x(t)e^{-j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} X_1(j\omega) = X[j(\omega + \omega_0)]$  如图(a)所示

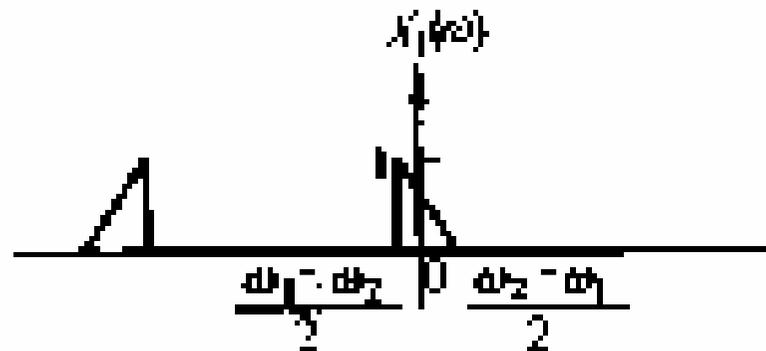
$$X_2(j\omega) = X[j(\omega + \omega_0)] \left\{ U\left[\omega + \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)\right] - U\left[\omega - \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)\right] \right\}$$

如图(b)所示

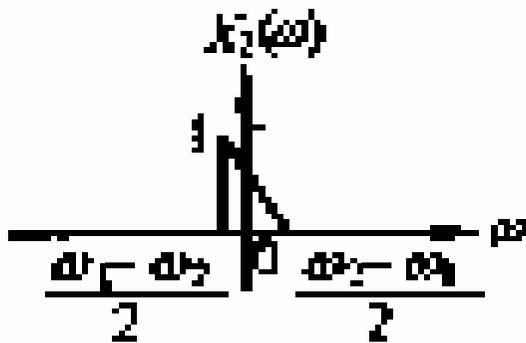
$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [X_2(j\omega) * P(j\omega)]$$

$$\because P(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

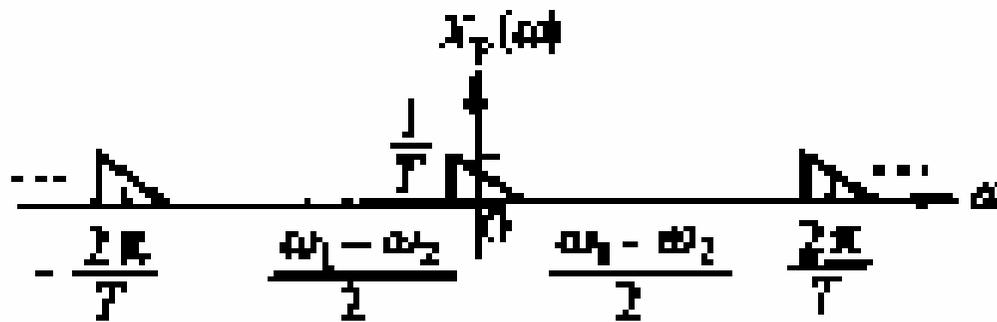
$$\therefore X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_2\left[j\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right]$$



如图(c)所示 (a)



(b)

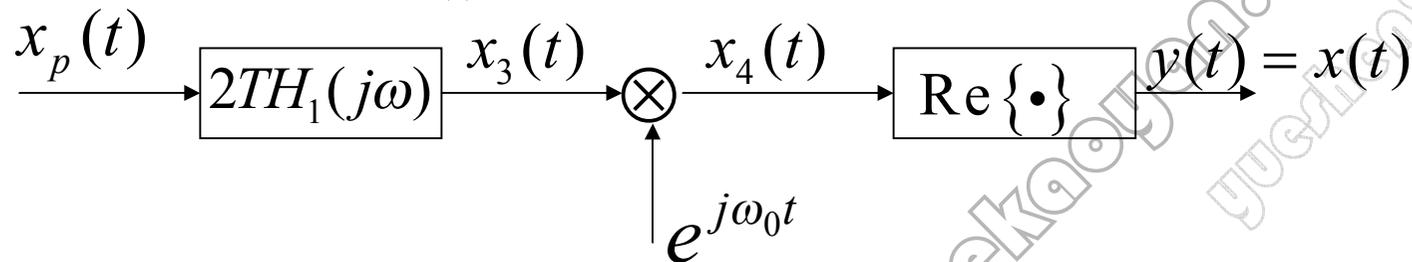


(c)

2、由图b可见,  $X_2(j\omega)$  的带宽为  $\omega_2 - \omega_1$ , 所以最大采样周期为:

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}, \quad T_{\max} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

3、可用下图来恢复  $x(t)$



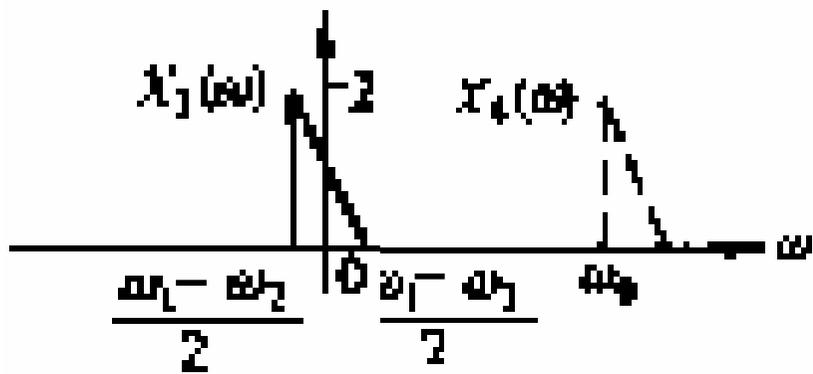
$$\because X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_2[j(\omega - \frac{2\pi n}{T})] \quad \therefore X_3(j\omega) = X_p(j\omega) 2TH_1(j\omega) = 2X_2(j\omega)$$

$$X_4(j\omega) = 2X_2[j(\omega - \omega_0)]$$

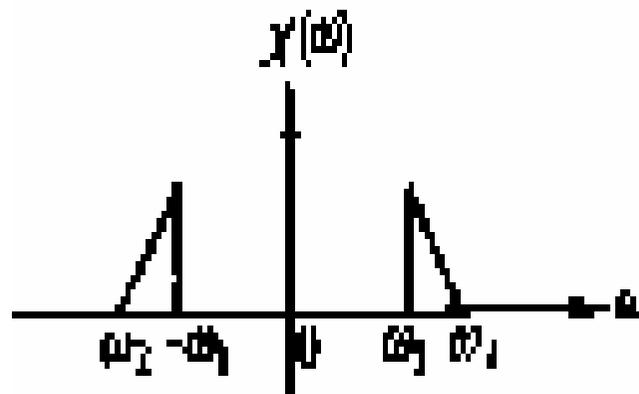
$$x(t) = \text{Re}\{x_4(t)\} \xleftrightarrow{F} \frac{X_4(j\omega) + X_4^*(-j\omega)}{2} = X_2[j(\omega - \omega_0)] + X_2^*[j(-\omega + \omega_0)] = X(j\omega)$$

设:  $x(t) = a - jb \quad x^*(t) = a + jb$

则  $\text{Re}\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x^*(t)] = \frac{1}{2}[(a - jb) + (a + jb)] = a$



(d)



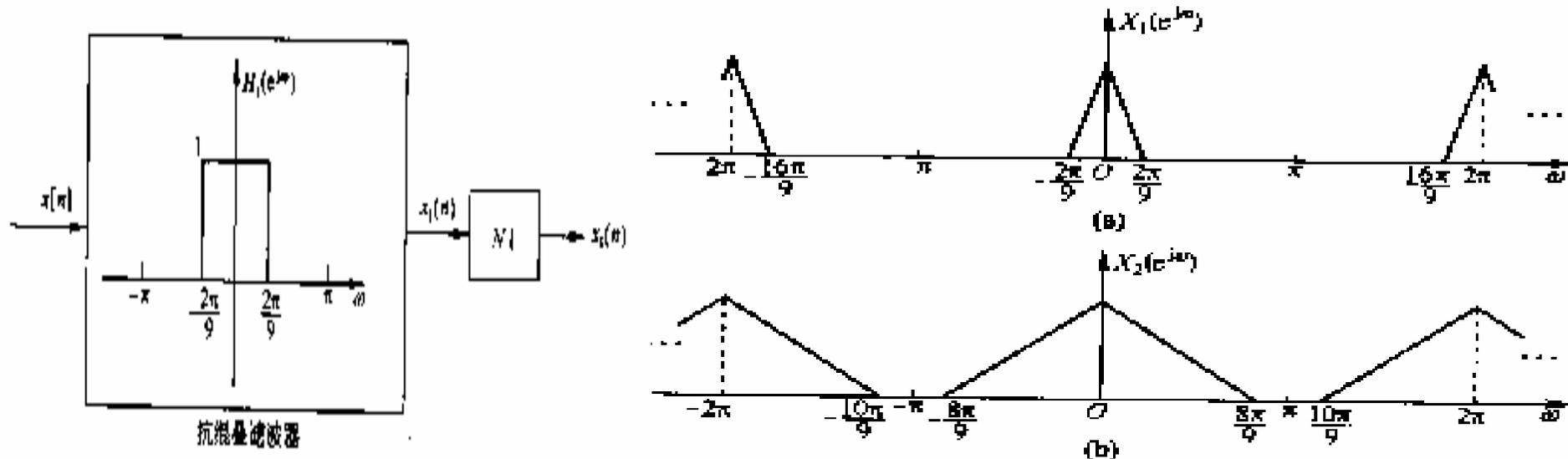
(e)

免费下载网 [www.bbbz.com](http://www.bbbz.com)

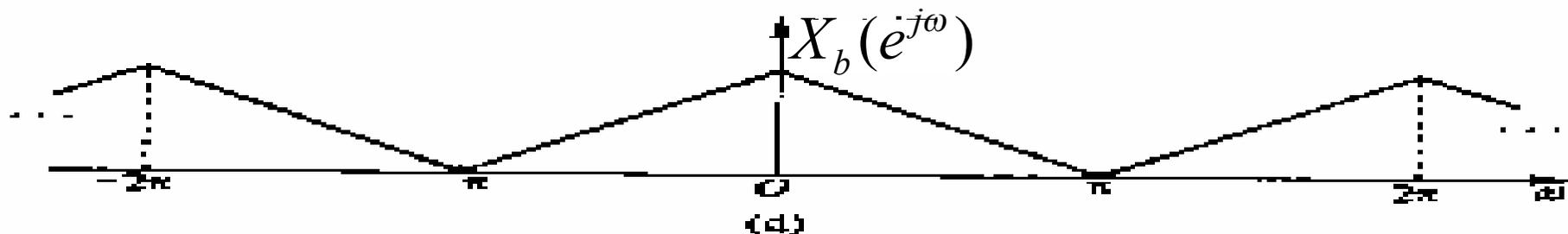
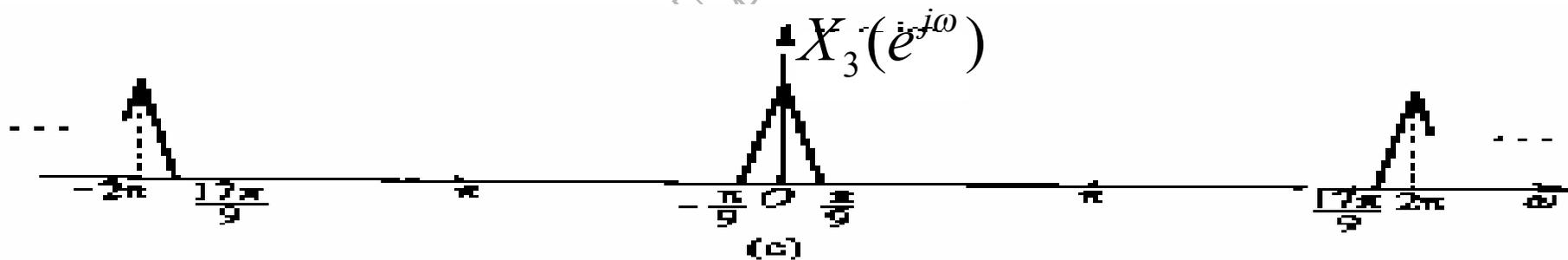
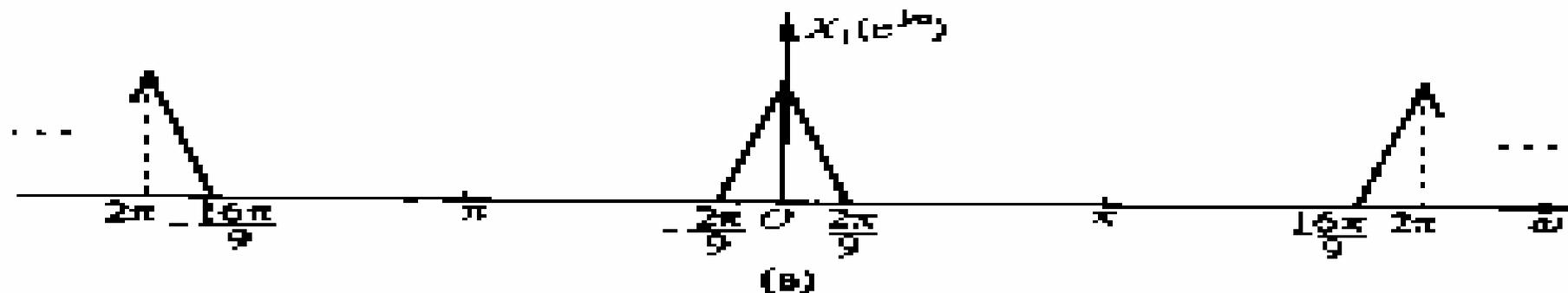
例： 下图为一**抽取系统**.图中  $H_1(e^{j\omega})$  为一抗混叠滤波器,滤去信号中无用的高频分量,并将信号的最高频率限制为  $\omega_M = 2\pi/9$ ,试问此时系统所能达到的最大抽取N是多少?

解： 要获得**最大的抽取**,就必须使  $X_b(e^{j\omega})$  占据**整个频带**. 由于信号  $x_1[n]$  的最高频率  $\omega_M = 2\pi/9$  如对信号直接进行抽取,要不产生混叠,必须

满足  $\omega_s = \frac{2\pi}{N} > 2 \times \frac{2\pi}{9}$  , 即  $N < 9/2$ , 取  $N=4$ . 对  $x_1[n]$  进行  $N=4$ 的抽取, 就得到  $x_2[n]$  , 它的频谱如图 (b)所示. 其中在  $\frac{8\pi}{9} \leq |\omega| \leq \pi$  这段频带内频谱还是零. 因此仍有进一步抽取的余地. 具体做法如下:



- 先对信号进行  $N=2$  的**内插**，获得相应的内插序列  $x_1[n/2]$ ，其频谱如图(c)所示其最高频率为  $\pi/9$ 。
- 然后对  $x_1[n/2]$  信号进行  $N=9$  的**抽取**  $x_1[9n/2]$ ，使其占据整个频带。最终获得最大抽取的序列  $x_b[n]$ ，(d)所示

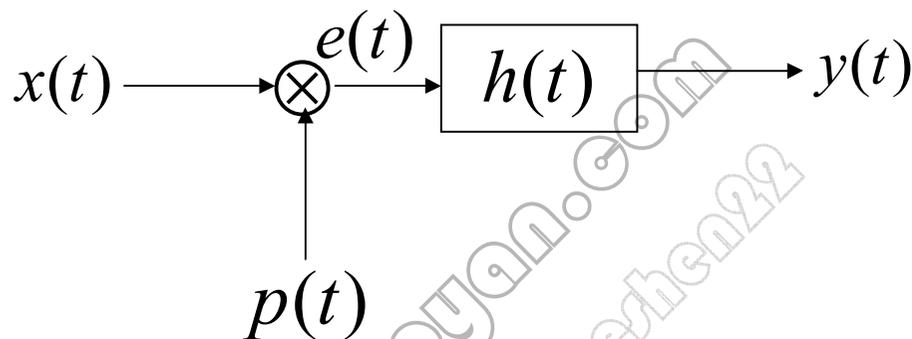


例：系统如图所示，其中

$$x(t) = \frac{\sin(3\omega_0 t / 2)}{\pi t}$$

$$p(t) = \cos 2\omega_0 t + 4 \cos 8\omega_0 t$$

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$



求：y(t)的傅立叶级数表示式。

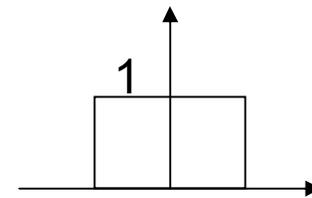
$$\text{解：} \because e(t) = x(t)p(t) \xleftrightarrow{F} E(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

$$\begin{aligned} \sin(3\omega_0 t / 2) &= \frac{1}{2j} [e^{j3\omega_0 t / 2} - e^{-j3\omega_0 t / 2}] \xleftrightarrow{F} \frac{2\pi}{2j} [\delta(\omega - \frac{3}{2}\omega_0) - \delta(\omega + \frac{3}{2}\omega_0)] \\ &= j\pi [\delta(\omega + \frac{3}{2}\omega_0) - \delta(\omega - \frac{3}{2}\omega_0)] \end{aligned}$$

$$\text{据频域积分性：} -\frac{1}{jt} x(t) + \pi x(0)\delta(t) \xleftrightarrow{F} \int_{-\infty}^{\omega} X(j\eta) d\eta$$

$$-\frac{\sin(3\omega_0 t / 2)}{jt} \xleftrightarrow{F} \int_{-\infty}^{\omega} j\pi [\delta(\eta + \frac{3}{2}\omega_0) - \delta(\eta - \frac{3}{2}\omega_0)] d\eta$$

$$= j\pi [U(\omega + \frac{3}{2}\omega_0) - U(\omega - \frac{3}{2}\omega_0)]$$



$$\frac{\sin(3\omega_0 t / 2)}{\pi t} \xleftrightarrow{F} U(\omega + \frac{3}{2}\omega_0) - U(\omega - \frac{3}{2}\omega_0) = \begin{cases} 1 & , |\omega| < \frac{3}{2}\omega_0 \\ 0 & , |\omega| > \frac{3}{2}\omega_0 \end{cases}$$

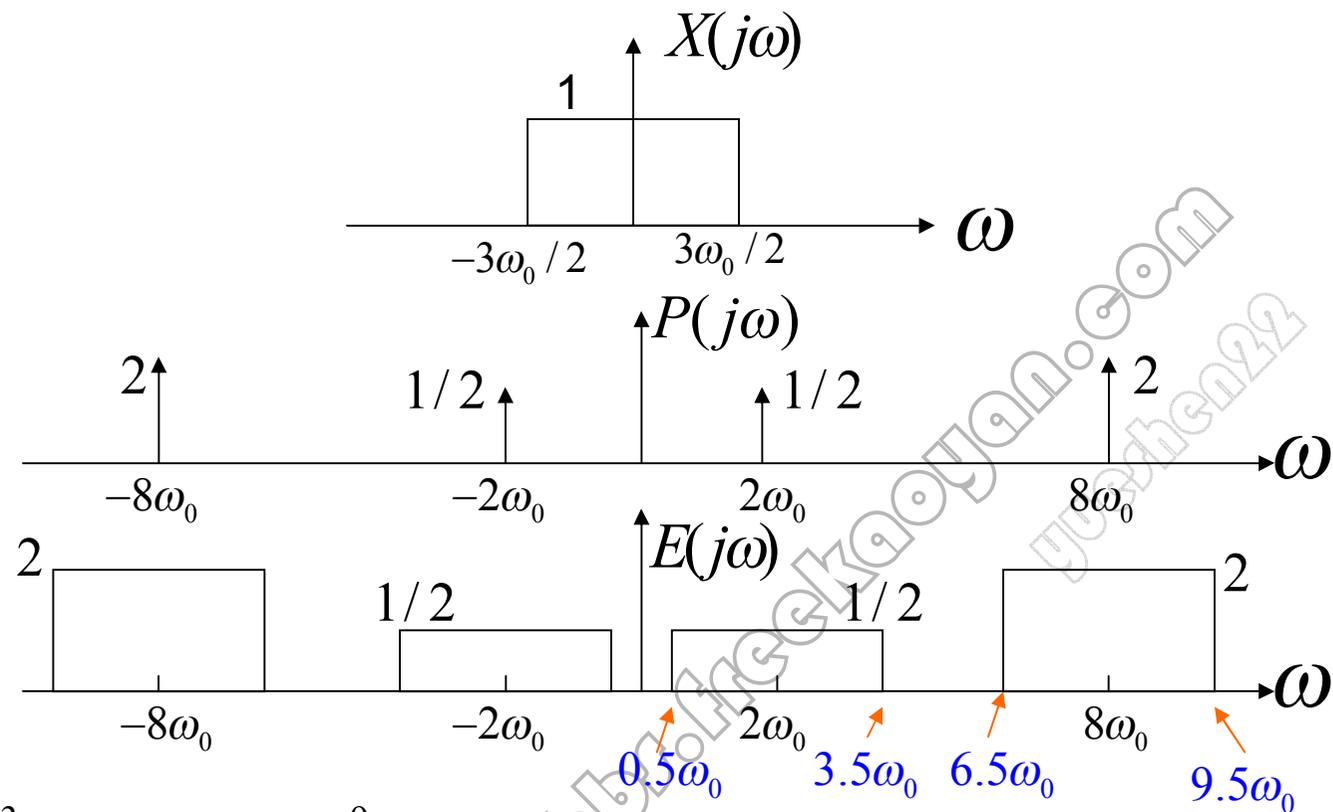
$$P(j\omega) = \pi[\delta(\omega + 2\omega_0) + \delta(\omega - 2\omega_0) + 4\delta(\omega + 8\omega_0) + 4\delta(\omega - 8\omega_0)]$$

$$E(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

$$= \frac{1}{2} X[j(\omega + 2\omega_0)] + \frac{1}{2} X[j(\omega - 2\omega_0)] + 2X[j(\omega + 8\omega_0)] + 2X[j(\omega - 8\omega_0)]$$

$$H(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$Y(j\omega) = E(j\omega)H(j\omega) = \pi \sum_{|k|=1}^3 c_k \delta(\omega - k\omega_0) + 4\pi \sum_{|k|=7}^9 c_k \delta(\omega - k\omega_0)$$



$$y(t) = \frac{1}{2} \sum_{|k|=1}^3 c_k e^{jk\omega_0 t} + 2 \sum_{|k|=7}^9 c_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$y_k = \begin{cases} \frac{1}{2} c_k & , \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \\ 2c_k & , \quad k = \pm 7, \pm 8, \pm 9 \\ 0 & , \end{cases}$$

注意：1、在实际中  $x(t)$  是一个具体的信号——即必须掌握信号的变换

$$\sin \omega_0 t \xleftrightarrow{F} j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] = \frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\cos \omega_0 t \xleftrightarrow{F} \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$\frac{\sin \omega_0 t}{\pi t} \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = U(\omega + \omega_0) - U(\omega - \omega_0) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_0 \\ 0 & |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\sin \omega_0 t}{\pi t}\right)^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * X(j\omega)$$

$$te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{(a + j\omega)^2}$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{(a + j\omega)^n}$$

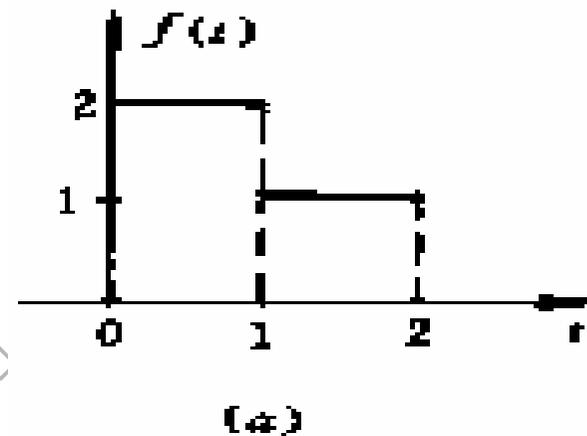
# 习题解

免费考研网 [bbs.freekaoyan.com](http://bbs.freekaoyan.com)  
yueshen22

作业: 1、已知信号  $x(t)$  的波形如图(a)所示,

1) 求积分  $\int_{-\infty}^t f(6-2\tau)d\tau$  , 并画出波形;

2) 求微分  $\frac{d}{dt}[f(6-2t)]$  , 并画出波形。



2、习题1.9 (d)

3、习题1.27

免费考研网 [bbs.freekaoyan.com](http://bbs.freekaoyan.com)

一、离散时间复指数信号的周期性问题

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n} e^{j\omega_0 N} = e^{j\omega_0 n} e^{j\omega_0 N} = 1$$

$$\omega_0 N = 2\pi m, \text{ 或 } \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}, \text{ 或 } \omega = \frac{\omega_0}{m} = \frac{2\pi}{N}, \quad N = m \frac{2\pi}{\omega_0}$$

**题1.9** (d) 判断信号的周期性。若是周期的，给出它的基波周期。

$$x_4[n] = 3e^{j3\pi(n+1/2)/5}$$

解：1、 $\because x_4[n] = 3e^{j3\pi(n+1/2)/5} = 3e^{j3\pi/10} e^{j3\pi n/5}$

得  $\omega_0 = 3\pi/5 \quad N = m(2\pi / \omega_0) = m\left(\frac{2\pi}{3\pi/5}\right) = \frac{10}{3}m$

是周期的，基波周期为  $N=10$

2、 $x_4[n+N] = 3e^{j3\pi(n+N+1/2)/5} = 3e^{j3\pi(n+1/2)/5} e^{j3\pi N/5}$

$$e^{j3\pi N/5} = 1 \quad 3\pi N/5 = 2\pi m \quad N = m \times 10/3$$

题1.27 a)  $y(t) = x(t-2) + x(2-t)$  是无记忆、时不变、线性、因果、稳定?  
解:

1、是记忆系统——系统的输出与以前或将来的输入有关。

2、是时不变系统

$$\text{设: } y_1(t) = x_1(t-2) + x_1(2-t)$$

$$\text{得 } y_1(t-t_0) = x_1[(t-t_0)-2] + x_1[2-(t-t_0)]$$

$$\text{令 } x_2(t) = x_1(t-t_0)$$

$$\text{则 } y_2(t) = x_1[(t-t_0)-2] + x_1[2-(t-t_0)] = y_1(t-t_0) \quad \text{所以是时不变的}$$

3、因为系统满足叠加性和齐次性。所以是线性的。

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1(t-2) + x_1(2-t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2(t-2) + x_2(2-t)$$

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

$$y_3(t) = x_3(t-2) + x_3(2-t)$$

$$= ax_1(t-2) + bx_2(t-2) + ax_1(2-t) + bx_2(2-t)$$

$$= ay_1(t) + by_2(t)$$

4、因为  $y(t)$  与未来的输入有关，所以是非因果的  
即当  $t=0$  时

得  $y(0) = x(-2) + x(2)$  所以是非因果的

5、是稳定的。

$\because x(t)$  是有界输入

$\therefore x(t-2)$  和  $x(2-t)$  有界，即  $y(t)$  是稳定的。

b)  $y(t) = [\cos(3t)]x(t)$

解：1、是无记忆系统—— $t$ 时刻系统的输出，仅与当前的输入  $x(t)$  有关。

2、是时变系统。

设  $y_1(t) = [\cos(3t)]x_1(t)$        $y_2(t) = [\cos(3t)]x_2(t)$

当  $x_2(t) = x_1(t-t_0)$  时，

$y_2(t) = [\cos(3t)]x_2(t-t_0)$

而  $y_1(t-t_0) = [\cos 3(t-t_0)]x_1(t-t_0) \neq y_2(t)$

3、因为系统满足叠加性和齐次性。所以是线性的。

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = [\cos 3t]x_1(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = [\cos 3t]x_2(t)$$

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

$$\begin{aligned} \therefore y_3(t) &= [\cos 3t]x_3(t) = [\cos 3t][ax_1(t) + bx_2(t)] \\ &= a[\cos 3t]x_1(t) + b[\cos 3t]x_2(t) = ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

4、因为  $y(t) = [\cos 3t]x(t)$  只与当前的输入  $x(t)$  有关，所以是因果的。

5、系统是稳定。

因为若  $x(t)$  有界，而  $|\cos 3t| \leq 1$  也有界；所以  $y(t)$  有界。

题1.27(c)  $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau) d\tau$  是无记忆、时不变、线性、因果、稳定?

解:

1、是记忆系统——系统的输出不仅与当前的输入有关，而且还与以前或将来的输入有关。

2、是时变系统

$$\text{设 } x_1(\tau) = x(\tau - t_0)$$

$$\text{则 } y_1(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau - t_0) d\tau$$

$$\text{而 } y(t - t_0) = \int_{-\infty}^{2(t-t_0)} x(\tau) d\tau \neq y_1(t) \quad \text{所以是时变的}$$

3、因为系统满足叠加性和齐次性。所以是线性的。

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau) d\tau \quad x_2(t) \rightarrow y_2(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau) d\tau$$

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow y_3(t) = \int_{-\infty}^{2t} [ax_1(\tau) + bx_2(\tau)] d\tau = ay_1(t) + by_2(t)$$

4、因为 $y(t)$ 与未来的输入 $x(2t)$ 有关，所以是非因果的，

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau + \int_t^{2t} x(\tau) d\tau$$

5、不稳定。

若  $x(t) = u(t)$  时。

则 
$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau) d\tau = \int_0^{2t} 1 d\tau = 2tu(t)$$

所以当  $t \rightarrow \infty$  时，  $y(t) \rightarrow \infty$

$$d) \quad y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ x(t) + x(t-2) & t \geq 0 \end{cases}$$

1、当  $t \geq 0$  时， $y(t)$  由  $t$ 、 $t-2$  时刻的输入共同决定。所以是记忆系统

2、是时变系统。

$$y_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ x_1(t) + x_1(t-2) & t \geq 0 \end{cases}$$

$$y_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ x_2(t) + x_2(t-2) & t \geq 0 \end{cases}$$

令：  $x_2(t) = x_1(t-t_0)$

$$y_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ x_1(t-t_0) + x_2(t-t_0-2) & t \geq 0 \end{cases}$$

$$y_1(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t-t_0 < 0 \\ x_1(t-t_0) + x_1(t-t_0-2) & t-t_0 \geq 0 \end{cases}$$

$$y_1(t-t_0) \neq y_2(t)$$

3、是线性的。

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ x_1(t) + x_1(t-2) & t \geq 0 \end{cases}; \quad x_2(t) \rightarrow y_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ x_2(t) + x_2(t-2) & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{令 } x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

$$y_3(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ x_3(t) + x_3(t-2) & t \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ ax_1(t) + bx_2(t) + ax_1(t-2) + bx_2(t-2) & t \geq 0 \end{cases}$$

$$= a \begin{cases} 0 & t < 0 \\ x_1(t) + x_1(t-2) & t \geq 0 \end{cases} + b \begin{cases} 0 & t < 0 \\ x_2(t) + x_2(t-2) & t \geq 0 \end{cases} = ay_1(t) + by_2(t)$$

4、t时刻的输出与t及t-2时刻的输入有关，而与将来无关。所以是因果系统。

5、当x(t)有界，则x(t-2)有界。所以y(t)有界。即是稳定系统。

$$e) \quad y(t) = \begin{cases} 0 & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-2) & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

1、令  $t = 0$ ，且  $x(0) \geq 0$ ，得  $y(0) = x(0) + x(-2)$

可见，是记忆系统。

2、是时不变的。

$$\text{令} \quad y_1(t) = \begin{cases} 0 & x_1(t) < 0 \\ x_1(t) + x_1(t-2) & x_1(t) \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{得} \quad y_1(t-t_0) = \begin{cases} 0 & x_1(t-t_0) < 0 \\ x_1(t-t_0) + x_1(t-t_0-2) & x_1(t-t_0) \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{令:} \quad x_2(t) = x_1(t-t_0)$$

$$\text{得} \quad y_2(t) = \begin{cases} 0 & x_2(t) < 0 \\ x_2(t) + x_2(t-2) & x_2(t) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x_1(t-t_0) < 0 \\ x_1(t-t_0) + x_1(t-t_0-2) & x_1(t-t_0) \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{可见} \quad y_2(t) = y_1(t-t_0)$$

3、是非线性的。

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \begin{cases} 0 & x_1(t) < 0 \\ x_1(t) + x_1(t-2) & x_1(t) \geq 0 \end{cases}$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = \begin{cases} 0 & x_2(t) < 0 \\ x_2(t) + x_2(t-2) & x_2(t) \geq 0 \end{cases}$$

令  $x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$

$$y_3(t) = \begin{cases} 0 & x_3(t) < 0 \\ x_3(t) + x_3(t-2) & x_3(t) \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & ax_1(t) + bx_2(t) < 0 \\ ax_1(t) + bx_2(t) + ax_1(t-2) + bx_2(t-2) & ax_1(t) + bx_2(t) \geq 0 \end{cases}$$

而  $ay_1(t) + by_2(t)$

$$= \begin{cases} 0 & x_1(t) < 0 \\ ax_1(t) + ax_1(t-2) & x_1(t) \geq 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 & x_2(t) < 0 \\ bx_1(t) + bx_1(t-2) & x_2(t) \geq 0 \end{cases}$$

两者不等

4、是因果的。

因为，当  $x(t) \geq 0$  时，输出包含现在与过去的输入。

5、是稳定的。

若  $x(t)$  有界，则  $x(t-2)$  有界。即  $y(t)$  有界。所以，是稳定系统。

f)、 $y(t) = x(t/3)$

1、是记忆的。

因为  $t$  时刻的输出由  $t/3$  时刻的输入决定。

2、是时不变的。

$$\text{令 } x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1(t/3)$$

$$\text{得 } y_1(t-t_0) = x_1[(t-t_0)/3]$$

$$\text{令 } x_2(t) = x_1(t-t_0)$$

$$\text{得 } y_2(t) = x_1[(t-t_0)/3] = y_1(t-t_0)$$

3、是线性的。

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1(t/3)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2(t/3)$$

令  $x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$

则  $y_3(t) = x_3(t/3) = ax_1(t/3) + bx_2(t/3) = ay_1(t) + by_2(t)$

4、是非因果的。

令  $t=-3$ , 得  $y(-3) = x(-1)$ , 即输出与将来有关。

5、稳定的。若  $x(t)$  有界, 则  $x(t/3)$  也有界。即  $y(t)$  有界。

g)、
$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

1、无记忆的。

因为  $t$  时刻的输出  $y(t)$  只与  $t$  时刻的输入  $x(t)$  有关。

2、时不变的。

设  $y_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt}$

则  $y_1(t-t_0) = \frac{dx_1(t-t_0)}{dt}$

令  $x_2(t) = x_1(t-t_0)$

得  $y_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{dx_1(t-t_0)}{dt} = y_1(t-t_0)$

3、是线性的。

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt}; \quad x_2(t) \rightarrow y_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt}$$

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

$$y_3(t) = \frac{dx_3(t)}{dt} = \frac{d[ax_1(t) + bx_2(t)]}{dt} = a \frac{dx_1(t)}{dt} + b \frac{dx_2(t)}{dt} = ay_1(t) + by_2(t)$$

4、因果的。

$t$ 时刻的输出 $y(t)$ 只与 $t$ 时刻的输入 $x(t)$ 有关。

5、稳定的。

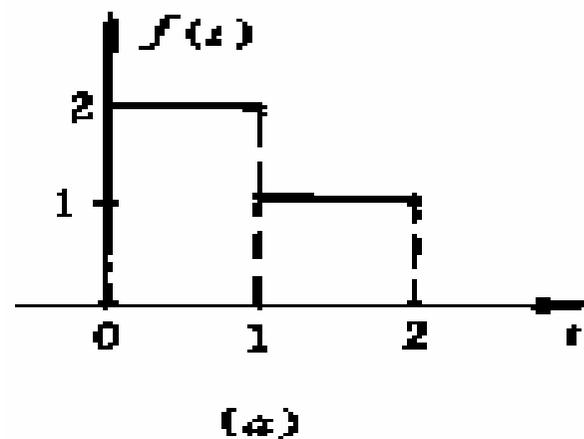
补充题：

1、已知信号  $x(t)$  的波形如图 (a) 所示，

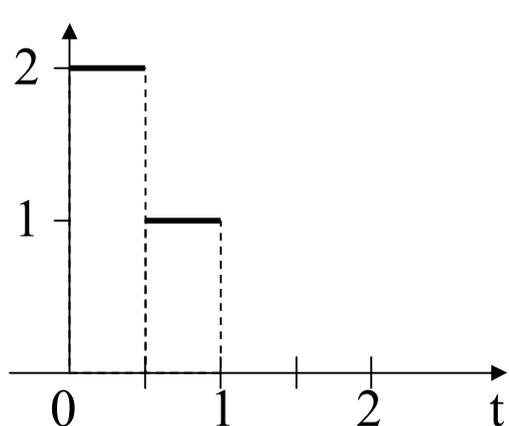
1) 求积分  $\int_{-\infty}^t f(6-2\tau)d\tau$ ，并画出波形；

2) 求微分  $\frac{d}{dt}[f(6-2t)]$ ，并画出波形。

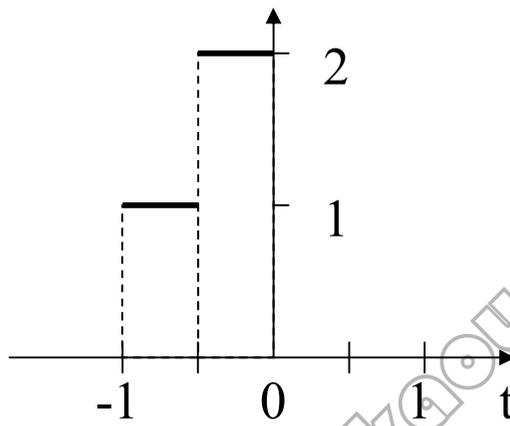
解：1) 先画出  $f(6-2t)$  的波形。



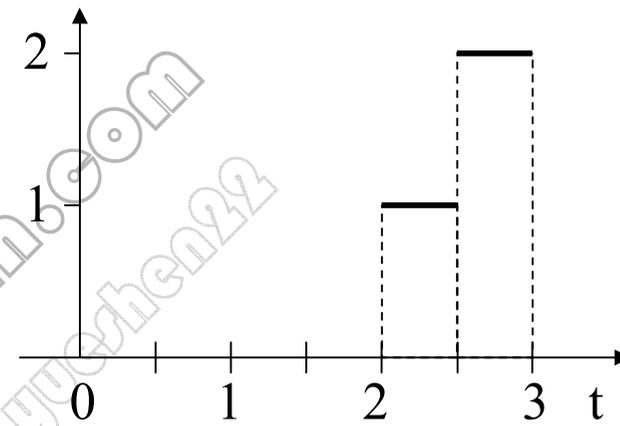
$$f(t) \xrightarrow{\text{展缩}1/2} f(2t) \xrightarrow{\text{反转}} f(-2t) \xrightarrow{\text{右移}3} f[-2(t-3)]$$



$f(2t)$



$f(-2t)$



$f(6-2t)$

或  $f(t) \xrightarrow{\text{右移}6} f(t+6) \xrightarrow{\text{反转}} f(6-t) \xrightarrow{\text{展缩}1/2} f(6-2t)$

2) 求积分: (以讨论的形式进行) 由图可见,

- 当  $t < 2$  时,  $f(6-2t) = 0$   $\int_{-\infty}^2 f(6-2\tau)d\tau = 0$

- 当  $2 \leq t < 2.5$  时,  $f(6-2t) = 1$

$$\int_{-\infty}^t f(6-2\tau)d\tau = \int_{-\infty}^2 f(6-2\tau)d\tau + \int_2^t f(6-2\tau)d\tau = t - 2$$

- 当  $2.5 \leq t \leq 3$  时,  $f(6-2t) = 2$

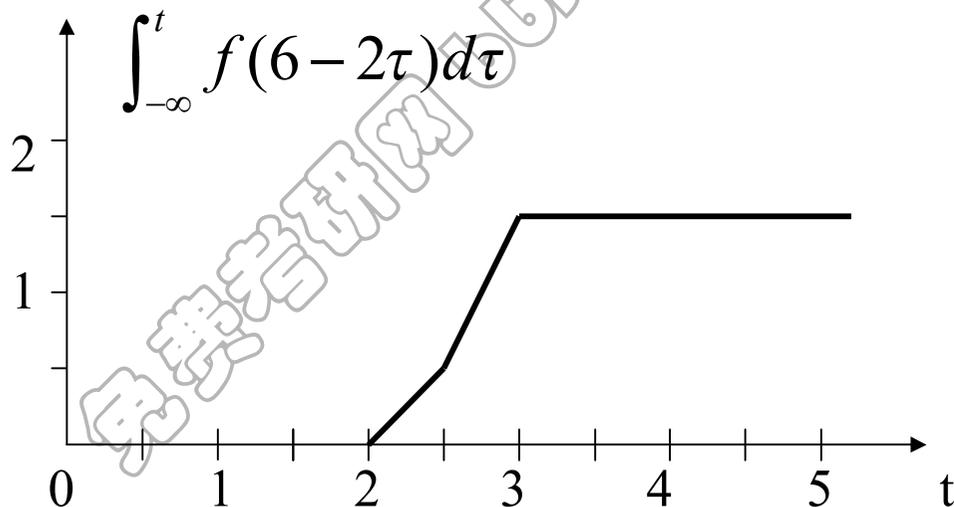
$$\int_{-\infty}^t f(6-2\tau)d\tau = \int_{-\infty}^2 f(6-2\tau)d\tau + \int_2^{2.5} f(6-2\tau)d\tau + \int_{2.5}^t f(6-2\tau)d\tau =$$

$$= 0 + 0.5 + 2(t-2.5) = 2t - 4.5$$

- 当  $t > 3$  时,  $f(6-2t) = 0$

$$\int_{-\infty}^t f(6-2\tau)d\tau = \int_{-\infty}^2 f(6-2\tau)d\tau + \int_2^{2.5} f(6-2\tau)d\tau + \int_{2.5}^3 f(6-2\tau)d\tau + \int_3^t f(6-2\tau)d\tau$$

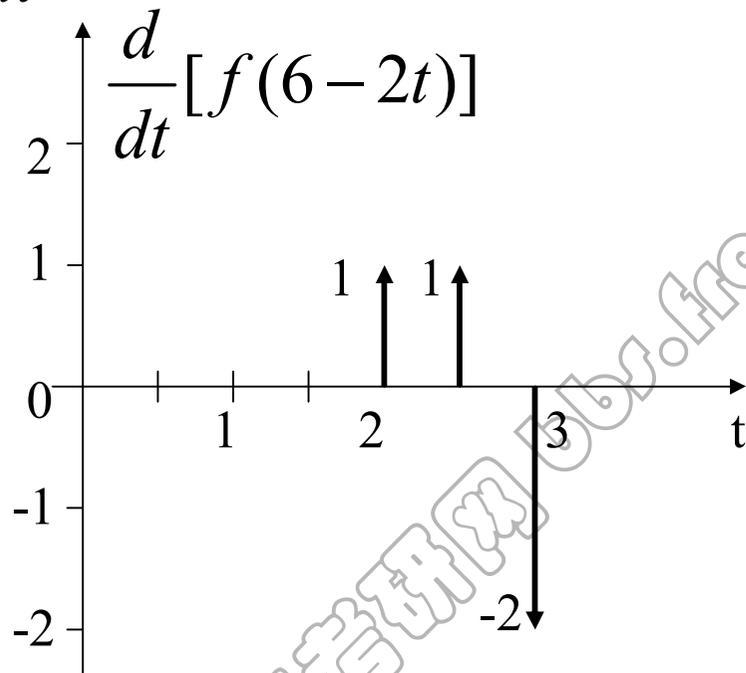
$$= 0 + 0.5 + 1 + 0 = 1.5$$



3)求微分: (先写出表达式, 再求导) 由图可见,

$$f(6-2\tau) = u(t-2) + u(t-2.5) - 2u(t-3)$$

所以  $\frac{d}{dt}[f(6-2t)] = \delta(t-2) + \delta(t-2.5) - 2\delta(t-3)$



$$\text{已知: } x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2], \quad h[n] = u[n+2]$$

求出并画出输出  $y[n] = x[n] * h[n]$

解:

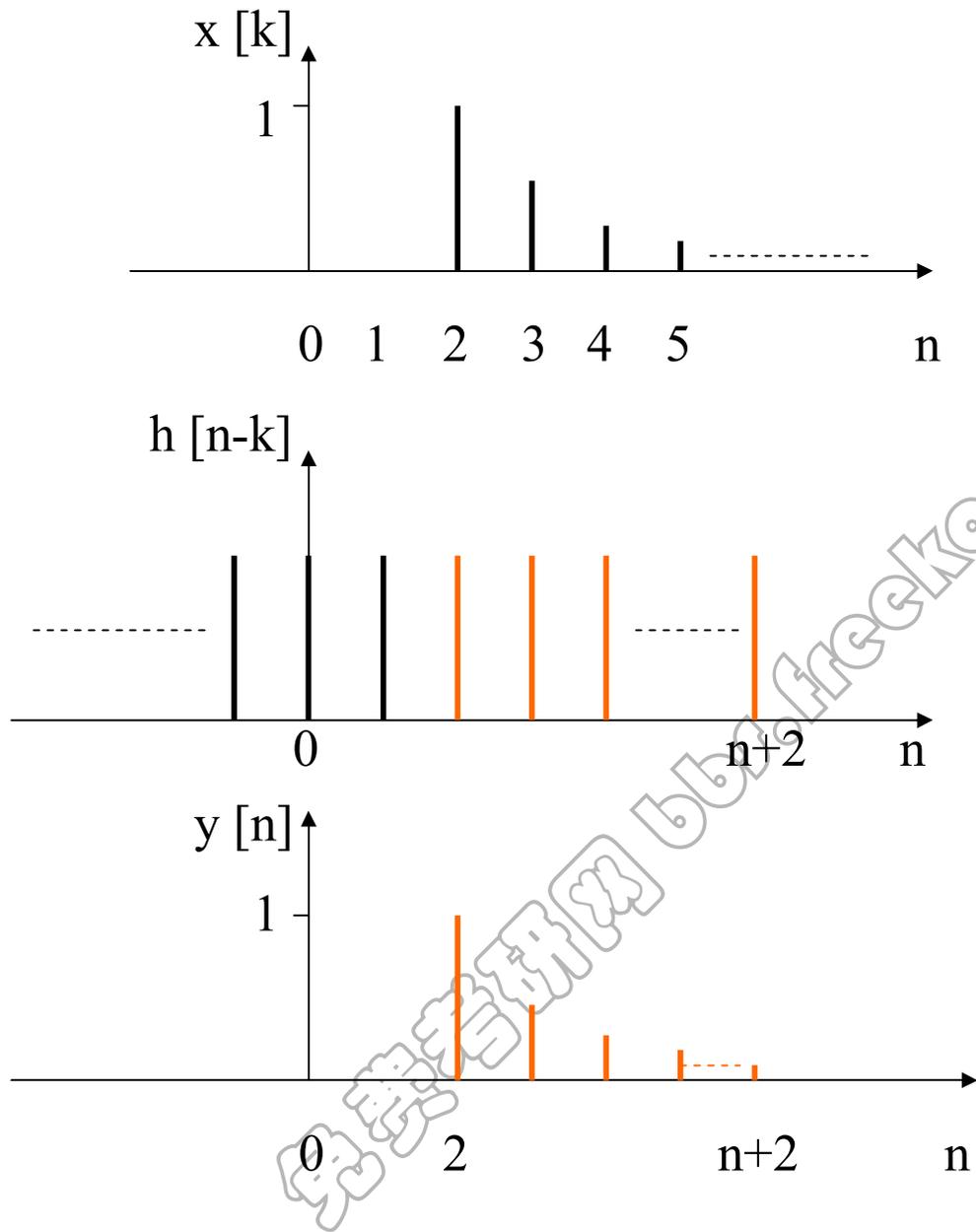
$$\therefore y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$$x[k] = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} u[k-2] = \begin{cases} 0 & k < 2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} & k \geq 2 \end{cases}$$

$$h[n-k] = u[n+2-k] = \begin{cases} 1 & k \leq n+2 \\ 0 & k > n+2 \end{cases}$$

当  $n+2 \geq 2$  时,  $n \geq 0$ ,  $y[n]$  有值

$$\therefore y[n] = \sum_{k=2}^{n+2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = \sum_{m=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^m = \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - (1/2)} u[n] = \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] \times 2 u[n]$$



P100页

题2.17 考虑一LTI系统，其输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 由下面微分方程描述：

$$\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = x(t)$$

系统满足初始松弛的条件。

(a)若  $x(t) = e^{(-1+3j)t}u(t)$  ,求  $y(t) = ?$

解: 1、经典法  $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

$$1) \because \lambda + 4 = 0 \quad \lambda = -4 \quad \therefore y_h(t) = Ae^{-4t}u(t)$$

$$2) \because x(t) = e^{(-1+3j)t}u(t) \quad \therefore \text{设 } y_p(t) = Be^{(-1+3j)t}u(t)$$

代入方程得  $Be^{(-1+3j)t}(-1+3j) + 4Be^{(-1+3j)t} = e^{(-1+3j)t}$

$$B(-1+3j) + 4B = 1, \quad B = \frac{1}{4 + (-1+3j)} = \frac{1}{3(1+j)}$$

$$\therefore y(t) = Ae^{-4t}u(t) + \frac{1}{3(1+j)}e^{(-1+3j)t}u(t)$$

$$y(0) = A + \frac{1}{3(1+j)} = 0, \quad A = -\frac{1}{3(1+j)}$$

$$y(t) = -\frac{1}{3(1+j)}e^{-4t}u(t) + \frac{1}{3(1+j)}e^{(-1+3j)t}u(t)$$

$$= \frac{(1-j)}{6} [e^{(-1+3j)t} - e^{-4t}]u(t)$$

## 2、用傅立叶变换

$$\because \frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = x(t) \quad , \quad \therefore H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 4}$$

$$\because x(t) = e^{(-1+3j)t}u(t) \quad , \quad \therefore X(j\omega) = \frac{1}{j\omega - (-1+3j)}$$

即

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 4)[j\omega - (-1+3j)]}$$

$$= \frac{A_1}{j\omega + 4} + \frac{A_2}{j\omega - (-1+3j)}$$

可求得

$$A_1 = -\frac{1}{3(1+j)} = -\frac{(1-j)}{6} \quad , \quad A_2 = \frac{1}{3(1+j)} = \frac{(1-j)}{6}$$

$$Y(j\omega) = \frac{(1-j)}{6} \left[ \frac{1}{(j\omega - (-1+3j))} - \frac{1}{(j\omega + 4)} \right]$$

$$y(t) = \frac{(1-j)}{6} [e^{(-1+3j)t} - e^{-4t}]u(t)$$

题2.32

考虑一差分方程  $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$

设  $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

假定解  $y[n]$  有一个特解  $y_p[n]$  和一个齐次解  $y_h[n]$  组成。

(a) 证明，齐次解为  $y_h[n] = A\left(\frac{1}{2}\right)^n$

解:  $\because y_h[n] - \frac{1}{2}y_h[n-1] = 0$

$$\lambda - \frac{1}{2} = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

为单实根，所以齐次解为：

$$y_h[n] = A(1/2)^n$$

(b) 假设特解的形式为:

$$y_p[n] = B\left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad n \geq 0$$

请确定B值。

解:

$$\therefore x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$n \leq 0, \quad x[n] = 0. \quad n \geq 0, \quad x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\therefore y_p[n] = B\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

代入方程

$$y_p[n] - \frac{1}{2}y_p[n-1] = B\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}B = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$B\left[1 - \frac{3}{2}\right] = u[n]$$

得

$$B = -2, \quad n \geq 0$$

(c) 假设LTI系统初始松弛，求方程的解。

解：由(a)、(b)可知，方程的解为：

$$y[n] = A\left(\frac{1}{2}\right)^n + B\left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad n \geq 0$$

其中，已知  $B = -2$ ，

根据初始松弛条件可知： $n < 0$  时， $x[n] = 0$ ；所以有  $n < 0$ ， $y[n] = 0$ 。

$$\therefore y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$\therefore y[0] - \frac{1}{2}y[-1] = 1$$

即  $y[0] = 1$

得  $y[0] = A\left(\frac{1}{2}\right)^0 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^0 = A - 2 = 1$

$$A = 3$$

$$\therefore y[n] = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad n \geq 0$$

P108页 题2.48

解:a) 正确。因为h(t)是周期的,若 $h(t) \neq 0$ , 则  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \rightarrow \infty$

所以不**稳定**。

b) 错。若  $h[n] = \delta[n-k]$

则  $h_1[n] = \delta[n+k]$

与将来有关。所以是**非因果**的

c) 错。例如:

若  $h[n] = u[n]$ , 则  $|h[n]| = 1$

但  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| \rightarrow \infty$

不稳定

d) 正确。因为, 若h[n]是**有限**的, 则

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=m1}^{m2} |h[k]| < \infty$$

所以**稳定**

e) 错。例如:  $h(t) = e^t u(t)$  是因果的, 但不稳定, ( 因为  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \rightarrow \infty$  )

f) 错。例如, 冲激响应分别为

$$h_1(t) = \delta(t+1), \quad h_2(t) = \delta(t-1)$$

级联后得  $h_1(t) * h_2(t) = \delta(t+1) * \delta(t-1) = \delta(t)$  显然是因果的

g) 错。例如  $h(t) = e^{-t} u(t)$  ——是稳定系统

$$\text{得 } s(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = (1 - e^{-t}) u(t)$$

$$\text{而 } \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt = \int_0^{\infty} |1 - e^{-t}| dt = t + e^{-t} \Big|_0^{\infty} \rightarrow \infty$$

可见系统是稳定的, 但  $s(t)$  不是绝对可积。

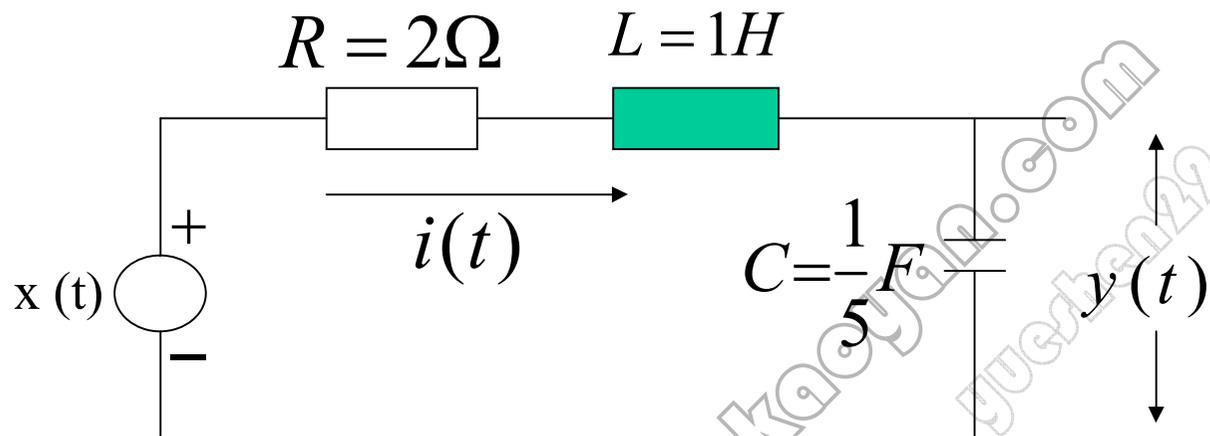
h) 正确。若  $u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]$$

可见, 若  $n < 0$ , 则  $s[n] = 0$

$$s[n] = h[n] * u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[n-k] \quad \text{则 } n < 0 \text{ 时, } h[n] = 0 \quad 723$$

题 2.61 (C) 已知电路如图所示, 1) 求  $y(t)$  的微分方程



解:

$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} = \frac{1}{5} \frac{dy(t)}{dt}$$

$$i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$2 \times \frac{1}{5} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{5} \times 1 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = x(t)$$

$$\frac{1}{5} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2}{5} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

2) 证明齐次解的形式为

$$e^{-at} \left\{ k_1 e^{j2t} + k_2 e^{-j2t} \right\}$$

给出a的值。

解：齐次方程为  $\frac{1}{5} y''(t) + \frac{2}{5} y'(t) + y(t) = 0$   $\frac{1}{5} \lambda^2 + \frac{2}{5} \lambda + 1 = 0$

$$\lambda_1 = -1 + 2j, \quad \lambda_2 = -1 - 2j$$

$$\begin{aligned} \therefore y_h(t) &= k_1 e^{(-1+2j)t} + k_2 e^{(-1-2j)t} \\ &= e^{-t} [k_1 e^{2jt} + k_2 e^{-2jt}] \end{aligned}$$

$$\therefore a = 1$$

3) 因为电压和电流都是实数，证明：该系统的自然响应为一衰减正弦振荡。

解：自然响应——即齐次解

电压和电流都是实数

$$\begin{aligned}
y_h(t) &= e^{-t} [k_1 e^{j2t} + k_2 e^{-j2t}] \\
&= e^{-t} [k_1 (\cos 2t + j \sin 2t) + k_2 (\cos 2t - j \sin 2t)] \\
&= e^{-t} [\cos 2t (k_1 + k_2) + j \sin 2t (k_1 - k_2)] \\
&= e^{-t} [\cos 2t (a + jb + c + jd) + \sin 2t (ja - b - jc + d)] \\
jb + jd &= 0 \quad , \quad b = -d \\
ja - jc &= 0 \quad , \quad a = c \\
y_h(t) &= e^{-t} [2a \cos 2t + 2d \sin 2t]
\end{aligned}$$

即为一衰减正弦振荡

作业:

题3.5 、 题3.11

---

作业:

P181 题3.19

P238 题4.1 (b)

题4.2 (b)

作业: P239 题4.11

P245 题4.33 (a), (b)

上次习题:

题3.19 (c) 若  $x(t) = \cos(t)$ , 求输出  $y(t)$

由(a)已求得系统的微分方程为:  $y'(t) + y(t) = x(t)$

由(b)已求得系统的频率响应为  $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$

$$\text{又 } \because x(t) = \cos t = \frac{1}{2}(e^{jt} + e^{-jt})$$

$$\therefore y(t) = H(j\omega)x(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{jt}}{1+j} + \frac{e^{-jt}}{1-j}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{jt}}{\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}} + \frac{e^{-jt}}{\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[e^{j(t-\frac{\pi}{4})} + e^{-j(t-\frac{\pi}{4})}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

题4.2(b)

求  $\frac{d}{dt} \{u(-2-t) + u(t-2)\}$  的傅立叶变换。

解:  $\because X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} [u(-2-t) + u(t-2)] e^{-j\omega t} dt$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [-\delta(-2-t) + \delta(t-2)] e^{-j\omega t} dt$$

$\delta[-(t+2)]$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-2-t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2) e^{-j\omega t} dt$$
$$= -e^{j2\omega} + e^{-j2\omega} = -2j \sin 2\omega$$

---

作业: P285

1、题5.7

2、题5.19

3、题5.51

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

作业: P352 题6.13 题 6.14

题 6.19

免费考研网 bbs.freekaoyan.com  
yueshen22

题4.11 已知下列关系:  $y(t) = x(t) * h(t)$

$$g(t) = x(3t) * h(3t)$$

解:  $\because y(t) = x(t) * h(t) \xrightarrow{F} Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$

$$\therefore g(t) = x(3t) * h(3t) \xrightarrow{F} G(j\omega) = \frac{1}{3} X(j\frac{\omega}{3}) \frac{1}{3} H(j\frac{\omega}{3})$$

$$= \frac{1}{9} X(j\frac{\omega}{3}) H(j\frac{\omega}{3})$$

$$\because g(t) = Ay(Bt) \xrightarrow{F} G(j\omega) = \frac{A}{|B|} Y(j\frac{\omega}{B}) = \frac{A}{|B|} X(j\frac{\omega}{B}) H(j\frac{\omega}{B})$$

$$B = 3 \quad \frac{A}{|B|} = \frac{1}{9} \quad A = \frac{1}{9} \times 3 = \frac{1}{3}$$

题4.33一因果LTI系统由下列微分方程表征:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt} + 6 \frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2x(t)$$

求: (a) 该系统的单位冲激响应;

(b) 若  $x(t) = te^{-2t}u(t)$ , 该系统的相应是什么?

解: (a)、 
$$H(j\omega) = \frac{2}{(j\omega)^2 + 6j\omega + 8} = \frac{2}{(j\omega + 2)(j\omega + 4)} = \frac{1}{j\omega + 2} - \frac{1}{j\omega + 4}$$

$$h(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-4t}u(t)$$

(b)  $\because x(t) = te^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 2)^2}$

$$\therefore Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = \frac{2}{(j\omega + 2)^3(j\omega + 4)}$$

$$= \frac{1}{j\omega + 2} + \frac{-1/2}{(j\omega + 2)^2} + \frac{1}{(j\omega + 2)^3} + \frac{-1/4}{j\omega + 4}$$

$$y(t) = \left[ e^{-2t} - \frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{2}t^2e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-4t} \right]u(t)$$

P285 题 5.7 利用傅立叶变换性质，确定下面傅立叶变换所对应的时域信号是：

1) 实、虚信号，或均不是；2) 偶、奇信号，或均不是。

a)  $X_1(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} \sum_{k=1}^{10} (\sin k\omega)$

解：若为实信号则应： $X(e^{j\omega}) = X_1^*(e^{-j\omega})$

现  $X_1(e^{-j\omega}) = -e^{j\omega} \sum_{k=1}^{10} (\sin k\omega)$

$$X_1^*(e^{-j\omega}) = -e^{-j\omega} \sum_{k=1}^{10} (\sin k\omega) \neq X(e^{j\omega})$$

• 所以，该信号不是实信号

又  $\because X_1(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} \sum_{k=1}^{10} (\sin k\omega) = \cos \omega \sum_{k=1}^{10} (\sin k\omega) - j \sin \omega \sum_{k=1}^{10} (\sin k\omega)$  (A)

而综合公式为  $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$

奇函数

偶函数

经反变换可得  $x[n] = -j \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \omega \sum_{k=1}^{10} (\sin k\omega) e^{j\omega n} d\omega$

即有  $jx[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \omega \sum_{k=1}^{10} (\sin k\omega) e^{j\omega n} d\omega$  所以为虚信号

• 由 (A) 式可见，该信号既不是偶也不是奇——即均不是

附录A: 部分分式展开:

$$H(v) = \frac{\beta_m v^m + \beta_{m-1} v^{m-1} + \cdots + \beta_1 v + \beta_0}{a_n v^n + a_{n-1} v^{n-1} + \cdots + a_1 v + a_0}$$

一、

- 1、对于连续时间傅立叶分析来说:  $v$  相当于  $(j\omega)$ ;
- 2、对于拉斯变换来说:  $v$  相当于复变量  $s$ ;
- 3、在离散傅立叶分析中:  $v$  相当于  $(e^{-j\omega})$ ;
- 4、对于 $z$ 变换:  $v$  相当于  $z^{-1}$  或  $z$ 。

二、

- 1、如果  $m < n$ , 则  $H(v)$  称为严格真有理函数——这时可先将分母因式分解,

$$H(v) = \frac{\beta_m v^m + b_{m-1} v^{m-1} + \cdots + \beta_1 v + \beta_0}{(v - \rho_1)(v - \rho_2) \cdots (v - \rho_n)}$$

再确定系数  $A_1, A_2, \cdots, A_n$

$$H(v) = \frac{A_1}{(v - \rho_1)} + \frac{A_2}{(v - \rho_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(v - \rho_n)}$$

2、如果  $m \geq n$ ，可用除法将  $H(v)$  写成一个  $v$  的多项式与一个严格真有理函数之和，即

$$H(v) = c_{m-n}v^{m-n} + c_{m-n-1}v^{m-n-1} + \dots + c_1v + c_0 + \frac{b_{n-1}v^{n-1} + b_{n-2}v^{n-2} + \dots + b_1v + b_0}{v^n + a_{n-1}v^{n-1} + \dots + a_1v + a_0}$$

三、P297 题5.51(b)

1) 求差分方程

• 设中间变量  $y_1[n], y_2[n], y_3[n]$ 。

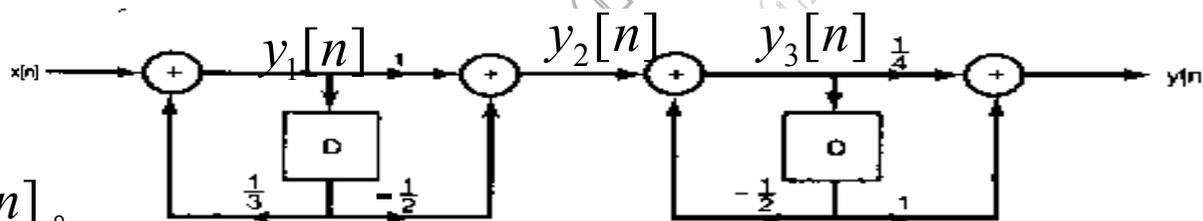


图 P5.51

$$y_1[n] = \frac{1}{3} y_1[n-1] + x[n] \Rightarrow H_1(e^{j\omega}) = \frac{Y_1(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

$$y_2[n] = y_1[n] - \frac{1}{2} y_2[n-1] \Rightarrow H_2(e^{j\omega}) = \frac{Y_2(e^{j\omega})}{Y_1(e^{j\omega})} = 1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}$$

$$y_3[n] = y_2[n] - \frac{1}{2} y_3[n-1] \Rightarrow H_3(e^{j\omega}) = \frac{Y_3(e^{j\omega})}{Y_2(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$y[n] = \frac{1}{4} y_3[n] + y_3[n-1] \Rightarrow H_4(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{Y_3(e^{j\omega})} = \frac{1}{4} + e^{j\omega}$$

得

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{Y(e^{j\omega})}{Y_3(e^{j\omega})} \frac{Y_3(e^{j\omega})}{Y_2(e^{j\omega})} \frac{Y_2(e^{j\omega})}{Y_1(e^{j\omega})} \frac{Y_1(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \\ &= \left(\frac{1}{4} + e^{-j\omega}\right) \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right) \left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}\right) \\ &= \frac{\left(\frac{1}{4} + e^{-j\omega}\right) \left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}{\left(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right) \left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{7}{8}e^{-j\omega} - \frac{1}{2}e^{-j2\omega}}{1 + \frac{1}{6}e^{-j\omega} - \frac{1}{6}e^{-j2\omega}} \end{aligned}$$

则差分方程为:  $y[n] + \frac{1}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] = \frac{1}{4}x[n] + \frac{7}{8}x[n-1] - \frac{1}{2}x[n-2]$

2、系统频率响应为:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\left(\frac{1}{4} + e^{-j\omega}\right) \left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}{\left(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right) \left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{7}{8}e^{-j\omega} - \frac{1}{2}e^{-j2\omega}}{1 + \frac{1}{6}e^{-j\omega} - \frac{1}{6}e^{-j2\omega}}$$

3、求该系统的单位脉冲响应

$$\therefore H(e^{j\omega}) = \frac{(\frac{1}{4} + e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})}{(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{7}{8}e^{-j\omega} - \frac{1}{2}e^{-j2\omega}}{1 + \frac{1}{6}e^{-j\omega} - \frac{1}{6}e^{-j2\omega}}$$

可见，分子分母的阶数相同，所以得用长除法将上式化为一个多项式与一个严格真有理函数之和的形式。即

$$\therefore H(e^{j\omega}) = \frac{(\frac{1}{4} + e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})}{(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} = \frac{12e^{-j2\omega} - 21e^{-j\omega} - 6}{4e^{-j2\omega} - 4e^{-j\omega} - 24}$$

$$4e^{-j2\omega} - 4e^{-j\omega} - 24 \begin{array}{l} 3 \\ \hline 12e^{-j2\omega} - 21e^{-j\omega} - 6 \\ \hline -12e^{-j2\omega} - 12e^{-j\omega} - 72 \\ \hline -9e^{-j\omega} + 66 \end{array}$$

$$H(e^{j\omega}) = 3 + \frac{3}{4} \frac{-3e^{-j\omega} + 22}{(e^{-j\omega} - 3)(e^{-j\omega} + 2)} = 3 + \frac{3}{4} \left[ \frac{A_1}{(e^{-j\omega} - 3)} + \frac{A_2}{(e^{-j\omega} + 2)} \right]$$

可求得:  $A_1 = \frac{13}{5}$  ,  $A_2 = -\frac{28}{5}$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= 3 + \frac{3}{4} \left[ \frac{13/5}{(e^{-j\omega} - 3)} - \frac{28/5}{(e^{-j\omega} + 2)} \right] \\ &= 3 - \frac{13/20}{(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} - \frac{21/10}{(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega})} \end{aligned}$$

得  $h[n] = 3\delta[n] - \frac{13}{20} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \frac{21}{10} \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

---

---

6.13 解:  $20\lg|H(j\omega)| = 6 - 20\lg\left|\frac{j\omega}{2} + 1\right| - 20\lg\left|\frac{j\omega}{80} + 1\right|$

$$H(j\omega) = \frac{A}{\left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{80}\right)}$$

若  $s_1 \rightarrow H_1(j\omega) \quad s_2 \rightarrow H_2(j\omega)$

$$\therefore H_1(j\omega) = \frac{M}{1 + \frac{j\omega}{2}}$$

$$H_2(j\omega) = \frac{N}{1 + \frac{j\omega}{80}}$$

若  $H_1(j\omega)H_2(j\omega) = H(j\omega)$

则  $MN = A$  ——  $M, N$  不能确定

$$S_1, S_2$$

$$M + N = H(j\omega) = \frac{M}{1 + \frac{j\omega}{2}} + \frac{N}{1 + \frac{j\omega}{80}} \quad \text{—— } M, N \text{ 可唯一确定}$$

6.14解:

$$20 \lg |A| = 94 \text{db} \rightarrow |A| = 5 \times 10^4$$

$$40 \text{db} / 10 \rightarrow 20 \lg \left| 1 + \frac{0.2}{j\omega} \right|^2$$

$$20 \text{db} / 10 \rightarrow -20 \lg \left| 1 + \frac{10}{j\omega} \right|$$

$$0 \text{db} / 10 \rightarrow -20 \lg \left| 1 + \frac{50}{j\omega} \right|$$

$$H(j\omega) = \frac{5 \times 10^4 (j\omega + 0.2)^2}{(j\omega + 10)(j\omega + 50)}$$

$$H_r(j\omega) = \frac{(j\omega + 10)(j\omega + 50)}{(j\omega + 0.2)^2} 0.2 \times 10^{-5}$$

6.19解:

$$u_R = CR \frac{dy(t)}{dt}$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = CL \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

$$\therefore CL \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + CR \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{CL} y(t) = \frac{1}{CL} x(t)$$

$$\frac{R}{L} = 2\zeta\omega_i \quad \omega_i = \sqrt{\frac{1}{CL}}$$

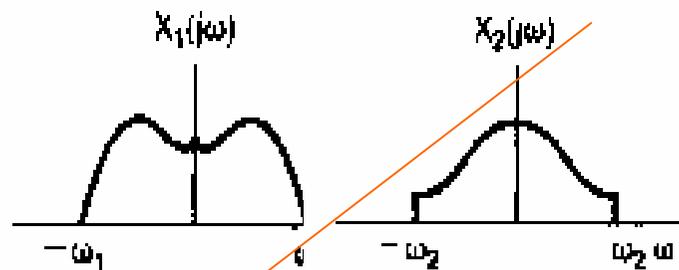
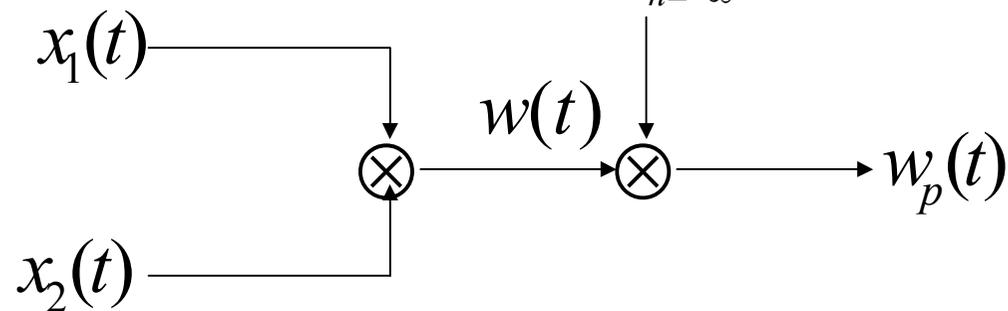
$$\zeta = \frac{R}{2\omega_i L} = \frac{R}{2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

为使系统阶跃响应不振荡,则  $\zeta \geq 1$  即  $\frac{R}{2\sqrt{\frac{L}{C}}} \geq 1$

免费考研网 bbs.freekaoyan.com  
yueshen22

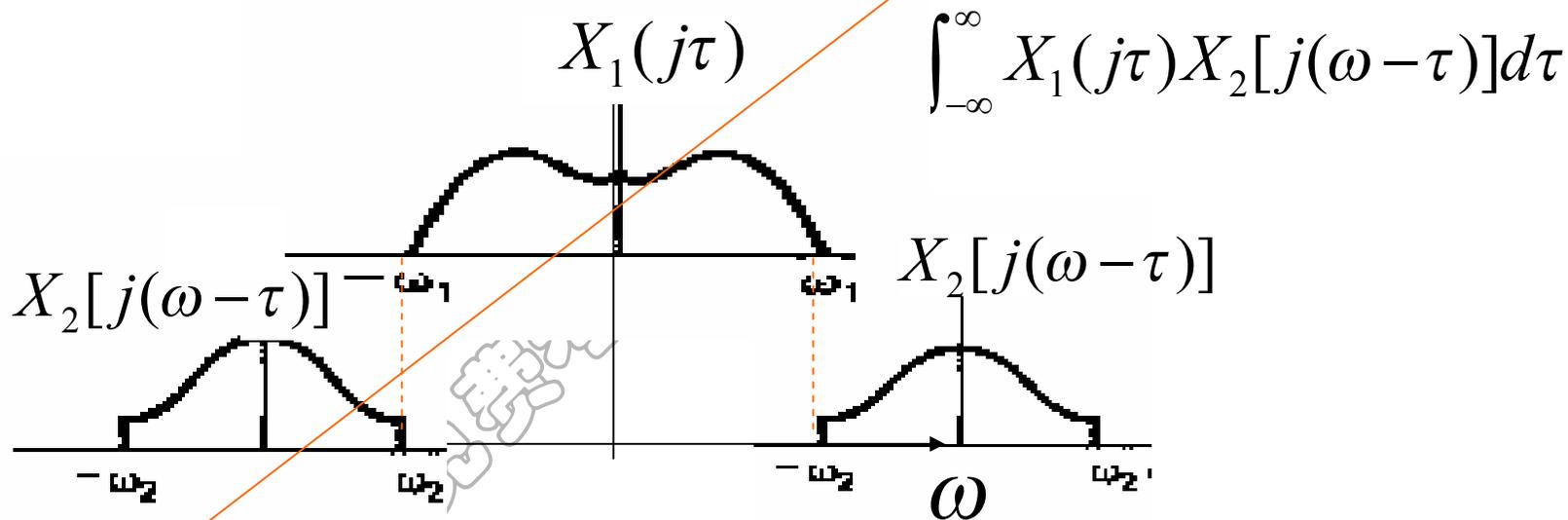
P402 题7.6

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$



求:最大的采样间隔T

解1:  $\because w(t) = x_1(t)x_2(t) \xrightarrow{F} W(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$



得:  $\omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2(\omega_1 + \omega_2),$

$T < \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_2},$

$T_{\max} = \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_2}$

解2:  $\because w(t) = x_1(t)x_2(t) \xrightarrow{F} W(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\tau) X_2[j(\omega - \tau)] d\tau$$

要使  $W(j\omega) \neq 0$  则  $X_1(j\tau) \neq 0, X_2[j(\omega - \tau)] \neq 0$

即有  $-\omega_1 \leq \tau \leq \omega_1 \quad -\omega_2 \leq \omega - \tau \leq \omega_2$

$$\therefore -(\omega_1 + \omega_2) \leq \omega \leq \omega_1 + \omega_2$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2(\omega_1 + \omega_2), \quad T < \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_2}, \quad T_{\max} = \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_2}$$

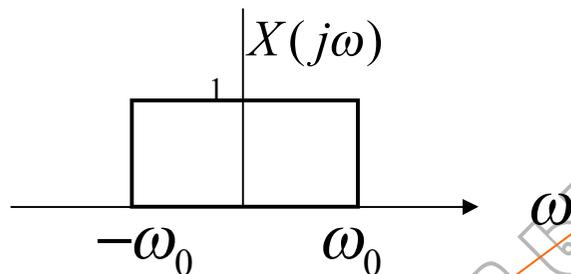
### 题7.10

a)、只要采样周期  $T < 2T_0$  , 信号  $x(t) = u(t + T_0) - u(t - T_0)$  的冲激串采样不会有混叠.

解: **错**. 因为信号的傅立叶变换为:  $X(j\omega) = 2 \frac{\sin \omega T_0}{\omega}$  ——不是带限信号

b)、只要采样周期  $T < \pi/\omega_0$  , 傅立叶变换为  $X(j\omega) = u(\omega + \omega_0) - u(\omega - \omega_0)$  的信号  $x(t)$  的冲激串采样不会有混叠.

解: **正确**.



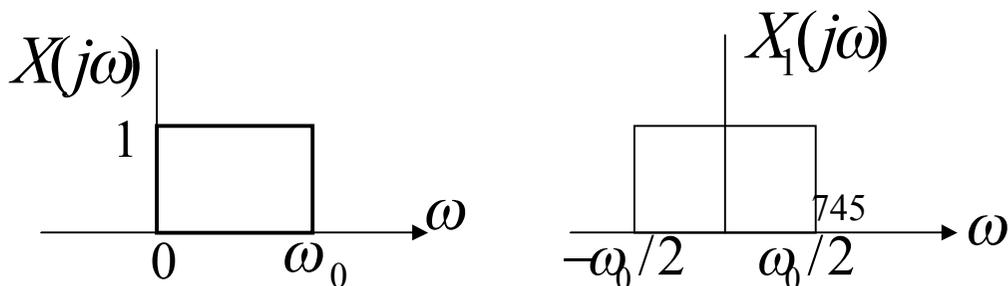
可见, 要求  $\omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2\omega_0$ ,  $T < \frac{\pi}{\omega_0}$

c)、只要采样周期  $T < 2\pi/\omega_0$  , 傅立叶变换为  $X(j\omega) = u(\omega) - u(\omega - \omega_0)$  的信号  $x(t)$  的冲激串采样不会有混叠.

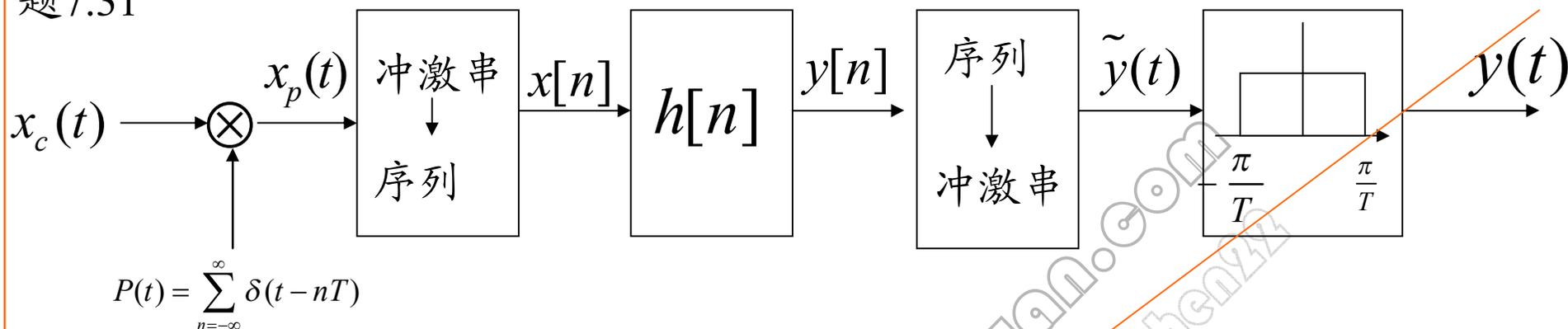
解: **正确**.  $\because x(t) = e^{j\frac{\omega_0}{2}t} x_1(t)$

对信号  $x_1(t)$  的最高频率为:  $\omega_0/2$

$$\frac{2\pi}{T} > \omega_0 \quad \text{即} \quad T < \frac{2\pi}{\omega_0}$$



题7.31



已知:  $h[n]$  ——线性的、因果的。  $y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + x[n]$

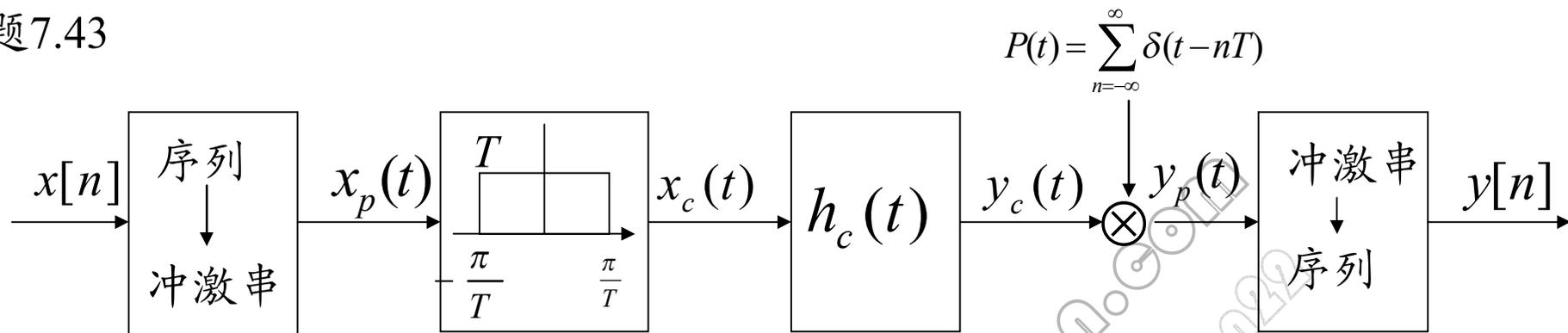
求: 系统的等效频率响应  $H_c(j\omega)$

解: 因为  $y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + x[n]$  ,  $\therefore H_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - (1/2)e^{-j\Omega}}$

$$\therefore H_c(j\omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\omega T}) & |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\therefore H_c(j\omega) = \frac{1}{1 - (1/2)e^{-j\omega T}} \quad , |\omega| < \frac{\pi}{T}$$

题7.43



解:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}, \quad X_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n T}$$

$$X(e^{j\Omega}) = X_p(j\frac{\Omega}{T}), \quad X_c(j\omega) = TX_p(j\omega)$$

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t-nT)$$

$$y_p(t) = y_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

$$y[n] = y_c(nT)$$

$$Y_c(j\omega) = X_c(j\omega)H_c(j\omega) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n T} H_c(j\omega)$$

$$Y_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [Y_c(j\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - k\omega_s)] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_c[j(\omega - k\omega_s)]$$

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} Y_c(j\frac{\Omega}{T}) = \frac{1}{T} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} H_c(j\frac{\Omega}{T}), \quad H(e^{j\Omega}) = H_c(j\frac{\Omega}{T})$$

$$\therefore \frac{d^2 y_c(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy_c(t)}{dt} + 3 y_c(t) = x_c(t)$$

$$\therefore H_c(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 3} \xleftarrow{F} h_c(t) = \frac{1}{2} [e^{-t} - e^{-3t}] u(t)$$

$$\therefore H(e^{j\Omega}) = H_c\left(j \frac{\Omega}{T}\right) = \frac{1}{\left(j \frac{\Omega}{T}\right)^2 + 4j \frac{\Omega}{T} + 3}$$

写成一般形式后,为:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{\left(j \frac{\omega}{T}\right)^2 + 4j \frac{\omega}{T} + 3}$$

2、单位脉冲响应  $h[n]$  为:

$$\therefore h(Tt) \xleftarrow{F} \frac{1}{|T|} H\left(\frac{j\omega}{T}\right) \text{ 即: } |T| h(Tt) \xleftarrow{F} H\left(\frac{j\omega}{T}\right)$$

$$\therefore h[n] = T h_c(nT) = \frac{T}{2} [e^{-nT} - e^{-3nT}] u[n]$$

P578 题10.6

设 $x[n]$ 是一个绝对可和的信号, 其有理 $z$ 变换为 $X(z)$ . 若已知 $X(z)$ 在 $z=1/2$ 有一个极点, 问 $x[n]$  **可能是**

- 1) 有限长信号吗? 2) 左边信号吗? 3) 右边信号吗? 4) 双边信号吗?

解: 1) 否.

因为有限长信号的 $z$ 变换, 其ROC是整个平面可能除去 $z=0$ 或 $z=\infty$ ; 现极点为 $1/2$ , 而ROC不能包含极点. 所以不是有限长信号.

2) 否.

$$\text{因为 } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ x[n]r_0^{-n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-n} \right\} e^{-j\omega n} \quad \text{设 } r_0 \text{ 在收敛域内,}$$

而 $x[n]$ 是一个绝对可和的信号, 即要求  $(r/r_0)^{-1} < 1$ , 得  $r > r_0$

所以不是左边信号.

3) 是.

右边信号的 $z$ 的变换, 其ROC位于最外层极点的外面.

4) 是

题10.17 关于一个单位脉冲响应为 $h[n]$ ,  $z$ 变换为 $H(z)$ 的LTI系统 $S$ , 已知下列5个事实:

- 1、 $h[n]$ 是实序列; ——极点共轭成对
- 2、 $h[n]$ 是右序列; ——
- 3、 $\lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = 1$  ——包括无限远点
- 4、 $H(z)$ 有两个零点;
- 5、 $H(z)$ 的极点中有一个位于 $|z| = 3/4$  圆上的一个非实数位置。

试问下列两个问题:

- 1)  $S$ 是因果的吗? 2)  $S$ 是稳定的吗?

解: 1)由条件2,3或2、4、5可知 $S$ 是因果的;

2)由**共轭性**可知若 $x[n]$ 是实序列, 则  $X(z) = X^*(z^*)$ 。因此, 若 $x[n]$ 有一个  $z = z_0$  的极点, 那么就一定有一个与  $z_0$  共轭成对的  $z = z_0^*$  的极点。现由条件5可知极点  $\geq 2$ 个;若是2个极点,则系统是稳定的(因为极点  $3/4$ 在单位圆内);若大于2个,则无法确定。

题10.20 有一系统,其输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 由下列差分方程表示:

$$y[n-1] + 2y[n] = x[n]$$

- 1) 若  $y[-1] = 2$ , 求系统的零输入响应。
- 2) 若  $x[n] = (1/4)^n u[n]$ , 求系统的零状态响应。
- 3) 当  $x[n] = (1/4)^n u[n]$  和  $y[-1] = 2$  时, 求  $n \geq 0$  时的系统的输出。

解: 1、

$$\because y[n-1] + 2y[n] = x[n]$$

$$\therefore z^{-1}Y(z) + y[-1] + 2Y(z) = X(z)$$

$$Y(z) = \frac{X(z)}{2 + z^{-1}} - \frac{y[-1]}{2 + z^{-1}}$$

$$Y_z = \frac{y[-1]}{2 + z^{-1}} = -\frac{2}{2 + z^{-1}} = -\frac{1}{1 + (1/2)z^{-1}}$$

零输入响应为:  $y_z[n] = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

解：2、

$$\because y[n-1] + 2y[n] = x[n]$$

$$\therefore z^{-1}Y(z) + y[-1] + 2Y(z) = X(z)$$

$$Y(z) = \frac{X(z)}{2+z^{-1}} - \frac{y[-1]}{2+z^{-1}}$$

$$Y_s(z) = \frac{X(z)}{2+z^{-1}}$$

$$\because x[n] = (1/4)^n u[n] \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1-(1/4)z^{-1}}$$

$$\therefore Y_s(z) = \frac{X(z)}{2+z^{-1}} = \frac{1}{(2+z^{-1})(1-(1/4)z^{-1})}$$

$$= \frac{1/3}{1+(1/2)z^{-1}} + \frac{1/6}{1-(1/4)z^{-1}}$$

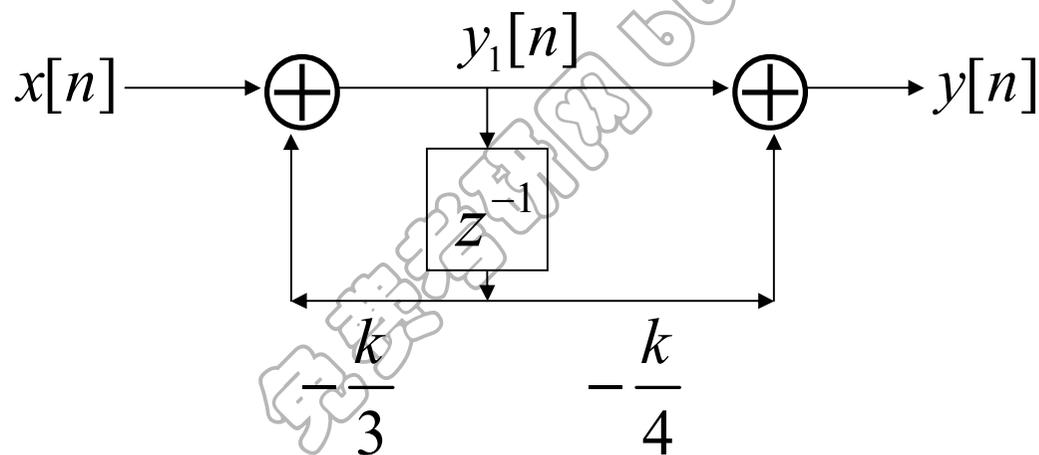
零状态响应为： $y_s[n] = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

解: 3、 
$$y[n] = y_z[n] + y_s[n] = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$= -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

**题10.59** 考虑图所示的数字滤波器结构

1. 求该因果滤波器的 $H(z)$ ,画出零极点图,指出收敛域;
2.  $K$ 为何值,系统是稳定的;
3. 若 $K=1$ 和 $x[n] = (2/3)^n$ (对全部 $n$ ),求 $y[n]$ 。



解：1、

$$y_1[n] = x[n] - \frac{k}{3} y_1[n-1]$$

$$y_1[n] + \frac{k}{3} y_1[n-1] = x[n]$$

$$\frac{Y_1(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + \frac{k}{3} z^{-1}}$$

$$y[n] = y_1[n] - \frac{k}{4} y_1[n-1]$$

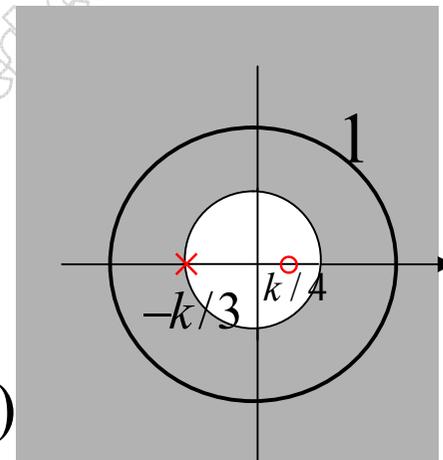
$$\frac{Y(z)}{Y_1(z)} = 1 - \frac{k}{4} z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{Y(z) Y_1(z)}{Y_1(z) X(z)} = \frac{1 - \frac{k}{4} z^{-1}}{1 + \frac{k}{3} z^{-1}}$$

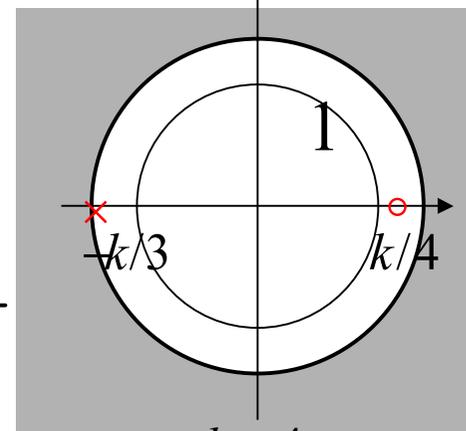
$$Y_1(z) + \frac{k}{3} z^{-1} Y_1(z) = X(z)$$

$$Y(z) = Y_1(z) - \frac{k}{4} z^{-1} Y_1(z)$$

$$|z| > \left| \frac{k}{3} \right|$$



$k < 4$



$k > 4$

零点:  $\frac{k}{4}$

极点:  $-\frac{k}{3}$

2、只有  $|k| < 3$  时，收敛域才包括单位圆，系统才能是稳定的。

3、由于  $x[n] = \left(\frac{2}{3}\right)^n$  是LTI系统的特征函数，所以输出  $y[n] = H(z)\big|_{z=\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

当  $k = 1$  时，代入得

$$y[n] = \frac{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \bigg|_{z=\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{5}{12} \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad -\infty < n < \infty$$