

# 微波工程基础

作者： [美]R.E.柯林

出版社： 人民邮电出版社

出版日期： 1981年5月第1版

页数： 669

# 目 录

序言	( 1 )
<b>第 1 章 引言</b>	( 1 )
1.1 微波频率及其应用	( 1 )
1.2 微波电路元件及其分析方法	( 4 )
<b>第 2 章 电磁理论</b>	( 11 )
2.1 麦克斯韦方程	( 11 )
2.2 基本关系	( 18 )
2.3 静态场	( 23 )
2.4 波动方程	( 26 )
2.5 能量和功率	( 29 )
2.6 边界条件	( 36 )
2.7 平面波	( 41 )
2.8 由介质交界面的反射	( 46 )
2.9 由导电平面的反射	( 50 )
2.10 位论	( 54 )
★2.11 矢位解的推导	( 58 )
2.12 洛伦兹互易定理	( 61 )
习题	( 64 )
参考文献	( 70 )
<b>第 3 章 传输线和波导</b>	( 71 )
3.1 电磁波解的分类	( 72 )
3.2 传输线(场的分析)	( 80 )
3.3 传输线(分布参数电路分析)	( 89 )
★3.4 传输线的参数	( 94 )

3.5	端接负载的传输线 .....	( 99 )
3.6	矩形波导 .....	( 106 )
3.7	圆波导 .....	( 121 )
★3.8	表面波波导 .....	( 127 )
3.9	功率的正交性 .....	( 136 )
★3.10	简并模的衰减 .....	( 140 )
3.11	波的速度 .....	( 149 )
	习题 .....	( 155 )
	参考文献 .....	( 161 )
<b>第 4 章</b>	<b>波导系统电路理论</b> .....	( 163 )
4.1	等效电压和等效电流 .....	( 163 )
4.2	用阻抗描述波导元件和波导电路 .....	( 167 )
★4.3	福斯特电抗定理 .....	( 173 )
★4.4	$Z_{in}$ 的奇偶特性 .....	( 176 )
4.5	$N$ 端口电路 .....	( 177 )
4.6	二端口接头 .....	( 181 )
4.7	散射矩阵表示法 .....	( 192 )
4.8	二端口接头的散射矩阵 .....	( 198 )
4.9	传输矩阵表示法 .....	( 202 )
★4.10	波导的激励 .....	( 206 )
★4.11	波导的孔耦合 .....	( 214 )
	习题 .....	( 222 )
	参考文献 .....	( 228 )
<b>第 5 章</b>	<b>阻抗变换和匹配</b> .....	( 230 )
5.1	史密斯圆图 .....	( 230 )
5.2	用电抗元件进行阻抗匹配 .....	( 234 )
5.3	双枝节匹配网络 .....	( 240 )
5.4	三枝节调配器 .....	( 244 )
5.5	波导电抗元件 .....	( 246 )

5.6	$\lambda/4$ 变换器	( 250 )
5.7	小反射理论	( 253 )
5.8	多节 $\lambda/4$ 变换器的近似理论	( 255 )
5.9	二项式变换器	( 257 )
5.10	切比雪夫变换器	( 259 )
★5.11	切比雪夫变换器 ( 精确的结果 )	( 263 )
5.12	渐变传输线	( 267 )
★5.13	渐变传输线的综合	( 271 )
★5.14	切比雪夫渐变线	( 279 )
★5.15	反射系数的精确方程式	( 283 )
	习题	( 287 )
	参考文献	( 292 )
<b>第 6 章</b>	<b>无源微波器件</b>	( 293 )
6.1	终端器	( 293 )
6.2	衰减器	( 296 )
6.3	相移器	( 299 )
6.4	定向耦合器	( 305 )
6.5	混合接头	( 319 )
6.6	微波在铁氧体中的传播	( 323 )
6.7	法拉第旋转	( 334 )
6.8	应用法拉第旋转的微波器件	( 338 )
6.9	环形器	( 343 )
6.10	其他铁氧体器件	( 349 )
	习题	( 349 )
	参考文献	( 353 )
<b>第 7 章</b>	<b>电磁谐振器</b>	( 354 )
7.1	谐振电路	( 354 )
7.2	传输线谐振电路	( 358 )
7.3	微波空腔谐振器	( 363 )



7.4	空腔谐振器的等效电路	( 372 )
7.5	法布里—珀罗谐振器	( 381 )
★7.6	一般的空腔谐振器中场的展开式	( 388 )
★7.7	无源空腔谐振器中的振荡	( 397 )
★7.8	空腔谐振器的激励	( 403 )
	习题	( 407 )
	参考文献	( 410 )
<b>第 8 章</b>	<b>周期性结构和滤波器</b>	( 411 )
8.1	电容性加载的传输线电路分析	( 411 )
8.2	周期性结构波的分析	( 418 )
8.3	由不对称二端口网络组成的周期性结构	( 421 )
8.4	端接负载的周期性结构	( 423 )
8.5	周期性结构的匹配	( 425 )
8.6	$k_0$ — $\beta$ 图	( 427 )
8.7	群速和能流	( 430 )
8.8	福罗奎定理和空间谐波	( 432 )
8.9	行波管的周期性结构	( 434 )
8.10	薄套螺旋线	( 444 )
8.11	螺旋线的几个一般特性	( 448 )
8.12	微波滤波器引论	( 451 )
8.13	滤波器设计中的镜象参数法	( 453 )
8.14	用插入损耗法设计滤波器	( 456 )
8.15	功率损耗比的规定	( 458 )
8.16	几个低通滤波器的设计	( 461 )
8.17	频率变换	( 465 )
8.18	阻抗倒量变换器	( 471 )
8.19	传输线滤波器	( 478 )
8.20	$\lambda/4$ 耦合空腔滤波器	( 481 )
8.21	直接耦合空腔滤波器	( 485 )

习题	( 488 )
参考文献	( 491 )
<b>第 9 章 微波电子管</b>	( 493 )
9.1 引论	( 493 )
9.2 直流状态下的电子束	( 494 )
9.3 狭流电子束上的空间电荷波	( 499 )
9.4 非聚焦电子束上的空间电荷波	( 506 )
9.5 交流功率关系	( 514 )
9.6 速度调制	( 517 )
9.7 双腔速调管	( 526 )
9.8 反射速调管	( 535 )
9.9 磁控管	( 538 )
9.10 O型行波管	( 541 )
9.11 M型行波管	( 548 )
9.12 其他类型的微波电子管	( 550 )
9.13 微波电子管中的噪声	( 551 )
习题	( 556 )
参考文献	( 559 )
<b>第10章 微波量子放大器</b>	( 561 )
10.1 量子力学的一些基础	( 562 )
10.2 辐射的吸收和发射	( 570 )
10.3 介绍一种微波量子放大器	( 577 )
10.4 红宝石中的能级	( 580 )
10.5 微波量子放大器工作的分析	( 584 )
10.6 宏观磁化率	( 591 )
10.7 微波量子放大器的等效电路	( 596 )
10.8 微波量子放大器的增益	( 601 )
10.9 微波量子放大器的噪声	( 605 )
10.10 行波式微波量子放大器	( 607 )

10.11 激光器 .....	( 611 )
习题 .....	( 613 )
参考文献 .....	( 614 )
<b>第11章 参量放大器</b> .....	( 616 )
11.1 $p-n$ 结二极管 .....	( 616 )
11.2 门雷—罗威关系式 .....	( 621 )
11.3 参量放大器的线性化方程式 .....	( 625 )
11.4 参量上变频器 .....	( 627 )
11.5 负阻式参量放大器 .....	( 632 )
11.6 参量放大器的噪声特性 .....	( 640 )
习题 .....	( 648 )
参考文献 .....	( 650 )
附录 .....	( 651 )
I. 由矢量分析得到的有用关系式 .....	( 651 )
II. 贝塞尔函数 .....	( 655 )
III. 物理常数和其他数据 .....	( 661 )
人名对照表 .....	( 663 )

# 第1章 引言

本章就微波工程领域所涉及的问题，作了简要概述。第一节简短地讨论微波在多方面的且有时是独特的应用。第二节接着指出微波工程在哪些方面不同于较低频率的通信系统。此外，还介绍了若干本书后面要详细研究的微波器件，作为各种器件和电路元件的示例。

## 1.1 微波频率及其应用

微波工程是指频率范围大致从 $10^9$ 到 $10^{12}$ 赫（相当于波长由30厘米到0.3毫米）的信息处理系统的工程。这个工程部门的特点是它的波长短，与所使用的电路器件尺寸属于同一数量级。这就是为什么采用术语“微波”来讲述的原因。涉及的波长短又意味着由电路的一点到另一点电效应的传播时间，与该系统中的电流和电荷的振荡周期可以比拟。其结果是，通常以基尔霍夫定律和电压电流概念为基础的低频电路分析方法，不足以适当地描述微波工程中所发生的电现象，而必须改用和器件有关的电场和磁场来进行分析。大体上可以说，微波工程本质上就是应用电磁场工程。因此，有成就的微波工程师必须很好地掌握电磁场理论知识。

微波频率之所以引起人们很大的兴趣，是有各种原因的。其中，根本的原因是由于对无线电频谱空间的需要不停地增长，而唯有微波频率才能解决这一问题。当我们注意到 $10^9$ 到 $10^{12}$ 赫的频率范围包含了上千个由0到 $10^9$ 赫的频段时，就可以很容易地看出发展微波波段来增加可用频谱的意义了。

曾经在一个时期（第二次世界大战期间及战后不久），由于需

要有能够对敌人飞机和船舰进行探测和定位的高分辨率的雷达，因而大大促进了微波系统的发展，微波工程那时几乎是雷达工程的同义语。甚至在今天，各种类型的雷达，例如导弹跟踪雷达、炮火瞄准雷达、气象探测雷达、导弹制导雷达和机场交通管制雷达等，仍然代表微波频率的主要应用。这主要是由于这些雷达所需用的天线，它要能像探照灯那样，把发射机功率基本上全部集中于窄射束内辐射出去。但天线把辐射集中于窄射束内的能力，受绕射效应的限制，而绕射效应又决定于辐射器口径相对于波长的尺寸。例如，抛物反射面天线产生一个辐射能量的锐方向性射束，其角宽度为 $145^\circ/(D/\lambda_0)$ ，其中， $D$ 是抛物面的直径， $\lambda_0$ 是波长。因此，一个直径为90厘米（约为3英尺）的抛物面，在 $10^{10}$ 赫频率（即波长为3厘米）时，可以产生 $4.7^\circ$ 的射束。这种射束可以相当精确地给出雷达观察到的目标的位置数据。但当频率为100兆赫时，要达到与上述情况可相比拟的性能，将需要300英尺的抛物面，这样大尺寸的天线装在飞机上是太大了。

近几年来，微波频率已经广泛地应用于通信线路上，即通常所指的微波接力通信线路。由于微波的传播只在视距内有效，所以，这种接力通信须沿途以适当间隔建立装有反射天线或透镜天线的高塔作为接力站。利用微波的一种更有意义的通信方式是把人造卫星作为微波接力站。1962年7月发射的 *Telstar* 卫星—第一个卫星微波接力站，首次把现场的电视图象由美国传送到欧洲。这个 *Telstar* 卫星的直径只有34.5英寸，因而，有效的天线系统只可能在微波波段。

大量电视节目在各地的经济传送，取决于把所有这些节目调制到单一的载波上，并通过一条接力通信线路来传送它们的能力。因为每路黑白电视节目约需要6兆赫的带宽，所以，一百路这种节目需要600兆赫的总带宽。为了便于加工和处理已调载波，调制边带只能为载波频率的百分之几。可见，为了在一条线路上有效地传送许多路电视节目，载波频率必须在微波范围内。如果没有微波系统

的发展，我们的通信设备会严重过载，并将完全不能满足当前的工作需要。

虽然微波的上述用途十分重要，但微波和微波技术的应用，还进一步扩展到各种基础和实用研究的领域之中，并包括许多不同种类的实用器件，例如能在几分钟内把10磅肉烤熟的微波炉之类。下面简短地讨论其中的几个特殊应用的例子。

用并联电纳元件周期性加载的波导，能保持远小于光速的慢波，因而被用于直线加速器中。在原子和原子核的研究中，用直线加速器可产生高能的带电粒子束。慢电磁行波能十分有效地和具有相同速度的带电粒子束相互作用，从而把能量给予带电粒子束。另一种可能性是电子束把能量给予电磁波，从而得到放大。这后一种器件就是行波管，将在后面的一章中作详细的研究。

在射电天文学中，用灵敏的微波接收机来探测和研究在这一波段由太阳和若干射电星体发出的电磁辐射。这种接收机也用来探测等离子体（电子和离子的一种近似中性集合体，例如气体放电）辐射的噪声，所得到的资料使科学家能够分析和预报形成等离子体辐射的各种机制。

在外加电磁场的周期力作用之下，分子、原子和核子呈现出种种谐振现象。这些谐振大多数发生在微波范围内。因而，在研究材料的基本性质时，用微波可进行强有力的实验探测。从这种材料研究中，已经产生了许多有用的器件，比如某些非互易铁氧体器件，几种固体微波放大器和振荡器如微波量子放大器以及相干光发生器和放大器（激光器）。

激光器——基本上是一种单色（单一频率的）相干光波发生器——的研制，大大引起了人们对可能在光波波长上发展通信系统的兴趣。这个频段有时称为超微波波段。对许多微波工艺作一些改变，就可用于研制光学系统。因此，熟悉一般的微波理论和器件，将对电磁频谱新尖端的工作，打下很好的基础。

这里不可能对微波的所有应用作全面的说明。但是，仅就上面

的一瞥，就足以使读者深信这一段无线电频谱有许多不平常的和独有的特征。虽然微波工程领域现在可以认为是一门成熟的和很发达的科学，但是，进一步发展微波器件、技术，并应用于通信、工业以及基本科学研究，仍然有极好的机会。

## 1.2 微波电路元件及其分析方法

当波长比所研究的电路或系统的最大尺寸大几个数量级时，通常的电路元件，如电容器、电感、电阻、电子管和晶体管，就是用于信息的发送、接收和处理电路中的基本组成部件。只要用环路电流和节点电压，就可以描述或分析这类电路，而不必考虑传播效应。在这种电路中，原因与结果在不同点之间的时间延迟，比所加的信号周期小很多，可以忽略不计。我们知道，电磁波传播一个波长的距离所需的时间，等于所加的正弦时变信号的一个周期。因此，当电磁波传播的距离比波长 $\lambda_0$ （ $\lambda_0 = \text{光速}/\text{频率}$ ）短得多时，时间延迟是不显著的。当频率提高到使其波长不再比电路尺寸大时，传播效应就不能再忽视了。再者，连接线、接头等的阻抗，以及分布（寄生）电容和电感的影响也相对地增大了。此外，在尺寸和波长相差不多的未屏蔽电路中环行的电流，辐射电磁波非常显著。所有这些作用的结果，使最常用的低频元件和电路，多不适用于微波频率。实际上，它们全然无效。

如果采用较广义的观点，我们可以把电阻、电感和电容分别地看作损耗电能、储藏磁能和储藏电能的元件。在实践中遇到的这些元件的形式，例如一个线圈表示一个电感，并不意味着只有线圈才能起电感的作用。实际元件所采用的结构，可以认为只不过是一种便利的制造方式，使它们具有所要求的电性能。众所周知，在高频时，其中许多电路元件的工作状况不合需要。例如，一个线圈在1兆赫时可以是一个很好的电感，但在50兆赫时，由于线间电容起主要作用，它可能等效为一个电容器。虽然实际的低频电阻、电感和

电容，在微波频率下的工作状况已不能满足要求，但这并不意味着在微波频率下，就不能制成这种耗能和储能元件。恰恰相反，有许多等效的电感器件和电容器件用于微波频率。它们的几何形状虽然很不相同，但它们可能而且正在被用于颇为相同的目的，比如阻抗匹配、谐振电路等。其在电性能上最重要的不同之处是在微波频率下的这些等效电感和电容，一般与频率有复杂得多的依赖关系。

低频电子管的最高可用频率范围，也以微波波段的低端为其界限。这个限制主要来自电子束从阴极到控制栅极的渡越时间。当渡越时间变到和被放大信号的周期差不多时，管子不能按所要求的状况工作。减小电极间的距离，可使这些管子能用到几千兆赫的频率上，但是，功率输出却受限制，且噪声特性变坏。关于产生微波频率的新型电子管的研制，对开拓这个频段是很重要的。幸而发现，诸如电子束的速度调制和电子束与慢电磁波的相互作用等几种新的工作原理，它们能产生所需要的微波。这些基本原理及其应用在后面的一章中讨论。

对微波电路的重要要求之一，是能够把信号功率由一点传送到另一点而无辐射损失。这就要求以传播波的形式来输送电磁能。已经出现了能够把电磁波由一点引导到另一点、而没有辐射损失的各种各样的结构。从理论分析的观点看，最简单的导波结构是传输线。其中如双导线、同轴线和屏蔽带状线（如图1.1所示）是在较低微波频率下常用的。

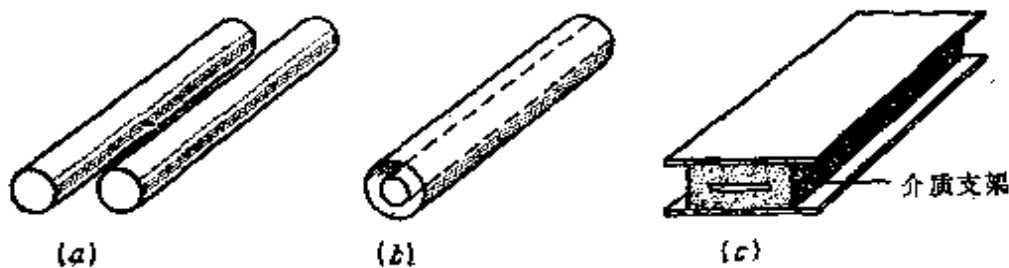


图 1.1 几种常用的传输线：  
(a)双导线； (b)同轴线； (c)屏蔽带状线



在较高的微波频率上，当波长低于10厘米时，用如图 1.2 中所示的空心波导管比用传输线显著地好，因为空心波导管有较好的电和机械性能。矩形截面波导是最常用的类型。由于圆波导能做到很低的损耗，目前趋势表明它将广泛地用于远距离通信线路上，但现在还没有像矩形波导那样被普遍使用。图1.2c所示的脊形加载矩形波导，由于其阻抗特性较好并有较宽的工作频带，有时用来代替标准矩形波导。除了这些标准波导外，还有许多其他截面的波导，如椭圆截面波导也可供使用。

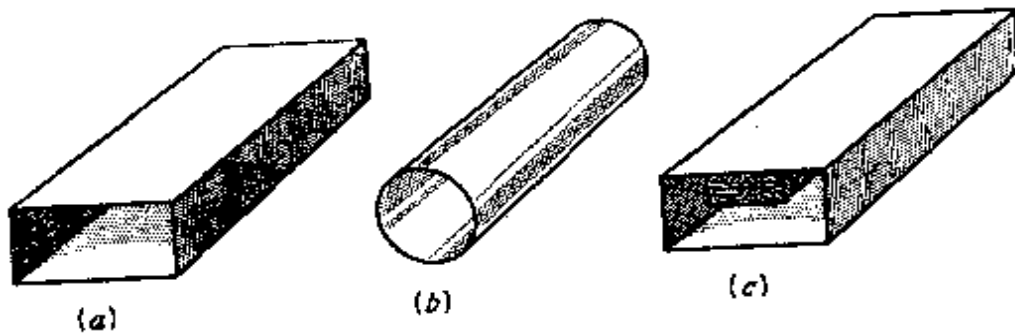


图 1.2 几种常用的空心波导管：  
(a)矩形波导； (b)圆波导； (c)脊形波导

另一类新近出现的波导是表面波导。这类波导的一个例子是表面涂一薄层介质的导线，导线的直径比波长小。沿着这类结构能够导行电磁波。这种波被波导表面所限制，沿离开表面的径向，其振幅呈指数衰减，因而称为表面波。由于它的场在线外延伸大约一个波长的距离，使其在厘米波范围的有效导波直径较大，因而主要用于毫米波的范围。表面波波导和明线传输线的一个缺点是，在波导附近有障碍物时要引起辐射损失。

传输线的一个特点是：可以把它当作分布参数网络，并通过求解沿线传播的电压和电流波，而对其特性作出满意的分析。其它的波导，虽然它们有某些特性和传输线相似，但必须作为电磁场的边值问题来处理，因而必须求其电磁场的解。幸好这对实际使用的普通波导，并不难做到。对于波导，不可能定义与传输线具有同样意义的唯一的电压和电流。这就是为什么在微波频率上强调场的观点

的理由之一。

与波导相联系的有几个关于在波导中激励场和能量输出的耦合方法的有趣问题。通常所用的三种基本耦合方法是：(1) 探针耦合；(2) 环耦合；(3) 相邻波导间的孔耦合，如图1.3所示，其中有几个将在后面分析。这些耦合器件实际上是向波导里辐射的小天线。

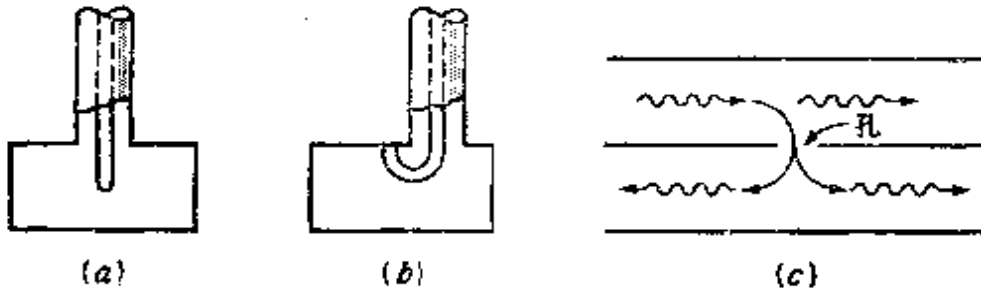


图 1.3 波导的能量输入和输出的基本耦合方法：  
(a) 探针耦合， (b) 环耦合， (c) 孔耦合。

在微波频率，感性和容性元件具有各种形式。最简单的形式多半是传输线和波导的短路段。根据线长的不同，它们呈现电纳的大小可由负无穷大到正无穷大，因而可以起感性元件或者容性元件的作用。它们即可以作为串联元件连接，也可以作为并联元件连接，如图1.4所示。它们通常叫做短截线（也叫做枝节），广泛地用作阻抗匹配

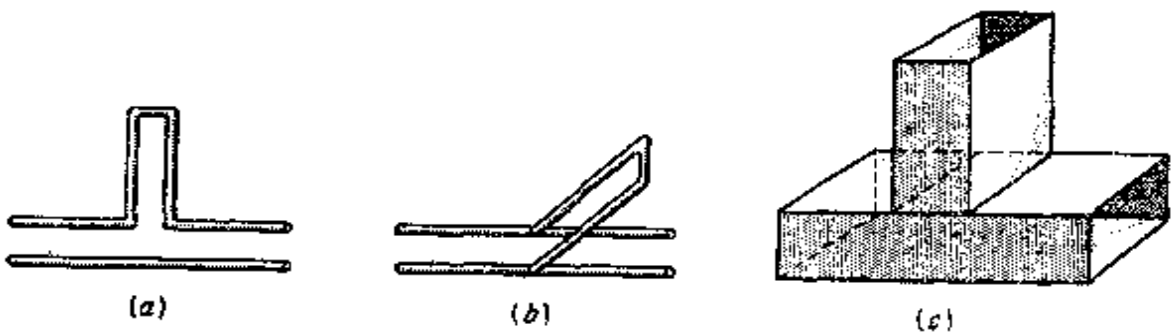


图 1.4 短截线型电抗元件 (a) 串联枝节，(b) 并联枝节，(c) 波导管枝节。

元件。图1.5所示的矩形波导中的薄导体小窗或膜片，也起并联电纳元件的作用。它们呈感性还是呈容性，取决于在其局部的边缘场中是否储藏了较多磁能或较多电能。

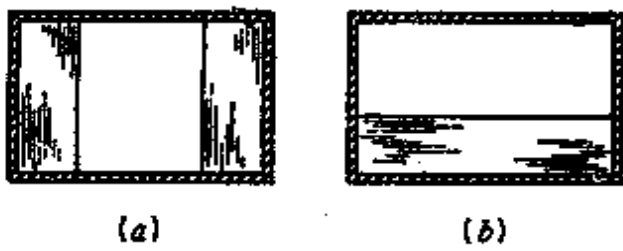


图 1.5 波导中的并联电路元件  
(a)感性小窗；(b)容性小窗。

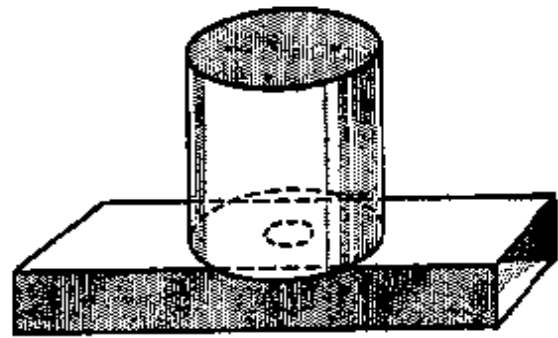


图 1.6 用小孔与矩形波导耦合的圆柱形空腔

低频和微波频率都用谐振电路来控制振荡频率和频率滤波。在低频时，这种作用是由电感和电容串联或并联来完成的。当储藏的平均电能和磁能相等时就发生谐振。此能量在电感周围的磁场和电容两极板间的电场两者之间来回地交换着。在微波频率下，用一个闭合导体（即空腔谐振器，或称空腔）代替 $LC$ 电路。电能和磁能以场的形式储藏在空腔内。在无限多个特定的谐振频率上，空腔谐振器腔体内所储藏的平均电能和磁能是相等的。在任一个谐振频率附近，谐振空腔的输入阻抗具有与通常的 $LC$ 谐振电路同样的特性。值得注意的一个重要特点是，它能得到非常高的 $Q$ 值，和由低频 $LC$ 电路所能得到的 $Q$ 值相比，往往可以超出 $10^4$ 倍。图1.6表示的是一个用小孔与矩形波导耦合的圆柱形空腔。

用几段传输线或波导把若干个微波器件连接起来，就得到微波电路。对这些电路的性能，或者用等效传输线电压波和电流波，或者用传播波的幅度来进行分析。第一个方法导致用等效阻抗来描述；而第二个方法则强调场的波动性质，并归结为散射矩阵形式。本书中两个方法都使用。由于所有微波电路的分析，或者直接地或者模拟地以传输线电路分析作基础，所以在本书的前面部分，就对这个用很大的篇幅进行充分的讨论。这部分内容和能够沿波导传播以及能够存在于谐振腔内的电磁波场的分析，都是微波工程人员必须熟悉的理论的主要部分。

微波系统的工程人员，必须对各种微波电子管，如速调管、磁控管和行波管以及较新的固体器件（比如微波量子放大器和参量放大器）的工作原理有所了解。这对于合理地选择和适当地使用这些器件是必要的。本书对于有关这方面的原理，提供了最低限度水平的知识。至于完全适合于微波电子管设计工作者那样的讨论，则远远超出了本书的范围。

微波通信系统的工程技术人员也需要天线和微波传播的知识。这两个专题多少有些专门化，包括在本书中，就过于广泛了。与其简单地和不完全地讨论这些专题，不如建议读者去参考一些完整地涉及这些专题的书籍\*。

根据前面的讨论，学习微波工程应包括的内容，现在应该清楚了，其中，至少有下面这一些：

1. 电磁理论
2. 传输线和波导的波场的解
3. 传输线和波导的电路分析
4. 谐振器和慢波结构
5. 微波振荡器和放大器
6. 天线
7. 微波传播
8. 系统研究

---

\* 参看：D.E.Kerr (ed.), "Propagation of Short Radio Waves," McGraw—Hill Book Company, New York, 1931.

S.Silver(ed.), "Microwave Antenna Theory and Design", McGraw—Hill Book Company, New York, 1949.

J.D.Kraus, "Antennas," McGraw—Hill Book Company, New York, 1950.

E.C.Jordan, "Electromagnetic Waves and Radiating Systems", Prentice—Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1950.

S.A.Schelkunoff and H.J.Friis, "Antennas: Theory and Practice", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1952.

除了最后三部分外，其余的都是本书所包含的主要论题。对许多常用的微波器件，要都进行详尽的讨论是不可能的。因此，只选取它们中的几个来分析，以作为阐明基本理论的例子。对于不包括在本书内的器件资料，可以而且应该去参考有关的技术文献。本书各章都给出了适当的参考文献。

本书中所讨论的这许多课题比一学期课程所包含的要多。但是，与其限制论证的深度，不如把某几个专题中的更专门化的分析论证部分与分析讨论较少的部分分开。这些更专门化的部分用星号(★)表示，在初读时可以略去，对全书的连贯性没有重大的影响\*。关心微波器件设计或想更全面了解微波理论各个方面的学生或工程技术人员，可以酌情阅读这些专门化的章节。

如同任何工程技术领域一样，测量对于微波的理论和实际的结合是十分重要的。由于篇幅的限制，本书中没有包括微波测量这个课题。下面列出了几本全面讨论微波测量的优秀著作，供读者参考\*。

---

\* 基于这几节内容的习题也用星号(★)表示。

\* 参看 C.G. Montgomery, "Technique of Microwave Measurements", McGraw-Hill Book Company, New York, 1947.

E.L. Ginzton, "Microwave Measurements," McGraw Hill Book Company, New York, 1957.

M. Sucher and J. Fox, "Handbook of Microwave Measurements", 3d ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963.

Engineering staff of Microwave Division, Hewlett-Packard Company, "Microwave Theory and Measurements," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1962.

## 第2章 电磁理论

### 2.1 麦克斯韦方程

用以描述支配时变电磁场的物理规律的一组方程式，统称为麦克斯韦方程。这些方程的绝大部分是由一些研究工作者从实验中得出的。这里，我们的目的不是来肯定这些方程的依据，而是要对其物理意义有所领会，并研究如何在微波工程领域有意义的实际问题中，获得这些方程的解。电场 $\mathcal{E}$ 和磁场 $\mathcal{H}$ 是矢量场，一般说来，它们的大小和方向随三个空间坐标 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 及时间坐标 $t$ 而变化\*。全书采用→米、千克、秒单位制。电场以伏特/米为单位，磁场以韦伯/米<sup>2</sup>为单位。由于这些场都是矢量场，所以，把决定它们行为的这一组方程式，写成矢量形式最方便\*。

一个以速度 $\mathbf{V}$ 运动着的电荷 $q$ 在电场 $\mathcal{E}$ 和磁场 $\mathbf{B}$ 中所受的力为

$$\mathbf{F} = q(\mathcal{E} + \mathbf{v} \times \mathcal{H}), \quad (2.1)$$

式中， $\mathbf{F}$ 是力，单位为牛顿； $q$ 是电荷，单位为库仑； $\mathbf{v}$ 是速度，单位为米/秒。这个力的定律叫做洛仑兹力方程。除了 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{H}$ 两个场量外，为了方便，还要引进两个辅助场矢量，即电位移 $\mathcal{D}$ 和磁场强度 $\mathbf{H}$ 。它们通过媒介物质的电的和磁的极化而与 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{H}$ 发生关系，下一节讨论这个问题。这一节只研究真空中或自由空间中的场。在这个前提下，具有如下的简单关系：

---

\* 以黑体草写字母表示具有任意时间关系的场矢量，以黑体正体字母表示具有正弦时间关系的场的相量。

\* 假定读者熟悉矢量分析。但是，为了便于参考，把一些矢量公式和关系式摘要列在附录I中。

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathcal{B} \quad (2.2a)$$

$$\mathcal{D} = \epsilon_0 \mathcal{E} \quad (2.2b)$$

式中,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  亨/米, 并叫做真空中的导磁率;  $\epsilon_0 = 10^{-9}/36\pi = 8.854 \times 10^{-12}$  法/米, 并称为真空中的电容率。

电磁现象的基本定律之一是法拉第定律, 它说明一个时变磁场产生一个电场。参阅图2.1, 设  $C$  为构成不动曲面  $S$  边界的一条任意闭合围线, 则穿过  $S$  面的总磁通对时间的变化率为  $-\partial(\int_S \mathcal{B} \cdot dS)/\partial t$ 。按照法拉第定律, 总磁通对时间的变化率, 等于沿围线  $C$  所测得的总电压的负值。后者等于  $-\oint_C \mathcal{E} \cdot dl$ 。所以, 法拉第定律的数

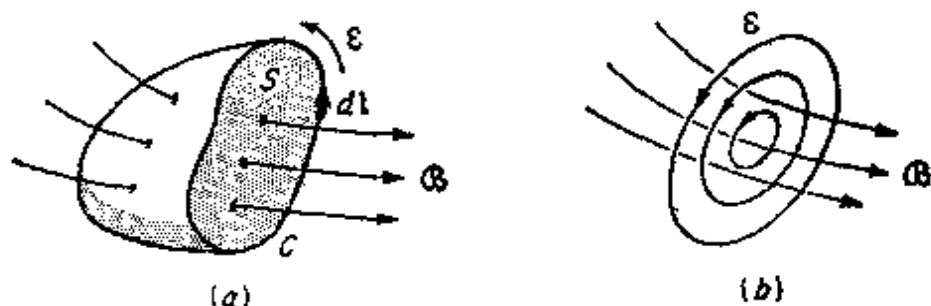


图 2.1 法拉第定律的图示

学表示式为

$$\oint_C \mathcal{E} \cdot dl = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathcal{B} \cdot dS \quad (2.3)$$

$\epsilon$ 沿闭合围线  $C$  的线积分是空间中电场环量  $\rightarrow$  (即旋转量) 的量度。完全可以把这个时变磁场认为是产生一个具有非零旋度 (即环量) 电场的涡旋源。虽然对 (2.3) 式是易于作出物理解释的, 但它不是分析物理问题的适当形式。我们需要的是与 (2.3) 式相当的微分方程。利用矢量分析的斯托克斯定理, 可以得到这个微分方程。斯托克斯定理说明: 一个矢量沿闭合围线  $C$  的线积分, 等于这个矢量的旋度的法线分量在以  $C$  作边界的任一曲面上的积分。矢量的旋度可写成  $\nabla \times \mathcal{E}$  (见附录 I), 因而, (2.3) 式就变成:

$$\oint_C \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathcal{E} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathcal{B} \cdot d\mathbf{S}$$

因为  $S$  完全是任意的，所以上式后两个积分只有在

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \quad (2.4)$$

时才相等。(2.4)式就是描述法拉第定律所需要的微分方程。这个旋度是矢量场在一点上环量的量度。

由矢量分析的亥姆霍兹定理表明：只有当空间每一点上场的旋度（即环量）和它的散度都已知时，这个矢量场才能完全地被确定。于是，只有在源或沟存在时，才可能产生场矢量线的发散或收敛。电场除了具有由涡旋源  $-\partial \mathcal{B} / \partial t$  产生的旋度外，还具有由电荷产生的散度。高斯定律说明：由体积  $V$  中发出的  $\mathcal{D} = \epsilon_0 \mathcal{E}$  的总通量，等于体积  $V$  中所包含的净电荷。设  $\rho$  表示电荷密度（单位为库仑/米<sup>3</sup>），则高斯定律可写为：

$$\oint_S \epsilon_0 \mathcal{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV \quad (2.5)$$

利用散度定理，可把此式变换为微分方程，而给出

$$\oint_S \epsilon_0 \mathcal{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \epsilon_0 \mathcal{E} dV = \int_V \rho dV$$

由于  $V$  是任意的，故得

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \mathcal{E} = \nabla \cdot \mathcal{D} = \rho \quad (2.6)$$

式中， $\nabla \cdot \mathcal{D}$  是  $\mathcal{D}$  的散度，即当此体积趋向于零时， $\nabla \cdot \mathcal{D}$  等于由此体积元向外发出  $\mathcal{D}$  的总通量除此体积元。至此，由于电场的旋度和散度已给定，因而，这个场就完全地用这两个源  $-\partial \mathcal{B} / \partial t$  和  $\rho$  确定。

为了用公式完整地表示电磁现象，我们现在必须把磁场的旋度和散度与它们的源联系起来。使磁场  $\mathcal{H}$  产生环量（即旋度）的涡旋源是电流。所谓电流是指总电流密度，即以安培/米<sup>2</sup> 为单位的传导电流密度  $\mathcal{J}$ 、位移电流密度  $\partial \mathcal{D} / \partial t$  和由运动电荷组成的运流电流密度  $\rho \mathbf{V}$ （如果它存在的话）。本章中不讨论运流电流。但是，在讨论微波



电子管的一章中，运流电流起核心作用，在那里将详细讨论。麦克斯韦首先引入位移电流密度  $\partial \mathcal{D} / \partial t$ ，下面将看到，它导致了波动的可能性。从数学上说，如图 2.1 所示的  $\mathcal{H}$  沿限定曲面  $S$  的闭合围线  $C$  的环量为

$$\oint_C \mathcal{H} \cdot d\mathcal{l} = \int_S \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \cdot d\mathcal{S} + \int_S \mathcal{J} \cdot d\mathcal{S} \quad (2.7)$$

利用斯托克斯定律，从(2-7)式的左边可得

$$\int_S \nabla \times \mathcal{H} \cdot d\mathcal{S} = \int_S \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \cdot d\mathcal{S} + \int_S \mathcal{J} \cdot d\mathcal{S}$$

由此可以推得

$$\nabla \times \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \mathcal{J} \quad (2.8)$$

由于自然界不存在像成对的电荷那样成对的磁荷，故可断定  $\mathcal{B}$  的散度恒为零，即  $\mathcal{B}$  的磁力线由于不存在磁荷作为它们的起止点而永远是闭合的。因而，穿过任何闭合曲面  $S$  的  $\mathcal{B}$  的净通量恒为零，即穿入曲面的通量正好和穿出曲面的通量一样多。于是可得与(2.5)式和(2.6)式相对应的两个方程为

$$\oint_S \mathcal{B} \cdot d\mathcal{S} = 0 \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{B} = 0 \quad (2.10)$$

密度为  $\mathcal{J}$  的传导电流就是净的电荷流动。因为电荷是守恒的，所以由体积  $V$  中流出的电荷总变化率，等于该体积  $V$  中总电荷对时间的减少率，用方程式表示如下

$$\oint_S \mathcal{J} \cdot d\mathcal{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV \quad (2.11)$$

这是连续性方程。利用散度定理，用由(2.5)式推得(2.6)式同样的方法，可以把(2.11)式变换为微分方程。不难得出

$$\nabla \cdot \mathcal{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.12)$$

这个方程也可以由(2.8)式和(2.6)式导出。因为任一矢量的旋度的散度恒等于零，故对(2.8)式取散度得

$$0 = -\frac{\delta \nabla \cdot \mathcal{D}}{\delta t} + \nabla \cdot \mathcal{J}$$

利用(2.6)式立即可以把它变为连续性方程(2.12)式。如果在(2.8)式右边总电流密度中不包括位移电流密度 $\delta \mathcal{D} / \delta t$ ，那末连续性方程就成为 $\nabla \cdot \mathcal{J} = 0$ 。只有电荷密度不随时间变化时，这个结果才和连续性方程相一致。

概括起来，描述真空中电磁现象的四个方程（通称为麦克斯韦方程）是：

$$\Delta \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \quad (2.13a)$$

$$\nabla \times \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \mathcal{J} \quad (2.13b)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{D} = \rho \quad (2.13c)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{B} = 0 \quad (2.13d)$$

在(2.13b)式中，没有包括运流电流 $\rho \mathbf{v}$ 。连续性方程可以由(2.13b)式和(2.13c)式导出，因而不另外列出。虽然， $-\partial \mathcal{B} / \partial t$ 可以认为是 $\mathcal{E}$ 的源， $\partial \mathcal{D} / \partial t$ 可以认为是 $\mathcal{H}$ 的源。但是，电磁场最根本的源是电流 $\mathcal{J}$ 和电荷 $\rho$ 。对于时变场来说，随时间变化的电荷密度 $\rho$ 和 $\mathcal{J}$ 有关，因为它和后者关系可由连续性方程得出。因此，只要知道电流密度 $\mathcal{J}$ ，就能导出时变电磁场。

定性地说明(2.13a)式和(2.13b)式导致波的传播，即电磁扰动在空间中的传播是不困难的。设有一个随时间变化的电流流过环形导线，如图2.2所示。此传导电流在电流环的周围引起磁场的环量（即旋度），如图2.2a所示（为清楚起见，只用几根通量线表示）。变化的磁场又产生与磁力线垂直的旋度（即有旋度的）电场，如图2.2b所示。这个变化的电场进而又产生如图2.2c所示的有旋度的磁力线，如此等等。其结果就是电磁场在电流环的周围连续不断地扩

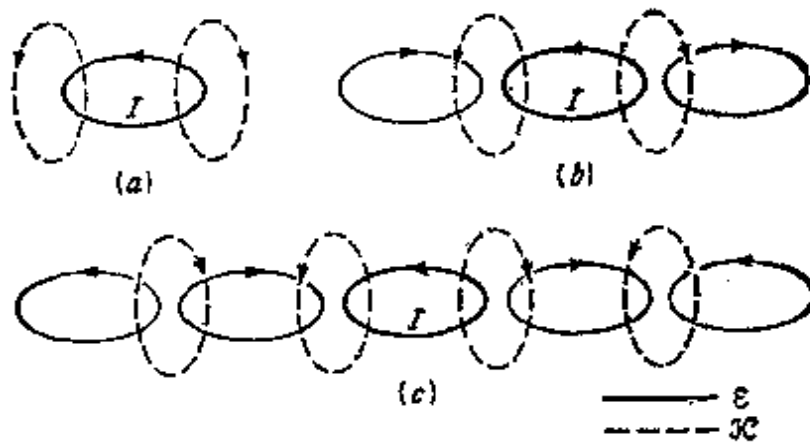


图 2.2 由电流环引起的电磁波的产生过程

展并传播到整个空间。这个电磁扰动是以光速向外运动的。稍加思索就可以明白，对波的运动，总是存在着两个物理量之间的具有同种性质的相互作用。即量  $B$  一定产生量  $A$ ；量  $A$  一定产生量  $B$ 。例如，在声波中，过压使邻近空气团发生移动。藉惯性的作用，这部分空气的移动又进一步产生压缩（即过压），这个过程的重复进行，就产生了声波。

通常，对于随时间作正弦变化的电流所产生的电磁场来说，如同在低频时那样，只研究稳态解便够了。若所有量的时间关系都用  $e^{j\omega t}$  来表示，且用与时间无关的复空间矢量（以后简称相量）来表示所有场矢量，则可以消去方程中的时间导数。用黑体正体字母表示复空间矢量（相量）。例如电场  $\mathcal{E}(x, y, z, t)$  的数学表示式为  $\mathbf{E}(x, y, z)e^{j\omega t}$ 。 $\mathbf{E}$  的每个分量通常是具有实部和虚部的复数，于是，

$$\mathbf{E} = a_x(E_r + jE_{ri}) + a_y(E_r + jE_{ri}) + a_z(E_r + jE_{ri}) \quad (2.14)$$

式中，下标  $r$  指实部，下标  $i$  指虚部。把矢量的每个分量认为是复数，是为了使每个分量具有适宜的时间相位。这一点可以由通常的相量表示求得  $\mathcal{E}$  的方法中看出。按照定义

$$\mathcal{E}(x, y, z, t) = \text{Re}[\mathbf{E}(x, y, z)e^{j\omega t}] \quad (2.15)$$

所以

$$\begin{aligned}
 E_x &= \operatorname{Re}((E_{xr} + jE_{xi})e^{j\omega t}) \\
 &= \operatorname{Re}(\sqrt{E_{xr}^2 + E_{xi}^2} e^{j(\omega t + \varphi)}) \\
 &= \sqrt{E_{xr}^2 + E_{xi}^2} \cos(\omega t + \varphi)
 \end{aligned}$$

式中,  $\varphi = \tan^{-1}(E_{xi}/E_{xr})$ 。除非  $E_x$  同时具有虚部  $jE_{xi}$  和实部  $E_{xr}$ , 相角  $\varphi$  就不会是任意的。当采用相量表示时, 按惯例, 时间因子  $e^{j\omega t}$  不写出来。但是, 重要的是记住两件事, 即: 这种时间关系是隐含着的; 以及从相量表示得到实际场矢量的规则(2.15)式。一个矢量的空间分量的实部和虚部, 不应该和空间分量相混淆, 例如  $E_{xr}$  和  $E_{xi}$  不是  $E_x$  的两个空间分量, 因为分量  $a_x E_x$  在空间中始终沿  $x$  轴方向, 而实部和虚部仅仅说明一定的时间相位或起始点。

与相量表示有关的更有意义的一点, 是用以获得场量对时间平均值的方法。

例如, 若

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} &= a_x E_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + a_y E_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \\
 &\quad + a_z E_3 \cos(\omega t + \varphi_3)
 \end{aligned}$$

则  $|\mathcal{E}|^2$  的时间平均值为

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{E}|_{\text{平均}}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E} \cdot \mathcal{E} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T (E_1^2 \cos^2(\omega t + \varphi_1) \\
 &\quad + E_2^2 \cos^2(\omega t + \varphi_2) + E_3^2 \cos^2(\omega t + \varphi_3)) dt \\
 &= \frac{1}{2} (E_1^2 + E_2^2 + E_3^2) \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

式中,  $T$  为周期, 它等于  $2\pi/\omega$ 。只要取  $\mathbf{E}$  和它的复数共轭量  $\mathbf{E}^*$  的标量积 (即点积) 的一半, 就可以得到相同的结果。由于

$$E_x E_x^* = (E_{xr} + jE_{xi})(E_{xr} - jE_{xi}) = E_{xr}^2 + E_{xi}^2, \text{ 等等, 所以}$$

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{E}|_{\text{平均}}^2 &= \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = \frac{1}{2} ((E_{xr}^2 + E_{xi}^2) + (E_{yr}^2 + E_{yi}^2) \\
 &\quad + (E_{zr}^2 + E_{zi}^2)) \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

因为  $E_1^2 = E_2^2 + E_3^2$ , 等等, 故(2.17)式等于(2.16)式。

采用相量表示法后, 对时间的导数  $\partial/\partial t$  可以用因子  $j\omega$  来代替 (因为  $\partial e^{j\omega t}/\partial t = j\omega e^{j\omega t}$ )。因此, 具有正弦时间关系的稳态麦克斯韦方程便成为:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (2.18a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J} \quad (2.18b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.18c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.18d)$$

## 2.2 基本关系

在实物媒质中的辅助场矢量  $\mathcal{H}$  和  $\mathcal{D}$  是依据该媒质的极化强度和基本场量  $\mathcal{B}$  和  $\mathcal{E}$  来定义的。  $\mathcal{H}$  与  $\mathcal{B}$  和  $\mathcal{D}$  与  $\mathcal{E}$  的关系, 称为基本关系, 必须先知道这个关系。才能解出麦克斯韦方程。

首先研究电的情况。若有电场强度  $\mathcal{E}$  作用于一个物体上, 则电场力使原子或分子发生这样的畸变, 即产生每单位体积偶极矩为  $\mathcal{P}$  的有效电偶极子。于是, 总位移电流就成为真空中的位移电流  $\partial \epsilon_0 \mathcal{E} / \partial t$  与极化电流  $\partial \mathcal{P} / \partial t$  之和。为了避免计及极化电流  $\partial \mathcal{P} / \partial t$ , 显然规定电位移矢量  $\mathcal{D}$  为

$$\mathcal{D} = \epsilon_0 \mathcal{E} + \mathcal{P} \quad (2.19)$$

这样, 就可以把总的位移电流密度写作  $\partial \mathcal{D} / \partial t$ 。

虽然  $\mathcal{P}$  与  $\mathcal{E}$  时间相位很难一致, 但对大多数材料来说, 极化强度  $\mathcal{P}$  的方向和电场强度  $\mathcal{E}$  的方向是一致的。一个简单的经典模型可用来说明这一点。图 2.3a 表示一个由带有电荷  $q$  的核和围绕着核的其总电荷为  $-q$  的球形对称电子云所组成的原子模型。电场  $\mathcal{E}$  使电子云移动一个有效距离  $x$ , 如图 2.3b 所示。但是, 此位移被和它成正比的恢复力  $kx$  所阻止 (见习题 2.1)。此外, 还存在损耗或阻尼效应, 它归结为一个附加力, 我们假定这个力与速度成正比。设  $m$  为电子云的有效质量, 则使惯性力  $\rightarrow md^2x/dt^2$ , 粘滞力  $m\gamma dx/dt$  及恢复力  $kx$

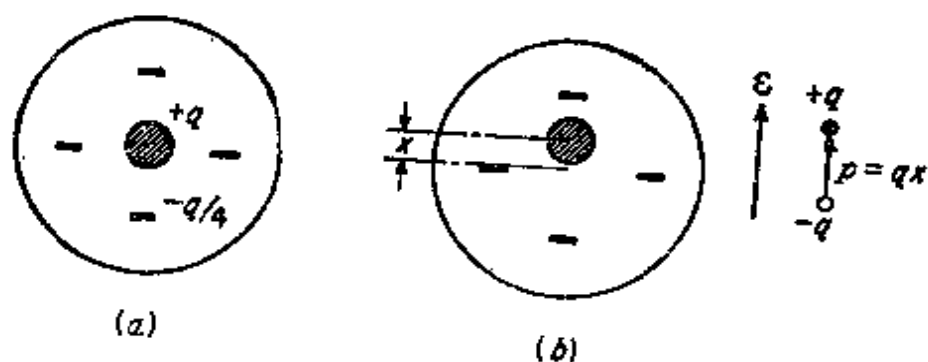


图 2.3 球原子极化的模型

之和等于所加的电场力  $-q\mathcal{E}$ ，就可以得到运动的动力学方程，即

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\nu \frac{dx}{dt} + kx = -q\mathcal{E} \quad (2.20)$$

当  $\mathcal{E} = E_x \cos \omega t$  时， $x$  的解其形式为  $x = -A \cos(\omega t + \varphi)$ 。

若用相量  $E_x$  来表示  $E_x \cos \omega t$ ，用相量  $X$  表示  $x$ ，则不难求出  $X$  的解为

$$X = \frac{-qE_x}{-\omega^2 m + j\omega m\nu + k}$$

从而得

$$x = \text{Re}(X e^{j\omega t}) = -A \cos(\omega t + \varphi)$$

式中

$$A = \frac{(q/m)E_x}{\{(\omega^2 - \omega_p^2)^2 + \omega^2 \nu^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\omega \nu}{\omega^2 - \omega_p^2}$$

这里，我们已经用  $\omega_p^2$  代替了  $k/m$ 。

设偶极矩  $p_x$  为

$$p_x = -qx = \frac{q^2 E_x}{m(\omega^2 - \omega_p^2)^2 + \omega^2 \nu^2}^{\frac{1}{2}} \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.21)$$

当单位体积内有  $N$  个这样的原子时，其单位体积的极化强度就是  $\mathcal{P}_x = N p_x$ ，因而其电位移  $\mathcal{D}_x$  是

$$\mathcal{D}_* = \epsilon_0 E_* \cos \omega t + \frac{Nq^2 E_*}{m((\omega_p^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu^2)^{\frac{1}{2}}} \cos(\omega t + \varphi)$$

这个方程也可以用下面的形式表示:

$$\mathcal{D}_* = E_* \left\{ \frac{(\epsilon_0(\omega_p^2 - \omega^2) + Nq^2/m)^2 + (\omega \nu \epsilon_0)^2}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + (\omega \nu)^2} \right\} \cos(\omega t - \theta) \quad (2.22)$$

式中

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\omega \nu}{\omega_p^2 - \omega^2} - \tan^{-1} \frac{\omega \nu}{\omega_p^2 - \omega^2 + Nq^2/\epsilon_0 m}$$

关于(2.22)式,指出以下两点是有意义的:第一,  $\mathcal{D}$  和  $\mathcal{E}$  之间是线性关系,因而  $\mathcal{D}$  和  $\mathcal{E}$  之间也是线性关系;第二,当有阻尼力存在时,  $\mathcal{D}$  对于  $\mathcal{E}$  有时间滞后。

如果不用相量表示,  $\mathcal{P}$ 、 $\mathcal{E}$  和  $\mathcal{D}$  之间的时间相位差使这些量之间的关系难以处理。若用相量表示,则(2.21)式和(2.22)式便成为

$$P_* = \frac{q^2 E_*}{(\omega_p^2 - \omega^2 + j\omega \nu)m} \quad (2.23)$$

$$D_* = \frac{\epsilon_0(\omega_p^2 - \omega^2 + j\omega \nu) + Nq^2/m}{\omega_p^2 - \omega^2 + j\omega \nu} E_* \quad (2.24)$$

一般说来,对线性媒质,可以写成

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (2.25)$$

式中,  $\chi_e$  是一个复数比例常数,称为电极化率。于是,  $\mathbf{D}$  的方程式就成为

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} = k \epsilon_0 \mathbf{E} \\ &= (\epsilon' - j\epsilon'') \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2.26)$$

式中,  $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$  叫做媒质的电容率,而  $K = \epsilon/\epsilon_0$  叫做媒质的相对电容率。应当指出,当存在阻尼作用时,  $\epsilon$  是复数,且其虚部始终为负。正的虚部应指能量产生,而不是能量消耗(读者可以由(2.22)式证明  $\theta$  恒为正)。

介质的损耗也可能由于有限电导率  $\sigma$  而产生。就功率损耗的外

部效果而言，两者的作用机制是难以区分的。H的旋度方程可以写成

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega(\epsilon' - j\epsilon'')\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E}$$

式中， $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ 是材料中的传导电流密度。上式也可写成

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega \left[ \epsilon' - j \left( \epsilon'' + \frac{\sigma}{\omega} \right) \right] \mathbf{E} \\ &= j\omega\epsilon' \mathbf{E} - (\omega\epsilon'' + \sigma)\mathbf{E} \end{aligned} \quad (2.27)$$

从而可以把  $\epsilon'' + \sigma/\omega$  看作电容率的等效虚部，或者把  $\omega\epsilon'' + \sigma$  看作总的等效电导率。

介质的损耗角正切可定义为

$$\tan \delta_t = \frac{\omega\epsilon'' + \sigma}{\omega\epsilon'} \quad (2.28)$$

任何损耗角正切的测量总是包括有限电导率  $\sigma$  的效应在内，在微波频率下，由于  $\omega$  很大，故通常  $\omega\epsilon''$  比  $\sigma$  大得多。

$\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{E}$ 成线性关系，且和 $\mathcal{E}$ 方向一致的物质，称为线性各向同性物质。非线性作用一般只发生在很高的外场下，因而在微波波段工作中很少碰到。

但是，各向不同性的物质是比较重要的。如果晶体结构例如在立方晶体中不具有球对称性，则可以预计，单位体积的极化强度将取决于外场的方向。

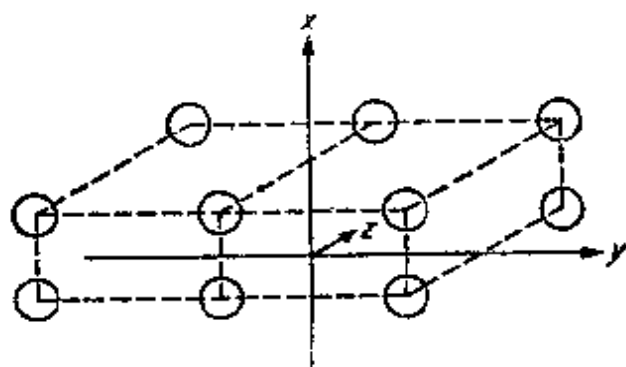


图 2.4 呈现各向异性效应的非等轴晶体

在图 2.4 中，给出了非立方对称晶体的二维简图。因为沿  $x$  轴方向更易于极化，所以，沿  $x$  轴方向加场时，产生的极化强度比沿  $y$  或  $z$  轴方向加场时产生的极化强度更大。在这种情况下， $\mathbf{D}$ 与 $\mathbf{E}$ 的关系必须写成：

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx} E_x & D_y &= \epsilon_{yy} E_y \\ D_z &= \epsilon_{zz} E_z \end{aligned} \quad (2.29)$$



一般说,其中的 $\epsilon_{xx}$ 、 $\epsilon_{yy}$ 和 $\epsilon_{zz}$ 是各不相同的。相对电容率 $K_x = \epsilon_{xx}/\epsilon_0$ 、 $K_y = \epsilon_{yy}/\epsilon_0$ 、 $K_z = \epsilon_{zz}/\epsilon_0$ 称为主轴相对电容率,而这种物质被称为各向异性物质。如果使用的坐标系统与晶体结构有不一致的取向,则**D**和**E**之间的关系应变成:

$$D_x = \epsilon_{xx}E_x + \epsilon_{xy}E_y + \epsilon_{xz}E_z$$

$$D_y = \epsilon_{yx}E_x + \epsilon_{yy}E_y + \epsilon_{yz}E_z$$

$$D_z = \epsilon_{zx}E_x + \epsilon_{zy}E_y + \epsilon_{zz}E_z$$

或者用矩阵的形式表示为

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

只对于坐标系统的特定取向,(2.30)式才可化为(2.29)式。这个特定的取向定义为媒质的主轴。各向异性媒质的电容率,称为张量电容率(一个可以用矩阵来表示的二秩张量)。虽然,本书中涉及的材料大部分是各向同性的,然而,了解各向异性媒质的存在,及对这类媒质基本关系的性质是重要的。

对磁的情况来说,**H**可由基本关系定义为:

$$\mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M} \quad (2.31)$$

式中,**M**是单位体积内磁偶极子的极化强度。对大多数物质来说(铁磁性物质不包括在内),**M**与**B**成线性关系,因而,**M**与**H**也成线性关系。按照惯例,**M**可表示为

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (2.32)$$

式中, $\chi_m$ 叫做磁化率。将(2.32)式代入(2.31)式得

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{M} + \mathbf{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (2.33)$$

式中, $\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$ 叫做导磁率。

如同电的情况一样,阻尼力使 $\mu$ 成为具有负虚部的复数参量,即 $\mu = \mu' - j\mu''$ 。同时,也存在各向异性的磁性材料,尤其是铁氧体,它在微波频率下是十分有用的各向异性磁性材料。当沿导磁率为 $\mu_3$ 的轴向加上静磁场时,铁氧体就呈现如下形式的张量导磁率:

$$(\mu) = \begin{bmatrix} \mu_1 & j\mu_2 & 0 \\ -j\mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

铁氧体及其应用的讨论放在后面，那时再进一步解释其各向异性的特性。

在 2.1 节中，曾有意地把麦克斯韦方程写成不仅在真空中，而且在媒质中都有效的形式。只要用这一节的基本关系，代替自由空间的关系(2.2)式，则(2.13)式和(2.18)式就是普遍成立的。但是，必须注意，当  $\mathcal{D}$  与  $\mathcal{E}$  以及  $\mathcal{B}$  与  $\mathcal{H}$  有时间相移时，一般不能把基本关系写成  $\mathcal{D} = \epsilon\mathcal{E}$  和  $\mathcal{B} = \mu\mathcal{H}$  的形式。当时间关系为任意时，必须代之以  $\mathcal{D} = \epsilon_0\mathcal{E} + \mathcal{P}$ ,  $\mathcal{B} = \mu_0(\mathcal{H} + \mathcal{M})$ ；同时， $\mathcal{P}$  和  $\mathcal{M}$  与  $\mathcal{E}$  和  $\mathcal{H}$  的关系，也必须通过决定极化机制的动力学方程来确定。因为  $\epsilon$  的复数特性考虑到了时间相位的不同，所以利用相量表示，就可以克服这个困难，比如关系式  $\mathcal{D} = \epsilon\mathcal{E}$  是完全正确的\*。但是，必须指出，对许多已使用的材料来说，一直高到包括微波频率，其损耗还是很小的，所以， $\mathcal{D}$  和  $\mathcal{E}$  及  $\mathcal{H}$  和  $\mathcal{B}$  十分接近于同相。在这种情况下，使用基本关系式  $\mathcal{D} = \epsilon\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{B} = \mu\mathcal{H}$  的误差可忽略。 $\mathcal{D}$  和  $\mathcal{E}$  或  $\mathcal{B}$  和  $\mathcal{H}$  在时间相位上的重大偏差，只发生在极化运动方程的自然谐振频率附近。

## 2.3 静态场

对不随时间变化的电场和磁场来说，电场和磁场是不耦合的，电流和电荷也是不耦合的。令(2.13)式中所有的时间导数等于零，就得到\*

\* 这里所遇到的情况，与交流电路分析中所遇到的情况相似。那里，用相量表示时，电压  $V$  等于电流  $I$  乘以阻抗  $Z$ ，即  $V = IZ$ 。不能把这种形式的欧姆定律写成实际的电压和电流，原为若  $v = R_e(V_e^{j\omega t}) = V \cos \omega t$ ，则  $i = R_e(I_e^{j\omega t}) = [V / (R^2 + X^2)^{\frac{1}{2}}] \cos(\omega t - \varphi)$ ，式中， $\varphi = \tan^{-1}(X/R)$ 。显然， $v$  不能等于  $i$  乘一个常数，因为它们的相位是不同的。

\* 对静态场来说，我们用黑体字母表示实际的矢量场。

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.35a)$$

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = \rho \quad (2.35b)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2.36a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.36b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2.36c)$$

最后一个是特殊情况  $\partial\rho/\partial t = 0$  时的连续性方程。

静电场的旋度（即环量）为零，它意味着  $\mathbf{E}$  沿着任意闭合围线的线积分为零。正是这个性质成为容许由一个标量位函数  $\Phi$  的梯度导出  $\mathbf{E}$  的条件，即，由于  $\Delta \times \nabla \Phi$  恒等于零，故可以令

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi \quad (2.37)$$

把(2.37)式代入(2.35b)式，并假设  $\epsilon$  是与坐标无关的常数，则得

$$-\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla^2 \Phi = -\rho/\epsilon \quad (2.38)$$

这个方程称为泊松方程。当  $\rho = 0$  时，就得到拉普拉斯方程：

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.39)$$

在静电学中，场的基本问题，就是求解满足特定边界条件的位函数  $\Phi$  的泊松方程或拉普拉斯方程。

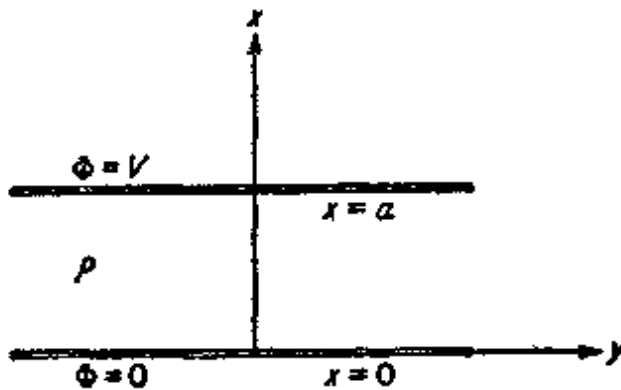


图 2.5 一个简单的电位计算问题

作为一个简单的例子，我们研究处于  $x = 0$ ， $a$  的两块无限大导电平面，如图 2.5 所示。设两板之间电荷密度分布为  $\rho = \rho_0 x^2$ 。待求的是泊松方程的解  $\Phi$ ，它在  $x = 0$  的平面上等于零；在  $x = a$  的平面上

等于  $V$ 。因为电位只与  $x$  有关，所以，(2.38)就变成：

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} = -\rho_0 \frac{x}{\epsilon_0}$$

对这个方程积分两次，得  $\Phi = -\rho_0 x^3 / 6\epsilon_0 + C_1 x + C_2$ 。应用在  $x = 0$ ，

• 这个例子是假想的，因为所假定的电荷分布不是稳定的分布，即它产生的电场会引起电荷分布的变化。

$a$  处的边界条件, 得  $0 = C_2$  和

$$V = -\frac{\rho_0 a^3}{6\epsilon_0} + C_1 a + C_2$$

从而得  $C_2 = 0$ ,  $C_1 = V/a + \rho_0 a^2/6\epsilon_0$ 。于是,  $\Phi$  的解为

$$\Phi = -\frac{\rho_0 x^3}{6\epsilon_0} + \frac{\rho_0 a^2 x}{6\epsilon_0} + \frac{V}{a} x$$

在两平面之间的电场就是

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = -\mathbf{a}_x \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \mathbf{a}_x \left( \frac{\rho_0 x^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho_0 a^2}{6\epsilon_0} - \frac{V}{a} \right)$$

由于标量位  $\Phi$  的引入, 使静电场的求解变得更容易。同理, 对于求解静磁学的问题, 引入位函数, 也是有利的。因为  $\mathbf{B}$  的散度恒等于零, 所以由一个矢量位  $\mathbf{A}$  的旋度可以导出  $\mathbf{B}$ , 即

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.40)$$

这就使得  $\mathbf{B}$  的散度恒等于零, 因为一个矢量的旋度的散度总是恒等于零的。以(2.40)式代入(2.36a)式, 并假定  $\mu$  为常数, 得

$$\nabla \times \mu \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}$$

这里, 用过的一个矢量恒等式是,  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$ 。因为可以令  $\mathbf{A}$  的散度为零, 而不影响从  $\mathbf{A}$  的旋度导出  $\mathbf{B}$  值, 故得  $\mathbf{A}$  的方程为

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (2.41)$$

这个方程就是矢量泊松方程。在直角坐标下, (2.41)式可用三个标量泊松方程来表示, 其第一个是:

$$\nabla^2 A_x = -\mu J_x \quad (2.42)$$

用曲线坐标系 (如在柱坐标系) 时, (2.41)式不能写成这种简单的分量形式。例如,  $\nabla^2 \mathbf{a}_r A_r$  不等于  $\mathbf{a}_r \nabla^2 A_r$ , 其原因是由于: 即使单位矢量  $\mathbf{a}_r$  的长度不变, 但因  $\mathbf{a}_r$  始终沿着由原点到所研究点的矢径方向, 故它的方位是逐点变化的。曲线坐标中  $\nabla^2 \mathbf{A}$  的计算, 可利用上面引用的矢量恒等式  $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$ 。这是不难做到的。

在微波频率下，我们之所以关心静态场的解，是由于传输线横截面上的场分布就是静态场分布；同时也因为对远小于波长的障碍物附近的实际场，静态场解是好的近似解答。上面引入的位函数理论，也可以推广到时变的情况，下一节将讨论这个问题。

## 2.4 波动方程

为了方便，这里重新写出麦克斯韦方程的两个旋度方程：

$$\nabla \times \mathcal{E} = - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \quad (2.43a)$$

$$\nabla \times \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \quad (2.43b)$$

暂时假定在所研究的区域内电流密度  $\mathcal{J}$  为零。可以把这两个方程式和假定的基本关系  $\mathcal{D} = \epsilon \mathcal{E}$ 、 $\mathcal{B} = \mu \mathcal{H}$  联立得到每一个场量单独的方程。对(2.43a)式取旋度得

$$\nabla \times \nabla \times \mathcal{E} = \frac{\partial(\nabla \times \mathcal{B})}{\partial t} = -\mu \frac{\partial(\nabla \times \mathcal{H})}{\partial t}$$

利用(2.43b)式，并展开  $\nabla \times \nabla \times \mathcal{E}$  得

$$\nabla \nabla \cdot \mathcal{E} - \nabla^2 \mathcal{E} = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2}$$

因为假定  $\rho$  为 0，并把  $\epsilon$  当作常数，且  $\nabla \cdot \mathcal{E} = 0$ ，故得

$$\nabla^2 \mathcal{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.44)$$

它是一个三维的波动方程。其传播速度  $v$  等于  $(\mu \epsilon)^{-\frac{1}{2}}$ 。在自由空间中， $v$  等于光速  $C$ 。为了说明(2.44)式解答的性质，我们研究  $\mathcal{E}$  只有  $x$  分量且只随  $z$  坐标变化的情况。在这种情况下

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial z^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial t^2} = 0$$

形式为  $f(z - vt)$  的任一函数，就是这个方程的解，因为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f'' \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial (vt)^2} = v^2 f''$$

所以

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

这个解如图 2.6 所示，它显然表示以速度  $v$  向正  $z$  方向传播的一个电磁扰动。 $f(z+vt)$  是同样有效的另一个解，它表示向负  $z$  方向传播的一个电磁扰动。

消去电场，不难得出磁场  $\mathcal{H}$  也满足波动方程(2.44)式。但是，实际上我们先求解  $\mathcal{E}$  或  $\mathcal{H}$  的波动方程，然后利用适当的旋度方程导出另一个场量。当不能写成如  $\mathcal{D} = \epsilon \mathcal{E}$  和  $\mathcal{B} = \mu \mathcal{H}$  那样的基本

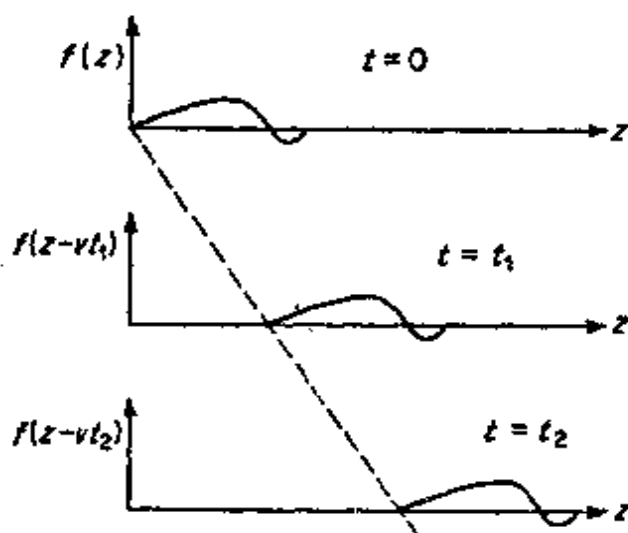


图 2.6 电磁扰动  $f(z-vt)$  的传播

关系时，必须把极化矢量  $\mathcal{P}$  和  $\mathcal{M}$  明显地表示在麦克斯韦方程中，虽然  $\mathcal{E}$  和  $\mathcal{H}$  的波动方程仍可导出，但是，此时  $\mathcal{P}$  和  $\mathcal{M}$  将当作场的等效源（实际上它们就是等效源），它的导出留作本章末的一个习题。

在具有时谐关系的情况下，(2.44)式的波动方程改为

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (2.45)$$

式中， $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ 。这个方程称为亥姆霍兹方程，或化简的波动方程。常数  $k$  称为波数，它可以表为下面的形式：

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{\omega}{v} = 2\pi \frac{f}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.46)$$

式中，波长  $\lambda$  等于  $v/f$ 。在自由空间中，波数可写作  $k_0$ ，并等于  $\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \lambda_0/2\pi$ 。可以推断，磁场  $\mathcal{H}$  满足同一个化简的波动方程。

在电导率  $\sigma$  为有限值的媒质中，会存在  $\mathcal{J} = \sigma \mathcal{E}$  的传导电流，并

由于焦耳热而形成能量损耗。在这种类型媒质中，波动方程有一个阻尼项，它与 $\sigma$ 和场的一阶导数成正比。在金属中（不包括铁磁材料），至少对高达包括微波范围的频率，其电容率和导磁率基本上等于自由空间的数值。于是，麦克斯韦方程中的旋度方程便成为

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathcal{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \sigma \mathcal{E}$$

用以前所述同样的方法消去 $\mathcal{H}$ ，得到如下的 $\mathcal{E}$ 的波动方程：

$$\nabla^2 \mathcal{E} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.47)$$

磁场 $\mathcal{H}$ 也满足这个方程。对随时间作谐振动的情況来说，阻尼效应体现在 $\epsilon$ 和 $\mu$ （从而体现在波数 $k$ ）具有复数特性。回顾(2.27)式所指出的有限电导率 $\sigma$ ，它等效于电容率 $\epsilon$ 的虚数项。此时，等效电容率为 $\epsilon = \epsilon_0 - j\sigma/\omega$ 。因而亥姆霍兹方程为

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \left( 1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (2.48)$$

在金属中，传导电流 $\sigma \mathbf{E}$ 一般远大于位移电流 $\omega \epsilon_0 \mathbf{E}$ ，所以后者可以略去。例如铜的 $\sigma$ 等于 $5.8 \times 10^7$  姆欧/米。当频率为 $10^{10}$  赫时， $\omega \epsilon_0 = 0.55$ ，它远小于 $\sigma$ 。只有当频率高至光波波段时，两者才是可以比拟的。所以，(2.47)式可简化为

$$\nabla^2 \mathcal{E} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = 0 \quad (2.49)$$

而(2.48)式可简化为

$$\nabla^2 \mathbf{E} - j\omega \mu_0 \sigma \mathbf{E} = 0 \quad (2.50)$$

(2.49)式是一个扩散方程，它相似于在热传导中支配热流的方程式。

## 2.5 能量和功率

当加以适当的电压源而使导体中有电流时，为了维持电流，电压源要消耗能量。电压源提供的能量，储藏在由电流产生的电场和磁场中，或以电磁波的形式传播（辐射）出去。在正弦时变稳态的情况下，储藏在电场中能量的时间平均值为

$$W_e = \operatorname{Re} \frac{1}{4} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* dV = \frac{1}{4} \int_V \epsilon' \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dV \quad (2.51a)$$

若 $\epsilon$ 是一个常数，且为实数，则(2.51a)式便成为

$$W_e = \frac{\epsilon}{4} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dV \quad (2.51b)$$

储藏在磁场中能量的时间平均值为

$$W_m = \operatorname{Re} \frac{1}{4} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV = \frac{1}{4} \int_V \mu' \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* dV \quad (2.52a)$$

当 $\mu$ 是实常数时，(2.52a)式变为

$$W_m = \frac{\mu}{4} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* dV \quad (2.52b)$$

上述 $W_e$ 和 $W_m$ 的表示式只对非色散媒质，即在场变化的角频率 $\omega$ 附近，媒质的 $\epsilon$ 和 $\mu$ 可以被认为与 $\omega$ 无关时，才是正确的。一般说，当损耗小到使 $\epsilon'' \ll \epsilon'$ 和 $\mu'' \ll \mu'$ 成立时，场中所储藏的电能和磁能的时间平均值为

$$W_e = \frac{1}{4} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \frac{\partial \omega \epsilon'}{\partial \omega} dV \quad (2.53a)$$

$$W_m = \frac{1}{4} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* \frac{\partial \omega \mu'}{\partial \omega} dV \quad (2.53b)$$

上列色散媒质中能量的时间平均值的公式，可通过类似于2.2节讨论过的极化机构经典模型的研究而得出。设单位体积中偶极子分布的有效振荡电荷为 $-q$ ，有效质量为 $m$ ，并设阻尼力等于 $m\nu$ 乘



上电荷的速度。这个阻尼力应考虑碰撞效应和由振荡电荷辐射引起的能量损失。则极化电荷的位移  $u$  的运动方程为

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + m\nu \frac{du}{dt} + ku = -q\mathcal{E}$$

式中， $u$  与电场  $\mathcal{E}$  的方向一致。此方程中的  $k$  是产生恢复力的弹性常数。由于这个常数由库仑力作用在位移电荷上而得来的，因而，它起源于电场。偶极子的极化强度  $\mathcal{P}$  等于  $-qu$ ，极化电流  $\mathcal{J}_p = d\mathcal{P}/dt$ 。把极化电流代入运动方程得

$$\frac{m}{q^2} \frac{d\mathcal{J}_p}{dt} + \frac{m\nu}{q^2} \mathcal{J}_p + \frac{k}{q^2} \int_0^t \mathcal{J}_p dt = \mathcal{E}$$

这个方程式形式上与  $LCR$  串联电路中描述电流的方程相同，该电路所加的电压  $v$  等于  $e$ ，而

$$L = \frac{m}{q^2}, \quad R = \frac{m\nu}{q^2}, \quad C = \frac{q^2}{k}$$

图2.7表示描述极化的等效电路。如果假定时间关系为  $e^{i\omega t}$ ，且采用

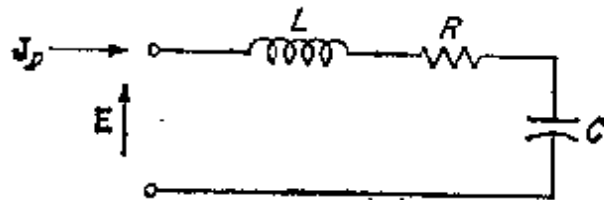


图 2.7 极化电流的等效电路

相量表示，则

$$J_p = EY = E \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

式中， $Y$  是输入导纳， $X = \omega L - 1/\omega C$ 。因为  $P = \epsilon_0 \chi_e E$ ， $J_p = j\omega P$ ，故得

$$\omega \epsilon_0 \chi_e = \omega \epsilon_0 (\chi_e' - j\chi_e'') = -jY = \frac{-X - jR}{R^2 + X^2}$$

因而，

$$\omega \epsilon_0 \chi_e' = \frac{-X}{R^2 + X^2} \quad (2.54a)$$

$$\omega \epsilon_0 \chi_e'' = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad (2.54b)$$

与极化相联系的功率损耗时间平均值，与在上述等效电路中  $R$  上的功率损耗相同。单位体积中的平均功率损耗为

$$P_l = \frac{1}{2} EE^* \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{1}{2} EE^* \omega \epsilon_0 \chi_e'' \quad (2.55)$$

这个方程表明  $\omega \epsilon_0 \chi_e'' = \omega \epsilon''$  是一个等效电导。在该系统中储藏的能量时间平均值具有两种形式。第一种是动能在一个周期内的平均，即  $\frac{1}{2} m (du/dt)^2$ ，它等于储藏在等效电路电感中的磁能。单位体积中这个动能的时间平均值为

$$U_m = \frac{1}{4} LJ, J^* = \frac{1}{4} EE^* \frac{L}{R^2 + X^2} \quad (2.56a)$$

储能的第二种形式是和电荷位移相联系的位能，它的时间平均值等于储藏在上述等效电路电容器中电能的时间平均值，为

$$U_e = \frac{1}{4} EE^* \frac{1}{\omega^2 C (R^2 + X^2)} \quad (2.56b)$$

储藏在单位体积内总能量的时间平均值为  $U = U_m + U_e$ 。应当指出， $U$  不等于  $\frac{1}{4} EE^* \epsilon_0 \chi_e'$ 。后面这个表示式是

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} EE^* \epsilon_0 \chi_e' &= \frac{1}{4} EE^* \frac{-X}{\omega(R^2 + X^2)} \\ &= \frac{1}{4} EE^* \frac{1/\omega^2 C - L}{R^2 + X^2} = U_e - U_m \end{aligned}$$

即它等于所储藏的位能与动能两者之差。

为了得到总储能的表示式，注意到

$$\frac{d}{d\omega} \left( \frac{X}{R^2 + X^2} \right) = \frac{L + 1/\omega^2 C}{R^2 + X^2} \left( 1 - \frac{2X^2}{R^2 + X^2} \right)$$

对低损耗系统， $R^2 \ll X^2$ ，故  $1 - 2X^2/(R^2 + X^2) \approx -1$ ，所以

$$\frac{d}{d\omega} \left( \frac{-X}{R^2 + X^2} \right) = \frac{d}{d\omega} (\omega \epsilon_0 \chi'_e)$$

$$\approx \frac{L + 1/\omega^2 C}{R^2 + X^2}$$

用  $\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*$  乘上式, 可得总储能的时间平均值, 与 (2.56a) 式及 (2.56b) 式相比较就可证明。于是, 体积  $V$  中所储电能时间平均值的最后表示式, 等于  $U = U_e + U_m$  加自由空间能量密度  $\epsilon_0 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*)/4$  的体积分, 而为

$$W_e = \int_V \left( U + \frac{\epsilon_0}{4} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \right) dV$$

$$= \int_V \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}{4} \left( \epsilon_0 + \frac{\partial \omega \epsilon_0 \chi'_e}{\partial \omega} \right) dV$$

$$= \frac{1}{4} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \frac{\partial \omega \epsilon'}{\partial \omega} dV$$

式中,  $\epsilon' = \epsilon_0 (1 + \chi'_e)$ 。这个电场储能表示式, 就是前面 (2.53a) 式所得出的结果。

可以用类似的方法, 得出表示磁场储能时间平均值的 (2.53b) 式。应该指出, 在时变的条件下, 与电极化或磁极化相联系的平均储能包括一个动能项。在低频时和在所关心的  $\omega$  频段内  $\epsilon'$  及  $\mu'$  基本上与  $\omega$  无关时, 这一项可以略去。当这一项能量不能忽略时, 必须采用修正了的储能表示式。

虽然 (2.53) 式比 (2.51) 式和 (2.52) 式更为普遍, 但在大多数情况下, 使用 (2.51) 式和 (2.52) 式。这就是说, 我们已默认所涉及物质是非色散的或很接近于非色散的。

穿过闭曲面  $S$  发出去的功率的时间平均值, 等于复数坡印廷矢量  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$  法线分量的一半取实部的积分, 即

$$P = \operatorname{Re} \frac{1}{2} \oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{S} \quad (2.57)$$

上述结果可由复数坡印廷矢量定理的解释中得出。复数坡印廷

定理可由麦克斯韦方程按如下步骤推导出来：若把 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$ 的散度，即 $\nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$ 展开得

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}^* - (\nabla \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{E}$$

由麦克斯韦方程  $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B}$  和  $\nabla \times \mathbf{H}^* = -j\omega\mathbf{D}^* + \mathbf{J}^*$  得

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = -j\omega\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* + j\omega\mathbf{D}^* \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^*$$

此式在闭合曲面  $S$  限定的整个体积  $V$  内进行积分，就得到复数坡印廷矢量定理，即

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* dV &= \frac{1}{2} \oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{S} \\ &= -j\frac{\omega}{2} \int_V (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*) dV \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* dV \end{aligned} \quad (2.58a)$$

其中，在左边积分式中已经应用了散度定理。上面的结果可以改写为：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot (-d\mathbf{S}) &= 2j\omega \int_V \left( \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*}{4} - \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*}{4} \right) dV \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* dV \end{aligned} \quad (2.58b)$$

式中， $-d\mathbf{S}$ 是指向体积  $V$  内的面元矢量。设  $V$  中媒质的参量为  $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$ ， $\mu = \mu' - j\mu''$ ，电导率为  $\sigma$ ，则使(2.58)式两边的实部和虚部分别相等可得

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{1}{2} \oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot (-d\mathbf{S}) &= \frac{\omega}{2} \int_V (\mu'' \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* + \epsilon'' \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) dV \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_V \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dV \end{aligned} \quad (2.59a)$$

$$\operatorname{Im} \frac{1}{2} \oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot (-d\mathbf{S}) = 2\omega \int_V \left( \mu' \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*}{4} - \epsilon' \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}{4} \right) dV \quad (2.59b)$$

(2.59)式可表述为：进入闭曲面  $S$  包围的体积  $V$  中的实电磁功率，等于由传导电流  $\sigma \mathbf{E}$  引起的归结为焦耳热的功率损耗，加上由极化阻力力产生的功率损耗。如2.2节中所指出的那样， $\omega \epsilon''$  可看作等效电导。这个方程式也表明：为了表示能量损耗， $\mu''$  和  $\epsilon''$  必须是正的。因此， $\epsilon$  和  $\mu$  的虚部必须是负的。(2.59b)式表明，进入  $V$  中的复数能流变化率的虚部，等于储藏在  $V$  中的磁场和电场中的纯无功能量  $W_m - W_e$  的  $2\omega$  倍。复数坡印廷矢量定理本质上是一个能量平衡方程式。

对一个通常的网络，可导出类似于上述的结果，并可用来验证对(2.58)式解释的正确性。我们来研究图2.7中所示的简单的  $RLC$  串联电路。设电路中的电流为  $I$ ，所加的电压为  $V$ ，则输入复数功率为

$$\frac{1}{2} VI^* = \frac{1}{2} ZII^* = \frac{1}{2} II^* \left( R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} \right)$$

因为加在  $C$  上的电压为  $I/\omega C$ ，故在  $R$  上功率损耗的时间平均值，储藏在  $L$  中的磁能和储藏在  $C$  中的电能分别为

$$P_i = \frac{1}{2} RII^*, \quad W_m = \frac{1}{4} LII^*,$$

$$W_e = \frac{1}{4} \frac{II^*}{\omega^2 C}$$

所以

$$\frac{1}{2} VI^* = \frac{1}{2} ZII^* = P_i + 2j\omega(W_m - W_e)$$

它与(2.58)式的解释相同。由此式也可求出阻抗  $Z$  为

$$Z = \frac{P_i + 2j\omega(W_m - W_e)}{\frac{1}{2} II^*} \quad (2.60)$$

它提供了一个依据功率损耗和储藏的无功能量的网络阻抗普遍定义。分母中的因子  $\frac{1}{2} II^*$  起归一化因子的作用，为了使  $Z$  不受输入到网络的电流大小的影响必需这样做。

在一般性的时变场情况下,展开 $\nabla \cdot \mathbf{e} \times \mathcal{H}$ 并用麦克斯韦方程(2.13)代入,得到如下的一般的时变场情况下的坡印廷矢量定理:

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathcal{E} \times \mathcal{H} \cdot (-d\mathbf{S}) = \int_V \left( \mu_0 \mathcal{H} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \mu_0 \mathcal{H} \cdot \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} + \epsilon_0 \mathcal{E} \cdot \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \mathcal{E} \cdot \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \mathcal{E} \cdot \mathcal{J} \right) dV$$

因为 $\mathcal{H} \cdot \partial \mathcal{H} / \partial t = \frac{1}{2} \partial(\mathcal{H} \cdot \mathcal{H}) / \partial t$ , 等等, 电极化和磁极化电流为 $\mathcal{J}_e = \partial \mathcal{P} / \partial t$ ,  $\mathcal{J}_m = \mu_0 (\partial \mathcal{M} / \partial t)$ , 故得

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathcal{E} \times \mathcal{H} \cdot (-d\mathbf{S}) = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{\mu_0 \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}}{2} + \frac{\epsilon_0 \mathcal{E} \cdot \mathcal{E}}{2} \right) dV + \int_V (\mathcal{E} \cdot (\mathcal{J} + \mathcal{J}_e) + \mathcal{H} \cdot \mathcal{J}_m) dV \quad (2.61)$$

式中,  $-d\mathbf{S}$ 是指向 $V$ 内的一个表面元。(2.61)式表明, 进入 $V$ 中的能流密度, 等于储藏在 $V$ 中自由空间场能量的时间变化率, 加上由传导电流 $\mathcal{J}$ 引起的焦耳热的能量耗散变化率, 以及维持极化电流的能量瞬时变化率。如果 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{H}$ 及 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{E}$ 都同相, 则没有与极化电流有关的能量损耗。如果这些量不同相, 则要产生某些能量损耗, 从而引起材料发热。

若磁化系数 $x_e$ 和 $x_m$ 可以看作常数, 使 $\partial \mathcal{P} / \partial t = \epsilon_0 x_e (\partial \mathcal{E} / \partial t)$ 和 $\partial \mathcal{M} / \partial t = x_m (\partial \mathcal{H} / \partial t)$ , 则(2.61)式就成为

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathcal{E} \times \mathcal{H} \cdot (-d\mathbf{S}) = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{\mathcal{H} \cdot \mathcal{B}}{2} + \frac{\mathcal{E} \cdot \mathcal{D}}{2} \right) dV + \int_V \mathcal{E} \cdot \mathcal{J} dV \quad (2.62)$$

它就是坡印廷矢量定理的通常形式。右边第一项现在可看作储藏在体积 $V$ 中总的电能和磁能的瞬时变化率。

当描述极化的动力学方程中惯性力和阻尼力比弹性恢复力小得多时, 磁化率一般可以看作实常数。例如, 参看(2.54a)式可知,

这就是当  $k$  远大于  $\omega mv$  或  $\omega^2 m$ , 亦即当  $1/\omega C$  比  $\omega L$  和  $R$  大得多的情况, 因此,  $\epsilon_0 x_e' \approx C = q^2/k$ .

## 2.6 边界条件

为了求出实际情况下 (总是包括具有边界的几个物体) 麦克斯韦方程正确的和唯一的解, 需要了解具有不同电特性物体边界上电磁场的行为。从数学观点上看, 在区域  $V$  中的偏微分方程 (例如波动方程) 的解, 只有在边界条件给定 (即在  $V$  的边界上场的行为给定) 的情况下, 才是唯一的。在求解偏微分方程时, 边界条件与求解电路微分方程的起始条件有相同的作用。

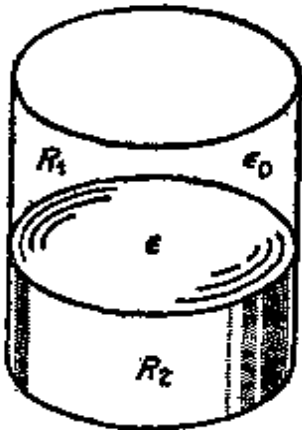


图 2.8 部分填充介质的圆柱形空腔谐振器

作为一个例子, 我们研究在圆柱形空腔谐振器中, 求解麦克斯韦方程的问题, 该空腔谐振器部分地填充了电容率为  $\epsilon$  的介质, 如图 2.8 所示。在实际做法上, 是通过求  $R_1$  和  $R_2$  两个区域中都适合的通解, 来得到这个问题的解。这些通解必须满足金属边界上所规定的条件, 此外, 它们还包含几个任意的振幅常数, 这些常数只能由  $R_1$  和  $R_2$  两个区域 (空气—介质) 边界上的边界条件确定。

用麦克斯韦方程的积分形式, 导出所需要的边界条件最为方便。研究如图 2.9a 所示参数为  $\epsilon_1$ 、 $\mu_1$  和  $\epsilon_2$ 、 $\mu_2$  的两种媒质。设边界上没有表面电荷 (这对非导电媒质是普遍情况), 则在如图 2.9b 中表示的以边界为中心的“硬币”状小盒的表面上, 对电位移通量进行积分, 当  $h$  趋于零时, 其极限为

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_{2n} \Delta S - D_{1n} \Delta S = 0$$

即

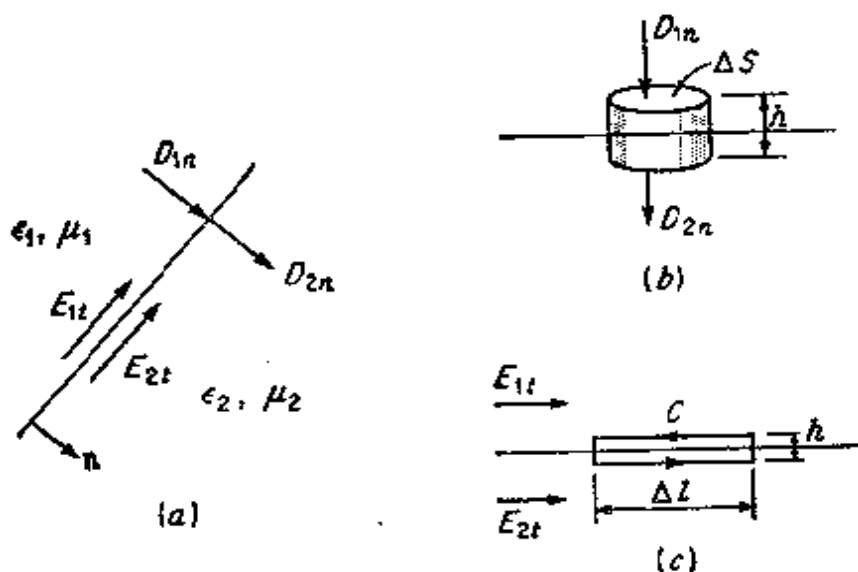


图 2.9 两个不同媒质之间的边界

$$D_{2n} = D_{1n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_1 \quad (2.63)$$

式中， $n$ 表示法线分量，取 $h \rightarrow 0$ 是为了使通过小盒区域侧边的通量为零。(2.63)式简单地证明了电位移通量线在垂直于边界的方向上是连续的。因为 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，所以对磁通量线也必定有类似的结果。因而，用类推的方法可得：

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1 \quad (2.64)$$

为了得到电场 $\mathbf{E}$ 和磁场 $\mathbf{H}$ 切向分量的边界条件，可利用 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的环量积分。如果使图2.9c中的闭合围线 $C$ 的宽度 $h$ 趋近于零，则穿过这个闭合围线的磁通量变为零，故得

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \lim_{h \rightarrow 0} -j\omega \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \\ &= E_{2t} \Delta l - E_{1t} \Delta l \end{aligned}$$

即

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (2.65)$$

对同一闭合围线 $C$ 来说，当 $h \rightarrow 0$ 时，穿过它的总位移电流也变为零，所以

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( j\omega \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \right) = 0$$



$$=(H_{2t}-H_{1t})\Delta l$$

即

$$H_{2t}=H_{1t}, \quad (2.66)$$

式中， $t$  表示与边界面相切的分量。(2.65)式和(2.66)式表明， $E$ 和 $H$ 的切向分量在边界两边是连续的，也就是边界面上相邻两侧的切向分量是相等的。

可以对良导体（任何金属）与自由空间或空气交界面上的边界条件作一些简化。下一节中将要证明，在微波频率下，电磁场只能穿入导体一个微小的距离。场的振幅从导体表面的数值向导体内按  $e^{-u/\delta_s}$  作指数衰减，这里， $u$  是由导体表面进入到导体内的垂直距离， $\delta_s$  称为趋肤深度，它的表示式为

$$\delta_s = \left( \frac{2}{\omega \mu \sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.67)$$

当频率为  $10^{10}$  赫时，铜（ $\sigma = 5.8 \times 10^7$  姆欧/米）的趋肤深度为  $6.6 \times 10^{-6}$  厘米，确是一个非常小的距离。而且，电流  $J = \sigma E$  集中在表面附近。当电导率趋近于无限大时， $\delta_s$  趋近于零，电流被挤到越来越窄的区域，即在  $\sigma \rightarrow \infty$  时，就成为真正的表面电流。因为对金属来说，在微波频率下其趋肤深度非常小，近似地认为电导率为无限大所造成的误差可以忽略（由于无限大的电导率意味着没有任何损耗，所以在计算衰减时不能把电导率看作无限大）。当电导率为无限大时，导体内的场必须为零。由于  $B$  的通量线是连续的，而且由于在边界上电场  $E$  的切向分量也是连续的，故在理想导体的表面必须使

$$n \cdot B = 0 \quad (2.68a)$$

$$E_t = n \times E = 0 \quad (2.68b)$$

这个结论不适合于  $D$  的法线分量和  $H$  的切向分量。其原因如上所述，是由于当  $\sigma \rightarrow \infty$  时，导体表面将存在表面电流  $J_s$ 。利用麦克斯韦方程

$$\oint_C H \cdot dl = j\omega \int D \cdot dS + \int J \cdot dS$$

从图2.10所示的闭合围线C得

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= H_t \Delta l = \lim_{h \rightarrow 0} \int j\omega \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \lim_{h \rightarrow 0} \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} hJ \Delta l = J_s \Delta l \end{aligned}$$

或者用矢量的形式表示为

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s \quad (2.68c)$$

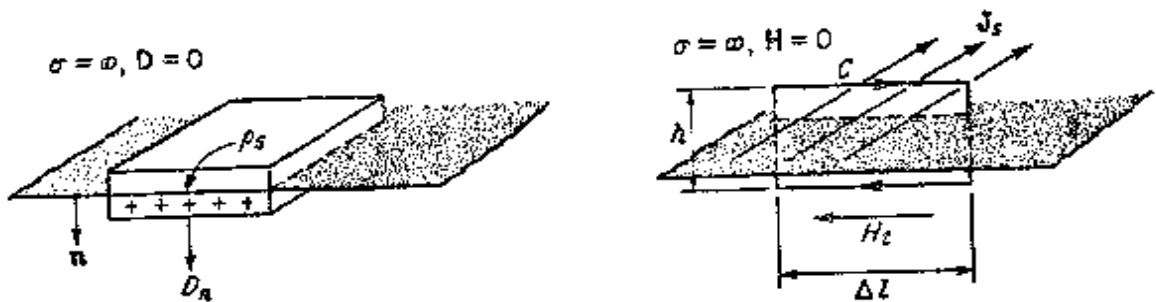


图 2.10 理想导体的边界

应当指出，虽然由于在导体内的场趋于零，而使穿过C的总位移电流在 $h \rightarrow 0$ 时变为零，但是，当电导率为无限大， $h$ 趋于零时， $hJ$ 将趋向于有限值 $J_s$ 。和表面电流相联系的是法向电通量线终止于密度为 $\rho_s$ 的电荷上。因此，在理想导体的表面上，

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = D_n = \rho_s \quad (2.68d)$$

当要考虑的电导率很大但为有限值时（如在计算衰减时），可以采用误差很小的阻抗边界条件。金属表面呈现一个表面阻抗 $Z_m$ ，它具有相等的电阻性部分和电感性部分，且为

$$Z_m = \frac{1 + j}{\sigma \delta_s} \quad (2.69)$$

当表面上存在着表面电流时，它与表面切向电场的关系是

$$\mathbf{E}_t = Z_m \mathbf{J}_s \quad (2.70)$$

注意在电导率为有限值的情况下，电场切向分量虽然可以非常小，但它不能为零。由于 $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s$ ，所以

$$\mathbf{E}_t = Z_m \mathbf{J}_s = Z_m \mathbf{n} \times \mathbf{H} \quad (2.71)$$

由(2.69)式可以看出，表面阻抗的电阻性部分，等于单位正方形金

属面其厚度为 $\delta_s$ 的每个方块的直流电阻。上述结果将在下一节中证明，那时再做进一步的说明。

事实上，只要使场的切向分量满足适当的边界条件，场的法线分量就自然地满足其相应的边界条件。这是因为当这些场量是麦克斯韦方程的一个解时，并非所有的场分量都是独立的。例如，当电场的切向分量在越过边界时连续，边界面上电场切向分量对坐标变量的导数也连续时，垂直于表面的电场的旋度就是连续的，这就隐含着 $\mathbf{B}$ 的法线分量连续。更准确地说，若 $xy$ 平面是边界面，且 $E_x, E_y$ 都连续，则 $\partial E_x/\partial x, \partial E_x/\partial y, \partial E_y/\partial x$ 和 $\partial E_y/\partial y$ 也连续。从而使 $-j\omega B_z = \partial E_y/\partial x - \partial E_x/\partial y$ 连续。同理， $\mathbf{H}$ 的切向分量的连续性，保证了越过边界的 $\mathbf{D}$ 的法线分量的连续性。

除了上面得出的边界条件外，还必须对导体边缘（比如尖劈）上场的解加上一个边缘条件。这个边缘条件要求储藏在导体边缘附近的场能量是有限的。它限制了当接近边缘时场强增长的最大变化率\*。细致地分析表明，在具有内角 $\varphi$ 的二维理想导电劈的边缘，垂直于边缘的场分量的增长必须不比 $\gamma^\alpha$ 增加更快，这里， $\gamma$ 是由边缘算起的垂直径向距离，而

$$\alpha = \frac{n\pi}{2\pi - \varphi} - 1$$

式中，整数 $n$ 必须这样选取，以使 $\alpha$ 大于或至少等于 $-\frac{1}{2}$ 。

当在无限空间区域求解场时，同样必须确定在无限大空间中场的特性。这个边界条件称为辐射条件，它要求在无限远处场是一个向外传播有限能量的波。否则，这个场就会很快消失，从而使无限远处储藏于场中的能量和能流为零。

---

\* J. Meixner, *The Behavior of Electromagnetic Fields at Edges*, N.Y. Univ. Inst. Math. Sci. Res. Rept. EM-72, December, 1954. 在 R.E. Collin, "Field Theory of Guided Waves," (《导波场论》) 第一章中也讨论了此理论。

## 2.7 平面波

在这一节和其后两节中，我们将通过研究平面波在自由空间中的传播，以及平面波在自由空间和介质或导电媒质边界上的反射来引入波的解。后一个问题将用来推导前一节中已得到的由(2.68)式至(2.71)式的边界条件。

自由空间中的平面波

电场是亥姆霍兹方程的解，此方程是

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_0^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} + k_0^2 \mathbf{E} = 0$$

因为这个矢量方程对 $\mathbf{E}$ 的每个分量都成立，所以，

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} + k_0^2 E_i = 0$$

$$i = x, y, z \quad (2.72)$$

求解偏微分方程的标准方法是分离变量法。但是，这个方法不是对所有的坐标系下的各类偏微分方程都是行得通的。当它行不通时，要求得一个解，即使可能，也是非常困难的。对亥姆霍兹方程，可在如直角坐标、圆柱坐标和球坐标这样的普通坐标系中应用分离变量法。因而，这个方法足以解决本书中所讨论的各类问题。其基本方法是：先假定其解为 $n$ 个函数的乘积，其中的每一个只是一个坐标变量的函数；然后，把这个解代入偏微分方程，于是就把偏微分方程分离为可用标准方法求解的三个常微分方程。

现在，我们令  $E_x = f(x)g(y)h(z)$ 。把它代入(2.72)式得

$$ghf'' + fhg'' + fgh'' + k_0^2 fgh = 0$$

式中，两撇表示二阶导数。将这个方程除以 $fgh$ 得

$$\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} + \frac{h''}{h} + k_0^2 = 0 \quad (2.73)$$

(2.73)式中前三项的每一项（比如 $f''/f$ ）只是单个独立变量的函

数,因而只有当每一项为常数时,这三项的总和才能等于常数 $-k_0^2$ 。于是,(2.73)式分离为三个方程:

$$\frac{f''}{f} = -k_x^2 \quad \frac{g''}{g} = -k_y^2 \quad \frac{h''}{h} = -k_z^2$$

即

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dx^2} + k_x^2 f &= 0 & \frac{d^2 g}{dy^2} + k_y^2 g &= 0 \\ \frac{d^2 h}{dz^2} + k_z^2 h &= 0 \end{aligned} \quad (2.74)$$

式中, $k_x^2$ 、 $k_y^2$ 、 $k_z^2$ 称为分离常数。这里对于 $k_x^2$ 、 $k_y^2$ 、 $k_z^2$ 的限制,只是要求它们的总和必须等于 $k_0^2$ ,即

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_0^2 \quad (2.75)$$

所以,满足(2.73)式。

(2.74)式是具有形式为指数解 $e^{\pm jk_x x}$ 、 $e^{\pm jk_y y}$ 、 $e^{\pm jk_z z}$ 的简谐微分方程。因此,我们可以选下式作为 $E_x$ 的一个适宜的解:

$$E_x = A e^{-jk_x x - jk_y y - jk_z z} \quad (2.76)$$

式中, $A$ 是幅度因子。这个解被认为是沿传播矢量

$$\mathbf{k} = a_x k_x + a_y k_y + a_z k_z \quad (2.77)$$

所规定的方向传播的波的 $x$ 分量,因为 $\mathbf{k}$ 和位置矢量

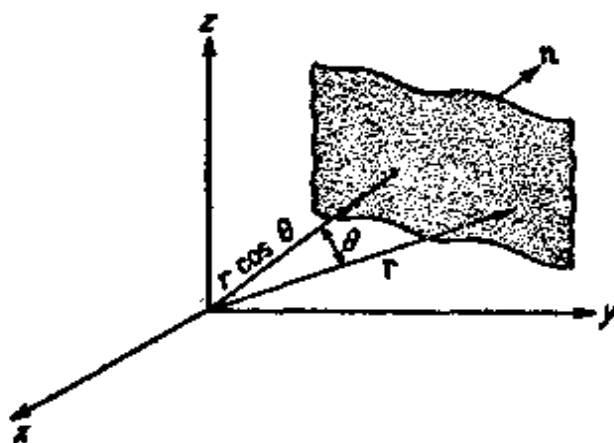


图 2.11 垂直于矢量 $k$ 的平面图示

$\mathbf{r} = a_x x + a_y y + a_z z$ 的标积等于 $k_x x + k_y y + k_z z$ ,并等于由原点到垂直于矢量 $\mathbf{k}$ 的平面之间垂直距离的 $k_0$ 倍,如图2.11所示。矢量 $\mathbf{k}$ 也可写作 $\mathbf{k} = n k_0$ ,式中, $n$ 是与 $\mathbf{k}$ 方向一致的单位矢量,由(2.75)式可知 $k_0$ 是 $\mathbf{k}$ 的大小。

虽然(2.76)式是 $E_x$ 的一个可能解,但它不是电场的完整解。

对于  $E_1$  和  $E_2$ ，可以求出类似的解。因为  $\mathbf{E}$  在自由空间中必须满足散度关系式  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ，所以  $\mathbf{E}$  的三个分量是不独立的。这个限制意味着  $\mathbf{E}$  只有两个分量可以有任意的振幅。但是，由于  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  处处为零，故  $\mathbf{E}$  的所有分量必须具有同样的空间关系，因而  $E_1$  和  $E_2$  正确的解应为：

$$E_1 = B e^{-jk \cdot r} \quad E_2 = C e^{-jk \cdot r}$$

式中， $B$  和  $C$  为振幅系数。设  $\mathbf{E}_0$  等于矢量  $\mathbf{a}_x A + \mathbf{a}_y B + \mathbf{a}_z C$ ，则  $\mathbf{E}$  的全部解可以写成矢量形式

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-jk \cdot r} \quad (2.78)$$

因为  $\nabla e^{-jk \cdot r} = -jk e^{-jk \cdot r}$ （在直角坐标下把它们展开，可以证明相等），所以从  $\mathbf{E}$  的散度条件得出，

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \nabla \cdot \mathbf{E}_0 e^{-jk \cdot r} = \mathbf{E}_0 \cdot \nabla e^{-jk \cdot r} \\ &= -jk \cdot \mathbf{E}_0 e^{-jk \cdot r} = 0 \end{aligned}$$

即

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0 \quad (2.79)$$

可见，散度条件限制了振幅  $A$ 、 $B$ 、 $C$ ，使矢量  $\mathbf{E}_0$  垂直于由  $\mathbf{k}$  规定的传播方向。因为由  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{常数}$  给出的等相位面是平面，且电场  $\mathbf{E}$  在等相位面上不变化，故(2.78)式的解称为均匀平面波

由麦克斯韦方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}$$

可求得  $\mathbf{H}$  的解为

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= -\frac{1}{j\omega\mu_0} \nabla \times \mathbf{E}_0 e^{-jk \cdot r} = \frac{1}{j\omega\mu_0} \mathbf{E}_0 \times \nabla e^{-jk \cdot r} \\ &= \frac{1}{\omega\mu_0} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 e^{-jk \cdot r} = \frac{k_0}{\omega\mu_0} \mathbf{n} \times \mathbf{E} \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{n} \times \mathbf{E} = Y_0 \mathbf{n} \times \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2.80)$$

式中， $Y_0 = \sqrt{\epsilon_0/\mu_0}$  具有导纳的量纲，故称为自由空间的本征导纳。倒数  $Z_0 = 1/Y_0$  称为自由空间的本征阻抗。应当指出，因为  $\mathbf{H}$  垂直于  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{n}$ ，所以  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{H}$  都处在等相位面上。因此，这种类型的波称为横电

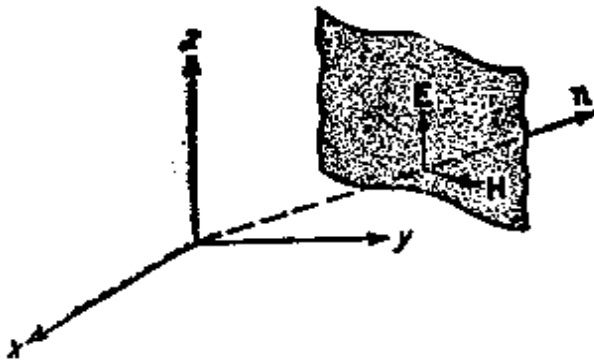


图 2.12 TEM 波的  $E$ 、 $H$ 、 $n$  之间的空间关系

磁波 (TEM 波)。E、H、 $n$  之间的空间关系表示在图 2.12 中。

与相量表示式(2.78)对应的实际电场为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \text{Re}(\mathbf{E}_0 e^{-jk \cdot \mathbf{r} + j\omega t}) \\ &= \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \end{aligned} \quad (2.81)$$

式中，为了简化，已假定  $\mathbf{E}_0$  为实数。波长是波必须经过  $2\pi$  相位变化的距离。若令  $\lambda_0$  表示自由空间的波长，则可得

$$|\mathbf{k}| \lambda_0 = k_0 \lambda_0 = 2\pi$$

所以

$$k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad (2.82)$$

这个结果就是熟知的自由空间中波长  $\lambda_0$ 、频率  $f = \omega/2\pi$  和速度  $c$  之间的关系。也可以定义不同于传播方向  $\mathbf{n}$  的波长。例如，沿  $x$  轴方向的波长为

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x} \quad (2.83)$$

由于  $k_x$  小于  $k_0$ ，故  $\lambda_x$  大于  $\lambda_0$ 。相速就是恒定相位移动的速度。由(2.81)式可以看出，只要  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$  是常数， $\mathbf{E}$  的相位就是常数。设  $\mathbf{k}$  和  $\mathbf{r}$  之间的角度为  $\theta$ ，则  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = k_0 r \cos \theta - \omega t$ 。对关系式

$$k_0 r \cos \theta - \omega t = \text{常数}$$

求导数，得到沿  $\mathbf{r}$  方向的相速为

$$\frac{dr}{dt} = v_p = \frac{\omega}{k_0 \cos \theta} \quad (2.84)$$

沿传播方向， $\cos \theta = 1$ ， $v_p = \omega/k_0 = c$ ；沿其他方向，相速大于  $c$ 。这些结果可参照图 2.13 来理解。当波沿  $\mathbf{n}$  方向移动了距离  $\lambda_0$  时，与  $u$  轴相交的等相位面已经沿  $u$  方向移动了距离  $\lambda_x = \lambda_0 \sec \theta$ 。因此，

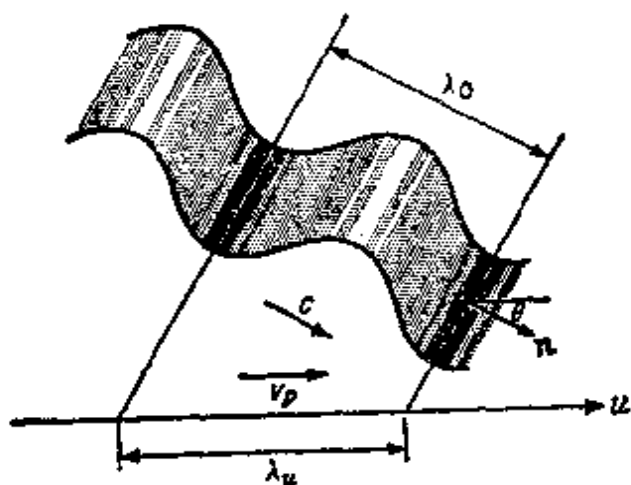


图 2.13 对  $u$  轴斜向传播的波

沿  $u$  方向的波长和相速为沿传播方向  $n$  测得的波长和相速的  $\sec\theta$  倍。  
沿  $n$  方向每单位面积上能流密度的时间平均值为

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} Y_0 \mathbf{E} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}^*) \cdot \mathbf{n} \\
 &= \frac{1}{2} Y_0 \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* \quad (2.85)
 \end{aligned}$$

$TEM$  波的电场和磁场能量密度的时间平均值分别为

$$\begin{aligned}
 U_e &= \frac{\epsilon_0}{4} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = \frac{\epsilon_0}{4} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* \\
 U_m &= \frac{\mu_0}{4} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* = \frac{\mu_0}{4} Y_0^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}^*) \\
 &= \frac{\epsilon_0}{4} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* = U_e
 \end{aligned}$$

可以看出，两者是相等的。因为功率就是能量流，故能量传播的速度就是

$$(U_e + U_m) v_e = P$$

即



$$v_g = \frac{P}{U_c + U_m} = \frac{\frac{1}{2} Y_0 \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*}{\frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*} = \frac{Y_0}{\epsilon_0} = c \quad (2.86)$$

可见,自由空间中 $TEM$ 波场的能量以速度 $c=3 \times 10^8$ 米/秒移动,这个速度也就是相速。由于此相速与频率无关,所以,已调载波或信号的所有频率成分将以同样的速度 $c$ 传播。因而信号速度也就是光速 $c$ 。在以后研究波导时,将出现相速与频率有关,因而不等于能量传播速度或信号传播速度的情况。

## 2.8 由介质交界面的反射

在图2.14中 $Z \geq 0$ 的半空间内,充满电容率为 $\epsilon$ 的介质(相对电容率 $k = \epsilon/\epsilon_0$ , 折射率 $n = \sqrt{K}$ )。假定 $TEM$ 波由 $Z < 0$ 区域入射。

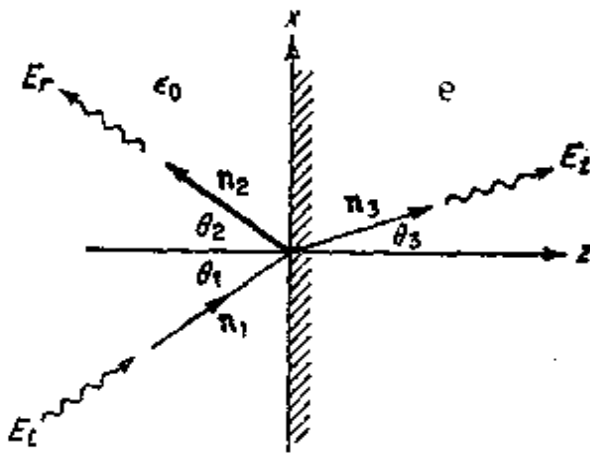


图 2.14 平面波入射到介质交界面上

为了不失去普遍性,可以这样来确定 $x,y$ 轴,即,使规定入射方向的单位矢量 $\mathbf{n}_1$ 落在 $xz$ 平面上。为了方便,通常把这个问题分为下列两种特殊情况来求解,即:(1)平行极化,它的入射波电场与 $\mathbf{n}_1$ 和交界面法线是共面的,即入射波电场落在 $xz$ 平面上;(2)垂直极化,其入射波电场垂直于由 $\mathbf{n}_1$ 和分界

面的法线所规定的入射平面,即入射波电场沿 $y$ 轴方向。一个具有任意极化的入射 $TEM$ 波,总是可以看作为垂直极化波和平行极化波的线性迭加。把两种极化分开来讨论的理由,是两种情况下的反射系数和传输系数不相同。

## 1. 平行极化

设入射的  $TEM$  波为

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_1 e^{-jk_0 n_1 z} \quad \mathbf{H}_i = Y_0 \mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_i \quad (2.87)$$

式中,  $\mathbf{E}_1$  位于  $xz$  平面上。部分入射功率将被反射, 其余的入射功率将透入介质中。设反射的  $TEM$  波为

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_2 e^{-jk_0 n_2 z} \quad \mathbf{H}_r = Y_0 \mathbf{n}_2 \times \mathbf{E}_2 \quad (2.88)$$

式中,  $\mathbf{n}_2$  和  $\mathbf{E}_2$  是待定的。在介质中,  $TEM$  波的解与在自由空间中的解有相同的形式, 但须用  $\epsilon$  代替  $\epsilon_0$ 。因此, 要用参量  $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon} = \eta k_0$  和  $Y = \sqrt{\epsilon / \mu_0} = \eta Y_0$  代替  $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  和  $Y_0 = \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0}$ , 其中,  $\eta = \sqrt{K}$  是折射率。介质中的透射波可以表示为

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_3 e^{-jk n_3 z} \quad \mathbf{H}_t = Y \mathbf{n}_3 \times \mathbf{E}_3 \quad (2.89)$$

其中,  $\mathbf{E}_3$  和  $\mathbf{n}_3$  还是未知的。

要应用的边界条件, 是分界面  $Z = 0$  处电场和磁场切向分量的连续性。在  $Z = 0$  平面上, 这些分量在  $x$  和  $y$  方向的值必须连续, 这只有在边界的邻近两侧上它们随  $x$  和  $y$  作同样的变化时才有可能。因而必得

$$k_0 n_{1x} = k_0 n_{2x} = k n_{3x} = \eta k_0 n_{3x} \quad (2.90)$$

即所有的波沿  $x$  方向传播的相位常数必须相同。因为取  $n_{1y}$  为零, 故得  $n_{2y} = n_{3y} = 0$ 。单位矢量  $\mathbf{n}_1$ 、 $\mathbf{n}_2$ 、 $\mathbf{n}_3$  可以表示为

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{a}_x \sin \theta_1 + \mathbf{a}_z \cos \theta_1$$

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{a}_x \sin \theta_2 - \mathbf{a}_z \cos \theta_2$$

$$\mathbf{n}_3 = \mathbf{a}_x \sin \theta_3 + \mathbf{a}_z \cos \theta_3$$

由(2.90)式得

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_2$$

即

$$\theta_1 = \theta_2 \quad (2.91)$$

它就是熟知的施耐尔反射定律。此外, 由(2.90)式还可得

$$\sin \theta_1 = \eta \sin \theta_3 \quad (2.92)$$

它也是一个用入射角 $\theta_1$ 和折射率 $\eta$ 来表示折射角 $\theta_3$ 的熟知的结果。

因为 $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{E}_1$ 必等于零，故入射波电场 $\mathbf{E}_1$ 的分量有：

$$E_{1x} = E_1 \cos \theta_1, \quad E_{1z} = -E_1 \sin \theta_1$$

应当指出， $E_1$ 习惯上用来表示矢量 $\mathbf{E}_1$ 的数值。因为入射波电场没有 $y$ 分量，故反射和透射电场的 $y$ 分量也为零\*。把所有的场量用分量形式表示，即为

$$\begin{aligned} E_{2x} &= E_2 \cos \theta_2, & E_{2z} &= E_2 \sin \theta_2 \\ E_{3x} &= E_3 \cos \theta_3, & E_{3z} &= -E_3 \sin \theta_3 \end{aligned}$$

同时，在 $Z = 0$ 处应用 $x$ 分量连续的边界条件，得

$$E_1 \cos \theta_1 + E_2 \cos \theta_2 = E_3 \cos \theta_3$$

利用(2.91)式和(2.92)式即得

$$\begin{aligned} (E_1 + E_2) \cos \theta_1 &= E_3 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_3} \\ &= E_3 \frac{\sqrt{k - \sin^2 \theta_1}}{\eta} \end{aligned} \quad (2.93)$$

暂不考虑传播因子时，磁场为

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= Y_0 \mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_1 = Y_0 \mathbf{a}_y (-n_{1z} E_{1x} + n_{1x} E_{1z}) \\ &= Y_0 \mathbf{a}_y E_1 \\ \mathbf{H}_2 &= -Y_0 \mathbf{a}_y E_2 \\ \mathbf{H}_3 &= Y_0 \mathbf{a}_y E_3 \end{aligned}$$

它只有一个 $y$ 分量。边界上磁场的连续性要求

$$Y_0 (E_1 - E_2) = Y E_3 = \eta Y_0 E_3 \quad (2.94)$$

如果反射系数 $\Gamma_1$ 和传输系数 $T_1$ 按下式定义：

$$\Gamma_1 = \frac{\text{反射波电场的振幅}}{\text{入射波电场的振幅}} = \frac{E_2}{E_1} \quad (2.95a)$$

$$T_1 = \frac{\text{透射波电场的振幅}}{\text{入射波电场的振幅}} = \frac{E_3}{E_1} \quad (2.95b)$$

则可以把边界条件(2.93)式和(2.94)式表示为

\* 若假定反射和透射电场有 $y$ 分量，则应用边界条件定然能证明它们确实为零。

$$1 + \Gamma_1 = T_1 \frac{(k - \sin^2 \theta_1)^{\frac{1}{2}}}{\eta \cos \theta_1} \quad (2.96a)$$

$$1 - \Gamma_1 = \eta T_1 \quad (2.96b)$$

求解这些方程，可以得到平行极化情况下的费涅尔反射系数和传输系数，即

$$\Gamma_1 = \frac{(k - \sin^2 \theta_1)^{\frac{1}{2}} - k \cos \theta_1}{(k - \sin^2 \theta_1)^{\frac{1}{2}} + k \cos \theta_1} \quad (2.97a)$$

$$T_1 = \frac{2\eta \cos \theta_1}{(k - \sin^2 \theta_1)^{\frac{1}{2}} + k \cos \theta_1} \quad (2.97b)$$

$\Gamma_1$ 的一个重要特性是当入射角 $\theta_1 = \theta_b$  ( $\theta_b$ 叫做布鲁斯特角)时它变为零。此时，由(2.97a)式得

$$k - \sin^2 \theta_b = k^2 \cos^2 \theta_b$$

或

$$\sin \theta_b = \left( \frac{k}{k+1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.98)$$

在这一特定的入射角下，所有的入射波功率都透射入介质内。图2.15中绘出了聚乙烯在 $k=2.56$ 时反射系数 $\Gamma_1$ 随 $\theta_1$ 变化的曲线。

## 2. 垂直极化

垂直极化只是把平行极化中的电场和磁场的位置交换了一下，故它的电场只有 $y$ 分量。但是，其场仍可以用(2.87)式至(2.89)式的形式表示。不过，须用只有 $y$ 分量的 $E_1$ 、 $E_2$ 和 $E_3$ 。如同前述的情况一样，在 $Z=0$ 平面上，所有 $x$ 和 $y$ 分量都必须满足边界条件。因此，同样可得到反射和折射的施耐尔定律，

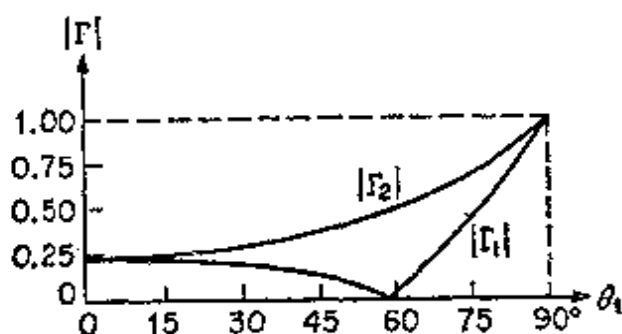


图 2.15 介质交界面上反射系数的模( $K=2.56$ )。  $|\Gamma_1|$ —水平极化，  $|\Gamma_2|$ —垂直极化

即垂直极化波也必须满足(2.91)式和(2.92)式。代替边界条件(2.93)式和(2.94)式的是

$$E_1 + E_2 = E_3 \quad (2.99a)$$

$$Y_0(E_1 - E_2)\cos\theta_1 = YE_3\cos\theta_3 \quad (2.99b)$$

垂直极化波的反射和传输系数定义如下:

$$\Gamma_2 = \frac{E_2}{E_1} \quad T_2 = \frac{E_3}{E_1}$$

把它们代入(2.99)式得

$$1 + \Gamma_2 = T_2 \quad (2.100a)$$

$$1 - \Gamma_2 = T_2 \frac{(k - \sin^2\theta_1)^{\frac{1}{2}}}{\cos\theta_1} \quad (2.100b)$$

于是得到垂直极化的费涅尔反射和传输系数为

$$\Gamma_2 = \frac{\cos\theta_1 - (k - \sin^2\theta_1)^{\frac{1}{2}}}{(k - \sin^2\theta_1)^{\frac{1}{2}} + \cos\theta_1} \quad (2.101a)$$

$$T_2 = \frac{2\cos\theta_1}{(k - \sin^2\theta_1)^{\frac{1}{2}} + \cos\theta_1} \quad (2.101b)$$

与水平极化波的重大差别是:垂直极化波不存在使 $\Gamma_2$ 变为零的布鲁斯特角。为了与平行极化情况作比较,把垂直极化波 $K=2.56$ 时 $|\Gamma_2|$ 随 $\theta_1$ 的变化也画在图2.15中。

## 2.9 由导电平面的反射

在良导体表面上电磁场行为的基本特点,可以通过分析垂直入射到导电平面上的简单的 $TEM$ 波问题来导出。此问题表示于图2.16中。它表明:参数为 $\epsilon$ 、 $\mu$ 、 $\sigma$ 的媒质充满 $Z \geq 0$ 的半空间。设其电场取 $x$ 轴方向,而使入射波和反射波的场可以表示为

$$\mathbf{E}_i = E_1 \mathbf{a}_x e^{-ik_0 z} \quad (2.102a)$$

$$\mathbf{H}_i = Y_0 E_1 \mathbf{a}_y e^{-ik_0 z}$$

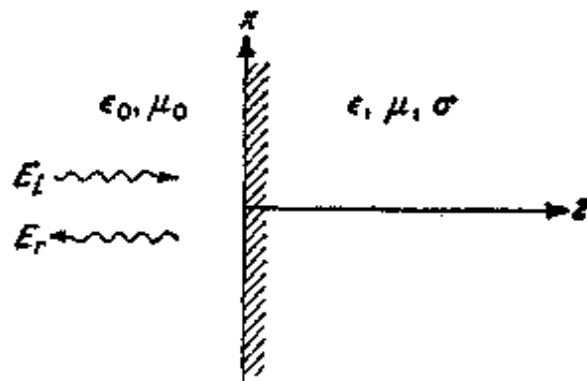


图 2.18 TEM波垂直入射到导电平面上

$$\begin{aligned} E_r &= \Gamma E_i a_x e^{+jk_0 z} \\ H_r &= -Y_0 \Gamma E_i a_x e^{+jk_0 z} \end{aligned} \quad (2.102b)$$

式中， $\Gamma$ 为反射系数。

在导电媒质中，传导电流 $\sigma \mathbf{E}$ 远大于位移电流 $j\omega\epsilon \mathbf{E}$ ，故亥姆霍兹方程简化为(2.50)式，即

$$\nabla^2 \mathbf{E} - j\omega\mu\sigma \mathbf{E} = 0$$

由于假定 $x$ 、 $y$ 方向没有变化，故透射波的场为下式

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial z^2} - j\omega\mu\sigma \right) E_x = 0$$

的解。这是一个沿 $Z$ 方向传播的波，其电场 $\mathbf{E}_t$ 只有 $x$ 分量，即

$$\mathbf{E}_t = E_3 a_x e^{-\gamma z} \quad (2.103a)$$

其对应的磁场为

$$\mathbf{H}_t = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E}_t = \frac{\gamma}{j\omega\mu} a_y E_3 e^{-\gamma z}, \quad (2.103b)$$

式中

$$\gamma = (j\omega\mu\sigma)^{\frac{1}{2}} = \frac{1+j}{\delta_s}, \quad (2.104)$$

而趋肤深度 $\delta_s = (\omega\mu\sigma/2)^{-\frac{1}{2}}$ 。可见，传播常数 $\gamma = \alpha + j\beta$ 具有相等的相移常数和衰减常数。在导体中，波进入一个趋肤深度 $\delta_s$ 距离，其场的衰减为 $e^{-1}$ 倍。对金属来说，在微波频率下， $\delta_s$ 是一个很小的距离(约为 $10^{-6}$ 厘米)。金属的本征阻抗 $Z_s$ 为

$$Z_m = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{(j\omega\mu\sigma)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1+j}{\sigma\delta_s} \quad (2.105)$$

与自由空间的本征阻抗  $Z_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{\frac{1}{2}}$  相比, 它是很小的。例如, 铜在  $10^4$  兆赫时,  $Z_m = 0.026(1+j)$  欧姆, 而  $Z_0$  为 377 欧姆。应当指出, (2.103b) 式也可以写成

$$H_z = \frac{1}{Z_m} a_y E_s e^{-\gamma z} = Y_m a_y E_s e^{-\gamma z}$$

它表示在导体中 TEM 波电场和磁场的大小之比等于本征阻抗  $Z_m$ 。

我们再来讨论边值问题。在边界面  $Z = 0$  处使用切向场连续的边界条件得

$$(1+\Gamma)E_1 = E_s = TE_1 \quad (2.106a)$$

$$(1-\Gamma)Y_0 E_1 = H_s = Y_m E_s = Y_m TE_1 \quad (2.106b)$$

式中,  $E_s/E_1 = T$ , 即传输系数。求解(2.106)式中的反射系数  $\Gamma$  和传输系数  $T$  得

$$\Gamma = \frac{Z_m - Z_0}{Z_m + Z_0} \quad (2.107a)$$

$$T = 1 + \Gamma = \frac{2Z_m}{Z_m + Z_0} \quad (2.107b)$$

因为  $|Z_m|$  远小于  $Z_0$ , 故反射系数接近于  $-1$ , 且传输系数  $T$  也很小。所有的入射波功率几乎全由金属边界反射。当电导率  $\sigma$  趋近于无限大时, 阻抗  $Z_m$  趋近于零。在极限情况下, 为  $\Gamma = -1, T = 0$ 。因而, 对理想导体来说, 其表面上电场的切向分量为零, 而磁场的切向分量等于入射波磁场数值的两倍。

由于导体内电流密度为  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \sigma T E_1 a_x e^{-\gamma z}$ , 故沿导体  $y$  方向单位宽度的总电流为

$$\begin{aligned} J_s &= \int_0^{\infty} J dz = \sigma T E_1 a_x \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} dz \\ &= \frac{\sigma T E_1}{\gamma} a_x \quad \text{安培/米} \end{aligned}$$

若用(2.107b)式代替  $T$ ，并用得自(2.105)式的  $j\omega\mu/Z_m$  代替  $r$ ，则  $J_s$  也可用如下的形式表示：

$$J_s = \frac{2\sigma Z_m^2 E_1}{(Z_m + Z_0)j\omega\mu} \mathbf{a}_x \quad (2.108)$$

当  $\sigma \rightarrow \infty$  时，由于  $Z_m \rightarrow 0$  和  $\sigma Z_m^2 \rightarrow j\omega\mu$ ，故  $J_s$  的极限值便成为

$$J_s = -\frac{2E_1}{Z_0} \mathbf{a}_x = 2Y_0 E_1 \mathbf{a}_x \quad (2.109)$$

当  $\sigma \rightarrow \infty$  时，因为趋肤深度  $\delta_s \rightarrow 0$ ，即进入导体时场随距离极其迅速地衰减，故电流只存在于导体的表面。当  $\sigma$  为无限大时， $\Gamma = -1$ ，表面上的切向磁场为  $2Y_0 E_1 \mathbf{a}_x$ ，且在数值上与  $J_s$  相等。由此可见，理想导体表面上边界条件的矢量形式为

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.110a)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s \quad (2.110b)$$

式中， $\mathbf{n}$  是垂直于导体表面的单位外法线矢量。

当电导率为有限值时，表面电流密度为  $\sigma T E_1$ ，表面上的磁场强度为  $Y_m T E_1$ 。利用这些量可把单位宽度的总电流表示为

$$\begin{aligned} J_s &= \frac{\sigma T E_1}{Y} \mathbf{a}_x = \frac{\sigma Z_m}{Y} (Y_m T E_1) \mathbf{a}_x \\ &= Y_m T E_1 \mathbf{a}_x \end{aligned}$$

换言之，每单位宽度的总电流等于表面上的切向磁场。

穿入单位面积导体的功率的时间平均值，等于表面上复数坡印廷矢量取实部的一半，即为

$$\begin{aligned} P_t &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{a}_x = \frac{1}{2} T T^* E_1 E_1^* R_s Y_m \\ &= \frac{1}{4} T T^* E_1 E_1^* \sigma \delta_s \end{aligned} \quad (2.111)$$

读者不难证明它等于对  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^*$  的体积分所得的结果，即

$$P_t = \frac{1}{2\sigma} \int_0^\infty \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^* dz$$



利用下面的近似式，可以在很小误差下简化(2.111)式：

$$\begin{aligned}\sigma TT^* &= \frac{4\sigma Z_m Z_m^*}{(Z_m + Z_0)(Z_m + Z_0)^*} \\ &\approx \frac{4\sigma Z_m Z_m^*}{Z_0^2} = \frac{8}{\sigma \delta_s^2 Z_0^2}\end{aligned}$$

由此，(2.111)式就成为

$$P_t \approx \frac{1}{2} \frac{(2Y_0 E_t)(2Y_0 E_t^*)}{\sigma \delta_s} \quad (2.112)$$

要注意，若 $\sigma$ 为无限大，则 $2Y_0 E_t$ 就是与表面相切的磁场所具有的数值。因而，计算导体中功率损耗的一个很好的近似方法，就是求出理想导体所具有的切向磁场（或者说 $H_t$ ），然后按照下式计算功率损耗：

$$P_t = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(H_t H_t^* Z_m) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(J_s J_s^* Z_m) \quad (2.113)$$

这个方法相当于假定金属具有表面阻抗 $Z_m$ ，而电流基本上就是它在电导率为无限大时所应有的数值。

上面概述的功率损耗计算方法，广泛地用于微波工程中。虽然它是依据研究很特殊的边值问题而得出的，但是，对更复杂的结构，比如导电球体或圆柱体也同样适用。一般说，只要导体面的曲率半径的大小至少有几个趋肤深度，则用表面阻抗 $Z_m$ 表示金属特性的方法，以及表面电流 $J_s$ 与无限大电导率时相同的假定，就是成立的。

## 2.10 位 论

前几节介绍波的解全都不包括场源，即不考虑产生场的源的性质。当需要研究由已知场源所产生的有关场（如天线问题、波导和空腔谐振器耦合问题等）的时候，引入一个辅助的矢量位函数 $\mathbf{A}$ ，将使这个问题大大简化。下面将看到，矢位 $\mathbf{A}$ 决定于电流源，而全部电磁场可以由 $\mathbf{A}$ 得出。

由于 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 总是成立的，所以把 $\mathbf{B}$ 表示为一个矢位 $\mathbf{A}$ 的旋度

也总是成立的，因为一个矢量的旋度的散度恒等于零。故可令

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.114)$$

因为这是相量表示，所以在(2.114)式中，不明显地写出所假定的时间关系 $e^{j\omega t}$ 。由 $\mathbf{E}$ 的旋度方程得

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} = -j\omega \nabla \times \mathbf{A}$$

或

$$\nabla \times (\mathbf{E} + j\omega \mathbf{A}) = 0$$

因标量函数 $\Phi$ 的梯度的旋度恒等于零，故上述方程的一般积分为

$$\mathbf{E} + j\omega \mathbf{A} = -\nabla \Phi$$

即 (2.115)

$$\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} - \nabla \Phi$$

将此式代入 $\nabla \times \mathbf{H}$ 方程，得

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = j\omega \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{J} \\ &= \omega^2 \epsilon \mathbf{A} - j\omega \epsilon \nabla \Phi + \mathbf{J} \end{aligned} \quad (2.116)$$

至此， $\mathbf{A}$ 的散度和 $\nabla \Phi$ 还没有被确定(注意：(2.114)式只规定 $\mathbf{A}$ 的旋度)。为此，可由选取 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 和 $\Phi$ 之间的关系来简化(2.116)式，展开 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$ 得 $\nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$ ，这就使(2.116)式变成

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = k^2 \mathbf{A} - j\omega \epsilon \mu \nabla \Phi + \mu \mathbf{J}$$

式中， $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ 。现在，若规定如下的条件，

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega \epsilon \mu \nabla \Phi$$

即

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega \mu \epsilon \Phi \quad (2.117)$$

则(2.116)式简化为

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (2.118)$$

可见， $\mathbf{A}$ 是非齐次亥姆霍兹方程的解，电流 $\mathbf{J}$ 为其场源项。(2.117)式中所表示的 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 与 $\Phi$ 的关系称为洛仑兹条件。这是为了纪念第一次提议使用该条件的人。

在前面的推导中，已经应用了三个麦克斯韦方程，并且得到满足。第四个方程 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ 也必须成立，只要洛仑兹条件得到满足就

会证明这点，因此，(2.114)、(2.115)和(2.118)三个方程与洛仑兹条件(2.117)式一起完全相当于麦克斯韦方程。为了证明方程 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ ，对(2.115)式取散度，得

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = -j\omega \epsilon \nabla \cdot \mathbf{A} - \epsilon \nabla^2 \Phi \quad (2.119)$$

式中， $\epsilon$ 是一个常数，若利用(2.118)式，并注意到 $\nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \nabla^2 \mathbf{A}$ （即这两个微分算符可以交换），则应用洛仑兹条件得

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= -j\omega \epsilon \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}}{-j\omega \mu} \\ &= -\frac{1}{j\omega \mu} \nabla \cdot (\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A}) \\ &= -\frac{1}{j\omega} \nabla \cdot \mathbf{J} \end{aligned}$$

这样，根据连续性方程 $\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega \rho$ ，得

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = -\frac{1}{j\omega} (-j\omega \rho) = \rho$$

若利用洛仑兹条件消去(2.119)式中的 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ ，而不消去 $\Phi$ ，则得

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho = -j\omega \epsilon (-j\omega \mu \epsilon \Phi) - \epsilon \nabla^2 \Phi$$

或

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.120)$$

因而，标位 $\Phi$ 就是非齐次标量亥姆霍兹方程的解，该方程以电荷密度 $\rho$ 作为场源项。

对时变场来说， $\mathbf{J}$ 和 $\rho$ 不是独立的。因而，这种场可仅由 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{J}$ 确定。标位总是可以由洛仑兹条件求得，而 $\rho$ 总是可以由连续性方程求得。但是，求解辐射问题时，并不需要深入理解这一些。为了方便，这里摘要列出有关的方程式：

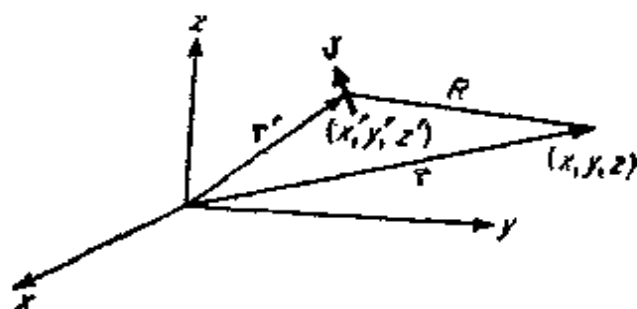
$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.121a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -j\omega\mathbf{A} - \nabla\Phi = -j\omega\mathbf{A} + \frac{\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}}{j\omega\mu\epsilon} \\ &= \frac{k^2\mathbf{A} + \nabla\nabla\cdot\mathbf{A}}{j\omega\mu\epsilon} \end{aligned} \quad (2.121b)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J} \quad (2.121c)$$

其中，利用了洛仑兹条件消去(2.121b)式中的 $\nabla\Phi$ 。应当指出，在直角坐标下，(2.121c)式是如下形式的三个标量方程：

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_x + k^2 A_x &= -\mu J_x \\ \nabla^2 A_y + k^2 A_y &= -\mu J_y \\ \nabla^2 A_z + k^2 A_z &= -\mu J_z \end{aligned}$$



而在其他坐标系统下，必须按照关系式 $\nabla^2\mathbf{A} = \nabla\nabla\cdot\mathbf{A} - \nabla\times\nabla\times\mathbf{A}$ 展开 $\nabla^2\mathbf{A}$ 。

(2.121c)式最简单的解，是由位置矢量 $\mathbf{r}'$ 确定的位于 $(x', y', z')$ 点的无限小电流元 $\mathbf{J}(x', y', z') = \mathbf{J}(\mathbf{r}')$ 的解，位置矢量 $\mathbf{r}' = \mathbf{a}_x x' + \mathbf{a}_y y' + \mathbf{a}_z z'$ 如图2.17所示。这个解为

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} \quad (2.122)$$

式中， $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 是由源点到计算 $\mathbf{A}$ 的场点之间距离的大小，即

$$R = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{1}{2}}$$

利用这个基本解，按照迭加的方法，可以求出具有一般电流分布的矢位。即把所有的单个无限小电流元加起来就得

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(x', y', z') \frac{e^{-jkR}}{R} dx' dy' dz' \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \end{aligned} \quad (2.123)$$

式中的积分是在电流所在的整个体积上进行的。应当指出，(2.122)式所表示的 $\mathbf{A}$ 的解，是一个由 $\mathbf{J}$ 出发径向地向外传播的球面波，其振

幅按  $1/R$  衰减。而解(2.123)式是这些单元球面波的迭加。

## ★2.11 矢位解的推导

在这一节中，将详细地推导已知单位电流源时的非齐次亥姆霍兹方程的解。单位源就是位于空间一点上具有单位强度的源（熟知的例子如点电荷）。在三维空间中，这种单位源是沿时间坐标在时刻  $t'$  的单位电流脉冲的推广。在电路理论中，一个电流脉冲可用狄拉克  $\delta$  函数  $\delta(t-t')$  来表示，其中的  $\delta(t-t')$  具有如下的性质：

$$\text{当 } t \neq t' \text{ 时, } \delta(t-t') = 0 \quad (2.124a)$$

而当  $t = t'$  时，它变成无穷大；而其积分为

$$\int_{t'-\tau}^{t'+\tau} \delta(t-t') dt = 1 \quad (2.124b)$$

它的另一个特性是，它与在  $t'$  时刻连续的任一函数  $f(t)$  之积的积分为

$$\int_{t'-\tau}^{t'+\tau} f(t) \delta(t-t') dt = f(t') \quad (2.124c)$$

这个结果的获得是由于  $\tau$  可以取得很小，而使间隔  $t' - \tau < t < t' + \tau$  内函数  $f(t)$  和  $f(t')$  之差变为零（因为在  $t'$  时刻  $f(t)$  是连续的）。因而，由(2.124b)式，可以把(2.124c)式写作

$$f(t') \int_{t'-\tau}^{t'+\tau} \delta(t-t') dt = f(t')$$

如前所述， $\delta$  函数是表示位于坐标轴（上例中的坐标轴是  $t$ ）任一点上单位强度源的适宜的数学方式。在  $N$  维空间中，可用  $N$  个  $\delta$  函数之积来表示一个单位源（对每个坐标有一个  $\delta$  函数）。于是，在三维空间中，单位源可表示为

$$\delta(x-x') \delta(y-y') \delta(z-z') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (2.125)$$

式中， $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$  是三个一维  $\delta$  函数乘积的略写。源函数  $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$  具有如下的特性：

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=0 \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}' \quad (2.126a)$$

$$\int_V \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') dV = \begin{cases} 1 & \mathbf{r}' \text{ 在 } V \text{ 中} \\ 0 & \mathbf{r}' \text{ 不在 } V \text{ 中} \end{cases} \quad (2.126b)$$

$$\int_V \mathbf{F}(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') dV = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{r}') & \mathbf{r}' \text{ 在 } V \text{ 中} \\ 0 & \mathbf{r}' \text{ 不在 } V \text{ 中} \end{cases} \quad (2.126c)$$

式中， $\mathbf{F}$ 是一个在 $\mathbf{r}'$ （即在 $(x', y', z')$ 点）点连续的任意矢量（或标量）函数。这些特性是由构成函数 $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ 的一维 $\delta$ 函数的性质得来的。

在 $\mathbf{r}'$ 处沿单位矢量 $\mathbf{a}$ 方向的单位电流源可以表示为 $\mathbf{J}=\mathbf{a}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ 。矢位 $\mathbf{A}$ 是下面方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{a} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (2.127)$$

的解。因为电流 $\mathbf{J}$ 取 $\mathbf{a}$ 的方向，所以矢位 $\mathbf{A}$ 也必定在这个方向，故 $\mathbf{A}=\mathbf{A}_a$ 。因而(2.127)式可以写成一个标量方程：

$$\nabla^2 A + k^2 A = -\mu \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (2.128)$$

在 $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ 的所有点上， $A$ 是

$$\nabla^2 A + k^2 A = 0 \quad (2.129)$$

的解。若把源点 $\mathbf{r}'$ 看作球坐标系的原点，则由于在(2.128)式的源项中没有角度的变化，故 $A$ 的解必然具有以源点 $\mathbf{r}'$ 为中心的球对称形式。若用径向球坐标 $R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ 表示，则 $R$ 是由原点 $\mathbf{r}'$ 算起的径向距离。于是在球坐标中把 $\nabla^2$ 依赖于 $R$ 的部分表示出来，就可看出，(2.129)式只是 $R$ 的函数，而可写成

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial A}{\partial R} \right) + k^2 A = 0$$

或

$$\frac{d^2 A}{dR^2} = \frac{2}{R} \frac{dA}{dR} + k^2 A = 0 \quad (2.130)$$

设球面波的解为 $A=f(R)e^{-ikR}$ ，把它代入(2.130)式，则得如下的 $f(R)$ 方程式：

$$\frac{d^2 f}{dR^2} + \left( \frac{2}{R} - 2jk \right) \frac{df}{dR} - \frac{2jk}{R} f = 0$$

不难证明它的解为  $f = C/R$ ，其中， $C$  是一任意常数。因此，(2.129) 式的解为  $A = Ce^{-jkR}/R$ 。这个解在  $R = 0$  处是奇异的，这种奇异性必然对应于在该点源项的奇异性。

为了确定常数  $C$ ，在以  $r'$  为中心以  $r_0$  为半径的整个小球内对 (2.128) 式进行积分，并利用 (2.126b) 式的  $\delta$  函数特性，得

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r_0} (\nabla^2 A + k^2 A) R^2 \sin \theta d\theta d\varphi dR \\ &= \int_V (\nabla^2 A + k^2 A) dV = -\mu \int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV \\ &= -\mu \end{aligned}$$

当  $r_0$  趋向于零时，与  $R^2$  成正比的  $k^2 R^2 A$  项的积分将变为零。因而，在  $r_0$  足够小时，

$$\int_V \nabla^2 A dV = -\mu$$

因为  $\nabla^2 A = \nabla \cdot \nabla A$ ，故可用散度定理得出

$$\int_V \nabla^2 A dV = \oint_S \nabla A \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \nabla A \cdot \mathbf{a}_{r_0} r_0^2 d\Omega$$

式中， $d\mathbf{S} = \mathbf{a}_{r_0} r_0^2 d\Omega$ ， $d\Omega$  是单位立体角。因为  $A$  只是  $R$  的函数，故  $\nabla A = \mathbf{a}_r (\partial A / \partial R)$ ，所以

$$\begin{aligned} r_0^2 \oint_S \nabla A \cdot \mathbf{a}_{r_0} d\Omega &= r_0^2 \oint_S \frac{\partial A}{\partial R} d\Omega \\ &= 4\pi r_0^2 \frac{\partial A}{\partial R} = -\mu \end{aligned}$$

求出  $R = r_0$  时的  $\partial A / \partial R$  后，再在  $r_0$  趋于零时取极限得

$$\begin{aligned} 4\pi r_0^2 \frac{\partial A}{\partial R} &= -4\pi C r_0^2 \left( \frac{jk}{r_0} e^{-jkr_0} + \frac{e^{-jkr_0}}{r_0^2} \right) \\ &= -4\pi C \end{aligned}$$

因而  $4\pi C = \mu$ , 即  $C = \mu/4\pi$ , 这样做以便使  $A$  的解中的奇异性与单位源的一致。

上面讨论的单位源矢位解, 就是

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \mathbf{a} \quad (2.131)$$

显然是源点和场点两者的函数。由于(2.131)式是单位源的解, 故常把它称为格林函数, 并用记号  $\mathbf{G}$  表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') &= \mathbf{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')\mathbf{a} = \mathbf{G}(x, y, z|x', y', z')\mathbf{a} \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \mathbf{a} \end{aligned} \quad (2.132)$$

这是因为, 按照定义格林函数是单位源的微分方程的解。

因为任意电流分布  $\mathbf{J}$  可以被看作为各个单位源的加权和, 故可以把一般电流分布产生的矢位用下面的形式表示:

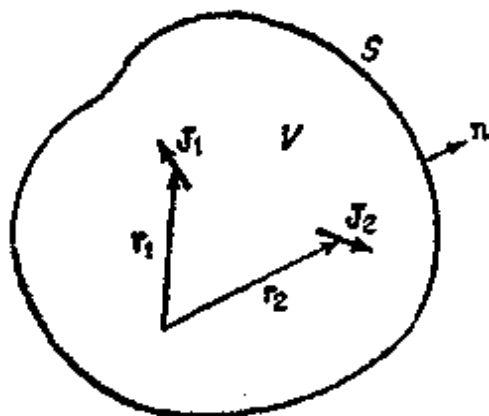
$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \\ &= \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \mathbf{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') dV' \end{aligned} \quad (2.133)$$

## 2.12 洛仑兹互易定理

在解电磁场问题时, 洛仑兹互易定理是最有用的定理之一, 因为它常常可以用来推论实际器件的若干基本性质。它为论证微波电路的互易性, 和证明天线具有相同的接收和发射特性提供了基础。它也常用来确定在波导和空腔谐振器中可能存在的模的正交性\*。互易定理另一重要应用, 是用来导出由探针、小环或耦合孔隙辐射的或耦合到波导和空腔谐振器中的场的适当展开式(类似于付立叶级数展开式)。

\* 在任一波导或空腔谐振器中, 都可能无限多个场的解, 任一个解称为一个模。其理由与振动弦和膜的各种解称为各种模是相同的。模的正交性在3.9节中讨论。





为了推导这个定理，我们研究如图 2.18 中所示的闭合曲面  $S$  所限定的体积  $V$ 。设在  $V$  中的电流源  $J_1$  产生场  $E_1$ 、 $H_1$ ，而另一个电流源  $J_2$  产生场  $E_2$ 、 $H_2$ 。因为这些场满足麦克斯韦方程，所以

$$\begin{aligned}\nabla \times E_1 &= -j\omega\mu H_1 \\ \nabla \times H_1 &= j\omega\epsilon E_1 + J_1 \\ \nabla \times E_2 &= -j\omega\mu H_2 \\ \nabla \times H_2 &= j\omega\epsilon E_2 + J_2\end{aligned}$$

图 2.18 洛伦兹互易定理的图示 展开关系式  $\nabla \cdot (E_1 \times H_2 - E_2 \times H_1)$ ，并利用麦克斯韦方程可得到

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (E_1 \times H_2 - E_2 \times H_1) &= (\nabla \times E_1) \cdot H_2 - (\nabla \times H_2) \cdot E_1 \\ &\quad - (\nabla \times E_2) \cdot H_1 + (\nabla \times H_1) \cdot E_2 \\ &= -J_2 \cdot E_1 + J_1 \cdot E_2\end{aligned}\quad (2.134)$$

两边都在体积  $V$  上进行积分，并利用散度定理得

$$\begin{aligned}\int_V \nabla \cdot (E_1 \times H_2 - E_2 \times H_1) dV \\ &= \oint_S (E_1 \times H_2 - E_2 \times H_1) \cdot n dS \\ &= \int_V (E_2 \cdot J_1 - E_1 \cdot J_2) dV\end{aligned}\quad (2.135)$$

式中， $n$  是  $S$  面的单位外法线矢量。

(2.135) 式是洛伦兹互易定理的基本形式\*。在所遇到的若干典型情况下，(2.135) 式的面积分为零。例如，若  $S$  是理想导电面，则在  $S$  面上  $n \times E_1 = n \times E_2 = 0$ 。由于  $E_1 \times H_2 \cdot n = (n \times E_1) \cdot H_2$ ，

\* 在具有非对称电容率或导磁率张量的各向异性媒质中，必须采用修正形式。参看：

R. F. Harrington and A. T. Villeneuve, *Reciprocity Relations for Gyrotropic Media*, IRE Trans., vol. MTT-6, pp. 308, July, 1958.

等等，故在此情况下，这个面积分为零。若  $S$  面具有表面阻抗  $Z_m$ ，则按照(2.71)式，

$\mathbf{E}_1 = -Z_m \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1$ ，或  $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = -Z_m \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1)$  (注意：在(2.71)式中， $\mathbf{n}$ 指向  $S$  面内，而这里  $\mathbf{n}$  指向外，故用负号)。因此，

$$\begin{aligned} & (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{H}_2 - (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{H}_1 \\ &= -Z_m (\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1)) \cdot \mathbf{H}_2 + Z_m (\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2)) \cdot \mathbf{H}_1 \\ &= Z_m (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1) - Z_m (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2) = 0 \end{aligned}$$

而面积分再一次变为零。

另一个面积分为零的例子是，当  $S$  选为  $\mathbf{n} = \mathbf{a}_r$  的无限大球面的情况。在无限远处的辐射场是一个球面  $TEM$  波，其中

$$\mathbf{H} = Y \mathbf{a}_r \times \mathbf{E} = \left( \frac{\epsilon}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{a}_r \times \mathbf{E}$$

所以

$$\begin{aligned} & (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{H}_2 - (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{H}_1 \\ &= Y (\mathbf{a}_r \times \mathbf{E}_1) \cdot (\mathbf{a}_r \times \mathbf{E}_2) - Y (\mathbf{a}_r \times \mathbf{E}_2) \cdot (\mathbf{a}_r \times \mathbf{E}_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

即其面积分为零。

事实上，对包围全部场源的任何曲面  $S$  来说，其面积分都应为零。把(2.135)式应用于被  $S$  面所限定的体积  $V$  和半径为无限大的球面，就可以看出这个结果，由于在这个体积中不存在源，以及在半径为无限大的球面上的面积分为零，故由(2.135)式，必得

$$\begin{aligned} & \oint (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot (-\mathbf{n}) dS = 0 \\ &= \oint (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

因而，包围所有源的任意闭合曲面  $S$  上的面积分为零。

当此面积分为零时，(2.135)式简化为

$$\int_V \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 dV = \int_V \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 dV \quad (2.136)$$

若 $J_1$ 和 $J_2$ 为无限小电流元, 则

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{J}_2(\mathbf{r}_2) = \mathbf{E}_2(\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{J}_1(\mathbf{r}_1) \quad (2.137)$$

上式说明: 当 $J_1$ 和 $J_2$ 的大小为1时, 由 $J_1$ 产生的场 $\mathbf{E}_1$ 有一分量取 $J_2$ 的方向, 它等于由 $J_2$ 辐射的场取 $J_1$ 方向的分量。若用电压 $V$ 和电流 $I$ 代替 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{J}$ , (2.137)式就是用于电路分析的互易定理。本书各处都有例证说明互易定理的应用, 此处不再进一步讨论了。

## 习 题

2.1 原子序数为 $Z$ 的原子, 有核电荷 $Z_e$ 和 $Z$ 个绕核旋转的电子, 对于这个原子模型, 我们把原子核看作一个点电荷, 并把总电荷为 $-Z_e$ 的电子云看作均匀地分布于半径为 $r_0$ 的整个球体上。在外电场 $E$ 的作用下, 原子核移动了距离 $x$ 。试证明产生的恢复力为 $x(Z_e)^2/4\pi r_0^3 \epsilon_0$ , 且必须等于 $Z_e E$ 。从而证明感应电偶极矩为 $p = 4\pi \epsilon_0 r_0^3 E$ , 即与 $E$ 成线性关系。

2.2 某一物质极化强度的运动方程为

$$\frac{d^2 \mathcal{P}}{dt^2} + \nu \frac{d \mathcal{P}}{dt} + \omega_0^2 \mathcal{P} = 2\epsilon_0 \omega_0^2 \mathcal{E}$$

式中,  $\mathcal{E}$ 为介质中的总场, 试求当 $\mathcal{E} = \text{Re}(E e^{i\omega t})$ , 且 $E$ 为实数时,  $\mathcal{P}$ 和 $\epsilon$ 之间的关系。设 $\omega_0 = 10^{11}$ ,  $\nu = 10^{10}$ , 若假定使用的判据为 $\mathcal{P}$ 和 $\epsilon$ 的相位差不应超过 $5^\circ$ , 那什, 在什么频率范围内可以把关系式写成 $\mathcal{P} = \epsilon \mathcal{E} = \epsilon_0 \mathcal{E} + \mathcal{P}$ ? 绘出相对电容率 $K = \epsilon/\epsilon_0 = (\epsilon' - j\epsilon'')/\epsilon_0$ 的大小和相角随 $\omega$ 变化的曲线。

2.3 在 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 坐标系下, 一种介质的电容率为一个矩阵(张量):

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} = \frac{\epsilon_0}{4} \begin{bmatrix} 7 & 3 & -2\sqrt{0.5} \\ 3 & 7 & -2\sqrt{0.5} \\ -2\sqrt{0.5} & -2\sqrt{0.5} & 10 \end{bmatrix}$$

若把坐标轴旋转到主轴 $u$ 、 $v$ 、 $w$ 上, 则其电容率表现为对角线矩阵的形式:

$$(\epsilon) = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

试求主轴和主轴相对电容率 $\epsilon_{xx}/\epsilon_0$ 、 $\epsilon_{yy}/\epsilon_0$ 和 $\epsilon_{zz}/\epsilon_0$ 的值。

提示：按照定义，沿主轴方向标量方程 $D_x = \epsilon_{xx} E_x$ 成立。通常，若 $\mathbf{D}$ 沿主轴方向，则

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \frac{\epsilon_0}{4} \begin{bmatrix} 7 & 3 & -2\sqrt{0.5} \\ 3 & 7 & -2\sqrt{0.5} \\ -2\sqrt{0.5} & -2\sqrt{0.5} & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \\ = \lambda \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

或者用语言来表达：当 $\mathbf{D}$ 沿主轴方向时， $\mathbf{D}$ 等于 $\mathbf{E}$ 乘以标量常数 $\lambda$ 。

上述方程由三个齐次方程组成，其中的第一个为

$$\left(\frac{7\epsilon_0}{4} - \lambda\right) E_x + \frac{3\epsilon_0}{4} E_y - \frac{2\epsilon_0\sqrt{0.5}}{4} E_z = 0$$

证明：它有解，必须使下面的行列式变为零：

$$\begin{vmatrix} 7 - 4\lambda/\epsilon_0 & 3 & -2\sqrt{0.5} \\ 3 & 7 - 4\lambda/\epsilon_0 & -2\sqrt{0.5} \\ -2\sqrt{0.5} & -2\sqrt{0.5} & 10 - 4\lambda/\epsilon_0 \end{vmatrix} = 0$$

这个三次方程式得 $\lambda$ 的三个根，可以把它们表示为 $\epsilon_{xx}$ 、 $\epsilon_{yy}$ 、 $\epsilon_{zz}$ 。对于任一个根（比如说 $\epsilon_{xx}$ ）来说，沿着相应主轴方向的矢量的各分量，正比于上述行列式的余因子。这类问题叫做矩阵的本征值问题。各个 $\lambda$ 的值叫做本征值。

答案： $\epsilon_{xx} = 3\epsilon_0$ ， $\epsilon_{yy} = 2\epsilon_0$ ， $\epsilon_{zz} = \epsilon_0$ 。

沿主轴方向的单位矢量为

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_x &= 0.5\mathbf{a}_x + 0.5\mathbf{a}_y - \sqrt{0.5}\mathbf{a}_z \\ \mathbf{a}_y &= 0.5\mathbf{a}_x + 0.5\mathbf{a}_y + \sqrt{0.5}\mathbf{a}_z \\ \mathbf{a}_z &= \sqrt{0.5}\mathbf{a}_x - \sqrt{0.5}\mathbf{a}_y \end{aligned}$$

2.4 在电导率为  $\sigma$  和电容率为  $\epsilon$  的媒质内部, 在  $t = 0$  瞬间, 自由电荷密度为  $\rho_0(x, y, z)$ 。试证明该电荷按下式衰减:

$$\rho = \rho_0 e^{-t/\tau} \quad \tau = \epsilon/\sigma$$

计算铜的弛豫时间  $\tau$  (铜的  $\sigma = 5.8 \times 10^7$  姆欧/米,  $\epsilon = \epsilon_0$ )。并求海水中的  $\tau$  (海水的  $\sigma = 4$  姆欧/米,  $\epsilon = 80\epsilon_0$ )。若弛豫时间比所加的时谐场的周期短, 则自由电荷的积累可以忽略, 且  $\nabla \cdot \mathbf{D}$  可以认为是零。在实际的铜和海水中上限频率是什么? 即在什么频率下  $\tau$  等于时谐场的周期?

提示: 应用连续性方程、欧姆定律和  $\mathbf{D}$  的散度方程。

2.5 试证明一种物质的弛豫时间比时谐场的周期小得多时, 位移电流和传导电流相比可以忽略。

2.6 有半径为  $a$  和  $b$  的两个同心球, 外球保持电位为  $V$ , 而内球保持在零电位。解球坐标下的拉普拉斯方程, 并求出在内外两球之间的电位和电场。(取  $b > a$ )。

2.7 解拉普拉斯方程, 并求出两个半径为  $a$  和  $b$  的同轴圆柱体之间的电位和电场。设中心柱体具有电位  $V$ , 而外圆柱体为零电位。(取  $b > a$ )。

2.8 由(2.18)式推导出(2.45)式。

2.9 推导(2.47)式。

2.10 将标量亥姆霍兹方程  $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$  用柱坐标表示, 设  $\psi = f(\varphi)g(r)h(z)$ , 试求  $f$ 、 $g$  和  $h$  所满足的微分方程。

2.11 在需要考虑物质极化的  $\mathcal{P}$  和  $\mathcal{M}$  的情况下, 证明  $\epsilon$  和  $\mathcal{H}$  满足的波动方程为

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathcal{H} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} &= -\nabla \nabla \cdot \mathcal{M} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial t^2} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathcal{P} - \nabla \times \mathcal{J} \\ \nabla^2 \mathcal{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} &= \mu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$+\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathcal{M} + \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathcal{P} - \frac{\nabla \nabla \cdot \mathcal{P}}{\epsilon_0}$$

应当指出，由于  $\nabla \cdot \mathcal{B} = 0$ ，故  $\nabla \cdot \mathcal{H} = -\nabla \cdot \mathcal{M}$  和  $\nabla \cdot \mathcal{D} = \rho$ ，因而， $\nabla \cdot \epsilon_0 \mathcal{E} = \rho - \nabla \cdot \mathcal{P}$ 。由考查上述方程的场源项，来证明  $\partial \mathcal{P} / \partial t$  是类似于传导电流  $\mathcal{J}$  的极化电流。

2.12 推导(2.62)式。

2.13 在半径为  $a$  和  $b$  ( $b > a$ ) 的两个理想导电同轴圆柱体之间的电磁场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r E_0 r^{-1} e^{-jk_0 z} \quad \mathbf{H} = \mathbf{a}_\phi Y_0 E_0 r^{-1} e^{-jk_0 z}$$

式中， $k_0 = \omega(\mu_0 \epsilon_0)^{1/2}$ ， $Y_0 = (\epsilon_0 / \mu_0)^{1/2}$ 。试求两柱体之间的电位差和在内外柱体上的总电流。将功率用电压和电流表示，并证明它等于由复数坡印廷矢量在此同轴线横截面上积分所得的功率表示式。证明此同轴线的特性阻抗为  $V/I = (Z_0 / 2\pi) \ln(b/a) = 60 \ln(b/a)$ ，式中， $V$  是电压，而  $I$  是一个柱体上的总电流。

2.14 在半径  $r_0$  远大于趋肤深度  $\delta_s$  的圆导线表面沿轴线方向加以均匀电场  $E$ 。用表面阻抗的概念求线上的总电流。并证明线的交流阻抗与其直流电阻之比为

$$\frac{Z_{sa}}{R_{dc}} = \frac{r_0 \sigma}{2} Z_{sa}$$

当导线为铜， $f = 10^6$  赫， $\sigma = 5.8 \times 10^7$  姆欧/米， $r_0 = 0.1$  厘米， $\mu = \mu_0$  时，算出此比值。

2.15 在  $Z \geq 0$  的半空间内充满电容率为  $\epsilon_0$ 、导磁率为  $\mu$  ( $\mu \neq \mu_0$ ) 的物质。一个平行极化的平面  $TEM$  波以角度  $\theta_1$  入射，如图 2.14 所示。试求电场的反射和传输系数。使反射系数变为零的布鲁斯特角存在吗？

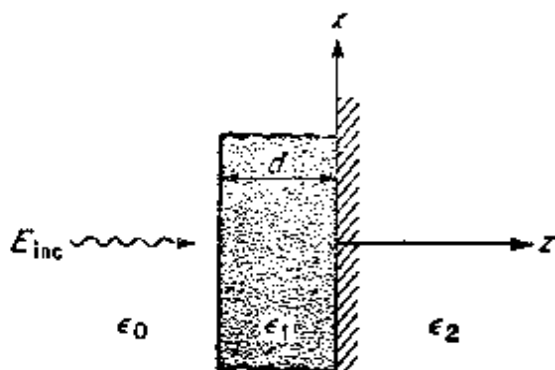
2.16 重复题 2.15 的条件，但改作垂直极化的入射波。布鲁斯特角存在吗？如果存在，求其表示式。

2.17 在  $Z \geq 0$  的半空间内，充满导磁率为  $\mu$  和电容率为  $\epsilon$  的物质。当一个平面波垂直入射到该物质上时，证明反射和传输系数为

$$\Gamma = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} \quad T = 1 + \Gamma = \frac{2Z}{Z + Z_0}$$

式中,  $Z = (\mu/\epsilon)^{\frac{1}{2}}$ ,  $Z_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{\frac{1}{2}}$ 。只取具有  $x$  分量的电场。

2.18 在  $Z \geq 0$  的半空间内, 充满电容率为  $\epsilon_2$  和  $\mu = \mu_0$  的物质。在前方置电容率为  $\epsilon_1$  的另一薄板。一个平面波由其左边垂直入射, 如图所示。证明若  $\epsilon_1 = (\epsilon_2 \epsilon_0)^{\frac{1}{2}}$  和薄板的厚度  $d = \frac{1}{4} \lambda, (\epsilon_0/\epsilon_1)^{\frac{1}{2}}$



习题 2.18

时, 则在第一个分界面上反射系数为零。其电场可以假定为只具有  $x$  分量。这个匹配层称为四分之一波长变换器 (实际上就是一个阻抗变换器)。这种由光学透镜原理产生的匹配技术常用来减少反射, 并把它叫做透镜涂敷或镀膜透镜。

2.19 用矢量  $\mathbf{A}$  表示位于原点的一个小电流元  $\Delta Z I_0 \mathbf{a}_z$ , 证明它的辐射电场和磁场为

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{I_0 \Delta z}{4\pi} \left( -\frac{jk_0}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \mathbf{a}_\phi \sin \theta e^{-jk_0 r} \\ \mathbf{E} &= -\frac{I_0 \Delta z}{2\pi} \frac{jZ_0}{k_0} \left( \frac{jk_0}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) \mathbf{a}_r \cos \theta e^{-jk_0 r} \\ &\quad - \frac{I_0 \Delta z}{4\pi} \frac{jZ_0}{k_0} \left( \frac{-k_0^2}{r} + \frac{jk_0}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) \mathbf{a}_\theta \sin \theta e^{-jk_0 r} \end{aligned}$$

提示: 利用(2.122)式和(2.121)式, 并将  $\mathbf{A}$  表示为球坐标系下  $r, \theta, \varphi$  的分量。注意  $\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_r \cos \theta - \mathbf{a}_\theta \sin \theta$ 。

2.20 介质的特性可用单位体积的偶极子的极化强度  $\mathbf{P}$  表征。设  $\rho = \mathbf{J} = 0$ , 且需要明显地考虑  $\mathbf{P}$ , 证明若矢量  $\mathbf{A}$  按  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  来定义, 则  $\mathbf{A}$  是

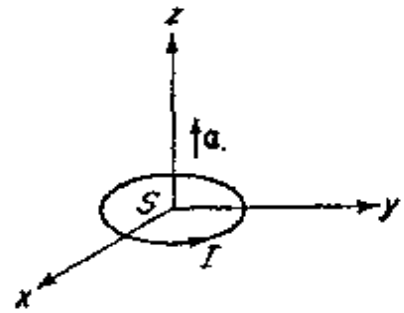
$$\nabla^2 \mathbf{A} + k_0^2 \mathbf{A} = -j\omega\mu \mathbf{P}$$

的解，且其电磁场为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = \frac{\nabla \nabla \cdot \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A}}{j\omega\mu_0\epsilon_0}$$

注意利用洛仑兹条件。这样，一个电偶极子的  $\mathbf{P}$  就等效于一个电流元  $j\omega\mathbf{P}$ ，或者换句话说，一个电流元  $\mathbf{J}$  可以被认为是一个电偶极子的  $\mathbf{P} = \mathbf{J}/j\omega$ 。

2.21 用一个小电流环做成一个磁偶极子  $\mathbf{M} = I\mathbf{S}\mathbf{a}$ ，其中， $I$  为电流， $S$  为环的面积， $\mathbf{a}$  为环平面的法线矢量，它与电流行进的方向成右手螺旋关系。这样一个线度远小于波长的电流环的辐射场，可以由类似于在习题2.20中的位论来得出，这里，把电流环作为磁偶极子  $\mathbf{M}$  来处理。这样，在麦克斯韦方程中用  $\mu_0\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}$  代替  $\mathbf{B}$ ，并把  $\mathbf{M}$  当作一个源项。因为  $\rho$  为零，故  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ ，这就使  $\mathbf{D}$  可以表示为  $\mathbf{D} = -\nabla \times \mathbf{A}_m$ ，式中， $\mathbf{A}_m$  是磁矢位。利用书中对  $\mathbf{A}$  所作的相同分析，同样可证明下列关系式成立：



习题 2.21

$$\nabla^2 \mathbf{A}_m + k_0^2 \mathbf{A}_m = -j\omega\mu_0\epsilon_0 \mathbf{M}$$

$$\mathbf{D} = -\nabla \times \mathbf{A}_m$$

$$\mathbf{H} = \frac{k_0^2 \mathbf{A}_m + \nabla \nabla \cdot \mathbf{A}_m}{j\omega\mu\epsilon_0}$$

因此，不难由位于原点指向  $Z$  的磁偶极子

$$\mathbf{A}_m = \frac{j\omega\mu_0\epsilon_0 \mathbf{M}}{4\pi r} e^{-jk_0 r}$$

求出它的辐射场。

2.22 设在理想导电平面前有一个任意电流元  $\mathbf{J}_1$ 。这个电流元辐射的电场  $\mathbf{E}_1$  在导电平面上的切向分量为零。试应用洛仑兹互易定理，证明平行于导电面且与导电面距离无限小的电流  $\mathbf{J}_2$  不辐射。



## 参 考 文 献

1. Fano, R.M., L.J.Chu, and R.B.Adler: *"Electromagnetic Fields, Energy, and Forces"*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1960.
2. Kraus, J.D.: *"Electromagnetics"*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1953.
3. Plonsey, R., and R.E.Collin: *"Principles and Application of Electromagnetic Fields,"* McGraw-Hill Book Company, New York, 1961.
4. Reitz, J.R., and F.J.Milford: *"Foundations of Electromagnetic Theory,"* Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1960.
5. Stratton, J.A.: *"Electromagnetic Theory,"* McGraw-Hill Book Company, New York, 1941.

## 第3章 传输线和波导

在微波频率下，常常使用传输线和波导，把电磁能量由系统的一点输送到另一点，而不发生能量的辐射。对传输线和波导有两个基本要求，即：在一个宽波段内的单模传输和低衰减。满足这两个基本要求的传输线和波导是很多的，其大多数的结构可分为下列三类：（1）传输线，它传播的主模为横电磁波；（2）闭合的柱形导电管；（3）开放结构，它传播一种表面波模。详细地研究现有的各种波导结构是不可能的。我们将只限于研究传输线和空心柱形波导的基本理论，特别是关于通用的同轴传输线和矩形及圆波导的基本理论，而对表面波波导只做初步介绍。需要分析其他一些特殊结构时，推广和修正这个基本理论是不困难的。一经熟悉这些基本理论，在阅读各种类型波导的有关书刊时，就不会感到困难。

传输线由两个或两个以上的平行导体组成，用来导行横电磁（*TEM*）波。传输线的一般形式是双导线、屏蔽双导线和同轴线。最近几年来，特别引人注意的另一种形式的传输线是微波带状线，它由介质片隔开的薄导体带和较宽的接地板组成，或者把介质片置于两接地板之间形成屏蔽结构。使用带状线的两个主要优点是减少尺寸和重量；以及便于采用印刷电路技术，做出带状线和有关的元件，比如弯头、接头、滤波器等。带状线及其有关元件的进一步讨论，可参考一本专辑\*。

波导的通用形式是矩形波导和圆波导，本章将详细地对它们进行分析。同时，对具有某些特殊优点的若干其他结构也作了介绍。但是，这些特殊结构中的多数，其理论与通常的矩形和圆形波导理

---

\* *Special Issue on Microwave Strip Circuits, IRE Trans., Vol. MTT-3, March, 1955.*

论的差别不大，故不作详细讨论\*。

### 3.1 电磁波解的分类

本章所要研究的传输线和波导具有轴向均匀性。它们的横截面形状和电特性不沿轴线变化，通常，这个轴选为 $Z$ 轴。由于不考虑场源，故电场和磁场是齐次的矢量亥姆霍兹方程，即

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_0^2 \mathbf{E} = 0 \quad \nabla^2 \mathbf{H} + k_0^2 \mathbf{H} = 0$$

的解。待求的这类解相当于沿 $Z$ 方向传播的波。因为此时亥姆霍兹方程是可以分离变量的，故可能得到 $f(z)g(x,y)$ 形式的解，其中， $f$ 只是 $Z$ 的函数， $g$ 只是 $x$ 和 $y$ 或者其他相当的横向坐标的函数。在波动方程中对 $z$ 的二阶导数类似于对时间的二阶导数。与对时间的依赖关系 $e^{i\omega t}$ 相似，对 $z$ 的依赖关系可取为 $e^{\pm i\beta z}$ 。这个假定将导致 $\cos(\omega t \pm \beta z)$ 和 $\sin(\omega t \pm \beta z)$ 形式的波的解，它适合于描述沿 $Z$ 轴传播的波。向正 $Z$ 方向传播的波用 $e^{-i\beta z}$ 来表示，而 $e^{i\beta z}$ 相

---

\* 为了解其中的某些结构，可参看下列文献。要得到更详细的书目，应参看哈维的书。

S.B.Cohn, *Properties of Ridged Waveguides*, *Proc.IRE Vol.35*, pp. 783—788, August, 1947.

G.Goubau and J.R.Christian, *Some Aspects of Beam Waveguides for Long Distance Transmission at Optical Frequencies*, *IEEE Trans.*, Vol.MTT-12, pp.212—220, March, 1964.

A.F.Harvey, "Microwave Engineering," chaps.1, 9, 10, and 22, Academic Press Inc., New York, 1963.

S.Hopfer, *Design of Ridged Waveguides*, *IRE Trans.*, Vol.MTT-3, pp.20—29, October, 1955.

M.Sugi and T.Nakahara, *O-guide and X-guide, An Advanced Surface Wave Transmission Concept*, *IRE Trans.*, Vol.MTT-7, pp.366—369, July, 1959.

F.J.Tischer, *Properties of the H-guide at Microwave and Millimetre Wave Regions*, *Proc.IEE*, Vol.106B, suppl.13, 1959.

F.J.Tischer, *The Groove Guide, A Low Loss Waveguide for Millimetre Waves*, *IEEE Trans.*, Vol.MTT-11, pp.231—296, September, 1963.

当于向负  $Z$  方向传播的波。根据所假定的与  $Z$  的关系为  $e^{-j\beta z}$ ，故  $\nabla$  标符成为  $\nabla = \nabla_t + \nabla_z = \nabla_t - j\beta a_z$ （因为  $\nabla_z = a_z \partial / \partial z$ ）。应当指出，在直角坐标下， $\nabla_t$  是横向部分，且等于  $a_x \partial / \partial x + a_y \partial / \partial y$ 。传播相位常数  $\beta$  取决于波导的结构。

若把所有场分解为横向分量和轴向分量，并把  $Z$  的关系分离出来，可以大大简化麦克斯韦方程。于是，可使（略去时间因子  $e^{j\omega t}$ ）

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z) &= \mathbf{E}_t(x, y, z) + \mathbf{E}_z(x, y, z) \\ &= \mathbf{e}(x, y)e^{-j\beta z} + \mathbf{e}_z(x, y)e^{-j\beta z} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(x, y, z) &= \mathbf{H}_t(x, y, z) + \mathbf{H}_z(x, y, z) \\ &= \mathbf{h}(x, y)e^{-j\beta z} + \mathbf{h}_z(x, y)e^{-j\beta z} \end{aligned} \quad (3.2)$$

式中， $\mathbf{E}_t$ 、 $\mathbf{H}_t$  是横向（ $x$  和  $y$ ）分量， $\mathbf{E}_z$ 、 $\mathbf{H}_z$  是轴向分量。还应当指出， $\mathbf{e}(x, y)$ 、 $\mathbf{h}(x, y)$  只是横向坐标的横向矢量函数，而  $\mathbf{e}_z(x, y)$ 、 $\mathbf{h}_z(x, y)$  都是横向坐标的轴向矢量函数。

可以把  $\nabla \times \mathbf{E}$  展开为

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= (\nabla_t - j\beta a_z) \times (\mathbf{e} + \mathbf{e}_z)e^{-j\beta z} \\ &= -j\omega\mu_0(\mathbf{h} + \mathbf{h}_z)e^{-j\beta z} \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \nabla_t \times \mathbf{e} - j\beta a_z \times \mathbf{e} + \nabla_t \times \mathbf{e}_z - j\beta a_z \times \mathbf{e}_z \\ = -j\omega\mu_0 \mathbf{h} - j\omega\mu_0 \mathbf{h}_z \end{aligned}$$

其中， $a_z \times \mathbf{e}_z = 0$ ，且  $\nabla_t \times \mathbf{e}_z = \nabla_t \times a_z e_z = -a_z \times \nabla_t e_z$ 。也要注意由于  $\nabla_t \times \mathbf{e}$  包含  $a_x \times a_y$ 、 $a_x \times a_x$ 、 $a_y \times a_x$  和  $a_y \times a_y$ ，而  $a_z \times \mathbf{e}$  和  $\nabla_t \times \mathbf{e}_z$  只有横向分量，故  $\nabla_t \times \mathbf{e}$  只沿  $z$  轴方向。因此，当使上述方程的横向和轴向分量都相等时，就得到

$$\nabla_t \times \mathbf{e} = -j\omega\mu_0 \mathbf{h}_z \quad (3.3a)$$

$$\begin{aligned} \nabla_t \times \mathbf{e}_z - j\beta a_z \times \mathbf{e} &= -a_z \times \nabla_t e_z - j\beta a_z \times \mathbf{e} \\ &= -j\omega\mu_0 \mathbf{h} \end{aligned} \quad (3.3b)$$

同理，对  $\nabla \times \mathbf{H}$  可得

$$\nabla_t \times \mathbf{h} = j\omega\epsilon_0 \mathbf{e}_z \quad (3.3c)$$

$$a_z \times \nabla_t h_z + j\beta a_z \times \mathbf{h} = -j\omega\epsilon_0 \mathbf{e} \quad (3.3d)$$

于是，散度方程  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  便成为

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot \mu_0 \mathbf{H} = (\nabla_t - j\beta \mathbf{a}_z) \cdot (\mathbf{h} + \mathbf{h}_z) \mu_0 e^{-j\beta z} \\ &= (\nabla_t \cdot \mathbf{h} - j\beta \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{h}_z) \mu_0 e^{-j\beta z} = 0\end{aligned}$$

或

$$\nabla_t \cdot \mathbf{h} = j\beta h_z \quad (3.3e)$$

同理，对  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$  可得

$$\nabla_t \cdot \mathbf{e} = j\beta e_z \quad (3.3f)$$

这个麦克斯韦方程的简化形式，对于明确地表达波导系统的解，将证明是非常有用的。

对许多实用的波导来说，原来并不要求所有场分量都存在，才能满足全部边界条件。更具体地说，对于传输线，有意义的解是只具有横向分量（即  $E_z = H_z = 0$ ）的横电磁波；而对于波导的解，只可能是  $E_z = 0$  或  $H_z = 0$ 。由于这些场的解普遍出现，所以，把它们作如下的分类是很有意义的：

1. 横电磁 (*TEM*) 波。对于 *TEM* 波， $E_z = H_z = 0$ ，其电场可以由标量函数  $\Phi(x, y)$  的横向梯度求出，它只是横向坐标的函数，且为二维拉普拉斯方程的解。

2. 横电 (*TE*) 或 *H* 模\*。这类模的解为  $E_z = 0$ ，但  $H_z \neq 0$ ，所有的场分量可由磁场的轴向分量  $H_z$  得出。

3. 横磁 (*TM*) 或 *E* 模。这类模的解为  $H_z = 0$ ，但  $E_z \neq 0$ ，其余的场分量可由  $E_z$  得出。

下面将指出，有时，一个 *TE* 或 *TM* 模其自身将不满足全部边界条件。但是，在此情况下，可以用 *TE* 和 *TM* 模的线性组合来满足边界条件，因为这样的线性组合总是能提供一个完备的和普遍的解。虽然可能还有其他类型波的解，但是，上述三类解在实际中是最有用的，也是使用得最普遍的。

分别地用  $E_z$  和  $H_z$  都等于零、 $E_z$  或  $H_z$  等于零代入麦克斯韦方程 (3.3) 式中，就可以得到 *TEM*、*TE* 或 *TM* 模的解。

\* 模有时称波或波型——译注

## TEM波

因为TEM波的 $e_z = h_z = 0$ ，所以(3.3)式简化为

$$\nabla_t \times \mathbf{e} = 0 \quad (3.4a)$$

$$\beta \mathbf{a}_z \times \mathbf{e} = \omega \mu_0 \mathbf{h} \quad (3.4b)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{h} = 0 \quad (3.4c)$$

$$\beta \mathbf{a}_z \times \mathbf{h} = -\omega \epsilon_0 \mathbf{e} \quad (3.4d)$$

$$\nabla_t \cdot \mathbf{h} = 0 \quad (3.4e)$$

$$\nabla_t \cdot \mathbf{e} = 0 \quad (3.4f)$$

$\mathbf{e}$ 的横向旋度为零，意味着 $\mathbf{e}$ 在 $xy$ 平面上沿任一闭合路径的线积分为零。由于没有轴向磁通穿过这个闭合围线，故这是必然的结果。虽然当不存在体电流时 $\nabla_t \times \mathbf{h} = 0$ ，但是，传输线的导体上可以存在轴向电流，故 $\mathbf{h}$ 的线积分不为零。这一点将在后面分析传输线时再研究。(3.4a)式正是使 $\mathbf{e}$ 能表示为标位梯度的条件。因而，若令

$$\mathbf{e}(x, y) = -\nabla_t \Phi(x, y) \quad (3.5)$$

则利用(3.4f)式就可证明 $\Phi$ 是二维拉普拉斯方程

$$\nabla_t^2 \Phi(x, y) = 0 \quad (3.6)$$

的解。于是，其电场可表示为

$$\mathbf{E}_t(x, y, z) = -\nabla_t \Phi(x, y) e^{-j\beta z}$$

而此电场也必须满足亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 \mathbf{E}_t + k_0^2 \mathbf{E}_t = 0$$

因为 $\nabla = \nabla_t - j\beta \mathbf{a}_z$ ， $\nabla^2 = \nabla_t^2 - \beta^2$ ，即对 $z$ 求二阶导数得到因子 $-\beta^2$ ，所以上式化为

$$\nabla_t^2 \mathbf{E}_t + (k_0^2 - \beta^2) \mathbf{E}_t = 0$$

或

$$\nabla_t (\nabla_t^2 \Phi + (k_0^2 - \beta^2) \Phi) = 0$$

这就证明对TEM波来说， $\beta = \pm k_0$ 。根据第二章中所讨论过的解，这是予期的一个结果。TEM波的场可由方程 $\nabla \times \mathbf{E}$ ，即由(3.46)式导出，于是得

$$\frac{\omega\mu_0}{k_0}\mathbf{h}=\mathbf{a}_z\times\mathbf{e}=Z_0\mathbf{h} \quad (3.7)$$

总之，对于TEM波，首先求标位 $\Phi$ ，它是

$$\nabla_t^2\Phi(x,y)=0 \quad (3.8a)$$

的解，并且需要满足适当的边界条件。然后得出场量

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_t=\mathbf{e}e^{\mp jk_0z}=-\nabla_t\Phi e^{\mp jk_0z} \quad (3.8b)$$

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}_t=\pm\mathbf{h}e^{\mp jk_0z}=\pm Y_0\mathbf{a}_z\times\mathbf{e}e^{\mp jk_0z} \quad (3.8c)$$

式中， $k_0=\omega(\mu_0\epsilon_0)^{\frac{1}{2}}$ ， $Y_0=(\epsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}}$ ， $e^{-jk_0z}$ 表示向+Z方向传播的波，而 $e^{jk_0z}$ 相当于向-Z方向传播的波。对于TEM波， $Z_0$ 即为波阻抗。而由(3.8c)式还可以看出，对向+Z方向传播的波，而对

$$\frac{E_x}{H_x}=-\frac{E_y}{H_y}=Z_0 \quad (3.9a)$$

于向-Z方向传播的波，

$$\frac{E_x}{H_x}=-\frac{E_y}{H_y}=-Z_0 \quad (3.9b)$$

## TE波

对于横电(TE)波， $h_z$ 起位函数的作用，可以由它得出其余的场分量。磁场 $\mathbf{H}$ 是

$$\nabla^2\mathbf{H}+k_0^2\mathbf{H}=0$$

的解。把上述方程分为横向和轴向两部分，并用 $\nabla_t^2-\beta^2$ 代替 $\nabla^2$ ，得

$$\nabla_t^2 h_z(x,y)+k_c^2 h_z(x,y)=0 \quad (3.10a)$$

$$\nabla_t^2 \mathbf{h}+k_c^2 \mathbf{h}=0 \quad (3.10b)$$

式中， $k_c^2=k_0^2-\beta^2$ ，并假定了随 $z$ 按 $e^{\mp j\beta z}$ 变化。与TEM波的情况不同，对于TE波， $\beta^2$ 不等于 $k_0^2$ ，而改由(3.10a)式中的参数 $k_c^2$ 决定 $\beta$ 。当在适当的边界条件下解此方程时，将发现本征值 $k_c^2$ 是波导结构的函数。

用 $\mathbf{e}_z=0$ 代入，麦克斯韦方程(3.3)式便成为

$$\nabla_t \times \mathbf{e} = -j\omega\mu_0 \mathbf{h} \quad (3.11a)$$

$$\beta \mathbf{a}_z \times \mathbf{e} = \omega\mu_0 \mathbf{h} \quad (3.11b)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{h} = 0 \quad (3.11c)$$

$$\mathbf{a}_z \times \nabla_t h_z + j\beta \mathbf{a}_z \times \mathbf{h} = -j\omega\epsilon_0 \mathbf{e} \quad (3.11d)$$

$$\nabla_t \cdot \mathbf{h} = j\beta h_z \quad (3.11e)$$

$$\nabla_t \cdot \mathbf{e} = 0 \quad (3.11f)$$

对(3.11c)式取横向旋度得

$$\nabla_t \times (\nabla_t \times \mathbf{h}) = \nabla_t \nabla_t \cdot \mathbf{h} - \nabla_t^2 \mathbf{h} = 0$$

对此式用  $j\beta h_z$  代替  $\nabla_t \cdot \mathbf{h}$  (根据(3.11e)式), 用  $-k_c^2 \mathbf{h}$  代替  $\nabla_t^2 \mathbf{h}$  (根据(3.11b)式), 就得到用  $h_z$  来表示的  $\mathbf{h}$  的解, 即

$$\mathbf{h} = -\frac{j\beta}{k_c^2} \nabla_t h_z \quad (3.12)$$

为了用  $\mathbf{h}$  来表示  $\mathbf{e}$ , 取(3.11b)式与  $\mathbf{a}_z$  的矢积, 得到

$$\begin{aligned} \beta \mathbf{a}_z \times (\mathbf{a}_z \times \mathbf{e}) &= \beta((\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{e})\mathbf{a}_z - (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z)\mathbf{e}) \\ &= -\beta \mathbf{e} = \omega\mu_0 \mathbf{a}_z \times \mathbf{h} \end{aligned}$$

或

$$\mathbf{e} = -\frac{\omega\mu_0}{\beta} \mathbf{a}_z \times \mathbf{h} = -\frac{k_0}{\beta} Z_0 \mathbf{a}_z \times \mathbf{h} \quad (3.13)$$

因子  $k_0 Z_0 / \beta$  具有阻抗的量纲, 称为  $TE$  (或  $H$ ) 模的波阻抗, 用符号  $Z_k$  表示, 所以

$$Z_k = \frac{k_0}{\beta} Z_0 \quad (3.14)$$

于是, 对于随  $Z$  按  $e^{-j\beta z}$  变化的波来说, (3.13)式的分量形式为

$$\frac{e_x}{h_y} = -\frac{e_y}{h_x} = Z_k \quad (3.15)$$

在(3.11)式这组方程中, 其余的方程不产生任何新的结果, 所以可以把求解  $TE$  波的过程归纳如下: 首先求出  $h_z$  的解, 这里,

$$\nabla_t^2 h_z + k_c^2 h_z = 0 \quad (3.16a)$$

然后求出



$$\mathbf{h} = -\frac{j\beta}{k_z^2} \nabla_z h_z \quad (3.16b)$$

和

$$\mathbf{e} = -Z_1 \mathbf{a}_z \times \mathbf{h} \quad (3.16c)$$

式中,

$$\beta = (k_0^2 - k_z^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{和} \quad Z_1 = \frac{k_0 Z_0}{\beta}$$

最后得出场的完整表示式为

$$\mathbf{H} = \pm \mathbf{h} e^{\mp i\beta z} + \mathbf{h}_r e^{\mp i\beta z} \quad (3.16d)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_r = \mathbf{e} e^{\mp i\beta z} \quad (3.16e)$$

应当指出, 由于 $\mathbf{h}$ 由(3.16b)式确定, 而 $\beta$ 的符号不管向 $+Z$ 方向传播还是向 $-Z$ 方向传播均为正, 故对于向 $-Z$ 方向传播的波来说, (3.16d)式 $\mathbf{h}$ 前面的符号要反过来。由于 $\mathbf{e}$ 有两次涉及因子 $\beta$  (在 $\mathbf{h}$ 的表示式中有一次, 在 $Z_1$ 表示式中又有一次), 所以 $\mathbf{e}$ 前面的符号不变。如果发生能流反方向流动的情况,  $\mathbf{e}$ 或 $\mathbf{h}$ 中只可能有一个改变符号。也就是向 $-Z$ 方向传播波的解, 可以取 $\mathbf{E} = -\mathbf{e} e^{i\beta z}$ ,  $\mathbf{H} = (\mathbf{h} - \mathbf{h}_r) e^{-i\beta z}$ , 或者取 $\mathbf{E} = \mathbf{e} e^{i\beta z}$ ,  $\mathbf{H} = (-\mathbf{h} + \mathbf{h}_r) e^{i\beta z}$ , 这两种取法的 $\mathbf{E}$ (或 $\mathbf{H}$ )差一个负号。本书中, 我们取后者为标准。

### TM波

$TM$ (或 $E$ )波的 $h_z = 0$ , 但其轴向电场 $e_z$ 不为零。就电场和磁场互相交换而言,  $TM$ 模可以认为是与 $TE$ 模对偶的。由于待求的方程式的推导与 $TE$ 模是对应的, 因而只给出最后的结果。

首先, 求解 $e_z$ 。这里,

$$\nabla_z^2 e_z + k_z^2 e_z = 0 \quad (3.17a)$$

根据给定的边界条件, 就可确定本征值 $k_z^2$ 。然后求出横向场为

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{e} e^{\mp i\beta z} = -\frac{j\beta}{k_z^2} \nabla_z e_z e^{\mp i\beta z} \quad (3.17b)$$

$$\mathbf{H}_r = \pm \mathbf{h} e^{\mp i\beta z} = \pm Y_1 \mathbf{a}_z \times \mathbf{e} e^{\mp i\beta z} \quad (3.17c)$$

式中,  $\beta = (k_0^2 - k_z^2)^{\frac{1}{2}}$ , 而  $TM$  波的波导纳为

$$Y_z = Z_z^{-1} = \frac{k_0}{\beta} Y_0 \quad (3.17d)$$

$TE$  和  $TM$  波的对偶性表现在以下关系式中:

$$Z_z Z_0 = Z_0^2 \quad (3.18)$$

在两类波具有同样的  $\beta$  时, 这个关系式成立。并且, 由 (3.14) 式和 (3.17d) 式可以把它推导出来。于是, 电场的完整表示式便为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \mathbf{e} e^{+i\beta z} \pm \mathbf{e}_z e^{\mp i\beta z} \\ &= \left( -\frac{j\beta}{k_z^2} \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{e}_z \pm \mathbf{e}_z \right) e^{\mp i\beta z} \end{aligned} \quad (3.19)$$

为了方便, 保持  $\mathbf{e}$  的符号不论向  $+Z$  或  $-Z$  方向传播时都相同。因为  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , 即  $\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{E}_+ + \partial E_z / \partial z = 0$ , 所以要求当波向  $-Z$  方向传播时, 电场的  $Z$  分量为  $-\mathbf{e}_z e^{i\beta z}$ , 这是因为  $\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{E}_+$  的符号不随  $\beta$  前面的符号的改变而改变, 而  $\partial E_z / \partial z$  的符号要随  $\beta$  前面的符号的改变而改变。随着传播方向的改变, 横向磁场也必须改变符号, 以便使能流的方向得到改变。为便于参考, 把符号约定归纳如下。场的横向变化用函数  $\mathbf{e}$ 、 $\mathbf{h}$ 、 $\mathbf{e}_z$  和  $\mathbf{h}_z$  表示, 而与传播方向无关。于是, 沿  $+Z$  方向传播的波为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^+ = (\mathbf{e} + \mathbf{e}_z) e^{-i\beta z} \quad (3.20a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^+ = (\mathbf{h} + \mathbf{h}_z) e^{-i\beta z} \quad (3.20b)$$

当沿  $-Z$  方向传播时, 其场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^- = (\mathbf{e} - \mathbf{e}_z) e^{i\beta z} \quad (3.21a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^- = (-\mathbf{h} + \mathbf{h}_z) e^{i\beta z} \quad (3.21b)$$

当需要表示传播方向时, 将用附加标记 (+) 或 (-)。前面得到的  $TEM$ 、 $TE$  和  $TM$  模场的表达式, 对电常数为  $\epsilon$ 、 $\mu$  的媒质也是正确的, 只要在这些表达式中用  $\epsilon$ 、 $\mu$  代替  $\epsilon_0$ 、 $\mu_0$  就行了。有限电导率的情况也可以考虑用  $\epsilon$  的复数, 即用  $\epsilon - j\sigma/\omega$  代替  $\epsilon$ 。

在这些解中所引入的波阻抗, 在实际中是极其有用的概念。波阻抗总是取横向电场与横向磁场之比。其符号总是这样规定, 即如

果坐标记号依次为  $i, j, k$ ，且波沿坐标  $k$  的正方向传播，则比值  $E_i/H_j = (Z\omega)_k$  就是正的。这里  $(Z\omega)_k$  是指把  $k$  轴作为传播方向的波阻抗。若  $i, j, k$  的顺序逆转，则  $E_i/H_j$  为负。波阻抗概念的引用，基于功率可以只用横向场来表示这一事实。例如，对于  $TE$  波，把被积函数展开时，得

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_s \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{a}_z dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_s \mathbf{e} \times \mathbf{h}^* \cdot \mathbf{a}_z dx dy \\
 &= -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_s Z_h (\mathbf{a}_z \times \mathbf{h}) \times \mathbf{h}^* \cdot \mathbf{a}_z dx dy \\
 &= \frac{Z_h}{2} \int_s \mathbf{h} \cdot \mathbf{h}^* dx dy \\
 &= \frac{Y_h}{2} \int_s \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^* dx dy
 \end{aligned}$$

可见，波阻抗使被传送的功率可以只用横向场之一来表达。波阻抗的另一个性质（它将在后面研究），为常用的多导体传输线和波导之间的类比提供了一个基础。

## 3.2 传输线(场的分析)

### 无耗传输线

传输线由两个或两个以上平行导体组成。典型的例子是双导线、屏蔽双导线和同轴线，其横截面如图3.1所示。我们假定导体是理想的，导体周围的媒质为空气，它的  $\epsilon \approx \epsilon_0$ 、 $\mu \approx \mu_0$ 。小损耗的影响将在后面研究。

参阅图3.2，设一个导体上的电位  $V_0/2$ ，而另一导体电位为  $-V_0/2$ 。为了求  $TEM$  波的场，必须先求出一个适当的电位  $\Phi(x, y)$ 。  $\Phi$

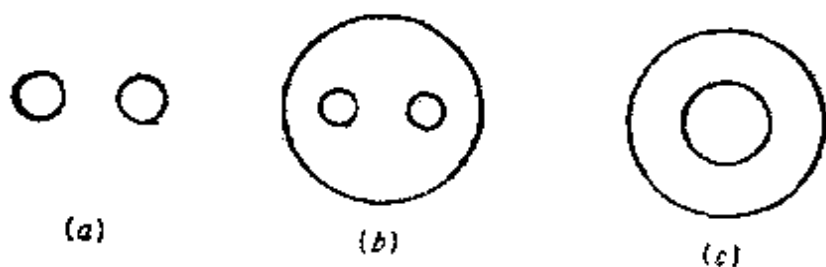


图 3.1 典型传输线的横截面  
(a) 双导线, (b) 屏蔽双导线, (c) 同轴线。

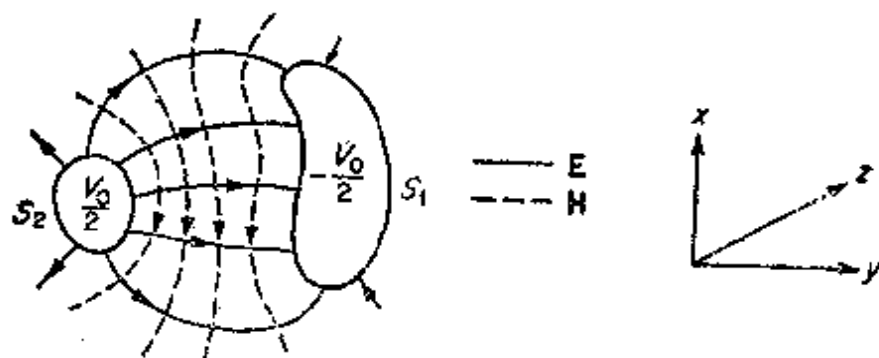


图 3.2 普通双导线传输线横截面上所表示的横向场力线图

必须是

$$\nabla_t^2 \Phi = 0$$

的一个解, 且满足边界条件:

$$\Phi = \begin{cases} \frac{V_0}{2} & \text{在 } S_2 \text{ 上} \\ -\frac{V_0}{2} & \text{在 } S_1 \text{ 上} \end{cases}$$

因为, 除了有一个附加常数的差别 而外,  $\Phi$  的解是唯一的。我们同样也可以选取在  $S_2$  上  $\Phi = V_0$ , 在  $S_1$  上  $\Phi = 0$ 。若  $\Phi$  可能有解, 则  $EM$  波的场也可能有解。当传输线有两个或两个以上导体时, 情况总是这样。当传输线的结构如图 3.1 所示那样简单时, 求  $\Phi$  的解就是一个静电学问题。

由(3.8)式得到的向 + Z 方向传播的波为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t = \mathbf{e} e^{-jk_0 z} = -\nabla_t \Phi e^{-jk_0 z} \quad (3.22a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_z = Y_0 \mathbf{a}_z \times \mathbf{e} e^{-jk_0 z} \quad (3.22b)$$

两个导体间 $\mathbf{e}$ 的线积分为

$$\begin{aligned} \int_{S_1}^{S_2} \mathbf{e} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{S_1}^{S_2} -\nabla_t \Phi \cdot d\mathbf{l} = - \int_{S_1}^{S_2} \frac{d\Phi}{dl} dl \\ &= -(\Phi(S_2) - \Phi(S_1)) = -V_0 \end{aligned}$$

由于在 $S_1$ 和 $S_2$ 之间 $\mathbf{e}$ 的线积分与所取的路径无关(因为 $\mathbf{e}$ 是标位的梯度),故与电场相联系的是单值的电压波

$$V = V_0 e^{-jk_0 z} \quad (3.23)$$

利用安培定律 $\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}$ ,并注意到 $TEM$ 波没有轴向电位移通量 $D_z$ ,可得到 $\mathbf{h}$ 环绕一个导体(比如说 $S_2$ )的线积分为

$$\oint_{S_2} \mathbf{h} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{S_2} J_s dl = I_0$$

导体上的边界条件要求 $\mathbf{n} \times \mathbf{e} = 0$ 和 $\mathbf{n} \times \mathbf{h} = \mathbf{J}_s$ ,其中, $\mathbf{n}$ 是单位外法线, $\mathbf{J}_s$ 是表面电流密度。因为 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{h}$ 落在横向平面内,故电流 $\mathbf{J}_s$ 沿轴线方向。离导体远的区域, $\nabla_t \times \mathbf{h} = 0$ ,但环绕一个导体的线积分,因为有电流存在而不为零。由表达式 $\mathbf{n} \times \mathbf{h} = \mathbf{J}_s$ 可以证明,在两导体上的电流方向是相反的。与磁场相联系的是单值的电流波

$$I = I_0 e^{-jk_0 z} \quad (3.24)$$

因为电位 $\Phi$ 与频率无关,所以横向场 $\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{h}$ 也与频率无关。事实上,若两导体间的电位差为 $V_0$ ,在 $S_2$ 、 $S_1$ 上的电流分别为 $I_0$ 、 $-I_0$ ,则在两导体间存在着静态场分布。正如在(3.22b)式中所看到的那样,因为 $\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{h}$ 互相垂直,所以磁力线与等位线重合。

**例3.1 同轴线** 图3.3表示一条同轴传输线,其上可载 $TEM$ 波。在圆柱坐标 $r$ 、 $\varphi$ 、 $z$ 下,二维拉普拉斯方程为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

也就是对于不随角坐标 $\varphi$ 而变化的位函数来说,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 0$$

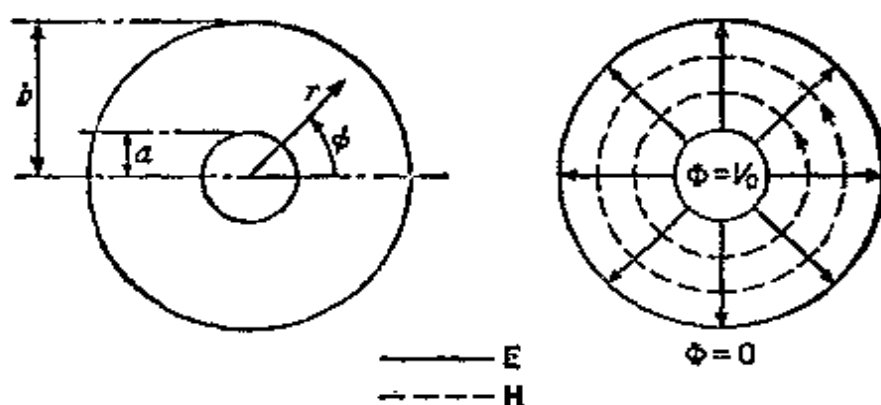


图 3.3 同轴传输线

对此方程积分两次得

$$\Phi = C_1 \ln r + C_2$$

应用  $r=a$  处  $\Phi = V_0$  和在  $r=b$  处  $\Phi = 0$  的边界条件, 得

$$V_0 = C_1 \ln a + C_2 \quad 0 = C_1 \ln b + C_2$$

从而得  $C_2 = -C_1 \ln b, \quad C_1 = V_0 / (\ln(a/b))$

$$\Phi = V_0 \frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)} \quad (3.25)$$

设沿  $+z$  方向传播的  $TEM$  波的电场和磁场可由 (3.22) 式得出, 且为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\mathbf{a}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} e^{-jk_0 z} = -\frac{V_0}{\ln(a/b)} \frac{\mathbf{a}_r}{r} e^{-jk_0 z} \\ &= \frac{V_0}{\ln(b/a)} \frac{\mathbf{a}_r}{r} e^{-jk_0 z} \end{aligned} \quad (3.26a)$$

$$\mathbf{H} = Y_0 \mathbf{a}_z \times \mathbf{e} e^{-jk_0 z} = \frac{Y_0 V_0}{\ln(b/a)} \frac{\mathbf{a}_\phi}{r} e^{-jk_0 z} \quad (3.26b)$$

显然, 两导体间的电位差为  $V_0$ , 故与电场有关的电压波为

$$V = V_0 e^{-jk_0 z} \quad (3.27)$$

内导体上的电流密度为

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{a}_r \times \mathbf{H} = \frac{Y_0 V_0}{\ln(b/a)} \frac{\mathbf{a}_z}{a} e^{-jk_0 z}$$

不计因子  $e^{-jk_0 z}$ ，总电流为

$$I_0 = \frac{Y_0 V_0}{a \ln(b/a)} \int_0^{2\pi} a d\varphi = \frac{Y_0 V_0 2\pi}{\ln(b/a)} \quad (3.28)$$

不难证明，外导体的内表面上的电流也等于  $I_0$ ，但沿  $-Z$  方向。因而，与磁场相联系的电流波为

$$I = I_0 e^{-jk_0 z} \quad (3.29)$$

沿线的功率（即能流密度）为

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^b \int_0^{2\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{a}_r r dr d\phi \\ &= \frac{1}{2} \frac{Y_0 V_0^2}{\ln(b/a)} \int_0^b \int_0^{2\pi} \frac{d\phi dr}{r} \\ &= \frac{\pi Y_0 V_0^2}{\ln(b/a)} \end{aligned} \quad (3.30)$$

如所予计的那样，所传输的功率也可表示为

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re}(VI^*) = \frac{1}{2} V_0 I_0 = \frac{1}{2} V_0^2 \frac{2\pi Y_0}{\ln(b/a)}$$

传输线特性阻抗的定义为

$$\frac{V_0}{I_0} = Z_c \quad (3.31)$$

用它可以把功率表示为  $P = \frac{1}{2} Z_c I_0^2 = \frac{1}{2} Y_c V_0^2$ ，式中， $Y_c$  是线的特性导纳，它等于  $Z_c^{-1}$ 。特性阻抗是传输线横截面形状的函数。

### 小损耗传输线

实际的传输线，总是有由导体的电导率为有限值而引起的一些损耗，同时，导体周围的介质材料也可能呈现损耗。我们先研究周围介质的电容率为  $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$ ，但导体仍是理想的情况。介质损耗的存在，不影响标位  $\Phi$  的解，因而，除了用  $k_0 = k_c (\kappa' - j\kappa'')^{\frac{1}{2}}$  和  $Y = Y_0 (\kappa' - j\kappa'')^{\frac{1}{2}}$  代替  $k_0$  和  $Y_0$  外，场的解在形式上与理想传输线是相同的，其中，相对电容率  $\kappa = \kappa' - j\kappa'' = \epsilon/\epsilon_0$ 。当损耗小到使  $\kappa''$

« $\kappa'$ 时, 传播常数为

$$jk = \alpha + j\beta = j(\kappa')^{\frac{1}{2}} k_0 \left(1 - j\frac{\kappa''}{\kappa'}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx j(\kappa')^{\frac{1}{2}} k_0 + \frac{\kappa'' k_0}{2(\kappa')^{\frac{1}{2}}}$$

因此

$$\alpha = \frac{\kappa'' k_0}{2(\kappa')^{\frac{1}{2}}} \quad (3.32a)$$

$$\beta = (\kappa')^{\frac{1}{2}} k_0 \quad (3.32b)$$

式中,  $\alpha$  是衰减常数, 而  $\beta$  是相移常数。因而当波沿  $+Z$  方向传播时, 它按  $e^{-\alpha z}$  衰减。

最好用广泛地用于计算低损耗系统衰减(阻尼)因数的微扰法, 来导出上述  $\alpha$  的表示式。这个方法是在这样一个假定上, 即微小损耗的引入实际上不影响场在无损耗时的值。所以, 无耗情况下得出的场分布, 常用来计算系统中的损耗, 由此可以算出衰减常数。此时, 若  $\kappa'' = 0$ , 则无耗解为

$$\mathbf{E} = -\nabla_t \Phi e^{-jkz} \quad \mathbf{H} = Y \mathbf{a}_z \times \mathbf{E}$$

式中,  $k = (\kappa')^{\frac{1}{2}} k_0$ ,  $Y = (\kappa')^{\frac{1}{2}} Y_0$ 。当  $\kappa''$  很小但不为零时,  $\epsilon$  的虚部 (即  $\epsilon''$ ) 等效于电导率

$$\sigma = \omega \epsilon'' = \omega \epsilon_0 \kappa''$$

电导率  $\sigma$  在两导体间引起分路电流  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ , 故单位长度上传输线的功率损耗为

$$P_t = -\frac{1}{2\sigma} \int_s \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^* dS$$

$$= -\frac{\omega \epsilon''}{2} \int_s \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dS \quad (3.33)$$

式中, 积分是在线的横截面上进行的, 且在计算  $P_t$  时用  $\mathbf{E}$  的无耗解。由于损耗的存在, 故沿线传播的功率必定按因子  $e^{-2\alpha z}$  减小。沿线传播功率的减少率等于功率损耗。若在  $Z = 0$  处功率为  $P_0$ , 则在  $Z$  处



的功率为  $P = P_0 e^{-2\alpha z}$ 。所以，

$$-\frac{\partial P}{\partial z} = P_1 = 2\alpha P_0 e^{-2\alpha z} = 2\alpha P \quad (3.34)$$

它说明在任一  $Z$  平面上的功率损耗，正比于在这个面上所具有的总功率  $P$ 。因为沿线传播的功率为

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_s \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{a}_z dS \\ &= \frac{Y}{2} \operatorname{Re} \int_s \mathbf{E} \times (\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}^*) \cdot \mathbf{a}_z dS \\ &= \frac{Y}{2} \int_s \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dS \end{aligned}$$

所以，衰减常数  $\alpha$  为

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{P_1}{2P} = \frac{\sigma}{2Y} = \frac{\omega \epsilon''}{2Y_0 (\kappa')^{\frac{1}{2}}} \\ &= k_0 \frac{\kappa''}{2(\kappa')^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

它与(3.32a)的表示式是相同的。对于这个例子，微扰法不具有任何优越性。但是，有损耗情况下的场的解往往是很难求得的。在此情况下，微扰法与其他方法比较起来是极其有用的和简单的。用有限电导率的导体做成的传输线的情况，就是它的一个重要例子，它将在下面讨论。

如果传输线的导体的电导率为有限值，则它们呈现一表面阻抗

$$Z_m = \frac{1 + j}{\sigma \delta_s} \quad (3.35)$$

式中， $\delta_s = (2/\omega\mu\sigma)^{\frac{1}{2}}$  为趋肤深度（见2.9节）。在传输线导体表面上的电场，必有一个等于  $Z_m \mathbf{J}_s$  的切向分量，其中， $\mathbf{J}_s$  是表面电流密度。所以，必然出现电场的轴向分量，结果就不再是  $TEM$  波了。电场的轴向分量产生了指向导体内部的坡印廷矢量的分量，它是在导体中引起功率损耗的原因。一般说，当导体的电导率为有限时，求场的精

确解是非常困难的。但是，由于  $|Z_m|$  远小于  $Z_0$ ，所以电场的轴向分量也远小于横向分量。因而此场非常接近于无耗情况下的  $TEM$  波的场。上述的微扰法，可以用来计算由有限电导率引起的衰减。

若取电流密度  $\mathbf{J}_s$  等于  $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$ ，其中， $\mathbf{n}$  是导体表面的单位外法线矢量， $\mathbf{H}$  是无耗时的磁场。则传输线的每单位长度表面阻抗引起的功率损耗为

$$\begin{aligned} P_l &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} Z_m \oint_{S_1+S_2} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{J}_s^* dl \\ &= \frac{R_m}{2} \oint_{S_1+S_2} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^*) dl \\ &= \frac{R_m}{2} \oint_{S_1+S_2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* dl \end{aligned} \quad (3.36)$$

式中， $R_m = 1/\sigma\delta_s$  为高频表面电阻，并且利用了电导率为无限大的情况下由  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0$  而得的

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^*) &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^*) \\ &= \mathbf{n} \cdot \{ (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*) \mathbf{n} - (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H}^* \} \\ &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* \end{aligned}$$

积分是环绕两导体  $S_1 + S_2$  的周界进行的。于是，由导体损耗引起的衰减常数为

$$\alpha = \frac{P_l}{2P} = \frac{R_m \oint_{S_1+S_2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* dl}{2Z \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* ds} \quad (3.37)$$

式中，沿线传播的功率为

$$\operatorname{Re} \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{a}_z ds = \frac{1}{2} Z \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* ds$$

$Z$  是媒质的特性阻抗，即  $Z = (\mu/\epsilon)^{\frac{1}{2}}$

当介质和导体都呈现损耗时，若两者的衰减常数都不大，则衰减常数为各部分引起的衰减常数之和。

**例3.2 有损耗的同轴线** 设图3.3中的同轴线充满有损耗的介质

( $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$ ), 且导体电导率 $\sigma$ 为有限值。无耗情况下( $\epsilon'' = 0, \sigma = \infty$ )的场为(3.26)式, 但用 $k = (\epsilon'/\epsilon_0)^{\frac{1}{2}} k_0$ 和

$$Y = \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} Y_0,$$

分别代替其中的 $k_0$ 和 $Y_0$ , 则得

$$\mathbf{E} = \frac{V_0}{\ln(b/a)} \frac{\mathbf{a}_r}{r} e^{-jkz} \quad (3.38a)$$

$$\mathbf{H} = -\frac{YV_0}{\ln(b/a)} \frac{\mathbf{a}_r}{r} e^{-jkz} \quad (3.38b)$$

沿线传播的功率为

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} R_s \int_0^{2\pi} \int_a^b \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{a}_r r d\phi dr \\ &= \frac{\pi Y V_0^2}{\ln(b/a)} \end{aligned} \quad (3.39)$$

根据(3.33)式, 由有耗介质产生的功率损耗为

$$\begin{aligned} P_{11} &= \frac{\omega \epsilon''}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* r d\phi dr \\ &= \frac{\omega \epsilon'' V_0^2 \pi}{\ln(b/a)} \end{aligned} \quad (3.40a)$$

由有限电导率引起的功率损耗为(3.36)式, 且为

$$\begin{aligned} P_{12} &= \frac{R_m}{2} \frac{Y^2 V_0^2}{(\ln(b/a))^2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) d\phi \\ &= \frac{R_m \pi Y^2 V_0^2}{(\ln(b/a))^2} \frac{b+a}{ab} \end{aligned} \quad (3.40b)$$

因而, 同轴线的衰减常数 $\alpha$ 为

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{P_{11} + P_{12}}{2P} = \frac{\omega \epsilon''}{2Y} + \frac{R_m Y}{2 \ln(b/a)} \frac{b+a}{ab} \\ &= \frac{k_0 \kappa''}{2(\kappa')^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_m}{2Z \ln(b/a)} \frac{b+a}{ab} \end{aligned} \quad (3.41)$$

因此，有损耗情况的传输常数为

$$\alpha + j\beta = \alpha + jk,$$

其中， $\alpha$ 即为(3.41)式。

### 3.3 传输线(分布参数电路分析)

上一节已经指出：传输线上与 $TEM$ 波的电场和磁场相联系的是一个单值的电压波和电流波。同时也指出： $TEM$ 波的横向场随坐标的横向变化与静态场相同。根据这些理由，传输线能够唯一地用分布参数电路来描述。储藏在磁场中的能量由每单位长度的串联电感 $L$ 来计算；而储藏在电场中的能量由每单位长度的并联分布电容 $C$ 来计算；导体上的功率损耗用单位长度的串联电阻 $R$ 来计算；而介质中的功率损耗可以包含在单位长度并联电导 $G$ 之中。以上述概念为基础的参数 $L$ 、 $C$ 、 $R$ 和 $G$ 的正确定义分别为

$$L = \frac{\mu}{I_0 I_0^*} \int_s \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* ds \quad (3.42a)$$

$$C = \frac{\epsilon'}{V_0 V_0^*} \int_s \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* ds \quad (3.42b)$$

$$R = \frac{R_m}{I_0 I_0^*} \oint_{s_1 + s_2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* ds \quad (3.42c)$$

$$G = \frac{\omega \epsilon''}{V_0 V_0^*} \int_s \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* ds \quad (3.42d)$$

式中， $I_0$ 是线上的总电流， $V_0$ 为电位差。例如，使储藏在串联等效电感 $L$ 中的磁能 $\frac{1}{2} I_0 I_0^* L$ ，等于用场表示的磁能 $W_m$ ，即可得到(3.42)式中各个表示式。不难证明，上述定义等效于另一种通用的定义，如\*

\* 例如参看 R.Plonsey and R.E.Collin, "Principles and Applications of Electromagnetic Fields," Sec.10.5, McGraw-Hill Book Company, New York, 1961.

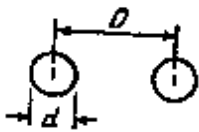


$$L = \frac{\text{磁链}}{\text{总电流}} \quad (3.43a)$$

$$C = \frac{\text{单位长度的总电荷}}{\text{两导体间的电位差}} \quad (3.43b)$$

$$G = \frac{\text{总的分路电流}}{\text{两导体间的电位差}} \quad (3.43c)$$

因为电流密度  $J_s = n \times H$  沿导体表面并不总是均匀分布的，所以串联电阻  $R$  还是如同(3.42c)式中那样以能量为基础来定义最方便。表3.1给出了一些普通传输线的参数。

表 3.1 普通传输线的参数。

	$Z_c$	$R$
	$\frac{1}{\pi} \left( \frac{\mu_0}{\epsilon'} \right)^{\frac{1}{2}} \cosh^{-1} \frac{D}{d}$	$\frac{2Rm}{\pi d} \frac{D/d}{[(D/d)^2 - 1]^{\frac{1}{2}}}$
	$\frac{1}{2\pi} \left( \frac{\mu_0}{\epsilon'} \right)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{b}{a}$	$\frac{R}{2\pi} \left( -\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$
	$\frac{1}{\pi} \left( \frac{\mu_0}{\epsilon'} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \ln \left( 2p \frac{1-q^2}{1+q^2} \right) - \frac{1+4p^2}{16p^4} (1-4q^2) \right]$	$\frac{2Rm}{\pi d} \left[ 1 + \frac{1+2p^2}{4p^4} (1-4q^2) \right]$ $\frac{3Rm}{\pi a} q^2 \left[ (1+q^2) - \frac{1+4p^2}{8p^4} \right]$

\* 对所有TEM波传输线，

$$C = \frac{(\mu_0 \epsilon')^{\frac{1}{2}}}{Z_c} \quad L = (\mu_0 \epsilon')^{\frac{1}{2}} Z \quad G = \frac{\omega \epsilon'' C}{\epsilon'}$$

$$\alpha_s = \frac{G Z_c}{2} \quad \alpha_r = \frac{R Y_c}{2} \quad R_n = \frac{1}{\sigma \delta} = \left( \frac{\omega \mu}{2 \sigma} \right)^{\frac{1}{2}}$$

图3.4表示了传输线的一个微分段  $dz$  的等效电路。设输入端的电压和电流为  $V(z, t)$ 、 $I(z, t)$ ，则输出端的电压和电流为

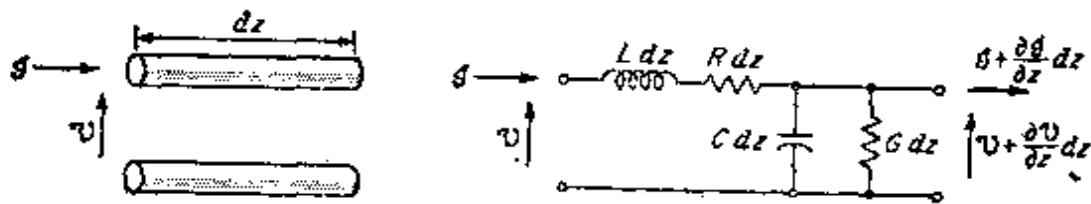


图 3.4 传输线上一个微分段的等效电路

$$v + \frac{\partial v}{\partial z} dz, \quad i + \frac{\partial i}{\partial z} dz$$

于是，由基尔霍夫定律得

$$v - \left( v + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right) = i R dz + L dz \frac{\partial i}{\partial t}$$

或

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -i R - L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (3.44a)$$

同理，

$$i - \left( i + \frac{\partial i}{\partial z} dz \right) = v G dz + C dz \frac{\partial v}{\partial t}$$

或

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -v G - C \frac{\partial v}{\partial t} \quad (3.44b)$$

第一个方程表明：输入端与输出端间的电位差等于在  $R$  和  $L$  上的电位降。第二个方程表明：输出电流与输入电流之差等于被  $C$  和  $G$  所分流的电流。将(3.44a)式对  $z$  求导数，以及将(3.44b)式对  $t$  求导数得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -R \frac{\partial i}{\partial z} - L \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z} \quad (3.45a)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z} = -G \frac{\partial v}{\partial t} - C \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.45b)$$

用(3.44b)式和(3.45b)式代入(3.45a)式，得传输线电压  $v$  方程式如下：

$$\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial z^2} = R \left( G \mathcal{V} + C \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} \right) + L \left( G \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + C \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial t^2} \right)$$

或

$$\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial z^2} - (RC + LG) \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} - LC \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial t^2} - RG \mathcal{V} = 0 \quad (3.46)$$

电流  $\mathcal{I}$  同样满足这个一维波动方程。若假定

$$\mathcal{V} = \text{Re}(V e^{-\gamma z + j\omega t})$$

是一个传播波形式的解，则把它代入(3.46)式证明传播常数  $\gamma$  必须是下列方程的一个解：

$$\gamma^2 - j\omega(RC + LG) + \omega^2 LC - RG = 0 \quad (3.47)$$

若只要求稳态时变正弦解，则可以采用相量表示。如果令  $V$  和  $I$  代表电压和电流，而不写出时间关系  $e^{j\omega t}$ ，则基本方程(3.44)式可写为

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -(R + j\omega L)I \quad (3.48a)$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -(G + j\omega C)V \quad (3.48b)$$

于是波动方程(3.46)就变成

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - (RG - \omega^2 LC)V - j\omega(RC + LG)V = 0 \quad (3.49)$$

(3.49)式的通解为

$$V = V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{\gamma z} \quad (3.50)$$

式中， $\gamma = \alpha + j\beta$  由(3.47)式得出为

$$\gamma = (-\omega^2 LC + RG + j\omega(RC + LG))^{1/2} \quad (3.51)$$

常数  $V^+$  和  $V^-$  分别为沿  $+Z$  和  $-Z$  方向传播的任意振幅常数。由(3.48a)式可以求出电流  $I$  的解为

$$\begin{aligned} I &= I^+ e^{-\gamma z} - I^- e^{\gamma z} \\ &= \frac{\gamma}{R + j\omega L} (V^+ e^{-\gamma z} - V^- e^{\gamma z}) \end{aligned} \quad (3.52)$$

参数

$$Z_c = \frac{R + j\omega L}{\gamma} = \left( \frac{R + j\omega L}{G + j\omega C} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.53)$$

由于它等于比值  $V^+/I^+$  和  $V^-/I^-$ ，而被称为传输线的特性阻抗。注意： $r = [(R + j\omega L)(G + j\omega C)]^{\frac{1}{2}}$ 。

### 无耗传输线

当传输线没有损耗，即  $R = G = 0$  时，其传播常数为

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC} \quad (3.54)$$

其特性阻抗为纯实数，且为

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (3.55)$$

按照场的分析， $\beta$  也等于  $\omega(\mu\epsilon)^{\frac{1}{2}}$ ，所以，对传输线来说，

$$LC = \mu\epsilon \quad (3.56)$$

这个结果也可以通过求解  $L$  和  $C$  来得出，在下面传输线的参数一节中将证明这一点。用(3.56)式代入(3.55)式同样可以证明特性阻抗为

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{C^2}} = \frac{\epsilon}{C} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z \frac{\epsilon}{C} \quad (3.57)$$

式中， $Z$  是媒质的本征阻抗，特性阻抗和本征阻抗差一个因子  $\epsilon/C$ ，本征阻抗仅为传输线结构的函数。

### 低损耗传输线

大多数微波传输线的损耗是非常小的，即  $R \ll \omega L$ ， $G \ll \omega C$ 。在这种情况下， $\gamma$  表示式(3.51)中的  $RG$  项可以忽略。于是用二项式展开得

$$\begin{aligned} \gamma &\approx j\omega\sqrt{LC} + \frac{1}{2}\sqrt{LC} \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) \\ &= \alpha + j\beta \end{aligned} \quad (3.58)$$



作为一级近似，特性阻抗仍可用(3.55)式或(3.57)式。所以低损耗传输线的相移常数为

$$\beta = \omega \sqrt{LC} \quad (3.59a)$$

衰减常数为

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \sqrt{LC} \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) \\ &= \frac{1}{2} (RY_c + GZ_c) \end{aligned} \quad (3.59b)$$

式中， $Y_c = Z_c^{-1} = \sqrt{C/L}$  是传输线的特性导纳。

### ★3.4 传输线的参数

本节将更详细地研究用场的分析来确定传输线电路参数  $L$ 、 $R$ 、 $C$  和  $G$ 。它将进一步把传输线的场分析和电路分析联系起来。

首先研究图3.2中所示的无损耗的情况。当标位  $\Phi$  已被确定时，导体上的电荷密度可以由导体表面上电场的法线分量求出，即  $\rho_s = \epsilon \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} = -\epsilon \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi = -\epsilon \partial \Phi / \partial n$ ，式中， $\epsilon$  是导体周围媒质的电容率。导体  $S_2$  上每单位长度的总电荷  $Q$  为

$$Q = \oint_{S_2} \epsilon \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} \, dl$$

在导体  $S_1$  上的总电荷为每米  $-Q$ ， $S_2$  的电位为  $V_0$ ，因而每单位长度的电容  $C$  为

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\epsilon \int_{S_2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} \, dl}{\int_{S_2} \mathbf{e} \cdot d\mathbf{l}} \quad (3.60)$$

由于  $S_2$  面上  $|\mathbf{h}| = Y |\mathbf{e}| = Y \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}$  (因为在理想导体表面  $S_2$  上  $\mathbf{h}$  的法线分量和  $\mathbf{e}$  的切向分量等于零)，故在  $S_2$  上的总电流为

$$I_0 = \oint_{S_2} \mathbf{h} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{S_2} Y \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} \, dl = -\frac{YQ}{\epsilon}$$

于是，传输线的特性阻抗为

$$Z_c = \frac{V_0}{I_0} = \frac{V_0 \epsilon}{Y Q} = \frac{\epsilon Z}{C} \quad (3.61)$$

只要知道单位长度的电容，就能够确定特性阻抗。

为了确定单位长度的电感  $L$ ，参阅图 3.5，它表示了导体周围的磁力线。因为  $\mathbf{h}$  垂直于  $\mathbf{e}$ ，所以  $\mathbf{h}$  线与等位线重合。由  $\phi = 0$  到  $\phi = V_0/2$  的所有通量线都与  $S_2$  上的电流交链。磁链就是切割连接  $\phi = 0$  线与表面  $S_2$  间任一路径的总通量。如果把路径选为垂直于通量线的  $P_1 S_2$  或  $P_2 S_2$ ，则此路径与

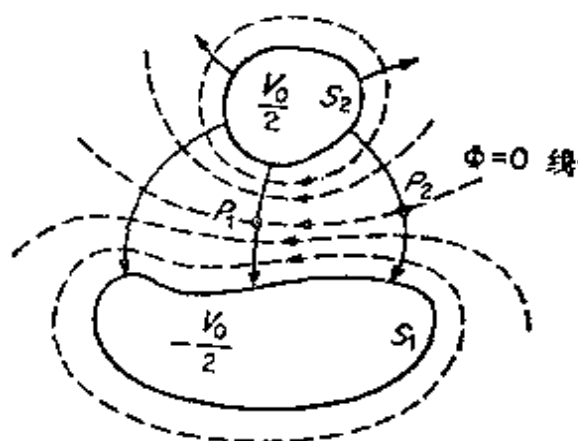


图 3.5 传输线中的磁力线

电力线重合。因为  $TEM$  波  $|\mathbf{h}| = Y |\mathbf{e}|$ ，故切割这一路径的通量为

$$\begin{aligned} \psi &= \int_{P_1}^{S_2} \mu h dl = \mu Y \int_{P_1}^{S_2} -\mathbf{e} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \mu Y \cdot \frac{V_0}{2} \end{aligned}$$

因此，线的一个导体的电感为

$$L_1 = \frac{\psi}{I_0} = \mu Y \frac{V_0}{2I_0}$$

两个导体每单位长度的电感为此数值的二倍，故得

$$L = \mu Y \frac{V_0}{I_0} = \mu Y Z_c \quad (3.62)$$

由这个关系式和(3.61)式可以看出， $Z = \mu Z_c / L = CZ_c / \epsilon$ ，因而

$$Z^2 = \frac{\mu}{\epsilon} = \frac{\mu Z_c}{L} = \frac{C Z_c}{\epsilon}$$

由此得

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (3.63)$$

对传输线来说, (3.61)式和(3.62)式也同样证明

$$\mu\epsilon = LC \quad (3.64)$$

上述  $C$  和  $L$  的表示式也可以由储能的定义得到, 其推导留作一个习题。

设介质具有复数电容率  $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$ , 其中,  $\epsilon''$  包括此介质电导率的影响 (如果它不为零的话), 则总的分路电流, 包括位移电流  $I_D$  和传导电流  $I_S$ 。由导体  $S_2$  每单位长度上流出的电流为

$$\begin{aligned} I &= I_D + I_S = j\omega\epsilon \oint_{S_2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} dl \\ &= j\omega\epsilon' \oint_{S_2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} dl + \omega\epsilon'' \oint_{S_2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} dl \end{aligned}$$

式中, 右边第一个积分是位移电流, 第二个积分为传导电流。这样, 总的分路导纳为  $Y = j\omega C + G = (I_D + I_S)/V_0$ , 由于  $j\omega C = I_D/V_0$ ,  $j\omega C / j\omega\epsilon' = C/\epsilon'$ , 故得

$$G = \frac{I_S}{V_0} = \frac{I_S}{I_D} \frac{I_D}{V_0} = \frac{\omega\epsilon''}{\epsilon'} C \quad (3.65)$$

这个关系式表明  $G$  与  $C$  只差一个因子  $\omega\epsilon''/\epsilon'$ 。

倘若  $R$  选为

$$\frac{1}{2} RI_0^2 = \frac{R_m}{2} \oint_{S_1+S_2} |\mathbf{h}|^2 dl \quad (3.66)$$

则由有限电导率引起的功率损耗, 可以由每单位长度的串联电阻  $R$  来说明。(3.66)式右边等于由导体的高频电阻引起的每单位长度的功率损耗。根据这个关系, 电阻就定义为

$$R = R_m \frac{\oint_{S_1+S_2} |\mathbf{h}|^2 dl}{\left( \oint_S |\mathbf{h}| dl \right)^2} \quad (3.67)$$

式中,  $R_m = 1/\sigma\delta_s$ ,  $\delta_s$  为趋肤深度。

有限电导率的又一个影响是，由于磁场穿透到导体内，而使线的串联电感稍有增加。我们不难根据能量来计算趋肤效应电感 $L_s$ 。表面阻抗 $Z_m$ 的电感部分 $jX_m = j/\sigma\delta_s$ ，在数量上等于 $R_m$ 。储藏在 $X_m$ 中的磁能为（注意： $X_m$ 等效于表面电感 $X_m/\omega = L_m$ ）

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{X_m}{4\omega} \oint_{S_1+S_2} |J_s|^2 dl \\ &= \frac{X_m}{4\omega} \oint_{S_1+S_2} |h|^2 dl \\ &= \frac{X_m}{4\omega} \frac{RI_0^2}{R_m} = \frac{RI_0^2}{4\omega} \end{aligned}$$

上式推导时利用了(3.66)式。按关系式

$$\frac{1}{4} L_s I_0^2 = W_m$$

来定义的 $L_s$ 为

$$\omega L_s = R \quad (3.68)$$

传输线串联感抗增加的数值等于串联电阻。但是，对低损耗传输线来说， $R \ll \omega L$ ，故 $L_s \ll L$ ，因而，对大多数实际的传输线而言，修正是不大的。电感 $L_s$ 因为由导体内部磁链引起，故称为内电感。

由于感抗和电阻两者都由电流和场穿透到导体内引起，故得到 $\omega L_s = R$ 是不足为奇的。利用表面阻抗 $Z_m = (1+j)/\sigma\delta_s$ ，就可以用简单的方法，正确地说明穿入导体的有效距离等于趋肤深度 $\delta_s$ 。

**例3.3 同轴线的参数** 图3.3的同轴线的电位 $\Phi$ 为

$$\Phi = V_0 \frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)}$$

内导体上的电荷为

$$\begin{aligned} Q &= \epsilon \int_0^{2\pi} \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{e} a d\varphi = \epsilon \int_0^{2\pi} -\frac{\partial \Phi}{\partial r} a d\varphi \\ &= \frac{-\epsilon V_0}{\ln(a/b)} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi \epsilon V_0}{\ln(b/a)} \end{aligned}$$

因为电容只由与 $\epsilon'$ 相联系的那部分电荷产生, 而 $\epsilon''$ 引起并联电导, 所以, 每单位长度的电容为

$$C = \frac{\epsilon'}{\epsilon} \frac{Q}{V_0} = \frac{2\pi\epsilon'}{\ln(b/a)} \quad (3.69)$$

由(3.38b)式给出的磁场为

$$\mathbf{H} = \mathbf{h}e^{-jk_0z} = \frac{YV_0}{\ln(b/a)} \frac{\mathbf{a}_\varphi}{r} e^{-jk_0z}$$

电流  $I_0$  为

$$I_0 = \int_0^{2\pi} \mathbf{h} \cdot \mathbf{a}_\varphi a d\varphi = \frac{2\pi YV_0}{\ln(b/a)}$$

因而特性阻抗为

$$Z_c = \frac{V_0}{I_0} = \frac{Z}{2\pi \ln(b/a)} \quad (3.70)$$

中心导体的磁链为

$$\begin{aligned} \psi &= \mu \int_a^b \mathbf{h} \cdot \mathbf{a}_\varphi dr = \frac{\mu Y V_0}{\ln(b/a)} \int_a^b \frac{dr}{r} \\ &= \mu Y V_0 \end{aligned}$$

所以, 每单位长度的电感为

$$\begin{aligned} L &= \frac{\psi}{I_0} = \frac{\mu Y V_0}{2\pi Y V_0} \ln \frac{b}{a} \\ &= \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (3.71)$$

由此可见,  $LC = \mu\epsilon'$ ,  $Z_c = (L/C)^{\frac{1}{2}}$

并联电导  $G$  等于  $\omega\epsilon''C/\epsilon'$ , 即

$$G = \frac{\omega\epsilon''}{\epsilon'} \frac{2\pi\epsilon'}{\ln(b/a)} = \frac{2\pi\omega\epsilon''}{\ln(b/a)} \quad (3.72)$$

为了求出串联电阻, 必须计算内外导体的功率损耗。由例3.2算出的结果[(3.40b)式]为

$$\frac{1}{2} R I_0^2 = P_{t2} = \frac{R_m \pi Y^2 V_0^2}{(\ln(b/a))^2} \frac{b+a}{ab}$$

解出  $R$  得

$$R = \frac{R_m}{2\pi} \frac{b+a}{ab} \quad (3.73)$$

因为内电感  $L_s$  等于  $R/\omega$ ，所以每单位长度传输线的总串联电感为

$$L + L_s = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} + \frac{b+a}{2\pi\omega ab \delta_s \sigma} \quad (3.74)$$

### 3.5 端接负载的传输线

这一节研究端接任意负载阻抗  $Z_L$  的传输线的性质。将用来阐明如何把正向和反向传输的波合起来，以满足终端的边界条件。图 3.6 简略地表示端接负载阻抗  $Z_L$  的传输线。假定此传输线无损耗、特性阻抗为  $Z_c$  和传播常数为  $\gamma = i\beta$ 。必须注意，在微波频率下，当把一般低频电阻、电感或电容跨接到传输线的两导体上时，可能成为其特性与低频时很不相同的阻抗元件。

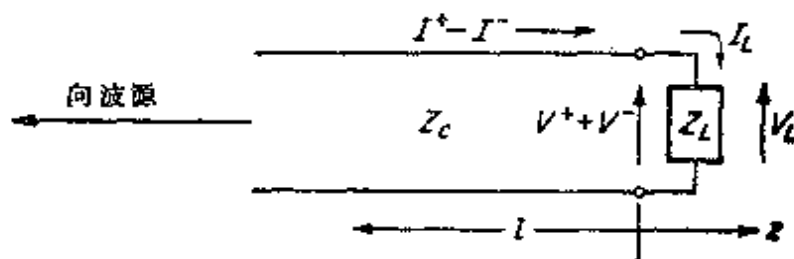


图 3.6 端接负载阻抗的传输线

当电压波  $V^+ e^{-i\beta z}$  和与它相联系的电流波  $I^+ e^{-i\beta z}$  入射到终端时，会产生一个反射电压波  $V^- e^{i\beta z}$  和反射电流波  $-I^- e^{i\beta z}$ 。反射波与入射波振幅之比只取决于负载阻抗。负载上总的线电压，必须等于负载两端的外加电压，而线电流通过负载时必须连续。因而，若  $Z_L$  接在  $Z = 0$  处，则

$$V = V^+ + V^- = V_L \quad (3.75a)$$

$$I = I^+ - I^- = I_L \quad (3.75b)$$

但  $I^+ = Y_c V^+$ ,  $I^- = Y_c V^-$ , 且按定义  $V_L / I_L = Z_L$  为负载阻抗。因而

$$V^+ + V^- = V_L \quad (3.76a)$$

$$V^+ - V^- = \frac{Z_c}{Z_L} V_L \quad (3.76b)$$

通常把电压反射系数  $\Gamma$  定义为  $V^-$  与  $V^+$  之比, 即

$$\Gamma = \frac{V^-}{V^+} \quad (3.77)$$

把(3.77)式代入(3.76)式, 可得

$$V^+(1 + \Gamma) = V_L$$

$$V^+(1 - \Gamma) = \frac{Z_c}{Z_L} V_L$$

用前式除以后式, 得

$$\frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} = \frac{Z_L}{Z_c} \quad (3.78)$$

$Z_L / Z_c$  称为归一化负载阻抗 (即负载阻抗以  $Z_c$  为单位来量度), 于是  $(1 + \Gamma) / (1 - \Gamma)$  为  $Z = 0$  处向负载看的归一化输入阻抗。归一化负载阻抗用  $\bar{Z}_L$  表示, 顶上的短划通常表示归一化阻抗的意思。求解电压反射系数  $\Gamma$  得

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} = \frac{Z_L / Z_c - 1}{Z_L / Z_c + 1} \\ &= \frac{\bar{Z}_L - 1}{\bar{Z}_L + 1} \end{aligned} \quad (3.79)$$

与电压反射系数的定义相类似, 电流反射系数  $\Gamma_I$  可定义为

$$\Gamma_I = \frac{-I^-}{I^+} = -\frac{Y_c V^-}{Y_c V^+} = -\Gamma$$

但是, 在本书中将只使用电压反射系数, 故可以把形容词“电压”

两字去掉而不致相混淆。

可以把入射电压波认为是传送到负载上的电压 $V_L$ ，而把电压传输系数 $T$ 定义为 $V_L$ 与 $V^+$ 之比，于是，

$$V_L = TV^+ = (1 + \Gamma)V^+$$

所以

$$T = 1 + \Gamma \quad (3.80)$$

本书中不使用相应的电流传输系数。

由(3.79)式可以看出，若 $Z_L = Z_c$ ，则反射系数为零。此时全部入射波功率传送到负载上，一点也不反射回到波源。此时传送到负载上的功率为

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(VI^*) = \frac{1}{2} |V^+|^2 Y_c \\ &= \frac{1}{2} |V_L|^2 Y_L \end{aligned} \quad (3.81)$$

当 $\Gamma = 0$ 时，就可以认为负载与传输线匹配。

如果 $Z_L$ 不等于 $Z_c$ ，则负载与传输线失配，因而产生反射波。此时传送到负载上的功率为

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V_L I_L^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}((V^+ + V^-)(I^+ - I^-)^*) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(Y_c(V^+ + V^-)(V^+ - V^-)^*) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(Y_c |V^+|^2 (1 + \Gamma)(1 - \Gamma)^*) \\ &= \frac{1}{2} Y_c |V^+|^2 (1 - |\Gamma|^2) \end{aligned} \quad (3.82)$$

这个最后结果清楚地表明一个物理概念：即传送到负载上的功率，等于入射功率减去由负载反射的功率。

在没有反射的情况下，沿传输线各点电压的大小为一个等于 $|V^+|$ 的常数。当反射波也存在时，入射波和反射波相互干涉，在沿



线产生驻波图形。在线上任一点 ( $Z < 0$ ) 的电压为

$$V = V^+ e^{-i\beta z} + \Gamma V^+ e^{i\beta z},$$

其大小为

$$\begin{aligned} |V| &= |V^+| |1 + \Gamma e^{2i\beta l}| \\ &= |V^+| |1 + \Gamma e^{-2i\beta l}| \end{aligned}$$

式中,  $l = -z$  为由负载向波源测得的正向距离, 如图 3.6 所示。令  $\Gamma$  等于  $\rho e^{i\theta}$ , 其中,  $\rho = |\Gamma|$ , 则\*

$$\begin{aligned} |V| &= |V^+| |1 + \rho e^{i(\theta - 2\beta l)}| \\ &= |V^+| \{(1 + \rho \cos(\theta - 2\beta l))^2 + \rho^2 \sin^2(\theta - 2\beta l)\}^{\frac{1}{2}} \\ &= |V^+| \{(1 + \rho)^2 - 2\rho(1 - \cos(\theta - 2\beta l))\}^{\frac{1}{2}} \\ &= |V^+| \left[ (1 + \rho)^2 - 4\rho \sin^2\left(\beta l - \frac{\theta}{2}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.83) \end{aligned}$$

这个结果表明:  $|V|$  在最大值  $|V^+|(1 + \rho)$  (当  $\beta l - \theta/2 = n\pi$  时) 和最小值  $|V^+|(1 - \rho)$  (当  $\beta l - \theta/2 = n\pi + \pi/2$  时) 之间摆动, 这里,  $n$  为整数。这些结果也与实际的观察一致, 因为它们说明电压最大发生在入射波和反射波同相相加之时, 而电压最小发生在反相相加之时。每隔距离  $d = \pi/\beta = \lambda\pi/2\pi = \lambda/2$  接连地出现电压的最大值和最小值, 其中,  $\lambda$  是导体周围媒质中 TEM 波的波长。最大值和其最靠近的最小值之间的距离为  $\lambda/4$ 。

因为电流反射系数等于  $-\Gamma$ , 所以当电压波同相相加时, 电流波总是相减的。因而, 电流最大值和最小值的位置, 相对于电压最大值和最小值的位置移动了  $\lambda/4$ 。图 3.7 表示了当  $Z_L$  为等于  $3Z_c$  的纯电阻时所形成的电压和电流的驻波图。

传输线的电压最大值与最小值之比, 称为电压驻波比  $S$ , 因此

$$S = \frac{|V^+|(1 + \rho)}{|V^+|(1 - \rho)} = \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \quad (3.84)$$

\* 表示电荷密度和反射系数的模两个量都用符号  $\rho$ 。因为从上下文可以弄清所讨论的是什么量, 故不致相混。

驻波比在实用上是一个相当重要的参数,其理由如下:在微波频率下,制造和使用直接测量电压和电流绝对值的仪表是困难的。相反,测量电压或电流(或电场和磁场)的相对值的仪表是容易制造的。典型的仪表是伸入传输线周围的电场区域的小探针。探针的输出接到晶体检波器上,以产生一个输出电流,作为探针所在处相对

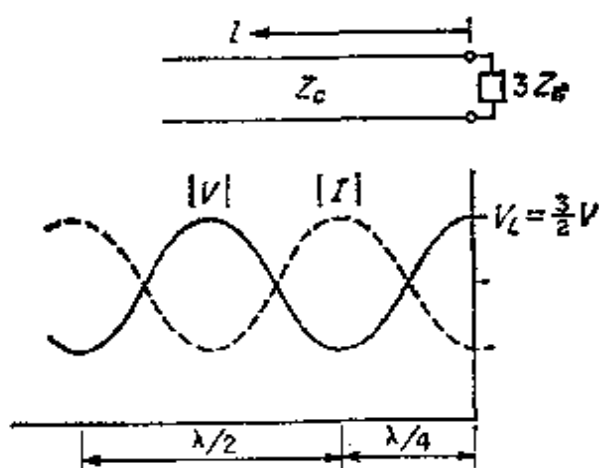


图 3.7 端接负载阻抗等于 $3Z_c$ 时,电压和电流的驻波图

电场或相对电压的量度。沿传输线移动探针,由探针的最大和最小电流可直接测得驻波比。电压最小值的位置也可以测出来,从而计算出 $\Gamma$ 的相角 $\theta$ 。因为根据所测得的 $S$ 值可以求出 $\rho$ , $\Gamma$ 也就确定了,从而由(3.78)式可以算出归一化负载阻抗。

虽然反射系数是作为量度负载端的反射波与入射波之比而引入的,但是,这个定义可推广到传输线任一点上的相应电压之比。因而,在 $Z = -1$ 处,反射系数为

$$\begin{aligned}\Gamma(l) &= \frac{V^- e^{-j\beta l}}{V^+ e^{j\beta l}} = \frac{V^-}{V^+} e^{-2j\beta l} \\ &= \Gamma_L e^{-2j\beta l}\end{aligned}\quad (3.85)$$

式中, $\Gamma_L = V^-/V^+$ 表示负载上的反射系数。在 $Z = -1$ 处向负载看进去的归一化阻抗为

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{in} &= \frac{Z_{in}}{Z_c} = \frac{V}{IZ_c} = \frac{V^+ e^{j\beta l} + V^- e^{-j\beta l}}{V^+ e^{j\beta l} - V^- e^{-j\beta l}} \\ &= \frac{1 + \Gamma(l)}{1 - \Gamma(l)} = \frac{1 + \Gamma_L e^{-2j\beta l}}{1 - \Gamma_L e^{-2j\beta l}}\end{aligned}\quad (3.86)$$

若用 $(Z_L - Z_c)/(Z_L + Z_c)$ 代替 $\Gamma_L$ ,并用 $\cos \beta l \pm j \sin \beta l$ 代替 $e^{\mp j\beta l}$ ,则(3.86)式可表示为

$$\bar{Z}_{in} = \frac{Z_{in}}{Z_c} = \frac{Z_L + jZ_c \tan \beta l}{Z_c + jZ_L \tan \beta l} \quad (3.87)$$

这一结果同样适合于归一化输入导纳，所以

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{in} &= \frac{Y_{in}}{Y_c} = \frac{Y_L + jY_c \tan \beta l}{Y_c + jY_L \tan \beta l} \\ &= \frac{\bar{Y}_L + j \tan \beta l}{1 + j\bar{Y}_L \tan \beta l} \end{aligned} \quad (3.88)$$

特别有意义的是两种特殊情况，即 $\beta l = \pi$ 或 $l = \lambda/2$ 和 $\beta l = \pi/2$ 或 $l = \lambda/4$ 。这两种情况下

$$Z_{in}\left(l = \frac{\lambda}{2}\right) = Z_L \quad (3.89a)$$

$$Z_{in}\left(l = \frac{\lambda}{4}\right) = \frac{Z_c^2}{Z_L} \quad (3.89b)$$

第一种情况等效于变换比为1:1的理想阻抗变换器，而在第二种情况下则是：对于一定的 $Z_c^2$ 来说，它是 $Z_L$ 的倒数。

### 端接负载的有耗传输线

对于传播常数为 $\gamma = j\beta + \alpha$ 的有耗线的情况，除了必须用 $j\beta + \alpha$ 代替 $j\beta$ 外，上述的关系式仍然成立。因为其中的 $\alpha$ 一般是很小的，所以对用于大多数实验设备的不长的传输线来说，略去 $\alpha$ 是可以的。然而，研究端接负载 $Z_L$ 的有耗传输线的特性仍然是有一定意义的。我们作一个简化的假定，即认为特性阻抗仍是实数。这个假定对用于微波频率的低损耗传输线无疑是正确的。在一般的情况下验证这个假定的详细计算放在习题3.6中。

显然，衰减常数 $\alpha$ 的存在，不影响负载上电压反射系数 $\Gamma_L$ 的定义。但是，离波源距离为 $l$ 的任一点上的反射系数现在应为

$$\Gamma(l) = \Gamma_L e^{-2\beta l - 2\alpha l} \quad (3.90)$$

当 $l$ 增大时， $\Gamma$ 按指数单调地减少；当 $l$ 很大时， $\Gamma$ 基本上变为零。可见，当通过一大段有耗线看负载 $Z_L$ 时，由于在所研究的点上 $\Gamma$ 可

忽略不计，故  $Z_L$  看来好像与此传输线匹配。这个结果也可以由输入阻抗表示式，即

$$\begin{aligned} Z_{in} &= Z_c \frac{1 + \Gamma_L e^{-2j\beta l - 2\alpha l}}{1 - \Gamma_L e^{-2j\beta l - 2\alpha l}} \\ &= Z_c \frac{Z_L + Z_c \tanh(j\beta l + \alpha l)}{Z_c + Z_L \tanh(j\beta l + \alpha l)} \end{aligned} \quad (3.91)$$

中看出：因为当  $x$  很大且不是纯虚数时， $\tanh x$  接近于 1，所以，当  $l$  很大时， $Z_{in}$  接近于  $Z_c$ 。

当观察点由负载向信号源移动时，损耗也起着使驻波比  $S$  向 1 趋近的作用。在靠近于信号源时，入射波幅度按指数增加，而反射波振幅按指数减少。这个结果表示在图 3.8 的驻波图中。为便于图示，这里假定了一个较大的  $\alpha$  值。

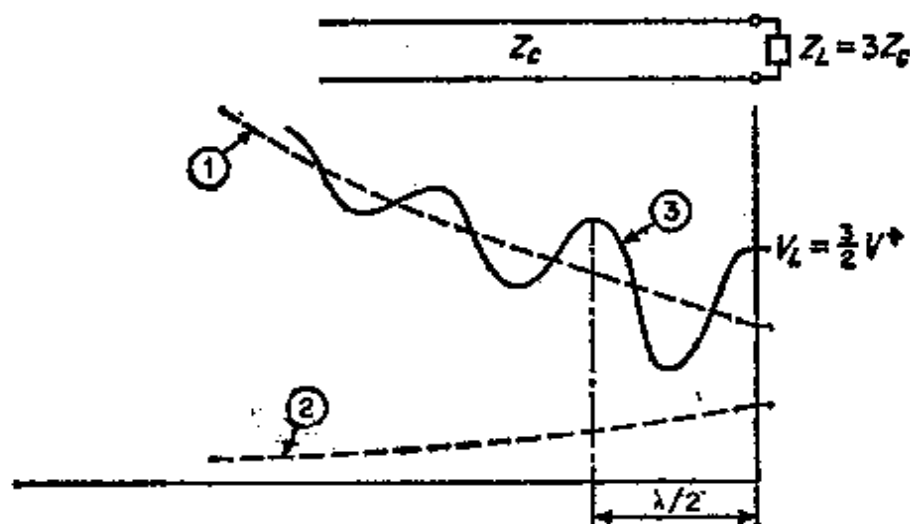


图 3.8 有耗传输线上的电压驻波图 (1) 入射波振幅的包络；(2) 反射波振幅的包络；(3) 驻波图。

如前所述，传送到负载的功率为

$$\begin{aligned} P_L &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V_L I_L^*) = \frac{1}{2} |V_L|^2 Y_L \\ &= \frac{Y_c}{2} |V^+|^2 (1 - |\Gamma_L|^2) \end{aligned} \quad (3.92)$$

在某一点 ( $Z = -l$ ) 上，向负载传送的功率为

$$\begin{aligned}
 P(l) &= \frac{1}{2} R_s (VI^*) = \frac{1}{2} |V|^2 Y_c \\
 &= \frac{Y_c}{2} |V^+ e^{\alpha l}|^2 (1 - |\Gamma(l)|^2) \\
 &= \frac{Y_c}{2} |V^+|^2 (e^{2\alpha l} - |\Gamma_L|^2) \quad (3.93)
 \end{aligned}$$

式中， $|V| e^{\alpha l}$ 已被 $|\Gamma_L|$ 代替。(3.93)式表示的功率，只有相当于(3.92)式表示的 $P_L$ 那一部分送到负载。其余部分在有耗线上损耗了，这一部分为

$$P(l) - P_L = \frac{Y_c}{2} |V^+|^2 (e^{2\alpha l} - 1)$$

### 3.6 矩形波导

如图3.9所示横截面的矩形波导，是不能传播 $TEM$ 波的波导器件之一例。所以，其中不可能存在单值的电压波和电流波。因而，对波导性能的分析，必须作为场的问题处理，而不能作为分布参数电路问题处理。

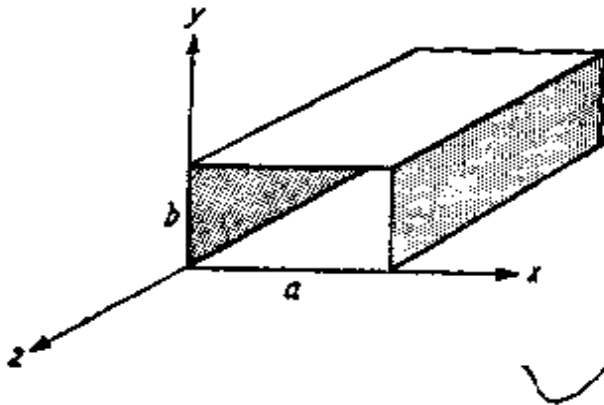


图 3.9 矩形波导

只有在轴向时变磁场存在时，空心波导管中横向电场才能存在。同理，正如麦克斯韦方程所指出的，只有当轴向位移电流或者轴向传导电流存在时，横向磁场才能存在。因为 $TEM$ 波没有任何轴向场分量，且空心波导管没有使传导电流

能在其上流过的中心导体，所以 $TEM$ 波不能在柱形波导中传播。

在空心波导中能维持(传播)的模，是3.1节中讨论过的 $TE$ 和 $TM$ 模。因为各种空心柱形波导的基本特性是相同的，所以，理解

了矩形波导的特性，也为理解其他类型波导的特性提供了基础。如同传输线情况那样，开始时先忽略损耗的影响，然后用前面介绍的微扰法以及波导壁上电流的无耗解，计算出衰减。

详细地分析无耗空心波导的基本性质表明：其中能存在着无限多对 $TE$ 波和 $TM$ 波的可能解。可以用两个整数下标 $n$ 和 $m$ 来标记这些波（或称模），例如 $TE_{nm}$ 波。整数 $n$ 和 $m$ 与场解中沿两个横向坐标上场变化的驻波最大值个数相对应。下面将指出，每个模都与波导的一个特性——截止频率 $f_{c, nm}$ 有关。低于这个频率，这个模就不能传播；高于这个频率，这个模就可以传播。截止频率是取决于波导横截面结构的几何参数。当 $f_c$ 已经被确定时，可以求出传播常数 $\beta$ 为

$$\beta = (k_0^2 - k_c^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.94)$$

式中， $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ ， $k_c = 2\pi f_c \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ 。不难看出，波导波长为

$$\begin{aligned} \lambda_z &= \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \lambda_0^2 / \lambda_c^2}} \\ &= \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - f_c^2 / f^2}} \end{aligned} \quad (3.95)$$

式中， $\lambda_0$ 是频率为 $f = \omega / 2\pi$ 的平面波在自由空间的波长。因为不同模的 $k_c$ 是不同的，所以总是存在只有一个模能传播的较低的频段（除了两个或更多的模具有相同的 $k_c$ 而外）。实际上，当传播的模多于一个时，由于存在着把信号能量耦合到波导中和从波导中取出信号能量这些困难，所以，波导一般几乎总是限于工作在只有主模才能传播的较低频段。后面的这个困难是由于不同模具有不同的相移常数 $\beta$ 值所引起的，因为这意味着当这些模沿波导传播时，信号由不同相的两个或两个以上的模来传送。而这需要在输入端和输出端使用与每个模相应独立的耦合探针，因而使系统更加复杂，而且增加费用。

所有均匀空心波导的另一共同特点是：相速 $v_p$ 大于光速 $c$ ，且为 $c$ 的 $\lambda_z / \lambda_0$ 倍。另一方面，在波导中能量和信号是以群速 $v_g$ 传播的，

它小于光速 $c$ ，且为 $c$ 的 $\lambda_0/\lambda_g$ 倍。同时，因为 $\beta$ （因而也就是 $\lambda_g, v_g$ 和 $v_p$ ）是频率的函数，所以，当任何一个包含几个频率的信号沿波导传播时，在时间和空间上产生色散或扩展。这种色散是由不同频率分量的传播速度不同所引起的。如果波导很长，可以引起很大的信号失真。在3.11节中将详细地讨论群速和信号速度。

在研究了波导的几个一般性质以后，现在需要详细分析上述性质，并得出 $k_c$ 和波导结构的关系，以及功率和衰减的表示式等。首先将研究在无耗空心矩形波导中的 $TE$ 模。

### TE波

对于 $TE$ (或 $H$ )模来说， $e_z=0$ ，其余的场分量可以利用(3.16)式由轴向磁场 $h_z$ 确定。轴向磁场是下列方程的解：

$$\nabla_t^2 h_z + k_c^2 h_z = 0$$

或

$$\frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_z}{\partial y^2} + k_c^2 h_z = 0 \quad (3.96)$$

若假定解为乘积 $h_z = f(x)g(y)$ ，则(3.96)式在用 $fg$ 代替 $h_z$ 且用 $fg$ 除此方程后，便变成

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} + k_c^2 = 0$$

$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2}$ 项只是 $x$ 的函数， $\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2}$ 项只是 $y$ 的函数， $k_c^2$ 是一个常数。所以，只有当每一项是常数时，此方程才适合于所有的 $x$ 和 $y$ 的值。于是可得

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = -k_x^2 \quad \text{或} \quad \frac{d^2 f}{dx^2} + k_x^2 f = 0$$

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} = -k_y^2 \quad \text{或} \quad \frac{d^2 g}{dy^2} + k_y^2 g = 0$$

式中， $k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$ 是为了使三项的总和可以得零。利用分离变量法，把偏微分方程简化为两个通常的二阶简谐方程式，不难得到 $f$ 和 $g$

的解为

$$f = A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x$$

$$g = B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y$$

式中,  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $B_1$ 、 $B_2$ 是任意常数。这些常数和分离常数 $k_x$ 、 $k_y$ 可以由 $h_x$ 所必须满足的边界条件来进一步确定。因为横向磁场 $h$ 的法线分量在理想导电的波导壁上必须为零, 所以(3.16b)式证明, 在波导壁上,  $\mathbf{n} \cdot \nabla h = 0$ , 其中,  $\mathbf{n}$ 是波导壁上的单位法线矢量。当这个条件满足时, 如(3.16c)式所表明的, 在波导壁上 $e$ 的切向分量也将为零。因此,  $h_x$ 需要满足

$$\frac{\partial h_x}{\partial x} = 0 \quad \text{在 } x = 0, a \text{ 处}$$

$$\frac{\partial h_x}{\partial y} = 0 \quad \text{在 } y = 0, b \text{ 处}$$

这里, 波导的横截面取图3.9那样的横截面。在求解 $f$ 时, 边界条件是

$$-k_x A_1 \sin k_x x + k_x A_2 \cos k_x x = 0 \quad \text{在 } x = 0, a \text{ 处。}$$

因而, 由 $x = 0$ 处的条件, 可得 $A_2 = 0$ ; 而在 $x = a$ 处, 必须使 $\sin k_x x = 0$ , 这就规定了 $k_x$ 所能取的值为

$$k_x = \frac{n\pi}{a} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

同理可得  $B_2 = 0$  和

$$k_y = \frac{m\pi}{b} \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$n$ 和 $m$ 两者都等于零使 $h_x$ 的解为常数, 且无其他场分量, 故这种无价值的解是没有意义的。

如果利用上述关系式, 并令 $A_1 B_1 = A_{nm}$ , 则可以看出 $h_x$ 的解为

$$h_x = A_{nm} \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \quad (3.97)$$

其中,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $m = 0, 1, 2, \dots$ ;  $n = m \neq 0$ 。常数



$A_{nm}$ 是与 $nm$ 模相联系的任意振幅常数。 $nm$ 模的截止波数用 $k_{c, nm}$ 表示, 且为

$$k_{c, nm} = \left[ \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.98)$$

显然, 它只是波导尺寸的函数。 $nm$ 模的传播常数为

$$\begin{aligned} \gamma_{nm} &= j\beta_{nm} = j(k_0^2 - k_{c, nm}^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= j \left[ \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 - \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 - \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.99)$$

当 $k_0 > k_{c, nm}$ 时,  $\beta_{nm}$ 是纯实数, 此模可以传播; 若 $k_0 < k_{c, nm}$ , 则 $\gamma_{nm}$ 是实数, 但 $\beta_{nm}$ 是虚数, 而传播因子为 $e^{-\gamma_{nm}|z|}$ , 它表示此模由被激励点起随距离 $|z|$ 很快地衰减。这个衰减与能量损耗无关, 但它是这种解的一个特点。这种衰减(或凋落)模可以用来表示局部绕射场或边缘场, 这些场存在于波导中耦合探针和障碍物的附近。把区分传播波段和非传播波段的频率定义为截止频率 $f_{c, nm}$ 。它由 $k_0 = k_{c, nm}$ 的解得到, 即

$$\begin{aligned} f_{c, nm} &= \frac{c}{\lambda_{c, nm}} = \frac{c}{2\pi} k_{c, nm} \\ &= \frac{c}{2\pi} \left[ \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.100)$$

式中,  $c$ 是光速。相应的截止波长为

$$\lambda_{c, nm} = \frac{2ab}{(n^2b^2 + m^2a^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.101)$$

可能有 $a = 2b$ 这样一种典型波导, 此时有

$$\lambda_{c, nm} = \frac{2a}{(n^2 + 4m^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$\lambda_{c, 10} = 2a$ ;  $\lambda_{c, 01} = a$ ;  $\lambda_{c, 11} = 2a/\sqrt{5}$ 等。在这个例子中, 存在一个由 $a$ 到 $2a$ 的波段, 即只有 $H_{10}$ 波能传播的频段为

$$\frac{c}{2a} < f < \frac{c}{a}$$

$H_{10}$ 波是矩形波导中的主模，并且在实际中最常用。因为当频率高于 $c/a$ 时，其他模就可以传播，所以此时有用频段是 $c/2a$ 到 $c/a$ 的一次倍频程。

利用(3.16)式，不难由(3.97)式求出 $TE_{nm}$ 或 $H_{nm}$ 模的其余分量。 $nm$ 模的完整解为

$$H_x = A_{nm} \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} e^{\mp j\beta_{nm}z} \quad (3.102a)$$

$$H_z = \pm j \frac{\beta_{nm}}{k_{c, nm}^2} A_{nm} \frac{n\pi}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \times \cos \frac{m\pi y}{b} e^{\mp j\beta_{nm}z} \quad (3.102b)$$

$$H_y = \pm j \frac{\beta_{nm}}{k_{c, nm}^2} A_{nm} \frac{m\pi}{b} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} e^{\mp j\beta_{nm}z} \quad (3.102c)$$

$$E_x = Z_{h, nm} A_{nm} j \frac{\beta_{nm}}{k_{c, nm}^2} \frac{m\pi}{b} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} e^{\mp j\beta_{nm}z} \quad (3.102d)$$

$$E_y = -Z_{h, nm} A_{nm} j \frac{\beta_{nm}}{k_{c, nm}^2} \frac{n\pi}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} e^{\mp j\beta_{nm}z} \quad (3.102e)$$

式中， $nm$ 模的波阻抗为

$$Z_{h, nm} = \frac{k_0}{\beta_{nm}} Z_0 \quad (3.103)$$

对于不传播的模， $Z_{h, nm}$ 为虚数，这就表明：没有与渐消失衰减模相联系的净能流。利用所有 $H_{nm}$ 模场的线性迭加，可以完整地表示全部 $E_z = 0$ 的场。

## 功率

向正 Z 方向传播的  $H_{nm}$  模的功率（即能流密度）为

$$\begin{aligned}
 P_{nm} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^a \int_0^b \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{a}_z dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^a \int_0^b (E_x H_y^* - E_y H_x^*) dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} Z_{h, nm} \int_0^a \int_0^b (H_x H_y^* + H_y H_x^*) dx dy
 \end{aligned} \tag{3.104}$$

若用(3.102b)式和(3.102c)式代入，并注意到

$$\begin{aligned}
 &\int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{n\pi x}{a} \cos^2 \frac{m\pi y}{b} dx dy \\
 &= \int_0^a \int_0^b \cos^2 \frac{n\pi x}{a} \sin^2 \frac{m\pi y}{b} dx dy \\
 &= \begin{cases} \frac{ab}{4}, & n \neq 0, m \neq 0 \\ \frac{ab}{2}, & n \text{ 或 } m = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

则得

$$\begin{aligned}
 P_{nm} &= |A_{nm}|^2 \frac{ab}{\epsilon_{0n} \epsilon_{0m}} \frac{\beta_{nm}^2}{k_{c, nm}^4} Z_{h, nm} \\
 &\quad \times \left[ \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{|A_{nm}|^2 ab}{\epsilon_{0n} \epsilon_{0m}} \left( \frac{\beta_{nm}}{k_{c, nm}} \right)^2 Z_{h, nm}
 \end{aligned} \tag{3.105}$$

式中， $\epsilon_{0m}$  是诺埃曼系数，它在  $m=0$  时等于 1；在  $m>0$  时等于 2。

若两个模（比如说  $H_{nm}$  和  $H_{rs}$  模）同时存在，则可看出，功率是每一个单独的模所贡献的功率之和，即为  $P_{nm} + P_{rs}$ 。这是无耗波

导的一般性质，下一节将详细地讨论。这个功率的正交性得自当在波导横截面上积分时，描述场的横向变化的函数（本征函数）的正交性，例如，

$$\int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{r\pi x}{a} dx = 0 \quad n \neq r \text{ 时}$$

除开出现两个或两个以上的简并模的情况以外，即使有小损耗，能流都可以用每一个单独模所贡献的来求和，而引起的误差可以忽略。简并模就是具有同样传播常数 $\gamma$ 的模。当出现简并模时，即使在小损耗的情况下，也可能在这些模之间引起强耦合。在3.10节中将更全面地解释这种现象。

### 衰减

若波导壁的电导率为有限值，则当波沿波导传播时，将不断地有功率损耗在波导壁上。因而，相移常数 $j\beta$ 将受到扰动，而变成 $\gamma = \alpha + j\beta$ ，其中， $\alpha$ 是衰减常数，它表示当此波沿波导行进时，其振幅衰减的快慢。对实际的波导来说，由有限电导率引起的损耗是很小的，可以利用在3.2节中介绍过的关于有耗传输线的微扰法，来计算其衰减常数\*。虽然下面只以主模 $H_{10}$ 波为例来介绍计算衰减的方法，但对 $H_{mn}$ 和 $E_{mn}$ 模来说，其差别只在于需要更多的代数运算。

根据(3.102)式，可得 $H_{10}$ 波的场为（不计因子 $e^{-j\beta z}$ ）

$$h_x = A_{10} \cos \frac{\pi x}{a}$$

$$h_z = j \frac{\beta_{10}}{k_{c,10}^2} A_{10} \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$e_z = -Z_{0,10} A_{10} \frac{j\beta_{10}}{k_{c,10}^2} \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x}{a}$$

由(3.105)式得到沿波导的能流密度为

\* 有简并模时，需要作些修正，3.10节讨论了这种情况。

$$P_{10} = |A_{10}|^2 \frac{ab}{2} \left( \frac{\beta_{10}}{k_{c,10}} \right)^2 Z_{k,10}$$

若假定在有损耗波导壁上的电流与无损耗时的电流相同, 则

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$$

式中,  $\mathbf{n}$  是波导壁上的单位内法线。于是, 在波导壁  $x = 0, a$  处, 表面电流为

$$\mathbf{J}_s = \begin{cases} \mathbf{a}_y \times \mathbf{H} = -\mathbf{a}_y A_{10}, & x = 0 \text{ 处} \\ -\mathbf{a}_x \times \mathbf{H} = -\mathbf{a}_x A_{10}, & x = a \text{ 处} \end{cases}$$

而在上下两波导壁上的电流为

$$\mathbf{J}_s = \begin{cases} \mathbf{a}_y \times \mathbf{H} = -\mathbf{a}_y \frac{j\beta_{10}}{k_{c,10}^2} A_{10} \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \\ \quad + \mathbf{a}_x A_{10} \cos \frac{\pi x}{a} & y = 0 \\ -\mathbf{a}_y \times \mathbf{H} = \mathbf{a}_y \frac{j\beta_{10}}{k_{c,10}^2} A_{10} \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \\ \quad - \mathbf{a}_x A_{10} \cos \frac{\pi x}{a} & y = b \end{cases}$$

当电导率  $\sigma$  为有限值时, 波导壁的表面阻抗为

$$Z_m = \frac{1 + j}{\sigma \delta_s} = (1 + j) R_m$$

式中,  $\delta_s$  是趋肤深度。在每单位长度波导上  $Z_m$  的电阻部分  $R_m$  中的功率损耗为

$$\begin{aligned} P_l &= \frac{R_m}{2} \oint_{\text{波导壁}} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{J}_s^* dl \\ &= \frac{R_m |A_{10}|^2}{2} \left( 2 \int_0^b dy + 2 \int_0^a \frac{\beta_{10}^2 \pi^2}{k_{c,10}^4 a^2} \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_0^a \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx \right) \end{aligned}$$

因为  $k_{c,10} = \pi/a$ , 所以上式为

$$P_z = R_m |A_{10}|^2 \left[ b + \frac{a}{2} \left( \frac{\beta_{10}}{k_{c,10}} \right)^2 + \frac{a}{2} \right]$$

若  $P_0$  为  $Z=0$  处的功率，则  $P_{10} = P_0 e^{-2\alpha z}$  为波导中任一点  $z$  处的功率。所以，传播功率的减少率为

$$-\frac{dP_{10}}{dz} = 2\alpha P_{10} = P_t$$

它等于上述方程所表示的功率损耗。于是， $H_{10}$  波的衰减常数  $\alpha$  为

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{P_t}{2P_{10}} = \frac{R_m \left[ b + \frac{a}{2} \left( \frac{\beta_{10}}{k_{c,10}} \right)^2 + \frac{a}{2} \right]}{ab \left( \frac{\beta_{10}}{k_{c,10}} \right)^2 Z_{A,10}} \\ &= \frac{R_m}{ab\beta_{10}k_0 Z_0} (2bk_{c,10}^2 + ak_0^2) \quad \text{奈贝/米} \end{aligned}$$

(3.106)

其他的  $TE_{nm}$  模的衰减由表 3.2 给出。此表归纳了  $TE_{nm}$  和  $TM_{nm}$  模的解。图 3.10 中表示了铜制矩形波导中  $H_{10}$  波衰减随频率变化的曲线。把奈贝变换为分贝要乘以 8.7。

衰减的理论公式所得结果与实验数据，在频率低于 5000 兆赫左右时是相符的。对于较高的频率， $d$  的测量值比理论值高得多，且与波导表面的平滑程度有关。如果表面呈现的不平与趋肤深度  $\delta_s$  为同一量级，则

不难理解，有效表面积越大，损耗就越大。适当地抛光波导表面，

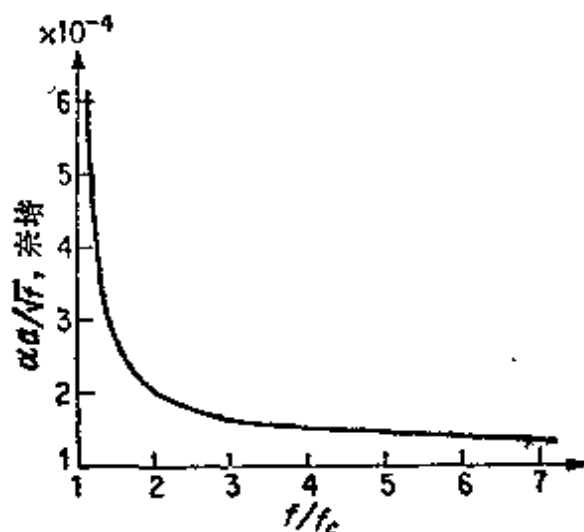


图 3.10 在铜制矩形波导 ( $a=2b$ ) 中， $H_{10}$  波的衰减曲线 ( $f$  以  $10^{10}$  赫为单位)

表3.2 矩形波导中模的特性

	TE模	TM模
$H_z$	$\cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} e^{-i\beta_{nm}z}$	0
$E_z$	0	$\sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} e^{-i\beta_{nm}z}$
$E_x$	$Z_{H, nm} H_y$	$-\frac{j\beta_{nm} m\pi}{ak_c^2 \epsilon_{0, nm}} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} e^{-i\beta_{nm}z}$
$E_y$	$-Z_{E, nm} H_x$	$\frac{j\beta_{nm} m\pi}{bk_c^2 \epsilon_{0, nm}} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} e^{-i\beta_{nm}z}$
$H_x$	$\frac{j\beta_{nm} m\pi}{ak_c^2 \epsilon_{0, nm}} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} e^{-i\beta_{nm}z}$	$-\frac{E_y}{Z_{E, nm}}$
$H_y$	$\frac{j\beta_{nm} m\pi}{bk_c^2 \epsilon_{0, nm}} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} e^{-i\beta_{nm}z}$	$\frac{E_x}{Z_{E, nm}}$
$Z_{H, nm}$	$\frac{k_0}{\beta_{nm}} Z_0$	
$Z_{E, nm}$		$-\frac{\beta_{nm}}{k_0} Z_0$
$k_{c, nm}$		$\left[ \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^{1/2}$
$\beta_{nm}$		$(k_0^2 - k_{c, nm}^2)^{1/2}$
$\lambda_{c, nm}$		$\frac{2ab}{(n^2 b^2 + m^2 a^2)^{1/2}}$
$\alpha$	$\frac{2R_m}{bZ_0(1-k_{c, nm}^2/k_0^2)^{1/2}}$	$\frac{2R_m}{bZ_0(1-k_{c, nm}^2/k_0^2)^{1/2}} \frac{n^2 b^3 + m^2 a^3}{n^2 b^2 a + m^2 a^2}$

\*  $R_m = (\omega\mu_0/2\sigma)^{1/2}$ 。当  $m=0$  时,  $\epsilon_{0, nm}=1$ ; 当  $m>0$  时,  $\epsilon_{0, nm}=2$ 。对简并模,  $\alpha$  的表示式不成立。

衰减的实验值与其理论值就大体一致了\*。

### 主模 $TE_{10}$ 波

因为在矩形波导中 $TE_{10}$ 波是主模，而且也是最常用的模，所以较详细地研究这种模是适当的。根据前面得到的结果，这种模的场分量可表示如下（假定向 $+z$ 方向传播）：

$$H_x = A \cos \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z} \quad (3.107a)$$

$$H_z = -\frac{j\beta}{k_c} A \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z} \quad (3.107b)$$

$$E_y = -jZ_1 \frac{\beta}{k_c} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z} \quad (3.107c)$$

因为只对 $TE_{10}$ 波进行讨论，所以，为了方便，已经把下标10去掉了。其参数 $\beta$ 、 $k_c$ 和 $Z_1$ 为

$$k_c = \frac{\pi}{a} \quad (3.108a)$$

$$\beta = \left[ k_0^2 - \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.108b)$$

$$Z_1 = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{k_0}{\beta} Z_0 \quad (3.108c)$$

因为截止波长为 $\lambda_c = 2a$ ，故其波导波长 $\lambda_g$ 为

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda_0}{\left[ 1 - (\lambda/2a)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.108d)$$

相速和群速为

$$v_p = \frac{\lambda_g}{\lambda_0} c \quad (3.108e)$$

\* 参看 J. Allison and F. A. Benson, *Surface Roughness and Attenuation of Precision Drawn, Chemically Polished, Electropolished, Electroplated and Electroformed Waveguide*, Proc. IEE (London), Vol. 102, pt. B, pp. 251—259, 1955.



$$v_g = \frac{\lambda_0}{\lambda_g} c \quad (3.108f)$$

在3.11节中将详细地讨论它们。

图3.11中表示 $TE_{10}$ 波的磁力线和电力线。应当指出，因为磁力线环绕着电力线，所以电力线(位移电流)可以认为是磁场的场源。另一方面，电力线终止于分布在上下波导壁内表面的电荷上。此电荷在轴向上和横向上来回振荡，形成了轴向和横向传导电流，而使位移电流得以连续。总电流(位移电流加传导电流)形成了磁力线的闭合磁链，而位移电流和传导电流又可以认为是由围绕它们而变化的磁通所产生。完成这样一种电场和磁场之间应有的相互支持作用，是波的传播所需要的。

$TE_{10}$ 波可以分解为在 $x = 0$ 和 $x = a$ 两波导壁之间沿曲折路

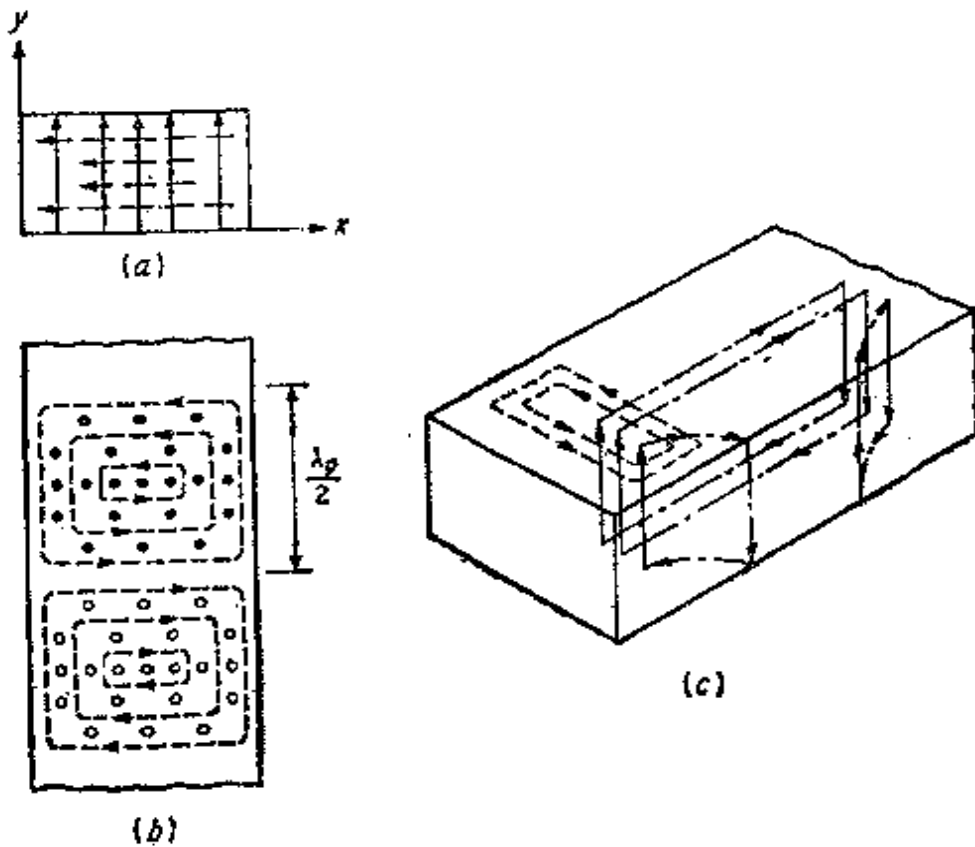


图 3.11  $TE_{10}$ 波的磁力线和电力线，(a)横截面；(b)俯视图；(c)总电流与磁力线彼此交链

径传播的两个平面 $TEM$ 波之和，如图3.12所示。其电场为

$$E_y = -\frac{Z_0}{2} \frac{\beta}{k_z} (e^{i\pi x/a - i\beta z} - e^{-i\pi x/a - i\beta z})$$

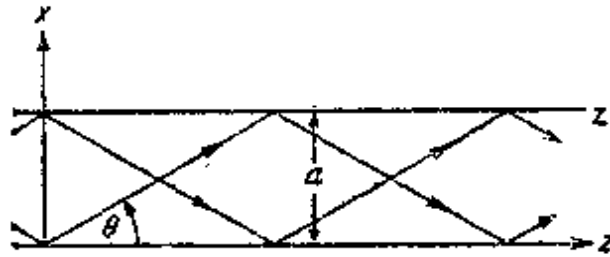


图 3.12  $TE_{10}$ 波分解成为两个平面波

若  $\pi/a$  和  $\beta$  的表示式为

$$\frac{\pi}{a} = k_0 \sin\theta \quad \beta = k_0 \cos\theta$$

则关系式  $(\pi/a)^2 + \beta^2 = k^2$  仍成立。所以其电场为

$$E_y = \frac{Z_0}{2} \frac{\beta}{k_z} (e^{-ik_0(x \sin\theta + z \cos\theta)} - e^{-ik_0(-x \sin\theta + z \cos\theta)})$$

它显然是与  $z$  轴成  $\pm\theta$  角方向传播的两个平面波，如图所示。换言之，可以把它看作在两个波导壁之间来回反射的平面波。如 2.7 节所指出的那样，与这些斜向传播平面波相联系的等相位面在  $z$  方向以相速  $c/\cos\theta = \beta c/k_0$  移动，这就是  $TE_{10}$  波的相速为什么超过光速的原因。因为  $TEM$  波的能量在平面波传播方向上以速度  $c$  传播，所以此能量在波导中传播的速度，等于  $c$  沿  $z$  轴上的分量。此分量为  $v_g = c \cos\theta = (k_0/\beta)c$ ，即为  $TE_{10}$  波的群速。当  $\theta = \pi/2$  时，平面波来回反射，但不能沿波导前进，从而使此模截止。

上述把  $TE_{10}$  波分解为两个平面波的方法，也可推广到  $TE_{nm}$  模中去。当  $n$  和  $m$  两者都不为零时，可得到四个平面波，虽然用平面波迭加去组成矩形波导场的解，是一个比较麻烦的方法。但是，它有助于理解相速为什么超过光速，以及这些模的其他性质。

## TM波

TM波的 $h_z$ 等于零，而 $e_z$ 起位函数的作用，其余的场分量可以由它导出。这个轴向场满足化简的亥姆霍兹方程：

$$\nabla_t^2 e_z + k_c^2 e_z = 0 \quad (3.109)$$

它与前面遇到的 $h_z$ 的亥姆霍兹方程(即(3.96)式)是同类型的。利用分离变量法可以求出它的解。在此情况下，边界条件要求 $e_z$ 在 $x=0$ 、 $a$ 和 $y=0$ 、 $b$ 处为零。这个条件要求 $e_z$ 的解为

$$e_z = A_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (3.110)$$

而代替适用于描述 $h_z$ 的余弦函数的乘积。同理，对应于不同的整数 $n$ 和 $m$ ，也具有无限多对解。但是，与TE波的解不相同的是： $n$ 和 $m$ 都等于零时没有解。截止波数与TE模的表示式相同，即

$$k_{c, nm} = \left[ \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.111)$$

其传播常数 $\beta_{nm}$ 为

$$\beta_{nm} = (k_0^2 - k_{c, nm}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.112)$$

最低阶的传播模为 $n=m=1$ 的模，其截止波长为 $2ab/(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$ 。应当指出，由于 $TE_{10}$ 波可以在较低的频率(较长的波长)下传播，因而证明它是主模\*。同时，必须指出，具有同样的 $n$ 和 $m$ 的 $TE_{nm}$ 和 $TM_{nm}$ 模，由于它们具有相同的传播常数，而成为简并模。另一种简并发生在 $a=b$ 时，在此情况下， $TE_{nm}$ 、 $TE_{mn}$ 、 $TM_{nm}$ 和 $TM_{mn}$ 四种模都有同样的传播常数。再一种简并在 $a$ 为 $b$ 的整数倍(或者 $b$ 为 $a$ 的整数倍)时出现。

利用3.1节得出的一般表示式(3.17)，不难得出TM模其余的解。表3.2中归纳了这些解。TM模与TE模是对偶的。并且除了

\* 在任何空心波导中，主模总是TE模。因为对TM模来说，边界条件 $e_z=0$ 总是要求其 $e_z$ 在横向平面上比最低阶TE模的 $h_z$ 具有较大的空间变化，从而使 $k_c$ 的最小值出现在TE模。因而，TE模有最低的截止频率，即它为主模。

稍有差别以外，基本上具有同样的性质。因此，不需要重复前面的讨论。

### 3.7 圆 波 导

图3.13表示半径为  $a$  的圆截面柱形波导。鉴于它涉及到圆柱形，故用圆柱坐标来分析最合适。由于圆波导的模所具有的一般性质类似于矩形波导，所以这一节不作详细讨论。

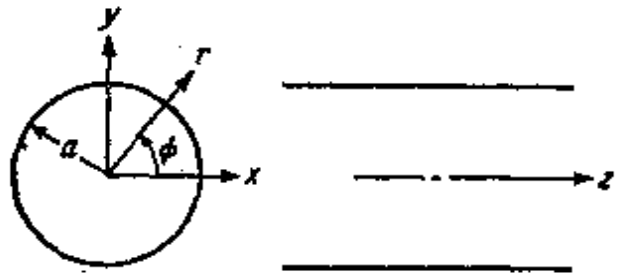


图 3.13 圆柱形波导

#### TM模

对  $TM$  模来说，要求方程式

$$\nabla_t^2 e_z + k_c^2 e_z = 0$$

的解  $e_z$  在  $r=a$  处为零。当我们把横向拉普拉斯算符  $\nabla_t^2$  用圆柱坐标（见附录 I）表示时，此方程变成

$$\frac{\partial^2 e_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial e_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 e_z}{\partial \varphi^2} + k_c^2 e_z = 0 \quad (3.113)$$

用分离变量法可把上述方程式化为两个常微分方程。因而，假定乘积  $f(r)g(\varphi)$  等于  $e_z$ ，把此  $e_z$  代入 (3.113) 式，并用  $fg$  除方程得

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{rf} \frac{df}{dr} + \frac{1}{r^2 g} \frac{d^2 g}{d\varphi^2} + k_c^2 = 0$$

用  $r^2$  去乘上式得

$$\frac{r^2}{f} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{r}{f} \frac{df}{dr} + r^2 k_c^2 = - \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\varphi^2}$$

上式左边只是  $r$  的函数，而右边只取决于  $\varphi$ 。因此，这个方程式只有当两边都等于某一常数  $\nu^2$  时，才能对变量的所有值都满足。因而可以把 (3.113) 式分离为如下的两个方程式：

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \left( k_c^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) f = 0 \quad (3.114a)$$

$$\frac{d^2 g}{d\varphi^2} + \nu^2 g = 0 \quad (3.114b)$$

在这种情况下，波导内的场随  $\varphi$  的变化必须以  $2\pi$  为周期，才是单值的。这就必须选  $\nu$  等于整数  $n$ ，此时，(3.114b) 式的通解为

$$g(\varphi) = A_1 \cos n\varphi + A_2 \sin n\varphi$$

式中， $A_1$  和  $A_2$  为任意常数。

(3.114a) 式是贝塞尔微分方程式，它有  $J_\nu(k_c r)$  和  $Y_\nu(k_c r)$  两个解（一个二阶微分方程总是有两个独立的解）， $J_\nu(k_c r)$  和  $Y_\nu(k_c r)$  分别称为  $\nu$  阶第一类贝塞尔函数和第二类贝塞尔函数\*。对于这里所研究的问题来说，因为  $Y_\nu(k_c r)$  在  $r=0$  处为无限大，所以，只有  $J_\nu(k_c r)$  是实际上可能的解。 $e_r$  的最终解于是可表示为

$$e_r(r, \varphi) = (A_1 \cos n\varphi + A_2 \sin n\varphi) J_\nu(k_c r) \quad (3.115)$$

附录 II 中指出： $J_\nu(x)$  的特性像一个阻尼正弦函数，并以准周期方式通过零点。因为在  $r=a$  处  $e_r$  必须为零，故必须这样选  $k_c a$ ，即，使  $J_\nu(k_c a) = 0$ 。设用  $p_{\nu m}$  表示方程  $J_\nu(x) = 0$  的第  $m$  个根，则  $k_c$  的允许值（本征值）为

$$k_{c, \nu m} = \frac{p_{\nu m}}{a} \quad (3.116)$$

表 3.3 给出了前三种模 ( $n=0, 1, 2$ ) 的  $p_{\nu m}$  值。如同在矩形波导的情况那样，圆波导也有无限多对解。

每一组  $n$  和  $m$ ，都对应着一种特定的  $TM_{nm}$  模（本征函数）。整数  $n$  表示场沿圆周的变化次数，而  $m$  表示场沿径向的变化次数。 $nm$  模的传播常数为

$$\beta_{nm} = \left( k_0^2 - \frac{p_{\nu m}^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.117)$$

\*  $Y_\nu$  也叫做诺埃曼函数。

表 3.3

TM 模  $p_{nm}$  的值

$n$	$p_{n1}$	$p_{n2}$	$p_{n3}$
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620

截止波长为

$$\lambda_{c, nm} = \frac{2\pi a}{p_{nm}} \quad (3.118)$$

波阻抗为

$$Z_{e, nm} = \frac{p_{nm}}{k_0} Z_0 \quad (3.119)$$

截止现象与矩形波导中存在的情况相似。TM 主模的  $\lambda_c = 2\pi a / p_{01} = 2.61 a$  它比波导直径大 30%。

利用一般式 (3.17) 可以导出其余场分量的表示式。能流和衰减也可用类似于矩形波导中所使用的那些方法确定。表 3.4 总结了这些结果。

### TE 模

TE 模的解，除了边界条件要求在  $r=a$  处  $\partial h_z / \partial r$  为零外，其余都与 TM 模相似。合适的  $h_z$  的解为

$$h_z(r, \varphi) = (B_1 \cos n\varphi + B_2 \sin n\varphi) J_n(kr) \quad (3.120)$$

并要求

$$\frac{dJ_n(kr)}{dr} = 0 \quad \text{在 } r=a \text{ 处} \quad (3.121)$$

因为 (3.121) 式的根用  $p'_{nm}$  表示，所以本征值  $k_{c, nm}$  为

$$k_{c, nm} = \frac{p'_{nm}}{a} \quad (3.122)$$

表 3.5 列出了头几个模根的值。必须注意，由于  $dJ_0(x)/dx = -J_1$

表 3.4

圆波导中各模的特性

TE 模		TM 模	
$H_z$	$J_n \left( \frac{p'_{nm} r}{a} \right) e^{-j\beta_{nm} z} \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}$	0	
$E_z$	0	$J_n \left( \frac{p_{nm} r}{a} \right) e^{-j\beta_{nm} z} \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}$	
$H_r$	$-\frac{j\beta_{nm} p'_{nm}}{ak_c^2} J_n' \left( \frac{p'_{nm} r}{a} \right) e^{-j\beta_{nm} z} \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}$	$-\frac{E_\varphi}{Z_{c, nm}}$	
$H_\varphi$	$-\frac{jn\beta_{nm}}{rk_c^2} J_n \left( \frac{p'_{nm} r}{a} \right) e^{-j\beta_{nm} z} \begin{cases} -\sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{cases}$	$-\frac{E_r}{Z_{c, nm}}$	
$E_r$	$Z_{h, nm} H_\varphi$	$-\frac{j\beta_{nm} p_{nm}}{ak_c^2} J_n' \left( \frac{p_{nm} r}{a} \right) e^{-j\beta_{nm} z} \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}$	
$E_\varphi$	$-Z_{h, nm} H_r$	$-\frac{jn\beta_{nm}}{rk_c^2} J_n \left( \frac{p_{nm} r}{a} \right) e^{-j\beta_{nm} z} \begin{cases} -\sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{cases}$	
$\beta_{nm}$	$\left[ k_0^2 - \left( \frac{p'_{nm}}{a} \right)^2 \right]^{1/2}$	$\left[ k_0^2 - \left( \frac{p_{nm}}{a} \right)^2 \right]^{1/2}$	
$Z_{h, nm}$	$-\frac{k_0}{\beta_{nm}} Z_0$		
$Z_{c, nm}$		$\frac{\beta_{nm}}{k_0} Z_0$	
$k_{c, nm}$	$\frac{p'_{nm}}{a}$	$\frac{p_{nm}}{a}$	
$\lambda_{c, nm}$	$\frac{2\pi a}{p'_{nm}}$	$\frac{2\pi a}{p_{nm}}$	
功率	$\frac{Z_0 k_0 \beta_{nm} \pi}{4k_c^4} (p'_{nm})^2 - n^2 J_n^2(p'_{nm})$	$\frac{r_0 k_0 \beta_{nm} \pi}{4k_c^4} p_{nm}^2 [J_n'(k_{c, nm} a)]^2$	
$Q$	$\frac{R_r}{a Z_0} \left( 1 - \frac{k_{c, nm}^2}{k_0^2} \right)^{-1/2} \left[ \frac{k_{c, nm}^2}{k_0^2} + \frac{n^2}{(p'_{nm})^2 - n^2} \right]$	$\frac{R_m}{a Z_0} \left( 1 - \frac{k_{c, nm}^2}{k_0^2} \right)^{-1/2}$	

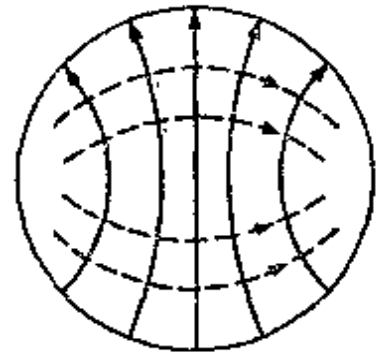
表 3.5

TE 模  $p'_{cm}$  的值

$n$	$p'n^1$	$p'n^2$	$p'n^3$
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970

( $x$ ), 故  $p'_{0m} = p'_{1m}$ , 可见,  $TE_{0m}$  和  $TM_{1m}$  模是简并的。

首先应用的 TE 模是  $TE_{11}$  模, 它的截止波长为  $\lambda_{c,11} = 3.41a$ 。可见, 这种模是圆波导的主模, 是一种常用的模。图 3.14 是这种模在横向平面上的场力线图。



若对 TE 模衰减常数的表示式进行研究, 就会看到,  $TE_{cm}$  模的衰减常数为 图 3.14 圆波导中  $TE_{11}$  模的场力线

$$\alpha = \frac{R_m}{aZ_0} \frac{f_{c,0m}^3}{f(f^2 - f_{c,0m}^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.123)$$

且  $\alpha$  随频率的升高按  $f^{-\frac{5}{2}}$  下降 (因为  $R_m$  按  $f^{\frac{1}{2}}$  上升)。随频率增大而衰减急速下降是圆波导中  $TE_{0m}$  模的独特性质, 它为建立远距离低损耗波导通信线路提供了可能性\*。图 3.15 画出了铜波导中  $TE_{0m}$  波的衰减 (以分贝表示) 随频率变化的曲线。虽然工作频率大大超过截止频率  $f_{c,01}$  时达到很低的衰减, 但是, 会遇到某些实际困难, 它使这些波导的实际性能劣于理论预测值。这些实际困难来自波导的工作频率远超过主模  $TE_{11}$  模的截止频率, 即它工作在许多模都能传播的频率范围内。波导中任何一点微小的不规则, 都将使  $TE_{01}$  模的某些功率转变为其他模 (模变换) 的功率。模变换引起两个严重的后果。最明显的后果是: 当一部分  $TE_{01}$  模的功率转移到衰减

\* S.E. Miller, *Waveguide as a Communication Medium*, Bell System Tech. J., Vol. 33, pp. 1209—1265, November, 1954; also *Millimeter Waves in Communications*, Proc. Symp. Millimeter Waves, Polytechnic Institute of Brooklyn, New York, 1959, pp. 25—43.



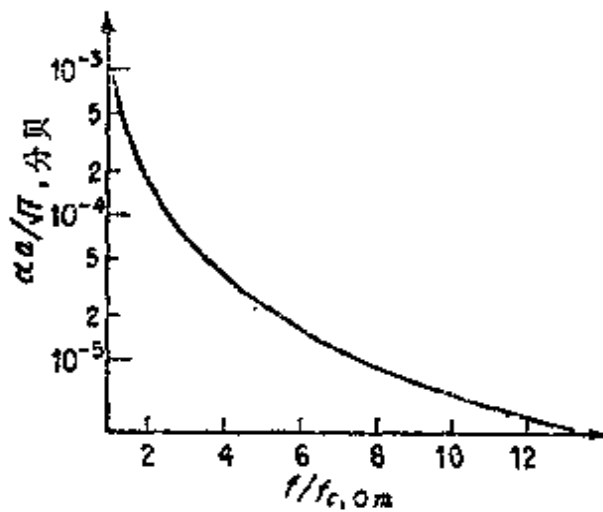


图 3.15 钢制圆波导中低损耗的  $TE_{0m}$  模的衰减 ( $f$  以  $10^{10}$  赫为单位,  $f_{c,10} = 1.83 \times 10^{10}/a$  赫,  $a$  为以厘米为单位的半径)

更快的其他模上时,所希望传播的  $TE_{0,1}$  模就会产生功率损耗。更严重的后果是  $TE_{0,1}$  模的功率转变为具有不同相移常数的其他模的功率,并在沿波导更远的地方又转变回来成为  $TE_{0,1}$  模,从而引起信号失真。为了避免模的转换和再转换引起的信号失真,要求波导对无用的模要有很大的衰减,使这些模急速地衰减掉,而不转换回来变成  $TE_{0,1}$  模。与  $TE_{0m}$  模相联系的电流只沿圆周的方向

流动。这个性质可以利用来做模滤波器,以抑制具有沿波导轴向流动的电流的模。在圆周方向具有高电导率和在轴向具有低电导率的特殊波导衬里,已经用来作为模抑制器。另一个很有希望的技术,是使用绕在适当的支撑外套上的小螺距螺线作成的波导。这种螺旋波导在轴向具有很低电导率,而沿圆周方向的电导率基本上与圆柱波导壁一样\*。

\* S.P.Morgan and J.A.Young, *Helix Waveguide*, Bell System Tech. J., Vol.35, pp.1347-1384, November, 1956.

J.A.Morrison, *Heat Loss of Circular Electric Waves in Helix Waveguides*, IRE Trans., Vol.MTT-6, pp.173-177, April, 1958.

T.Hosono and S.Kohno, *The Transmission of TE<sub>01</sub> Waves in Helix Waveguides*, IRE Trans., Vol.MTT-7, pp.370-373, July, 1959.

G.W.Luderer and H.G.Unger, *Circular Electric Wave Propagation in Periodic Structures*, Bell System Tech.J., Vol.43, pp.755-783, March, 1964.

## ★3.8 表面波波导

前两节讨论过的矩形波导和圆波导是封闭波导的示例。另一类波导（一般称为开波导）的特征是边界外有场存在。这些波导所传播的模叫表面波。表面波波导有介质杆、涂介质的导线、置于导电板上的介质片、皱折导电柱体等等\*。表面波的场在垂直于波导结构的方向上按指数律衰减。在较短的波长下，会得到一个足够强的局部场，使波导的有效尺寸小到足以具有实际的使用价值。因而，表面波波导在毫米波范围内的应用是具有重要意义的。当然，在亚毫米波和光学的范围内，制作空心管状波导是困难的或者是不可能的。这一节对表面波波导作简短的介绍，更进一步的说明，可以在其他资料中找到\*\*。

### 涂介质平面上的表面波\*\*

最简单的表面波结构之一是由在无限大导电平面上放一厚度为

\* 例如，参看：

C.H.Chandler, *An Investigation of Dielectric Rod as a Wave Guide*, *J. Appl. Phys.*, Vol.20, pp.1188-1192, December, 1949.

S.P.Schlesinger and D.D.King, *Dielectric Image Lines*, *IRE Trans.*, Vol.MTT-6, pp.291-299, July, 1958.

R.S.Elliott, *On the Theory of Corrugated Plane Surfaces*, *IRE Trans.*, Vol.AP-2, pp.71-81, April, 1954.

H.E.M.Barlow and A.E.Korbowski, *An Experimental Investigation of the Properties of Corrugated Cylindrical Surface Waveguides*, *Proc.IEE*, Vol.101, pt.5, pp.182-188, May, 1954.

M.Cohn, *TE Modes of the Dielectric Loaded Trough Line*, *IRE Trans.*, Vol.MTT-8, pp.449-454, July, 1960.

\*\* R.E.Callin, *Field Theory of Guided Waves*, Chap.11, McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.

H.E.M.Barlow and J.Brown, *Radio Surface Waves*, Oxford University Press, Fair Lawn, N.J., 1962.

\*\*\* S.S.Attwood, *Surface Wave Propagation over a Coated Plane Conductor*, *J. Appl. Phys.*, Vol.22, pp.504-509, April, 1954.

$t$  的介质薄片而构成的，如图 3.16 所示。下面求  $TM$  模 ( $H_x = 0$ ，且其场不随  $y$  变化) 的解。在介质中，用  $k_d$  表示  $k_e$ ，而在  $x > t$  的空间区域，令  $k_e$  等于  $jh$ ，其轴向电场  $e_x$  是下式的解：

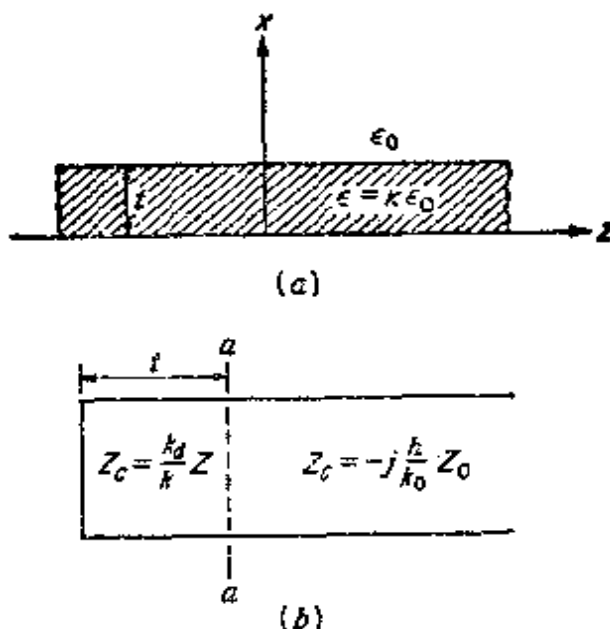


图 3.16 (a) 涂介质的平面；(b) 横截面的等效电路

$$\nabla_t^2 e_x + k_e^2 e_x = 0$$

或

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial x^2} + k_d^2 e_x = 0 \quad 0 < x < t \quad (3.124a)$$

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial x^2} - h^2 e_x = 0 \quad x > t \quad (3.124b)$$

因为  $k_e^2 = k^2 - \beta^2$ ，其中， $k = \omega(\mu\epsilon)^{\frac{1}{2}}$ ，而  $k$  与媒质有关，所以在这两个区域内，截止波数  $k_e$  必定是不同的。在这两个区域中，(3.124) 式的正确解应使得导电平面上  $x = 0$  处和  $x$  趋于无穷远处的  $e_x$  为零，这些解是：

$$e_x = A \sin k_d x \quad 0 < x < t \quad (3.125a)$$

$$e_x = B e^{-hx} \quad x > t \quad (3.125b)$$

式中， $A$  和  $B$  是常数。在空气区域选  $k_e = jh$  的原因，就是希望得到

随着  $x$  的增大而作如 (3.125b) 式那样变化的衰减场。在空气——介质边界  $x = t$  处，所有  $z$  值的切向电场和磁场必须连续。这要求两个区域有相同的传播常数  $\beta$ 。这在

$$\beta^2 = \kappa k_0^2 - k_d^2 = k_0^2 + h^2,$$

即

$$k_d^2 + h^2 = (k-1)k_0^2 \quad (3.126)$$

情况下可以满足。同时，还需要

$$A \sin k_d t = B e^{-ht} \quad (3.127)$$

以便使  $e_x$  在  $x=t$  处连续。为了确定  $A/B$ 、 $k_d$  和  $h$  三个量，还需要一个关系式。这个关系式由  $h_y$  必须在  $x=t$  处连续而得到。因为  $h_y$  为 (由 (3.17b) 式和 (3.17c) 式)

$$h_y = -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{k}{\beta} Y(\mathbf{a}_z \times \nabla_t e_x) \cdot \mathbf{a}_y$$

式中， $kY$  在空气中等于  $k_0 Y_0$ ，在介质中等于  $\kappa k_0 Y_0$ ，所以，第三个关系式为

$$\frac{\kappa}{k_d^2} \frac{\partial e_x}{\partial x} \Big|_{x=t} = \frac{-1}{h^2} \frac{\partial e_x}{\partial x} \Big|_{x=t}$$

或

$$\kappa A k_d^{-1} \cos k_d t = h^{-1} B e^{-ht} \quad (3.128)$$

用 (3.127) 除 (3.128) 式，并在两边乘以  $t$  得

$$\kappa h t = t \tan k_d t \quad (3.129)$$

把 (3.126) 式和 (3.129) 式联立求解得  $k_d$  和  $h$  的容许值。若  $h$  具有实数解，则由于它的场在  $x$  方向按指数衰减，且向  $z$  方向传播，所以，这个解就是一个表面波。

利用横向谐振法可以更直接地导出本征值方程 (3.129) 式。这个方法是把传输线理论应用到导波结构横截面的等效电路上，它适用于沿传播方向（即沿  $z$  方向）均匀的任何波导。现在所研究的模对于  $x$  轴来说是  $E$  模， $x$  方向的传播常数在介质区域已表示为  $j k_d$ ，在自由空间区域表示为  $h$ 。应用方程 (3.17d) 并把此方程中的  $j\beta$

认为是在  $x$  方向的传播常数，则  $E$  模在  $x$  方向的波阻抗，在介质区域为  $k_d Z/k$ ，在空气区域为  $h Z_0/jk_0$ 。于是，其横截面的等效电路，就是长度为  $t$  特性阻抗为  $k_d Z/k$  的一条短路传输线与特性阻抗为  $-jh Z_0/k_0$  的一条无限长传输线相连接，如图 3.16b 所示。在  $aa$  平面上，横向谐振条件要求向短路线看去的阻抗与无限长线输入端的阻抗之和为零。因为  $Z/k = Z_0/\kappa k_0$ ，故得

$$j \frac{k_d Z}{\kappa} \tan k_d t - j \frac{h Z_0}{k_0} = 0$$

或

$$k_d t \tan k_d t = \kappa h_0$$

此式与 (3.129) 式是相同的。

虽然横向谐振法直接地导出了所需要的本征值方程，但是，它要求先了解这种结构所存在的场的类型，以便组成适当的横截面等效电路。在本章末的习题中，给出了这种方法进一步应用的例子。

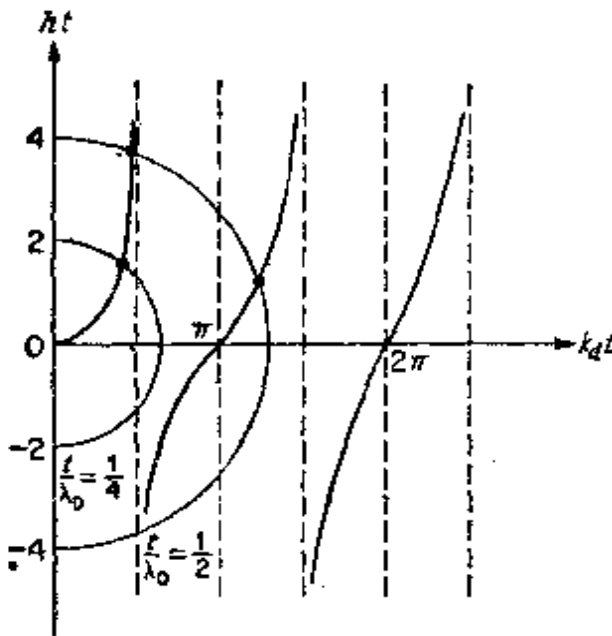


图 3.17  $k_d$  和  $h$  的图解

利用图解法不难求出  $k_d$  和  $h$  的解。我们把 (3.129) 式画在图 3.17 中的  $ht - k_d t$  平面上。在这些曲线上重迭画上许多  $(ht)^2 + (k_d t)^2 = (\kappa - 1)(k_d t)^2$  的圆。曲线和圆的交点就是许可的解（即本征值）。图 3.17 中的曲线是在  $\kappa = 2.56$ （聚苯乙烯）和  $t/\lambda_0 = 0.25, 0.5$  的情况下画的。应当指出，不论  $t$  多么小或者  $\lambda_0$  多么大，至少总有一个解。这个解是上述圆与

正切函数第一分枝的交点，称为  $TM_0$  模。当  $t$  的值更大或  $\lambda_0$  值更小时，这些圆与正切函数的其他分枝相交，而得到高阶  $TM_n$  模。在

$ht < 0$  区域的这些交点，由于当  $x$  为很大的正数时其对应的场会按指数增加，故不是有实际价值的解。

与矩形波导不同， $TM_0$  表面波没有截止低频。但是，这决不是表面波波导的一般特性。表面波的一个特色是，在任一特定频率下，只有有限数目的模存在。并且，只要有一个模存在，其相速就小于自由空间中的光速，即

$$v_p = \frac{k_0}{\beta} c = \frac{k_0 c}{(k_0^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}} < c \quad (3.130)$$

为此，表面波称为慢波。由于能够预计到它的相速应该在自由空间中光速和介质中的光速（即  $c\kappa^{-\frac{1}{2}}$ ）之间，具有慢波特性是不足为奇的。实际上也是如此，因为

$$k_0 < \beta = (k_0^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} = (\kappa k_0^2 - k^2)^{\frac{1}{2}} < \kappa^{\frac{1}{2}} k_0$$

利用一般式 (3.17)，求得表面波  $TM$  模的全部解为：

当  $0 < x < t$  时，

$$\begin{aligned} E_z &= A \sin k_a x e^{-\beta z} \\ E_x &= -\frac{j\beta}{k_a} A \cos k_a x e^{-\beta z} \\ H_x &= -j\kappa \frac{k_0 Y_0}{k_a} A \cos k_a x e^{-\beta z} \end{aligned} \quad (3.131a)$$

当  $x > t$  时，

$$\begin{aligned} E_z &= A \sin k_a t e^{-h(x-t) - \beta z} \\ E_x &= -\frac{j\beta}{h} A \sin k_a t e^{-h(x-t) - \beta z} \\ H_x &= -j \frac{k_0 Y_0}{h} A \sin k_a t e^{-h(x-t) - \beta z} \end{aligned} \quad (3.131b)$$

常数  $B$  已由 (3.127) 式得到的  $Ae^{ht} \sin k_a t$  所代替。由介质和导体的损耗引起的功率和衰减的表示式，可用前面所使用的类似方法得到。其具体计算过程留作习题。

### 涂介质的线波导\*

作为表面波波导的第二个例子，我们来研究以介质涂复圆导线的情况。图3.18中表示这种结构，它由半径为  $a$  的导线和围绕导线的厚度为  $t$  外径为  $b$  的薄介质套所组成。



图 3.18 涂介质的导线

下面来求圆对称的  $E$  模（即  $TM$  模）的解。仍令介质中的  $k_c = k_c$ ，在  $r > b$  的介质周围的空气区域的  $k_c = jh$ 。则如(3.114)式所指出的，由于  $e_z$  不随  $\varphi$  变化，故它是贝塞尔方程

$$\frac{d^2 e_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{de_z}{dr} + k_c^2 e_z = 0 \quad (3.132)$$

的一个解。在  $a < r < b$  区域（不包括  $a$  和  $b$  处） $e_z$  的通解为第一类和第二类零阶贝塞尔函数的线性组合，即

$$e_z = C_1 J_0(k_c r) + C_2 Y_0(k_c r) \quad a < r < b \quad (3.133)$$

在  $r > b$  的区域，其场必须随  $r$  增大而衰减，以便成为一个表面波。把  $J_0(jhr)$  和  $Y_0(jhr)$  作适当的线性组合，将得到这样的衰减。当  $hr$  较大时，这些函数具有如下的渐近形式：

$$J_0(jhr) \sim \sqrt{\frac{2}{jhr\pi}} \cos\left(jhr - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$Y_0(jhr) \sim \sqrt{\frac{2}{jhr\pi}} \sin\left(jhr - \frac{\pi}{4}\right)$$

由此可见

$$J_0(jhr) + jY_0(jhr) \sim \sqrt{\frac{2}{jhr\pi}} e^{-hr - j\pi/4}$$

\* G. Goubau, *Surface Waves and Their Applications to Transmission Lines*, *J. Appl. Phys.*, Vol. 21, pp. 1119—1128, November, 1950, also *Single Conductor Surface Wave Transmission Lines*, *Proc. IRE*, Vol. 39, pp. 619—624, June, 1951.

为了代替自变量为虚数的函数 $J_n$ 和 $Y_n$ ，可按照关系式

$$I_n(x) = j^{-n} J_n(jx) \quad (3.134a)$$

$$K_n(x) = -\frac{\pi}{2} j^{n+1} (J_n(jx) + jY_n(jx)) \quad (3.134b)$$

引入具有实自变量的新函数 $I_n(x)$ 、 $K_n(x)$ 。显然， $K_n$ 按指数衰减，所以此函数在 $n=0$ 时适合于用来描述 $r>b$ 区域的 $e_r$ 。因为函数 $I_n$ 与 $e^{nr}$ 一样会趋向无穷大，故不能采用。因而，

$$e_z = C_3 K_0(hr), \quad r > b \text{ 时} \quad (3.135)$$

在 $r=a$ 处， $e_r$ 必须为零，故需要

$$C_1 J_0(k_d a) + C_2 Y_0(k_d a) = 0$$

或

$$C_2 = -C_1 \frac{J_0(k_d a)}{Y_0(k_d a)} \quad (3.136)$$

在 $r=b$ 处， $e_r$ 必须连续，因而

$$C_3 K_0(hb) = C_1 \left[ J_0(k_d b) - \frac{Y_0(k_d b) J_0(k_d a)}{Y_0(k_d a)} \right] \quad (3.137)$$

这个方程包含三个未知常数 $h$ 、 $k_d$ 和 $C_3/C_1$ 。应当指出，由于场的相对幅度是任意的，故只把比值 $C_3/C_1$ 认为是未知的。与这些参数有关的第二个方程是

$$\beta^2 = \kappa k_0^2 - k_d^2 = k_0^2 + h^2$$

或

$$k_d^2 + h^2 = (\kappa - 1) k_0^2 \quad (3.138)$$

要求出解答，还需要第三个关系式。这个关系式应由 $r=b$ 处切向磁场连续的边界条件得到。

用 $e_r$ 表示的横向电场为(参看(3.17)式)

$$\mathbf{e} = -\frac{j\beta}{k_0^2} \nabla_{\perp} e_r$$

在圆柱坐标下，



$$\nabla_r = \mathbf{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mathbf{a}_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

所以

$$\mathbf{e} = e_r \mathbf{a}_r = -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{\partial e_z}{\partial r} \mathbf{a}_r$$

其磁场为

$$\mathbf{h} = Y_c \mathbf{a}_r X e_z$$

式中,  $Y_c = kY/\beta$ 。注意到在介质中  $k_c = k_d$ ,  $kY = \kappa k_0 Y_0$ , 在空气中  $k_c = jh$ ,  $kY = k_0 Y_0$ , 就可得出  $a < r < b$  处的横向场为

$$e_r = -\frac{j\beta}{k_d^2} (C_1 k_d J'_0(k_d r) + C_2 k_d Y'_0(k_d r)) \quad (3.139a)$$

$$h_\varphi = \frac{\kappa k_0 Y_0}{\beta} e_r \quad (3.139b)$$

而在  $r > b$  处的横向场为

$$e_r = \frac{j\beta}{h^2} h C_3 K'_0(hr) \quad (3.140a)$$

$$h_\varphi = \frac{k_0 Y_c}{\beta} e_r \quad (3.140b)$$

式中, 撇表示对自变量  $k_d r$  或  $hr$  的导数, 例如  $\partial K_0/\partial r = h \partial K_0/\partial hr = h K'_0$ 。

根据  $h_\varphi$  在  $r = b$  处连续可得方程式

$$\frac{jk_0 Y_0}{h} C_3 K'_0(hb) = \frac{-j\kappa k_0 Y_0}{k_d} \times (C_1 J'_0(k_d b) + C_2 Y'_0(k_d b))$$

或

$$C_3 k_d K'_0(hb) = -\kappa h C_1 \left[ J'_0(k_d b) - \frac{J_0(k_d a) Y'_0(k_d b)}{Y_0(k_d a)} \right] \quad (3.141)$$

若用(3.137)式除(3.141)式, 则得

$$\frac{k_a K'_0(hb)}{K_0(hb)} = -\kappa h \frac{J'_0(k_a b) Y_0(k_a a) - Y'_0(k_a b) J_0(k_a a)}{J_0(k_a b) Y_0(k_a a) - J_0(k_a a) Y_0(k_a b)} \quad (3.142)$$

为了求出  $h$  和  $k_a$ ，必须把此超越方程和(3.138)式联立求解。通常，可采用类似于前述介质薄片问题中应用的图解法。但是，当  $t = b - a \ll a$  时，把含有  $k_a b$  的贝塞尔函数在  $k_a a$  点附近展开为泰勒级数，不难得到一个近似解。例如，

$$J_0(k_a b) \approx J_0(k_a a) + \left. \frac{dJ_0(k_a b)}{dk_a b} \right|_{k_a a} k_a (b - a)$$

参数  $h$  与  $k_0$  的大小是同一数量级的。并且，由于对一般的表面波导  $a \ll \lambda_0$ ，故当  $t$  小时， $hb$  也是小的。在此情况下，

$$K_0(hb) \approx -\ln 0.89hb$$

$$K'_0(hb) = K_1(hb) \approx \frac{1}{hb}$$

利用上述的泰勒级数展开式，和对  $K_0$  与  $K_1$  的小自变量近似式，可把(3.142)式化为如下的简单形式：

$$\begin{aligned} \kappa h^2 b \ln 0.89hb &= -(\kappa - 1)k_0^2 t + h^2 t \\ &\approx -(\kappa - 1)k_0^2 t, \end{aligned} \quad (3.143)$$

后一近似等式，根据  $h^2 \ll k_0^2$  得出。

作为一个典型的例子，我们来看一下  $a = 0.09$  厘米， $b = 0.1$  厘米， $t = 0.01$  厘米， $\kappa = 2.56$ ， $\lambda_0 = 3.14$  厘米时铜制导线的情况。

$h$  的解为  $h = 0.258$  奈贝/厘米。由于  $k_0 = 2$ ，故  $h^2 \ll k_0^2$ ，这就证明了略去(3.143)式的最后一项是允许的。传播常数  $\beta$  结果等于 2.02 弧度/厘米。当  $hr$  较大时，

$$K_0(hr) \sim \left( \frac{\pi}{2hr} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-hr}$$

所以，在二到三个波长的距离内，场已经衰减到相当小的数值。例如， $r = 2\lambda_0$  处的场比  $r = b$  处的场减少了 94.8%。在这种情况下，有效的波导直径约为四个波长（即 12.5 厘米）。虽然在这个波

长下这样大的直径可认为是不合适的。但是，在较高的频率下，比如说 $\lambda_0 = 3$ 毫米时，四个波长的有效直径还是很小的。因此，表面波波导除了在频率很高情况下使用外，通常是不用的。随着相对电容率 $\kappa$ 或厚度 $t$ 的增加，衰减常数 $h$ 也会增加，结果使场更紧密地靠近导线表面。虽然这是一个优点，但是，场在接近边界处过于集中，会使损耗增加，从而沿传播方向 $z$ 形成更大的衰减。

### 3.9 功率的正交性

在一个没有任何损耗（理想导电壁）的金属空心柱形波导中，每一种能够传播的模传送能量时，与所有可能出现的其他模无关。对任一个特定的波导来说，这个结论不难通过波导场的适当表示式予以证明。因为作出一般的证明也没有很大困难，所以下面就论证这个问题。

设 $\mathbf{E}_1$ 、 $\mathbf{H}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$ 、 $\mathbf{H}_2$ 是一个给定的波导中麦克斯韦方程的两个线性无关的解（两个模），它们的场可以表示为（对 $TE$ 模取 $\mathbf{e}_r = 0$ ，对 $TM$ 模取 $\mathbf{h}_r = 0$ ）

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_1 e^{-j\beta_1 z} + \mathbf{e}_{r1} e^{-j\beta_1 z} \quad (3.144a)$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{h}_1 e^{-j\beta_1 z} + \mathbf{h}_{r1} e^{-j\beta_1 z} \quad (3.144b)$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_2 e^{-j\beta_2 z} + \mathbf{e}_{r2} e^{-j\beta_2 z} \quad (3.145a)$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{h}_2 e^{-j\beta_2 z} + \mathbf{h}_{r2} e^{-j\beta_2 z} \quad (3.145b)$$

为了证明这些模独立地传送能量（功率的正交性），必须证明

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \int_{S_0} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \times (\mathbf{H}_1^* + \mathbf{H}_2^*) \cdot \mathbf{a}_r dS \\ &= \operatorname{Re} \int_{S_0} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1^* + \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2^*) \cdot \mathbf{a}_r dS \\ &= \int_{S_0} (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{h}_1 + \mathbf{e}_2 \times \mathbf{h}_2) \cdot \mathbf{a}_r dS \end{aligned}$$

式中， $\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{h}$ 已假定为实数，在无耗的波导中，这样假定是允许的，

因为  $\beta$  为实数, 所以,  $k_z^2 = k_0^2 - \beta^2$  为实数, 从而可以把  $(\nabla_t^2 + k_z^2)(\mathbf{e}_1, \mathbf{h}_1) = 0$  的解取为实数。上述积分式中的  $S_0$  是波导中任意的横截面。换言之, 相互作用项

$$\int_{S_0} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1^*) \cdot \mathbf{a}_z dS$$

$$= \int_{S_0} (\mathbf{e}_1 \times h_2 e^{-j\beta_1 z} + j\beta_2 z + \mathbf{e}_2 \times h_1 e^{j\beta_1 z} - j\beta_2 z) \cdot \mathbf{a}_z dS$$

必须为零, 以便使能流密度 (功率) 为每个模各自产生的功率之和。

我们来研究被  $Z_1$  和  $Z_2$  平面限定的一段波导, 如图 3.19 所示。包围体积  $V$  的闭合面  $S$  包括理想导电壁  $S_W$  和横向截面  $S_1$  及  $S_2$ 。因为  $V$  中不包含场源, 所以在  $V$  中的场满足方程  $\nabla \times \mathbf{E}_i = -j\omega\mu\mathbf{H}_i$  和  $\nabla \times \mathbf{H}_i = j\omega\epsilon\mathbf{E}_i$ , 式中,  $i = 1$  或  $2$ 。展开  $\nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1)$ , 并利用上述方程式, 得

$$j\omega\mu(\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2) + j\omega\epsilon(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) = 0$$

这样, 由于其散度为零, 故通过任一闭合面  $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1$  的总通量为零。因此

$$\oint (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (3.146)$$

在  $S_W$  面上,  $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{H}_2 = 0$ , 其它各项类此。同时, 在  $S_1$  上,  $\mathbf{n} = \mathbf{a}_z$ , 在  $S_2$  上,  $\mathbf{n} = -\mathbf{a}_z$ , 所以(3.146)式便成为

$$\int_{S_1} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{a}_z dS$$

$$- \int_{S_2} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{a}_z dS = 0 \quad (3.147)$$

因为  $(\mathbf{e} \times \mathbf{h})$  只向着  $z$  方向, 所以, (3.147) 式中的任一项只涉

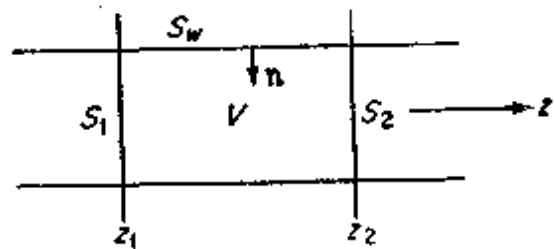


图 3.19 为  $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_W$  面限定的一段波导

及横向场，即  $(\mathbf{e} + \mathbf{e}_z) \times (\mathbf{h} + \mathbf{h}_z)$  的其余各项都垂直于  $\mathbf{a}_z$ 。若把 (3.144) 式和 (3.145) 式代入 (3.147) 式，则  $S_1$  上的积分只与  $Z_1$  有关，而  $S_2$  上的积分只与  $Z_2$  有关。由于  $Z_1$  和  $Z_2$  可以任意选取，故必须使每一个积分都为零 ( $\beta_1 = -\beta_2$  时是一个例外，此时，积分与  $Z_1$  和  $Z_2$  都无关，且永远抵消)。因而，当  $\beta_1 \neq -\beta_2$  时，

$$\int_{S_0} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{a}_z dS = 0$$

式中， $S_0$  是任意的横向平面，而且，这个积分等于

$$e^{-j\beta_1 z_0} - j\beta_2 z_0 \int_{S_0} (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{h}_2 - \mathbf{e}_2 \times \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{a}_z dS = 0$$

或

$$\int_{S_0} (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{h}_2 - \mathbf{e}_2 \times \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{a}_z dS = 0 \quad (3.148)$$

当同一个模向  $-Z$  方向传播时，使 (3.146) 式和其后的方程式同样有效的场，在此情况下与 (3.145) 式的  $\mathbf{E}_2$  和  $\mathbf{H}_2$  不同而为

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_2 e^{j\beta_2 z} - \mathbf{e}_{z2} e^{j\beta_2 z} \quad (3.149a)$$

$$\mathbf{H}_2 = -\mathbf{h}_2 e^{j\beta_2 z} + \mathbf{h}_{z2} e^{j\beta_2 z} \quad (3.149b)$$

这样，就可把 (3.148) 式改写为 (用  $-\mathbf{h}_2$  代替  $\mathbf{h}_2$ )

$$\int_{S_0} (-\mathbf{e}_1 \times \mathbf{h}_2 - \mathbf{e}_2 \times \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{a}_z dS = 0 \quad (3.150)$$

把 (3.148) 式和 (3.150) 式进行加减运算就可证明

$$\begin{aligned} & \int_{S_0} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{a}_z dS \\ &= \int_{S_0} \mathbf{e}_2 \times \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{a}_z dS = 0 \end{aligned} \quad (3.151)$$

它完全证明了两个非简并模 ( $\beta_1 \neq \beta_2$ ) 之间的功率的相互作用项为零。

当  $\beta_1 = \beta_2$  时，这些模是简并的，前面的证明就不能用了。若研究的是向  $+Z$  和  $-Z$  方向传播的两个简并模，则 (3.147) 式中的

两个积分就与 $Z_1$ 和 $Z_2$ 都无关，因完全相等而抵消。并不需要由(3.150)式来得出结论。另一方面，若所研究的两个简并模都向 $+Z$ 方向或都向 $-Z$ 方向传播，则(3.147)式中的两个积分包含因子 $e^{\mp j\beta_{1z}}$ 、 $e^{\mp j\beta_{2z}}$ ，且与 $Z$ 有关。在这种情况下，每个积分必须各自为零，才可以得到(3.148)式的结果。但是，要证明其每一项各自为零，还必须添上关系式(3.150)式。

当简并模不满足功率正交关系时，可以定义新的模，它们是满足功率正交性的归模的线性组合。于是，新的模定义为

$$\mathbf{E}'_1 = \mathbf{E}_1 \quad (3.152a)$$

$$\mathbf{H}'_1 = \mathbf{H}_1 \quad (3.152b)$$

$$\mathbf{E}'_2 = \mathbf{E}_1 + C\mathbf{E}_2 \quad (3.153a)$$

$$\mathbf{H}'_2 = \mathbf{H}_1 + C\mathbf{H}_2 \quad (3.153b)$$

若常数 $C$ 选得使相互作用项为零，则新的模应是正交的。其能流密度为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}R_c \int_{s_0} R_c (\mathbf{E}'_1 + \mathbf{E}'_2) \times (\mathbf{H}'_1 + \mathbf{H}'_2)^* \cdot \mathbf{a}_z dS \\ &= \frac{1}{2}R_c \int_{s_0} (\mathbf{E}'_1 \times (\mathbf{H}'_1)^* + \mathbf{E}'_2 \times (\mathbf{H}'_2)^*) \cdot \mathbf{a}_z dS \\ & \quad + \frac{1}{2}R_c \int_{s_0} (\mathbf{E}'_1 \times (\mathbf{H}'_2)^* + \mathbf{E}'_2 \times (\mathbf{H}'_1)^*) \cdot \mathbf{a}_z dS \end{aligned}$$

若

$$\begin{aligned} & \int_{s_0} (\mathbf{E}_1 \times (\mathbf{H}_1 + C\mathbf{H}_2)^* + \\ & \quad + (\mathbf{E}_1 + C\mathbf{E}_2) \times \mathbf{H}_1^*) \cdot \mathbf{a}_z dS = 0 \end{aligned}$$

则相互作用项为零。令 $P_{ii} = \frac{1}{2} \int_{s_0} \mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_i^* \cdot \mathbf{a}_z dS$ ，式中， $i = 1, 2$ ，

则上述方程便成为

$$P_{11} + CP_{12} + P_{11} + CP_{21} = 0$$

或

$$C = -\frac{2P_{11}}{P_{12} + P_{21}} \quad (3.154)$$

若常数  $C$  这样选取，就可保证新模式（带有一撇的）的功率正交性。这个方法显然可以推广到两个以上简并模的情况。

在有耗波导的情况下，显然，对于非简并模来说，功率正交性对低损耗波导是一个很好的近似，但它不能严格地保持。波导壁的电导率为有限值时，模耦合的性质，将在下一节中讨论。

### ★3.10 简并模的衰减

用微扰法计算已知模的衰减常数的基本原理如下：作为一级近似，先假定在小损耗的情况下不改变场分布或壁电流，即用无耗时的场和电流的解，来计算波导中的填充媒质（如果存在的话）的功率损耗，和电导率为有限值的导电壁上的功率损耗。然后使沿波导传输功率的减少率正好等于有耗壁上及波导内填充的媒质中的功率损耗，从而导出衰减常数。

当同时存在两个或两个以上的模时，若所传输的功率和功率损耗分别是每个模所贡献的传输功率和功率损耗之和，则可用微扰法单独地计算每个模。这需要传输功率和损耗功率表示式中的相互作用项为零。如果不是这种情况，就认为这些模是通过有限损耗而耦合在一起。一般说，除了简并模以外，模的耦合是很弱的。还要着重指出，在许多情况下，即使是简并模，也不一定互相耦合。

我们研究场为  $E_1$ 、 $H_1$  和  $E_2$ 、 $H_2$  的两种模。设其在波导壁上相应的表面电流分别为  $J_1$  和  $J_2$ 。当波导壁具有有限电导率时，这两个模在波导壁上电场的切向分量为  $Z_n J_1$  和  $Z_n J_2$ ，而不是零值，这里， $Z_n$  为波导壁的表面阻抗。一般说， $E_2$  有一个平行于  $J_1^*$  的分量，即  $E_2 \cdot J_1^* \neq 0$ ；同理， $E_1 \cdot J_2^* \neq 0$ 。这意味着电流  $J_1$  可能把功率供给场  $E_2$ ， $J_2$  可能把功率供给场  $E_1$ 。但是，若围绕波导边界对这些乘积的积分为零，则将没有净传输功率。因而，只有在下列积分

不为零时，波导壁的损耗才使这两个模产生耦合：

$$\oint_c \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1^* dl = \oint_c \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2^* dl$$

式中的积分是沿波导的边界进行的。因为

$$\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1^* = Z_m \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{J}_1^*$$

所以，只有当这两个模的电流对围绕波导边界的积分都是正交时，才使这些积分为零。

前一节已经指出，当两个模简并时，沿波导的能流就不一定是各个模的能流之和。但是，已经指出，按归模线性组合定义的新模，可以使它的功率相互作用项为零。这个方法不仅可以使新模的功率相互作用项为零，而且可以推广到使与这些新模相联系的表面电流正交。从而使这些新的模完全不耦合，而可以按照通常的微扰法（常称为功率损耗法），由单独地考虑每一个模来求出它们的衰减。现在介绍上述概念的数学计算式。

### ★模耦合的数学分析

设在无损耗的波导中有  $N$  个简并模。并设这些简并模的场为

$$\mathbf{E}_n = (\mathbf{e}_n + \mathbf{e}_{zn}) e^{-i\beta_0 z} \quad (3.155a)$$

$$\mathbf{H}_n = (\mathbf{h}_n + \mathbf{h}_{zn}) e^{-i\beta_0 z} \quad (3.155b)$$

式中， $n = 1, 2, \dots, N$ 。所有的模都具有相同的传播常数  $\beta_0$ 。若其中的某些模为  $TM$  模，则  $h_{zn} = 0$ ，而当其中的某些模为  $TE$  模时，则  $e_{zn} = 0$ 。设与这些模相联系的表面电流为

$$\mathbf{J}_n = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_n, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.156)$$

规定上述模有如下的相互作用项：

$$P_{nm} = \frac{1}{2} \int_s \mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_m^* \cdot \mathbf{a}_z dS \quad (3.157)$$

$$W_{nm} = -\frac{R_m}{2} \oint_c \mathbf{J}_n \cdot \mathbf{J}_m^* dl \quad (3.158)$$

式中， $R_m$  是  $Z_m$  的电阻部分。



现在我们来组成一组使相互作用项为零的新模。设新模定义为

$$\mathbf{E}'_s = \sum_{n=1}^N C_n^s \mathbf{E}_n \quad (3.159a)$$

$$\mathbf{H}'_s = \sum_{n=1}^N C_n^s \mathbf{H}_n \quad (3.159b)$$

式中， $C_n^s$ 是幅度常数，且  $s = 1, 2, \dots, N$ ，所以将出现由  $N$  个归模线性组合的  $N$  个新模。规定新模的相互作用项为

$$P'_{s,r} = \frac{1}{2} \int_S \mathbf{E}'_s \times (\mathbf{H}'_r)^* \cdot \mathbf{a}_s dS \quad (3.160)$$

$$W'_{s,r} = \frac{R_m}{2} \oint_C \mathbf{J}'_s \cdot (\mathbf{J}'_r)^* dl \quad (3.161)$$

将使新模的相互作用项  $P'_{s,r}$ 、 $W'_{s,r}$  ( $s \neq r$ ) 为零来确定常数  $C_n^s$ 。应当指出，可选  $e_n$  和  $h_n$  为实数，则参照 (3.3e) 式知， $h_n$  为纯虚数。若在 (3.157) 式中应用 (3.155) 式，并采用对任意两个简并模都适用的结果 (3.148) 式，则可看出  $P_{nm} = P_{mn}$ ，且可以取为实数。因为  $\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{J}_m^* = \mathbf{H}_n \cdot \mathbf{H}_m^*$ ，所以  $W_{nm}$  也是实数，且  $W_{nm} = W_{mn}$ 。

若把 (3.159) 式代入 (3.160) 式和 (3.161) 式，则得

$$\begin{aligned} P'_{s,r} &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N C_n^s (C_m^r)^* P_{nm} \\ &= P'_{s,r} \delta_{s,r} \end{aligned} \quad (3.162)$$

$$\begin{aligned} W'_{s,r} &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N C_n^s (C_m^r)^* W_{nm} \\ &= W'_{s,r} \delta_{s,r} \end{aligned} \quad (3.163)$$

式中，当  $s \neq r$  时， $\delta_{s,r} = 0$ ；当  $r = s$  时， $\delta_{s,r}$  等于 1。因为  $s$  和  $r$  的范围都是由 1 到  $N$ ，所以上面每一组方程式共有  $N^2$  个方程。

(3.162) 式和 (3.163) 式的右边表示加于  $C_n^s$  的条件。

为了简化上述方程的解，引入下列矩阵是方便的：

$$(P) = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1N} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{N1} & P_{N2} & \cdots & P_{NN} \end{bmatrix} \quad (3.164a)$$

$$(W) = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1N} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W_{N1} & W_{N2} & \cdots & W_{NN} \end{bmatrix} \quad (3.164b)$$

$$(C^s) = \begin{bmatrix} C_1^s \\ C_2^s \\ \vdots \\ C_N^s \end{bmatrix} \quad (3.164c)$$

$$(C^s)_t = (C_1^s \ C_2^s \ \cdots \ C_N^s) \quad (3.164d)$$

式中，下标  $t$  表示转置矩阵。(3.162)式和(3.163)式的矩阵形式是：

$$(C^s)_t (P) (C^r)^* = P'_{sr} \delta_{sr}$$

$$(C^s)_t (W) (C^r)^* = W'_{sr} \delta_{sr}$$

当  $s = r$  时，用  $W'_{rr}$  乘第一个方程，用  $P'_{rr}$  乘第二个方程，得

$$W'_{rr} (C^r)_t (P) (C^r)^* = W'_{rr} P'_{rr}$$

$$P'_{rr} (C^r)_t (W) (C^r)^* = W'_{rr} P'_{rr}$$

这两个方程相减得

$$(C^r)_t (W'_{rr} (P) - P'_{rr} (W)) (C^r)^* = 0$$

因为  $W'_{rr}$  和  $P'_{rr}$  为标量常数。由于  $(C^r)_t$  矩阵不为零，故必须使

$$\left( (W) - \frac{W'_{rr}}{P'_{rr}} (P) \right) (C^r)^* = 0 \quad (3.165)$$

这个表示式是  $(C^r)^*$  的一组齐次方程，只有在其行列式为零时它才有解，即只有在

$$\begin{aligned} \left| (W) - \frac{W'_{rr}}{P'_{rr}} (P) \right| &= \begin{vmatrix} W_{11} - \lambda_r P_{11} & \cdots & W_{1N} - \lambda_r P_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ W_{N1} - \lambda_r P_{N1} & \cdots & W_{NN} - \lambda_r P_{NN} \end{vmatrix} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.166)$$

时才有解, 式中,  $\lambda_r = W_{rr}' / P_{rr}'$  是这个矩阵本征值问题的本征值。由于(3.166)式是一个  $N \times N$  行列式, 故展开后为  $\lambda_r$  的  $n$  阶多项式。即  $\lambda_r$  应有  $N$  个根, 记作  $\lambda_{r1}, \lambda_{r2}, \lambda_{r3} \dots, \lambda_{rN}$ 。对任何一个根(比如  $\lambda_r$ )来说, 规定第  $r$  个新模式相应的系数  $C_r'$  正比于此行列式的余因子。因为新模的绝对振幅是任意的, 所以只确定  $C_r'$  的相对值。由(3.165)式和(3.166)式得到的解会使(3.162)式和(3.163)式都满足。为了证明这一点, 我们研究满足下列方程的两个解:

$$(P'_{rr}(W) - W'_{rr}(P))(C_r')^* = 0$$

$$(P'_{rr}(W) - W'_{rr}(P))(C_r')^* = 0$$

因为  $(P)$  和  $(W)$  是实数且对称, 所以本征值  $\lambda_r = W_{rr}' / P_{rr}'$  也都是实数。于是第二个方程的转置复数共轭为

$$(C_r')_i (P'_{rr}(W) - W'_{rr}(P)) = 0$$

若用  $(C_r')$  前乘第一个方程, 并用  $(C_r')^*$  后乘第二个方程, 则得

$$(C_r')_i (P'_{rr}(W) - W'_{rr}(P))(C_r')^* = 0$$

$$(C_r')_i (P'_{rr}(W) - W'_{rr}(P))(C_r')^* = 0$$

若把这两个方程相减, 则可得出

$$(C_r')_i \{ (P'_{rr} - P'_{rr})(W) - (W'_{rr} - W'_{rr})(P) \} (C_r')^* = 0$$

我们可以任意地把本征值  $\lambda_r$  分成因子  $W_{rr}'$  和  $P_{rr}'$ , 使  $P_{rr}' - P_{rr}'$  和  $W_{rr}' - W_{rr}'$  为任意因子。于是, 可得结果

$$(C_r')_i (W)(C_r')^* = (C_r')_i (P)(C_r')^* = 0$$

因此, 如同(3.166)式所保证的那样, (3.162)式和(3.163)式不仅适用于  $s = r$  的情况, 而且适用于所有  $s \neq r$  的情况。

因为新模式都是不耦合的, 所以第  $r$  个新模式沿波导传送的功率为

$$\frac{1}{2} \int_s \mathbf{E}_r' \times (\mathbf{H}_r')^* \cdot \mathbf{a}_z dS = P'_{rr}$$

在波导壁上的功率损耗为

$$\frac{R_m}{2} \oint_c \mathbf{J}_r' \cdot (\mathbf{J}_r')^* dl = W'_{rr}$$

所以，第  $r$  个模的衰减常数为

$$\alpha_r = \frac{W'_r}{2P'_r} = \frac{\lambda_r}{2} \quad (3.167)$$

可见，此行列式的根就是新的非耦合模的衰减常数（除因子  $\frac{1}{2}$  外）。

新模的传播常数为

$$\gamma_r = j\beta_0 + \alpha_r \quad (3.168)$$

这些新模不再是简并的了。波导壁阻抗  $Z_w = (1 + j)R_w$  的存在，实际上也引起相移常数  $\beta_0$  微小的扰动。更仔细的分析证明，被扰动的  $\beta_0$  结果为

$$\gamma_r = j(\beta_0 + \alpha_r) + \alpha_r \quad (3.169)$$

但是，由于  $\alpha_r \ll \beta_0$ ，故  $\beta_0$  的变化是可以忽略的。这个结果可在前面的式子中用  $Z_w$  代替  $R_w$  而得出\*。

如果原来的模是非简并的，那末如3.9节所指出的，在  $n \neq m$  时， $P_{nm} = 0$ 。同样，在  $n \neq m$  时， $W_{nm} = 0$ ，因而，作为一级近似，当其场由引入小损耗而受到微扰时，这些模是不耦合的。虽然，在多数情况下，波导中存在着许多简并模的例子，但是，下面将指出，这些模是不耦合的。例如，在圆波导中， $TE_{0,m}$  和  $TM_{1,m}$  是简并的，但是由于  $TE_{0,m}$  模的场和电流不随角度  $\varphi$  变化，而  $TM_{1,m}$  模的场和电流不是按  $\cos\varphi$  变化，就是按  $\sin\varphi$  变化，所以它们仍然是不耦合的。于是，在  $n \neq m$  时，所有的因子  $P_{nm}$ 、 $W_{nm}$  都为零。发生模耦合的例子是有的，如矩形波导中的  $TE_{0,m}$  模和  $TM_{0,m}$  模。另一个在实际中相当重要的例子是多导体  $TEM$  波传输线的耦合。

### 矩形波导中 $TE_{1,1}$ 和 $TM_{1,1}$ 模的耦合

我们把上面讨论过的理论用于尺寸为  $a \times b$  的矩形波导中

\* J.J. Gustincic, A General Power Loss Method for Attenuation of Cavities and Waveguides, IEEE Trans. Vol. MTT-11, pp. 83-87, January, 1963.

$TE_{11}$ 和 $TM_{11}$ 模简并的情况。用 $\mathbf{E}_1$ 、 $\mathbf{H}_1$ 表示 $TE_{11}$ 模的场。由表3.1得此场为（暂不考虑传播因子 $e^{-j\beta_0 z}$ ）

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_1 = & \frac{j\beta_0\pi}{ak_c^2} \left( \sin\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b} \right) \mathbf{a}_x \\ & + \frac{j\beta_0\pi}{bk_c^2} \left( \cos\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} \right) \mathbf{a}_y \\ & + \left( \cos\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b} \right) \mathbf{a}_z\end{aligned}$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{k_0 Z_0}{\beta_0} (-a_x H_{1y} - a_y H_{1x})$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 = & -\frac{j\beta_0\pi}{ak_c^2} \left( \cos\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} \right) \mathbf{a}_x \\ & - \frac{j\beta_0\pi}{bk_c^2} \left( \sin\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b} \right) \mathbf{a}_y \\ & + \left( \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} \right) \mathbf{a}_z\end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{k_0}{\beta_0 Z_0} (-a_x E_{2y} + a_y E_{2x})$$

式中， $\beta_0 = \beta_{11}$ ， $k_c^2 = k_c^2$ ， $11 = (\pi/a)^2 + (\pi/b)^2$

确定 $P_{mn}$ 是不难的，它们是

$$\begin{aligned}P_{11} &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1^* \cdot \mathbf{a}_z dx dy \\ &= \frac{abk_0 Z_0 \beta_0}{8k_c^2}\end{aligned}$$

$$P_{12} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* \cdot \mathbf{a}_z dx dy = 0$$

$$P_{21} = 0$$

$$P_{22} = \frac{k_0 \beta_0 ab}{8Z_0 k_c^2}$$

因为 $TM$ 模只有轴向电流，所以在波导壁电流之间的耦合，只可能由 $Z$ 向电流引起。场1和2的轴向电流为

$$J_{1z} = \begin{cases} \frac{-j\beta_0\pi}{k_c^2 a} \sin \frac{\pi x}{a} & y=0, b \\ \frac{j\beta_0\pi}{k_c^2 b} \sin \frac{\pi y}{b} & x=0, a \end{cases}$$

$$J_{2z} = \begin{cases} \frac{-jk_0\pi}{k_c^2 b Z_0} \sin \frac{\pi x}{a} & y=0, b \\ \frac{-jk_0\pi}{k_c^2 a Z_0} \sin \frac{\pi y}{b} & x=0, a \end{cases}$$

由于 $W_{11}$ 也包含横向电流，把它们写出来是：

$$J_{1x} = \cos \frac{\pi x}{a} \quad y=0, b$$

$$J_{1y} = -\cos \frac{\pi y}{b} \quad x=0, a$$

现在，不难求出 $W_{nm}$ 为，

$$\begin{aligned} W_{11} &= \frac{R_m}{2} \oint \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_1^* dl \\ &= \frac{R_m}{2} \left[ 2 \int_0^a \left( \frac{\beta_0^2 \pi^2}{k_c^4 a^2} \sin^2 \frac{\pi x}{a} + \cos^2 \frac{\pi x}{a} \right) dx \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_0^b \left( \frac{\beta_0^2 \pi^2}{k_c^4 b^2} \sin^2 \frac{\pi y}{b} + \cos^2 \frac{\pi y}{b} \right) dy \right] \\ &= \frac{R_m}{2} \left( \frac{\beta_0^2 \pi^2}{k_c^4 ab} + 1 \right) (a + b) \end{aligned}$$

$$W_{12} = \frac{R_m}{2} \cdot \frac{\beta_0 k_0 \pi^2}{k_c^4 ab Z_0} (a - b) = W_{21}$$

$$W_{22} = \frac{R_m}{2} \cdot \frac{k_0^2 \pi^2}{k_c^4 a^2 b^2 Z_0^2} (a^3 + b^3)$$

本征值方程(3.166)成为

$$\left. \begin{aligned} & \frac{R_m}{2} \left( \frac{\beta_0^2 \pi^2}{k_c^4 ab} + 1 \right) (a+b) - \lambda_r \frac{abk_0 Z_0 \beta_0}{8k_c^2} - \frac{R_m}{2} \frac{\beta_0 k_0 \pi^2}{k_c^4 ab Z_0} (a-b) \\ & \frac{R_m}{2} \frac{\beta_0 k_0 \pi^2}{k_c^4 ab Z_0} (a-b) - \frac{R_m}{2} \frac{k_0^2 \pi^2}{k_c^4 a^2 b^2 Z_0^2} (a^3 + b^3) - \lambda_r \frac{k_0 \beta_0 ab}{8Z_0 k_c^2} \end{aligned} \right\} = 0 \quad (3.170)$$

鉴于这个方程的复杂性，不再作进一步化简了。至此，还是用数值代入(3.170)式方便些。

作为一个例子，我们研究  $a = 2b = 2.54$  厘米和  $R_m = 2.6 \times 10^{-7} \sqrt{f}$  欧姆的铜矩形波导。图3.20中画出了  $\alpha$  的计算值随  $f/f_c$  而变化的曲线。虚线表示不计及模耦合时(使(3.170)式中的每一个对角

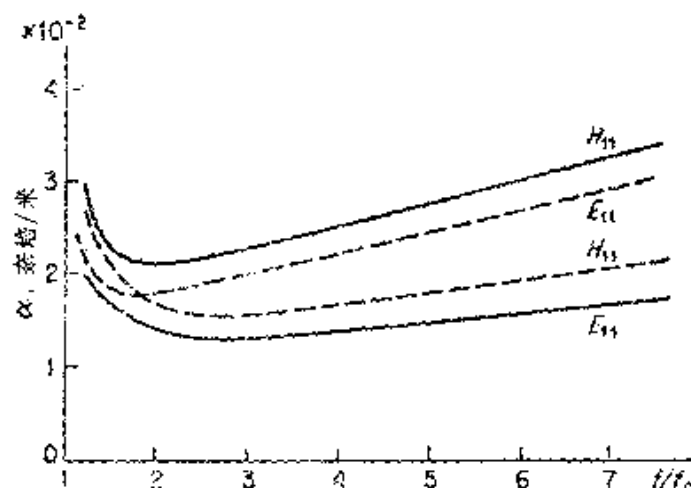


图 3.20 铜波导中( $a = 2b = 2.54$ 厘米)的衰减。实线：计及模耦合时的衰减；虚线：不计及模耦合时的衰减

线元素为零而得)的  $\alpha$  值。虽然新模(互相耦合的  $TE_{11}$  模和  $TM_{11}$  模)  $\alpha$  的两条曲线被标为  $H_{11}$  和  $E_{11}$ ，但是，由于耦合是如此之强，以致使新模既不能近似地认为是  $E$  模，又不能近似地认为是  $H$  模。因而，这样命名没有太大的意义。

### 3.11 波的速度

在波能够传播的任何系统中，会遇到关于信号传播、能量传播、波前传播等几种波的速度。下面研究在波导中传播的各种速度。

#### 相速

波导中的相速早已介绍过了，并已证明空气填充的波导中的相速等于

$$v_p = \frac{\lambda_g}{\lambda_0} c \quad (3.171)$$

这里， $\lambda_g$ 为波导波长， $\lambda_0$ 为自由空间的波长， $c$ 为光速。相速就是沿波导传播时波的等相位面移动的速度。必须注意，相速大于光速。

相速的意义，可以通过理解具有稳态时间关系 $e^{j\omega t}$ 的波速来得到一些线索。只有当波源在 $t = -\infty$ 时开始动作，并在以后全部时间也一直保持下去的情况下，才有这种类型的纯单色（单一频率）波。从物理概念上说，这显然是不能实现的情况。事实上，波源必须在某一限定的时刻（这一时刻可选为 $t = 0$ ）开始动作。于是，所产生的信号是示于图3.21中的形式。正如付立叶分析所证明的那样，突然开始阶跃变化的信号是宽频带的。如果把把这个信号在 $z = 0$ 处送入波导，则在波导中距离为 $l$ 处的观察者事实上在经过了时间 $l/c$ 后

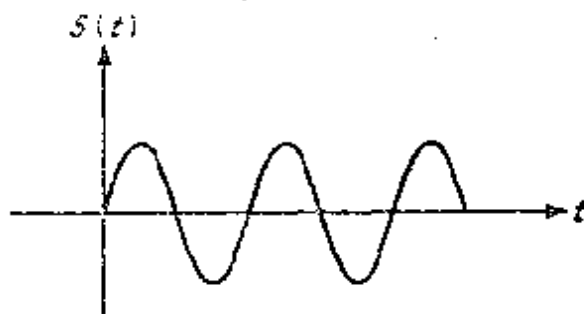


图 3.21 在时刻  $t = 0$  时加正弦信号

才能看到此信号。换言之，其波前将以速度  $c$  沿波导传播。在时刻  $l/c$ ，观察者才开始看到与信号接通有关的瞬变过程的到来。经过



适当的周期以后，瞬变过程消失，于是，观察者就会看到作为稳态正弦变化的波。一旦稳态条件满足，才可以用相速来描述等相位点沿波导移动的速度。但是，应当指出，一旦建立稳态条件，就不再沿波导传送任何信息了。因而，相速并不和任何物理实体（比如信号、波前或能流速度）相联系。此处“信号”这个词是用以指明一种能够把信息传送给观察者的时间函数。因而，在  $t = 0$  时的阶跃变化就是一个信号，但是，一旦满足稳态条件，观察者就不再收到任何信息了。由下面对群速的研究，就可以对上述特性获得更好的了解。

### 群速

群速的物理定义是频带很窄的信号传播的速度。作为分析群速的合适工具是付立叶变换。若用  $f(t)$  表示时间函数，则此时间函数具有一个与它相联系的频谱  $F(\omega)$ 。 $f(t)$  的付立叶变换为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.172a)$$

反过来，若频谱  $F(\omega)$  是已知的，则可由下列付立叶逆变换关系求出时间函数

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.172b)$$

由 (3.172b) 式可以看出，付立叶变换把  $f(t)$  表示为持续时间为无限长的稳态正弦函数的迭加。这些关系式是付立叶级数关系式的推广。若此时间函数通过频率响应为  $Z(\omega)$  的器件（例如滤波器），则输出时间函数  $f_0(t)$  将具有频谱  $F(\omega)Z(\omega)$ ，从而由 (3.172b) 式得

$$f_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) Z(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

一般说， $Z(\omega) = |Z(\omega)| e^{-i\varphi(\omega)}$ ，所以

$$f_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Z(\omega)| F(\omega) e^{j(\omega t - \psi)} d\omega \quad (3.173)$$

如果输出时间函数  $f_0$  为输入时间函数的准确再现,则需要使(3.173)式中的  $|Z|$  等于常数  $A$ , 且  $\psi$  必须是  $\omega$  的线性函数, 比如说  $a\omega + b$ 。在此情况下,

$$f_0(t) = \frac{A}{2\pi} e^{-j\psi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega(t-a)} d\omega \quad (3.174a)$$

若令  $t-a=t'$ , 则上式变成

$$f_0(t'+a) = \frac{Ae^{-j\psi}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t'} d\omega = Ae^{-j\psi} f(t') \quad (3.174b)$$

与(3.172b)相比便可证明此式。于是输出时间函数为

$$f_0(t'+a) = f_0(t) = Ae^{-j\psi} f(t') = Ae^{-j\psi} f(t-a) \quad (3.175)$$

即, 除了一个为常数的关系和时间迟延  $a$  以外, 它是输入时间函数的准确重复。因而, 对  $|Z|$  和  $\psi$  所规定的条件, 对无失真系统是充分的。

在波导中, 场的横向变化是与频率无关的。由于

$$\beta = (k_0^2 - k_c^2)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k_c^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

是频率的函数, 故场解中与频率有关部分只是传播因子  $e^{-i\beta z}$ 。因而, 其中的场具有时间关系  $e^{j\omega t}$  ( $\omega > 0$ ), 且可以认为长为  $l$  的一段波导, 是其响应为  $e^{-i\beta l}$  的一个频率滤波器。因为  $\beta$  不是  $\omega$  的线性函数, 所以, 可以预见, 波在波导中传播时, 将出现信号的某些畸变。对于  $\beta = k_0 = \omega/c$  的理想  $TEM$  波传输线来说, 无畸变的传输是可能的。但是, 实际传输线的衰减与频率有关 ( $R_m \propto \sqrt{f}$ ), 将引起畸变。幸而, 只要所使用的线不是很长, 那末, 对窄频带信号来说, 不论是波导还是传输线, 都不产生显著的畸变。

现在研究频段为  $-f_m$  到  $f_m$  之间的时间函数  $f(t)$ 。这种信号常用来调制载波频率  $f_c$  ( $f_c \gg f_m$ )。其结果是

$$S(t) = f(t) \cos \omega_c t = \text{Re}\{f(t) e^{j\omega_c t}\} \quad (3.176)$$

若 $F(\omega)$ 是 $f(t)$ 的频谱, 则 $S(t)$ 的频谱为

$$F_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) \frac{e^{i\omega_c t} + e^{-i\omega_c t}}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \{F(\omega - \omega_c) + F(\omega + \omega_c)\} \quad (3.177)$$

它们的频谱都表示在图3.22中。

当 $\omega$ 为正时, 波导的响应为 $e^{-i\beta(\omega)}$ 。当 $\omega$ 为负时, 波导的响应必须选为 $e^{i\beta(\omega)}$ 。这是因为若时间变化为 $e^{-i\omega t}$ , 则 $\beta$ 前面的符号对正

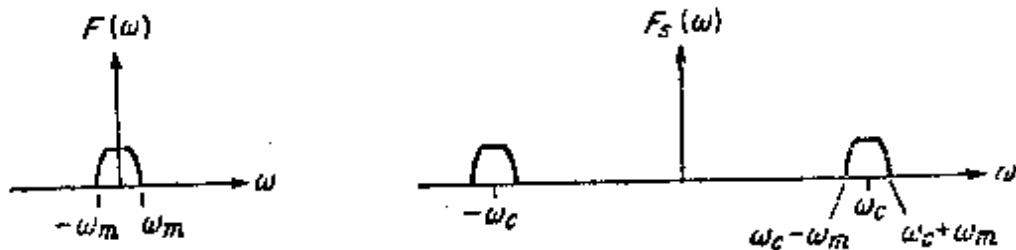


图 3.22  $f(t)$  和  $s(t)$  的频谱

$z$  方向传播的波来说必须为正。换句话说, 所有实际系统具有的响应是使  $|Z(\omega)|$  为  $\omega$  的偶函数, 而使  $\phi(\omega)$  为  $\omega$  的奇函数。因为  $\beta$  是偶函数, 所以, 当  $\omega < 0$  时, 必须改变符号。这些奇偶对称性的要求, 只是为了使输出时间函数为实数, 是一种物理上的要求。于是波导的输出频谱为

$$F_o(\omega) = \frac{1}{2} \{F(\omega - \omega_c)e^{-i\beta(\omega)} + F(\omega + \omega_c)e^{i\beta(\omega)}\}$$

而输出信号为

$$S_o(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_o(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.178)$$

如果用复数形式表示频谱为  $F(\omega - \omega_c)$  的  $f(t)e^{i\omega_c t}$  信号, 则其分析随之简化。在这种情况下, 只需要研究频谱中正的一半, 其输出信号为

$$S_o(t) = R_e \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_c - \omega_m}^{\omega_c + \omega_m} F(\omega - \omega_c) e^{i\omega t - i\beta(\omega)} d\omega \quad (3.179)$$

因为  $F(\omega - \omega_c)$  在频带  $\omega_c - \omega_m \leq \omega \leq \omega_c + \omega_m$  以外为零。若频带很窄，即  $\omega_m \ll \omega_c$ ，则  $\beta(\omega)$  可以用在  $\omega_c$  附近的泰勒级数展开式的前几项来近似。于是

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_c) + \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_c} (\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|_{\omega_c} (\omega - \omega_c)^2 + \dots \quad (3.180)$$

若只保留前两项，并令  $\beta(\omega_c) = \beta_0$  和在  $\omega_c$  上  $d\beta/d\omega_c = \beta_0'$ ，则(3.179) 式为

$$S_0(t) = R_c \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_c - \omega_m}^{\omega_c + \omega_m} F(\omega - \omega_c) e^{j\omega(t - \beta_0' l)} e^{-j\beta_0 l + j\beta_0' l \omega_c} d\omega$$

若把它与(3.174) 式和(3.175) 式比较，则可看出

$$\begin{aligned} S_0(t) &= R_c \{ e^{-j\beta_0 l + j\beta_0' l \omega_c} f(t - \beta_0' l) e^{j\omega_c(t - \beta_0' l)} \} \\ &= f(t - \beta_0' l) \cos(\omega_c t - \beta_0 l) \end{aligned} \quad (3.181)$$

就这里所采用的近似等级而言，可认为输入调制信号  $f(t)$  无畸变地重现，但具有时间迟延  $\beta_0' l$ 。因为在频带  $\omega_c - \omega_m$  到  $\omega_c + \omega_m$  内， $\beta$  用一个  $\omega$  的线性函数来逼近，所以，这个结果是可以预计到的。此信号迟延可用来给群速  $v_g$  下定义，即，群速等于距离  $l$  除以迟延时间。于是

$$v_g = \frac{l}{l\beta_0'} = \left( \frac{d\beta}{d\omega} \right)^{-1} \quad (3.182)$$

它也就是信号速度。但是，应当指出，只有在组成信号的频带或频率“群”窄到使  $\beta$  在所研究的整个频带内可近似为线性函数时，群速才有意义。如果不是这种情况，那就必须把展开式(3.180) 保留更多项，从而产生信号畸变。在这种情况下，由(3.182) 式表示的群速不再是信号速度了。事实上，由于信号畸变，已不再存在任何单一的信号速度了。信号的各个部分将以不同的速度传播，合成信号在时间和空间上就成为色散的了。

在波导中，

$$v_g = \left( \frac{d\beta}{d\omega} \right)^{-1} = c \frac{dk_0}{d\beta} = \left[ \frac{d(\omega^2/c^2 - k_c^2)^{1/2}}{d\omega} \right]^{-1}$$

$$= \frac{\beta c^2}{\omega} = \frac{\beta}{k_0} c = \frac{\lambda_0}{\lambda_g} c \quad (3.183)$$

可见,  $v_g < c$ , 同时, 对波导来说,  $v_g v_p = c^2$ 。

图3.23绘出了波导的 $k_0$ 对 $\beta$ 的典型曲线。由此曲线可以看出, 在窄频带时,  $\beta$ 的线性近似程度是很好的。同时, 可以看出, 在高

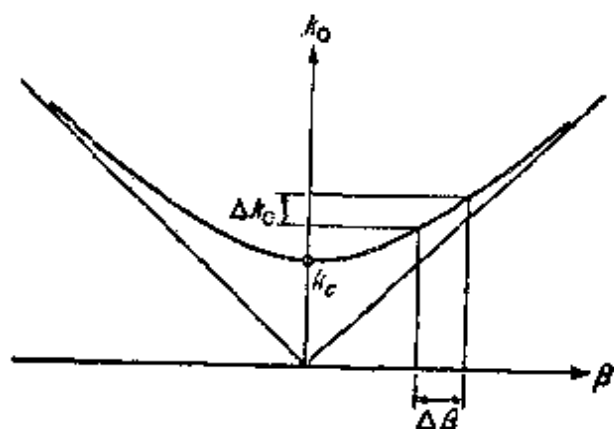


图 3.23 波导中 $k_0-\beta$ 曲线

频( $k_0$ 大)时,  $\beta$ 便等于 $k_0$ 。可见, 远高于截止频率 $f_c$ 的那些频率色散非常小, 基本上以光速传播。低于截止频率 $f_c$ 的频率成分不能沿波导传播。

利用图3.23不难解释波前的速度和光速是相等的。信号的接通会形成具有无限

宽频谱的起始瞬变过程。在频谱的高端任一个小的频率群, 由于在 $k_0$ 接近于无限大时 $dk_0/d\beta$ 等于1, 而使它的群速等于光速 $c$ 。于是瞬变过程的高频部分将以光速 $c$ 沿波导传播, 较低的频率成分将以较小的群速传播, 并在其后到达。

### 能流速度

功率就是能量的流动, 因而有一个能流速度, 使波导中平均能量密度乘上这个速度就等于功率。波导中能流的速度原来就等于群速。以下证明 $E$ 模的情况,  $H$ 模的情况是非常相似的。

$E$ 模的场为(参看(3.17)式)

$$E_z = -\frac{j\beta}{k_c^2} \nabla_z e_x e^{-j\beta z}, \quad H_z = \frac{k_0 Y_0}{\beta} a_x \times E_z$$

平均能流密度(即功率)为

$$P = \frac{1}{2} \int_S Y_c |\mathbf{E}_t|^2 dS = \frac{1}{2} \frac{k_0 Y_0}{\beta} \int_S |\mathbf{E}_t|^2 dS \quad (3.184)$$

这里，积分是在波导的横截面上进行的。

波导每单位长度磁场的能量密度为

$$U_m = \frac{\mu_0}{4} \int_S |\mathbf{H}_t|^2 dS = \frac{\mu_0}{4} \frac{k_0^2 Y_0^2}{\beta^2} \int_S |\mathbf{E}_t|^2 dS \quad (3.185)$$

波导中每单位长度电场的能量密度等于磁场的能量密度。应用复数坡印廷定理不难证明这一点。复数坡印廷定理指出(2.5节)

$$-\frac{1}{2} \int_S \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{a}_2 dS = P + 2j\omega(W_m - W_e)$$

这里的积分是在波导横截面上进行的，其右边等于通过  $S$  面所传输的功率，加上在  $S$  面以外贮存的纯无功能量的  $2j\omega$  倍。因为对传播模来说，复数坡印廷矢量在无耗波导横截面  $S$  上的积分为实数，由此得出  $W_m = W_e$ 。此外，由于横向平面  $S$  的位置是任取的，故也可得出每单位长度波导的能量密度  $U_m$  和  $U_e$  是相等的结论。

现在，可以由下面关系式得出能流的速度

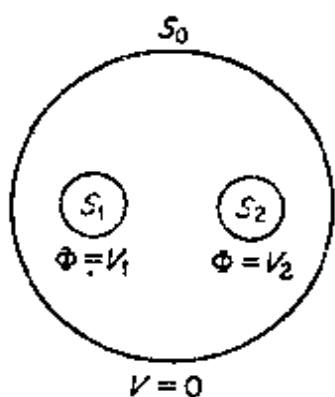
$$\begin{aligned} v &= \frac{P}{U_e + U_m} = \frac{P}{2U_m} = \frac{k_0 Y_0}{\beta} \frac{\beta^2}{\mu_0 k_0^2 Y_0^2} \\ &= \frac{\beta}{\mu_0 k_0 Y_0} = \frac{\beta}{k_0 \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{\beta}{k_0} c = v_z \end{aligned} \quad (3.186)$$

可见，能流速度等于群速，与前面所得的结论一致。

## 习 题

3.1 本题图中表示一条三导体传输线。由于电位可任意添加一个常数，故可取屏蔽面  $S_0$  的电位为零。试证明在此传输线中， $TEM$  波有两个线性无关的解。若  $S_0$  包围  $N$  个导体，则可能有多少个  $TEM$  波的解？

提示： $S_1$  和  $S_2$  上的电位可任意规定。



习题 3.1

3.2 试证明沿传输线传送的功率为

$$P = \frac{Y_0}{2} \int |\nabla_t \Phi|^2 dx dy$$

利用格林第一恒等式(附录 I), 把面积分为绕导体边界的围线积分, 对习题 3.1 证明此式等于  $\frac{1}{2} (V_1 I_1 + V_2 I_2)$ 。

3.3 在习题 3.1 中, 取两个新的电位解

$\Phi_1'$ 、 $\Phi_2'$ , 它们是电位  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$  的线性组合, 后者满足在  $S_1$  上  $\Phi_1 = V_1$ ; 在  $S_0$ 、 $S_2$  上  $\Phi_1 = 0$ ; 在  $S_2$  上  $\Phi_2 = V_2$ ; 在  $S_0$ 、 $S_1$  上  $\Phi_2 = 0$  的边界条件。即选取

$$\Phi_1' = C_{11} \Phi_1 + C_{12} \Phi_2;$$

$$\Phi_2' = C_{21} \Phi_1 + C_{22} \Phi_2。$$

试求常数  $C_{ij}$  的表示式,  $C_{ij}$  须使由新的电位求得的 TEM 波的能量密度是独立的。

提示: 由于功率不相互作用, 证明其相互作用项为

$$\int \nabla_t \Phi_1' \cdot \nabla_t \Phi_2' dx dy = 0$$

3.4 导出 TM 模的方程式 (3.17)。

3.5 试证明空气填充的同轴线最小衰减出现在  $\alpha \ln x = 1 + x$  时, 其中,  $x = b/a$ 。其相应的特性阻抗为何值?

提示: 保持外径  $b$  为常数, 求  $d\alpha/dx$

3.6 利用 (3.53) 式和  $R$ 、 $G$ 、 $L$  及  $C$  的计算值, 求有耗同轴线的  $Z_c$ 。假定  $b = 3a = 1$  厘米,  $f = 10^9$  赫,  $\epsilon = (2.56 - j0.001) \epsilon_0$ 。并证明

$$I_m Z_c \ll R_c Z_c \text{ 和 } Z_c \approx \left( \frac{L}{C} \right)^{\frac{1}{2}}$$

3.7 试求无耗开路传输线电压和电流驻波的表示式。并画出电压和电流的驻波图。

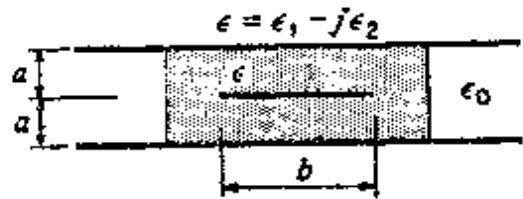
3.8  $Z_c = 50$  欧姆的传输线, 端接阻抗为  $25 + j25$  欧姆。试求反

射系数、驻波比和传送到负载上的入射功率。

3.9 证明(3.87)式。并求距终端为 $\lambda_0/4$ 处的 $Z_{in}$ ，终端负载与习题3.8中的相同。

3.10 在 $Z_c=50$ 欧姆的传输线上，离负载为 $0.4\lambda$ 处的电压为 $4+j2$ 伏特，那里的电流为 $-2$ 安培。试求归一化负载阻抗。

★3.11 利用能量定义的 $L$ 和 $C$ ((3.42)式)，去导出(3.60)式和(3.62)式得到的结果。并用此法求同轴传输线的 $L$ 和 $C$ 。



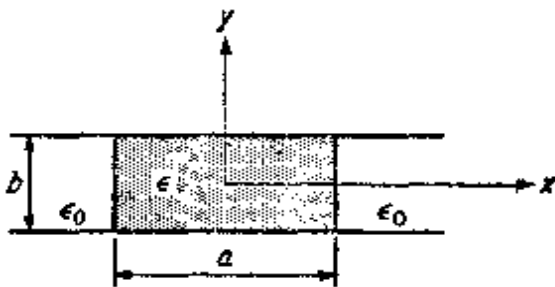
习题 3.12

★3.12 本题图中表示一带状传输线，它由两个宽导电片之间的介质板中嵌一导电片组成。

假定没有边缘场，且在中心导体和外导体之间的电位线性地变化。求此传输线的参数 $R$ 、 $G$ 、 $L$ 、 $C$ 和 $Z_c$ 的表示式。

3.13 导出矩形波导 $TE_{10}$ 模的解。此波导宽边尺寸为 $a$ ，高为 $b$ ，填充电容率为 $\epsilon$ 的介质。证明截止频率为 $f_c = c/2ak^{1/2}$ ，这里， $c$ 为自由空间的光速， $K$ 为相对电容率，证明介质填充的波导波长比空气填充波导波长更短。

3.14 在介质填充的波导中，当 $\epsilon = \epsilon_1 - j\epsilon_2$ ，但波导壁为理想导体时，求 $TE_{10}$ 模衰减的表示式。把得到的严格表示式与应用微扰法导出的结果进行比较。



习题 3.15

3.15 求如图所示的中间放介质板的平行板传输线 $E$ 模的解。假定板为理想导体，且为无限宽。在这种结构中能传播 $TEM$ 波吗？为什么？

提示：假定在 $|x| \leq a/2$ 处 $e_x = \cos k_a x$ ；在 $|x| > a/2$ 处 $e_x = A e^{-h|x|}$ 。证明 $k_a^2 + h^2 = (K - 1)k_0^2$ 。在 $x = a/2$ 处使切向场相等，求得到 $A$ 的表达式和参数 $h$ 及 $k_a$ 表达式。



3.16 求本题图中所表示的部分填充波导中的 $TE_{n0}$ 模的解。

提示：假设

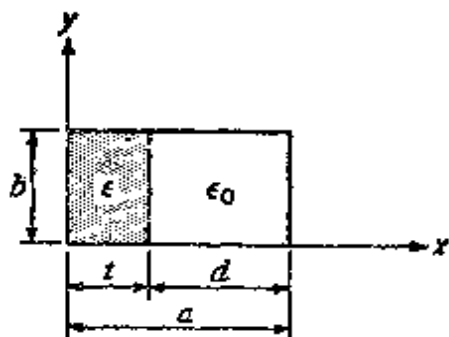
$$h_x = \begin{cases} \cos k_d x, & 0 < x < t \\ A \cosh(a-x), & t < x < a \end{cases}$$

并在 $x = t$ 处使切向场匹配。从而证明

$$\beta^2 = k_0^2 - h^2 = K k_0^2 - k_i^2$$

和

$$h \tan k_d t = -k_d \tanh h d$$



习题 3.16

注意：对应于各种各样的 $TE_{n0}$ 模， $h$ 和 $k_d$ 的解有无穷多个。

当 $k_0 = 2$ ， $t = 1$ 厘米， $d = 1.5$ 厘米和 $\kappa = 4$ 时，求 $\beta$ 、 $h$ 和 $k_d$ 的数值。注意： $h$ 为纯虚数时，有一个最低阶解。

3.17 试证明在内径为 $a$ 、外径为 $b$ 的同轴线中存在着 $TE_{nm}$ 和 $TM_{nm}$

模的解。 $e_x$ 和 $h_x$ 的适当解为

$$[A J_n(k_c r) + Y_n(k_c r)] \cos n \varphi$$

利用 $r = a$ ， $b$ 处适当的边界条件，求确定截止波数 $k_0$ 的方程式（事实上是超越方程）。

3.18 试求矩形波导中 $TE_{10}$ 模表面电流的表示式。波导中沿电流流线可以开一窄缝，而不显著地扰乱场。证明对 $TE_{10}$ 模来说，可以在矩形波导的宽面中心轴线上开一个窄缝。这个原理用于驻波测量器中，对波导内部场用探针取样时窄缝提供了适当的入口。

3.19 试求圆波导中 $H_{01}$ 模的表面电流。

3.20 波导中的 $TE$ 模的场可写为 $H_z = -I(z) \nabla_x h_x$ ， $E_z = V(z) a_x \times \nabla_x h_x$ 。试利用麦克斯韦方程证明 $V(z)$ 和 $I(z)$ 满足传输线方程

$$\frac{dV}{dz} = -j\omega\mu_0 I \frac{dI}{dz} = -\left(j\omega\epsilon_0 + \frac{k_c^2}{j\omega\mu_0}\right)V$$

试组成这些模的分布参数等效电路。对  $TM$  模，使  $\mathbf{E}_z = -V(z)\nabla_z e_z$ ， $\mathbf{H}_z = -I(z)\mathbf{a}_z \times \nabla_z e_z$ 。试证明

$$\frac{dV}{dz} = -\left(j\omega\mu_0 + \frac{k_c^2}{j\omega\epsilon_0}\right)I \quad \frac{dI}{dz} = -j\omega\epsilon_0 V$$

组成这些模的分布参数等效电路\*。

3.21 试求圆波导中  $TE_{1,1}$  模功率的表示式（参看附录 I 贝塞尔函数积分）。

3.22 导出圆波导中  $TE_{0,m}$  模衰减的表示式，即 (3.123) 式。

3.23 当工作频率为截止频率的 10 倍时，试求：直径为 1 英寸的铜制圆波导  $H_{0,1}$  模每哩的衰减（以分贝为单位）。

3.24 有一无限长的矩形波导。该波导在  $z \geq 0$  处以相对电容率为  $K$  的介质填充。 $H_{1,0}$  模由  $z < 0$  处入射。在  $z = 0$  处由于不连续而产生反射的  $H_{1,0}$  模和传输的  $H_{1,0}$  模。试证明反射系数为  $(Z_2 - Z_1)/(Z_2 + Z_1)$ ，式中， $Z_1$  是空心波导的波阻抗， $Z_2$  是介质填充波导的波阻抗。证明波阻抗之比等于波导波长之比。

★3.25 试求在接地介质板上表面波  $TM$  模功率的表示式。

★3.26 试求在导电平面上放介质板的表面波  $TE$  模的解。根据本征值方程的图解，证明所有的表面波  $TE$  模具有较低的截止频率。

★3.27 设一个对电磁场呈现表面电抗  $jX_s$  的平面。当表面电抗为电感性时，证明衰减常数为  $k_0 X_s / Z_0$  的表面波  $TM$  模能够存在。

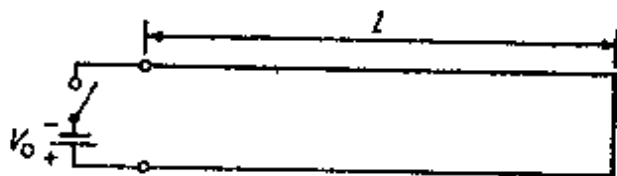
★3.28 在习题 3.16 的部分填充矩形波导中，用横向谐振法导出  $TE_{0,0}$  模的本征值方程，并证明两个区域中  $x$  方向的波阻抗分别为  $k_0 Z_0 / h$  和  $kz/k_d = k_0 Z_0 / k_d$ 。

\* S. A. Schelkunoff, *Bell System Tech. J.*, Vol. 34, p. 995,

September, 1955.

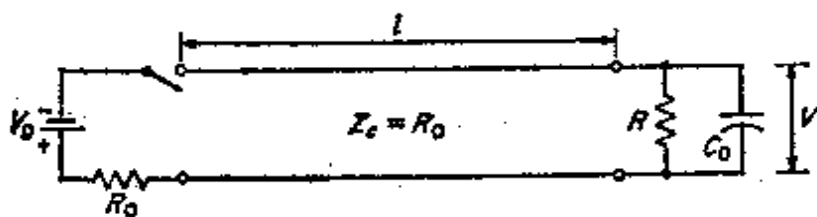
★3.29 要求对习题3.26和3.27用横向谐振法导出本征值方程。

3.30 设有一段长为  $l$  的理想无耗传输线。远端被短路，在  $t = 0$  瞬间把电压为  $V_0$  的电池组接到该传输线的输入端。试画出  $0 < t < l/c, l/c < t < 2l/c, 2l/c < t < 3l/c$  时线上的电压波图形。



习题 3.30

3.31 设有如图所示的传输线电路。在  $t = 0$  时刻电压为  $V_0$  的电池组由输入端接入。求输出负载上的电压  $V$  随时间的变化。



习题 3.31

提示：用类似于低频电路理论所使用的方法，可以求解这个暂态问题。传输线所遵守的方程式为

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -L \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial t} \quad \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial z} = -C \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

对它作拉普拉斯变换可以消去时间导数。 $\psi$  和  $\mathcal{I}$  的变换解为

$$V^+ e^{-sz/c} + V^- e^{sz/c} \quad I^+ e^{-sz/c} + I^- e^{sz/c}$$

把接负载和输入电压的方程式进行变换，由所得的方程可以解出负载电压的拉普拉斯变换式。然后做逆变换得出随时间变化的负载电压。

对于这个稳态问题，首先用电压源  $V_0 e^{j\omega t}$  代替电池组，并求出随  $\omega$  变化的变换函数  $V/V_0 = Z_L(j\omega)$ ，可以简化上述步骤。然后，

用  $s$  代替  $j\omega$  得到在  $s$  域的交流函数。因为输入阶跃电压的拉普拉斯变换为  $V_0/s$ ，所以，输出电压的拉普拉斯变换为

$$V(s) = \frac{V_0}{s} - Z_i(j\omega = s)$$

由  $V(s)$  的拉普拉斯逆变换即得输出电压。

3.32 电容率  $\epsilon$  通常是  $\omega$  的函数  $\epsilon(\omega)$ ，试求介质填充同轴线中群速的表示式。忽略由导体损耗而引起的衰减对频率的依赖性。

3.33 尺寸为  $a = 2b = 2.5$  厘米的矩形波导，在频率为  $10^{10}$  赫时使用。此频率的脉冲调制载波通过这个波导传输。当波导长为 100 米时，所产生的脉冲延迟时间为多少？

3.34 调幅波  $(1 + m \cos \omega_m t) \cos \omega_c t$  通过习题 3.33 中给出的波导传输。若  $f_m = 20$  千赫， $f_c = 10000$  兆赫，要使上下边带产生  $180^\circ$  的相对相移，所须的波导为多长？

提示：计算每个频率成分的相速。

3.35 信号  $(2 + \cos 2\pi f_1 t + \cos 2\pi f_2 t) \cos 2\pi f_c t$  通过 1000 米长的矩形波导传输。若  $a = 2.5$  厘米， $f_c = 10000$  兆赫， $f_1 = 10$  兆赫， $f_2 = 12$  兆赫，使用的是  $TE_{10}$  模。试求输出信号的精确表示式。

提示：求出输入信号每个频率成分的相移，并在输出端把它们重新组合为正弦和余弦项，画出输入和输出的低频调制信号图形，并注意所产生的畸变。

★3.36 一个平面的表面电抗为  $X_s = j(a\omega^3 - b)/\omega$ 。试求如习题 3.27 那样的表面波  $TM$  模的解。并导出此波群速的表示式。

## 参 考 文 献

1. Atwater, H. A.: "Introduction to Microwave Theory," McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.
2. Bronwell, A. B., and R. E. Baum: "Theory and Application of Microwaves," McGraw-Hill Book Company, New York, 1947.
3. Collin, R. E.: "Field Theory of Guided Waves," McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.

4. Ghose, R. N.: "Microwave Circuit Theory and Analysis," McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.
5. Harrington, R. F.: "Time-harmonic Electromagnetic Fields," McGraw-Hill Book Company, New York, 1961.
6. Jordan, E. C.: "Electromagnetic Waves and Radiating Systems," Prentice-Hall, Inc., Engle Wood Cliffs, N. J., 1950
7. Ramo, S., and J. R. Whinnery: "Fields and Waves in Modern Radio," 2d ed., John Wiley and Sons, Inc., New York, 1953.
8. Reich, H. J., P. F. Ordung, H. L. Krauss, and J. K. Skolnik: "Microwave Theory and Techniques," D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1953.
9. Schelkunoff, S. A.: "Electromagnetic Waves," D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1943.
10. Slater, J. C.: "Microwave Transmission," McGraw-Hill Book Company, New York, 1942.
11. Southworth, G. C.: "Principles and Applications of Waveguide Transmission," D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1950.
12. Toraldo di Francia, G.: "Electromagnetic Waves," Interscience Publishers, Inc., New York, 1955

## 第4章 波导系统电路理论\*

在低频时，电阻、电容和电感互相连接起来就组成了电路。这些电路通常是线性的，所以，当存在几个激励源时，可以利用迭加原理求其结果。不论是用回路电流表示，还是用结点电压表示，基尔霍夫定律都是其分析的基础。在这些低频电路中，各个元件都用导线连接。一般说来，对这些连接线的长度没有严格的要求，或者说是无关紧要的。

在微波频率时，也可以把等效的电抗性元件和电阻性元件连接起来，组成微波电路，其连接线改用传输线和波导。连接线的长度往往是几个波长，因而传播效应就成为非常重要的了。所以，微波电路的分析，必然比低频电路更加复杂。传输线的电路理论已经研究了几十年，下面将指出，波导系统电路理论在形式上是与其相同的。

许多适用于低频的电路分析方法和电路特性，对微波电路也同样适用。实际上，低频电路分析是微波电路分析的一个特殊情况。因此，微波电路的研究，加深了对普通电路理论的理解。本章研究波导系统电路理论的物理基础。在后面几章，对阻抗匹配、波导器件、空腔谐振器和滤波器等的研究中将利用这一基础。

### 4.1 等效电压和等效电流

在微波频率下，不能用电压表和电流表直接测量电压和电流。

---

\* 在C.G. Montgomery, R.H. Dicke和E.M. Purcell所著的“Principles of Microwave circuits” (McGraw-Hill Book Company, New York, 1948)一书中介绍了微波电路基本理论。本书4.1节到4.9节所介绍的大多数材料必然基本上与该书中类似。

因此,对微波频率,我们不能用电压和电流来衡量电路的激励电平。但是,另一方面,为最恰当地利用低频电路的概念,用电压、电流和阻抗来描述微波电路的工作是有效的。虽然很大程度上可以做到这一点。但是,有一个显著的差别,就是在大多数情况下,电压和电流不是单值的。在前一章已经指出,由于传输线上的  $TEM$  波,存在着分别对应于横向电场和磁场的单值电压波和电流波。而在波导中的  $TE$  模或  $TM$  模的情况下,却不存在与传输线上  $TEM$  波的电压波和电流波有同样物理意义的单值电压波或电流波。这个结果是可以预料到的,因为波导的边界是闭合的导体边界,人们难以确定应该测量的是边界上哪两点上的电压。而且,若把电压定义为在边界上所取两点之间横向电场的线积分,则可以看到,对  $TM$  模,线积分为零(习题4.1和4.2);而对  $TE$  模,线积分的值取决于所选取的积分路径。因此,与波导模相联系的电压波和电流波的概念,只建立在等效的基础上,且只具有形式上的意义。以下讨论引入等效电压和等效电流概念的依据。

前一章中已经指出,波导的传输模具有如下特性:

1. 传送的功率等于只与横向电场和横向磁场有关的一个积分。
2. 无耗波导中有几个传输模时,所传送的功率等于每个模各自贡献的功率的总和。
3. 横向场沿波导随距离只按传播因子  $e^{\pm j\beta z}$  变化。
4. 横向磁场与横向电场的关系为一个简单的常数,即该模的波阻抗。当波沿  $+z$  方向传播时,即为

$$Z_{wh} = a_x e.$$

因为横向场具有类似于传输线上的电压波和电流波的性质,所以,应使所引入的等效电压波和电流波分别地正比于横向电场和磁场。实际上正是这样做的。

沿  $+z$  方向传播的波导模一般可以表示为

$$\mathbf{E} = c^+ \mathbf{e} e^{-j\beta z} + c^- \mathbf{e}_s e^{-j\beta z} \quad (4.1a)$$

$$\mathbf{H} = c^+ \mathbf{h}_e e^{-j\beta z} + c^+ \mathbf{h}_z e^{-j\beta z} \quad (4.1b)$$

而沿 $-z$ 方向所传播的模为

$$\mathbf{E} = c^- \mathbf{e}_e e^{j\beta z} - c^- \mathbf{e}_z e^{j\beta z} \quad (4.2a)$$

$$\mathbf{H} = -c^- \mathbf{h}_e e^{j\beta z} + c^- \mathbf{h}_z e^{j\beta z} \quad (4.2b)$$

在(4.1)式和(4.2)式中,  $C^+$ 和 $C^-$ 是任意振幅常数。应该指出 若该模为 $TE$ 模或 $TM$ 模时, 则相应地使 $\mathbf{e}_z$ 或 $\mathbf{h}_z$ 为零。设等效电压波和电流波为

$$V = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z} \quad (4.3a)$$

$$I = I^+ e^{-j\beta z} - I^- e^{j\beta z} \quad (4.3b)$$

式中,  $V^+ = K_1 c^+$ ,  $V^- = K_1 c^-$ ,  $I^+ = K_2 c^+$ ,  $I^- = K_2 c^-$ 。

$k_1$ 和 $k_2$ 分别是待求的电压和横向电场之间以及电流和横向磁场之间关系的比例常数。为了使功率守恒, 需要

$$\frac{1}{2} V^+ (I^+)^* = \frac{|c^+|^2}{2} \int_S \mathbf{e}_h^* \cdot \mathbf{a}_z dS$$

即

$$K_1 K_2^* = \int_S \mathbf{e}_h^* \cdot \mathbf{a}_z dS \quad (4.4)$$

把函数 $\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{h}$ 作适当的归一化, 可以使乘积 $K_1 K_2^*$ 等于1。虽然(4.4)式给出了 $K_1$ 和 $K_2$ 之间的关系式, 但是要确定它们, 还需要第二个关系式。这第二个关系式可以用种种方法选取。例如, 可以把由(4.3)式表示的电压和电流波, 看作存在于与波导等效的假想传输线上。这样, 就可取此传输线的特性阻抗等于1。在此情况下,

$$Z_z = \frac{V^+}{I^+} = \frac{V^-}{I^-} = \frac{K_1}{K_2} = 1 \quad (4.5)$$

另一种方法, 可取特性阻抗等于波阻抗, 此时,

$$Z_z = \frac{K_1}{K_2} = Z_w \quad (4.6)$$

显然, 还有其他同样有效的方法, 本书中既用(4.5)式, 也用(4.6)式的定义。使用的是哪一个将先说明, 不然就在讨论时说清



楚用了哪一个定义。当所选取的等效电压和电流使等效传输线的特性阻抗为 1 时，我们就把它们称作归一化电压和电流。应当指出，即使等效传输线可以用来表示一个波导，但是，此传输线的传播常数必须用波导的传播常数。

有  $N$  个传播模的波导，可以用  $N$  条具有等效电压波和等效电流波的假想传输线来表示（根据上面所列的波导传输模所具有的性质 2）。于是可得

$$V = \sum_{n=1}^N (V_n^+ e^{-i\beta_n z} + V_n^- e^{i\beta_n z}) \quad (4.7a)$$

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=1}^N (I_n^+ e^{-i\beta_n z} - I_n^- e^{i\beta_n z}) \\ &= \sum_{n=1}^N (V_n^+ Y_n e^{-i\beta_n z} - V_n^- Y_n e^{i\beta_n z}) \end{aligned} \quad (4.7b)$$

式中， $Y_n$  是任意选取的等效传输线的特性导纳。当一障碍物插入有  $n$  个模传播的波导中时，这些模通常将通过障碍物而互相耦合。这种耦合可用由阻抗元件组成的等效电路表示。下一节将研究波导中障碍物的阻抗表示。一旦确定了等效电压和电流的振幅以后，波导中的场就可以由下列关系式：

$$\mathbf{E}_z = \sum_{n=1}^N (V_n^+ K_{1n}^{-1} e^{-i\beta_n z} + V_n^- K_{1n}^{-1} e^{i\beta_n z}) \mathbf{e}_z \quad (4.8a)$$

$$\mathbf{H}_z = \sum_{n=1}^N (I_n^+ K_{2n}^{-1} e^{-i\beta_n z} - I_n^- K_{2n}^{-1} e^{i\beta_n z}) \mathbf{h}_z \quad (4.8b)$$

和每个模特定的比例常数  $K_{1n}$ 、 $K_{2n}$  得出。利用麦克斯韦方程，可以从(4.8)式求出轴向场分量。要注意，向  $-z$  方向传播的等效电流波的振幅用  $-I_n^-$  表示，因而对应的横向磁场正比于  $-K_{2n}^{-1} I_n^-$ 。当波导中有几种模以同一频率同时传播时，电的端口数将超过实际的端口数。也就是可以利用这些传播模中的任一个把功率传送到给定

的负载上，而所有这些模可以共用一个实际波导输入端口\*。

## 4.2 用阻抗描述波导元件和波导电路

### 一端口电路

一端口电路(等效于二端网络)就是功率能进去或者能出来的单段波导或传输线的电路。图4.1中所示的短路传输线和包含一个金属柱的短路波导，就是一端口电路的两个例子。

对上述类型的一端口器件来说，知道 $V^+$ 、 $V^-$ 、 $V=V^++V^-$ 、 $I=I^+-I^-$ 四个量中的任意两个，就足以描述一端口器件对入射波(假定此波导只有一个模传播)的作用。当然，这些量必须以一个端面为参考，比如图4.1中的 $t$ ，以便明确地确定它们。一个端面(即参考面)等效于低频网络中的一个端对。在这个例子中，要求用阻抗来表示。

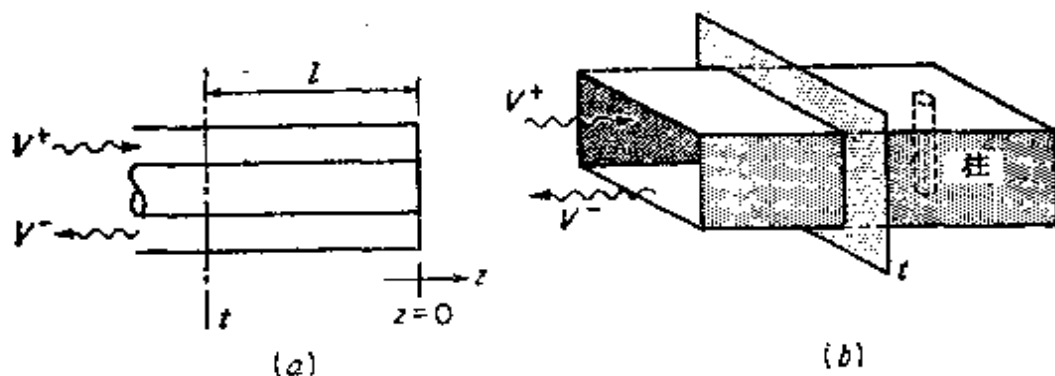


图 4.1 一端口电路(a)短路同轴线；(b)带有小柱的短路波导

设在端面上的总电压和总电流为

$$V=V^++V^-$$

$$I=I^+-I^-=Y_c(V^+-V^-)$$

式中， $Y_c$ 是等效特性导纳(传输线的实际特性导纳)，则输入阻抗为

\*本章所介绍的微波等效电路理论可推广到包含非传播模的情况，但是，当包含非传播模时，阻抗矩阵和散射矩阵的性质与在端面上只有传播模时不同。参看：H. Haskal, *Matrix Description of Waveguide Discontinuities in the Presence of Evanescent Modes*, *IEEE Trans.*, Vol. MTT-12, pp. 184-188, March, 1964.

$$Z_{in} = \frac{V}{I} = \frac{V^+ + V^-}{V^+ - V^-} Z_0 \quad (4.9)$$

复数坡印廷矢量可以用来确定一端口阻抗函数的物理特性。由(2.59)式和(2.60)式得

$$\frac{1}{2} \oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{n} ds = P_L + 2j\omega(W_m - W_e) \quad (4.10)$$

式中,  $\mathbf{n}$ 是闭合面 $S$ 的内向法线单位矢量,  $P_L$ 是 $S$ 面所围体积的耗散功率,  $W_m - W_e$ 是储藏在 $S$ 中的纯无功能量。  $S$ 面取为端面、波导壁和短路面。因为理想的导电壁与短路端的 $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ , 所以(4.10)式的积分简化为只在端面上进行。于是

$$\frac{1}{2} \oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{a}_z ds = P_L + 2j\omega(W_m - W_e) \quad (4.11)$$

在端面上的横向场现为(参看(4.8)式)

$$\mathbf{E}_t = K_1^{-1} (V^+ + V^-) \mathbf{e} = K_1^{-1} V \mathbf{e} \quad (4.12a)$$

$$\mathbf{H}_t = K_2^{-1} (I^+ - I^-) \mathbf{h} = K_2^{-1} I \mathbf{h} \quad (4.12b)$$

因而(4.11)式变成

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (K_1 K_2^*)^{-1} V I^* \int_S \mathbf{e} \times \mathbf{h}^* \cdot \mathbf{a}_z ds &= \frac{1}{2} V I^* \\ &= P_L + 2j\omega(W_m - W_e) \end{aligned} \quad (4.13)$$

现在, 使用 $I Z_{in}$ 代替 $V$ , 则得

$$Z_{in} = \frac{P_L + 2j\omega(W_m - W_e)}{\frac{1}{2} I I^*} = R + jX \quad (4.14)$$

它把输入阻抗与损耗功率和储藏在端面外体积中的无功能量联系起来。因为电流 $I$ 是一个等效电流, 所以相应的阻抗 $Z_{in}$ 也是一个等效阻抗。由于 $P_L$ ,  $W_m$ 和 $W_e$ 都正比于 $|I^+|^2$ , 并考虑到场方程是线性的, 以及(4.14)式中的等效电阻 $R$ 和等效电抗 $X$ 与入射波的振幅是无关的, 故 $P_L$ ,  $W_m$ 和 $W_e$ 也正比于 $|I|^2$ 。

在(4.13)式中用 $Y_{in}^* V^*$ 代替 $I^*$ , 并取复数共轭之后, 就得到一

端口器件的输入导纳为

$$Y_{in} = \frac{Pl - 2j\omega(W_m - W_e)}{\frac{1}{2}VV^*} = G + jB. \quad (4.15)$$

只有在  $W_e > W_m$  时, 电纳  $B$  才是正(容性)的。

利用(4.14)式的一般定义, 可求得最简单情况(短路同轴线)的输入阻抗。图4.1的短路同轴线, 作为一端口器件其场为

$$\mathbf{E} = \frac{V^+}{\ln(b/a)} \frac{\mathbf{a}_r}{r} (e^{-jk_0 z} - e^{jk_0 z})$$

$$\mathbf{H} = \frac{Y_0 V^+}{\ln(b/a)} \frac{\mathbf{a}_\phi}{r} (e^{-jk_0 z} + e^{jk_0 z})$$

因为在短路处( $z=0$ )电场必须为零。若端面位于 $z=-l$ 处, 则

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{\epsilon_0}{4} \int_0^{2\pi} \int_a^b \int_{-l}^0 |\mathbf{E}|^2 r d\phi dr dz \\ &= \frac{2\pi\epsilon_0 |V^+|^2}{\ln(b/a)} \int_{-l}^0 \sin^2 k_0 z dz \\ &= \frac{\pi\epsilon_0 |V^+|^2}{\ln(b/a)} \left( l - \frac{\sin 2k_0 l}{2k_0} \right) \end{aligned}$$

同理, 可得

$$W_m = \frac{\pi\mu_0 Y_0^2 |V^+|^2}{\ln(b/a)} \left( l + \frac{\sin 2k_0 l}{2k_0} \right)$$

在端面 $z=-l$ 处的总电流为

$$I = Y_c V^+ (e^{jk_0 l} + e^{-jk_0 l}) = 2Y_c V^+ \cos k_0 l \quad \checkmark$$

利用(4.14)式得

$$\begin{aligned} Z_{in} &= \frac{4j\omega\pi\epsilon_0 |V^+|^2}{\ln(b/a)} \frac{\sin 2k_0 l}{k_0 (4Y_c^2 |V^+|^2) \cos^2 k_0 l} \\ &= \frac{j\omega\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)} \frac{\sin 2k_0 l}{k_0 Y_c^2 \cos^2 k_0 l} = jZ_c \tan k_0 l \quad (4.16) \end{aligned}$$

其中, 已利用了关系式  $Y_c = 2\pi Y_0 / (\ln(b/a))$ ,  $\sin 2k_0 l = 2 \sin k_0 l \cos k_0 l$

$k_0 l$  和  $k_0 = \omega(\mu_0 \epsilon_0)^{1/2}$ 。由一般定义(4.14)式得到短路同轴线输入阻抗的这个结果，和根据端面上总电压和总电流的表示式进行直接计算的结果是一致的。但是，介绍(4.14)式并不是用来作为计算工具，而是为了从本质上理解一端口电路阻抗函数的性质。

图4.1中的一端口电路的第二个例子，不能象上述同轴线那样直接地计算，因为它不是由均匀的无扰动的波导所组成。波导终端导体柱的存在，将在柱上引起感应电流，从而激励起多种波导模。但是，由于假定只有一种模( $TE_{10}$ 模)传播，故所有其它模均由此柱向两边按指数衰减。把端面取在离此柱足够远，就可以使此端面上基本上是主模的入射场和反射场。由此柱所激励的凋落模将储藏无功能量，根据(4.14)式，由端面看进去，此无功能量呈现一输入电抗。在波导终端里导体柱的存在，改变了主模反射波的振幅，其改变量相当于(4.14)式的右边添加的无功能量，从而改变了端面上的输入电抗。

由上面的讨论可以看出，当涉及波导结构时，重要的是选取离激励凋落模的障碍物足够远处的端面，使在这些参考面上只有主模具有足够大的振幅。这将保证所有与非传播模（它构成了围绕着障碍物的边缘场）相联系的无功能量被计入输入电抗的表示式中。这个措施对用来测量特定障碍物阻抗函数的任一实验设备是特别重要的。一旦阻抗在一个给定的端面上被完全确定后，就可以利用阻抗变换公式

$$Z(l_2) = Z_0 \frac{Z(l_1) + jZ_0 \tan \beta(l_2 - l_1)}{Z_0 + jZ(l_1) \tan \beta(l_2 - l_1)} \quad (4.17)$$

求出任何其他端面的阻抗，式中， $l_1$ 是端面1的位置， $l_2$ 为指定的新端面的位置。特别是端面位置移动  $\lambda_g/2$  的整数倍，而其阻抗保持不变这一点更重要。由此，可以把阻抗认为是障碍物附近的参考面上的阻抗。这个阻抗只表示障碍物对主模的影响，而并不意味着在此特定端面上总的场只是主模的场。换言之，波导元件或障碍物的阻抗，只说明这类元件对主模的影响，而不说明障碍物附近的具体场结构。

幸而，要求场结构的情况是极少的。

### 无耗的一端口终端

若一端口电路没有损耗，则输入阻抗为纯电抗，即

$$jX = \frac{4j\omega(W_m - W_e)}{II^*} \quad (4.18)$$

对微波电路来说，假设结构无损耗，常常是一个良好的近似方法。若  $W_m = W_e$ ，则输入电抗为零，并具备谐振条件。实际上有两种可能性，即  $W_m = W_e$ ，但  $I \neq 0$ ； $W_m = W_e$ ，但  $V \neq 0$ 。第一种情况对应于输入电抗为零（串联谐振）；而第二种情况对应于输入电纳为零（并联谐振），其电纳为

$$jB = \frac{4j\omega(W_e - W_m)}{VV^*} \quad (4.19)$$

当输入电抗为零时，输入电纳必定为无限大，这意味着此端面上  $V = 0$ 。这后一种情况是可能的，因为当终端为纯电抗时，所有的入射功率全部反射，所以，沿波导的总电压为以  $\sin\beta l$  形式表示的驻波。在端面上电纳函数  $B$  为零的情况下，其电抗  $X$  必定为无限大（有一个极点）， $I$  必定为零。可以预计，电抗和电纳函数会有许多零点和极点，即在这些频率上，它们为零或为无穷大。在短路同轴线电抗表示式中，这一特性是很明显的。此表示式是

$$jX = jZ_e \tan k_0 l = jZ_e \tan \frac{\omega l}{c} \quad (4.20)$$

图4.2画出了  $X$  随频率的变化曲线。特别要注意电抗斜率总是正的，即  $\partial X / \partial \omega > 0$ 。这个斜率为正的情况意味着：当  $\omega$  由零增大到无穷大时， $X$  的极点和零点必须交替地出现。下面我们将证明，这是任何一个电抗性一端口电路的一般性质，其结果称为福斯特电抗定理。无论如何，首先利用正切函数的无穷乘积表示式和部分分式展开

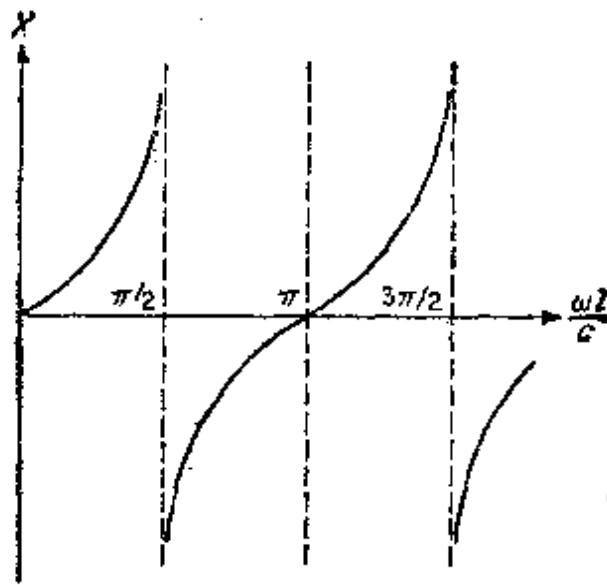


图 4.2 短路同轴线的输入电抗

式来改写(4.20)是有好处的:

$$\begin{aligned}
 X = Z_c \tan k_0 l &= \frac{Z_c \frac{\omega l}{c} \prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{\omega l}{n\pi c} \right)^2 \right]}{\prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \frac{(\omega l)^2}{\left( n + \frac{1}{2} \right)^2 (\pi c)^2} \right]} \\
 &= Z_c \frac{Z_0 c}{l} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\left( \frac{n\pi c}{Zl} \right)^2 - \omega^2} \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

第一个形式在分子和分母中都包含无限多项的乘积, 它清楚地显示出零点和极点交替出现的情况。第二个形式也非常清楚地显示极点, 但不知道零点位置的情况。在极点(比如说, 在 $\omega = \omega_n = n\pi c/2l$ )附近, 部分分式展开式除了第 $n$ 项以外, 都是很小的, 以致使

\* E.A. Guillemin, "The Mathematics of circuit Analysis," chap. 6, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1949.

E.T. Copson, "Theory of Functions of a Complex Variable," Oxford University Press, Fair Lawn, N.J., 1935.

J. Pierpont, "Functions of a Complex Variable," Dover Publications, Inc., New York, 1959.

$$X \approx \frac{Z\omega c}{l} \frac{Z_c}{(\omega_s - \omega)(\omega_s + \omega)} \approx \frac{cZ_c}{l(\omega_s - \omega)} \quad (4.22)$$

因为 $\omega \approx \omega_s$ 。在极点附近的这个性质，类似于简单的LC并联网络，其电抗为

$$X = \frac{-\omega L}{\omega^2 LC - 1} \approx \frac{\omega_s}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\omega_s - \omega} \quad (4.23)$$

式中， $\omega_s = (LC)^{-1/2}$ 。但是，微波网络更为复杂，这是因为它有无限多个极点和零点，不象简单的并联LC电路那样只有二个零点和一个极点（二个零点是：在 $\omega = 0$ 时， $\omega L$ 为零；在 $\omega$ 为无穷大时， $(\omega C)^{-1}$ 为零）。

注意到简单的LC并联网络和微波网络的这些相似点和不同点是重要的，因为虽然我们所论证的仅仅是短路同轴线的某些特性，但它们是微波网络所共有的。

### ★4.3 福斯特电抗定理

现在就来证明电抗 $X$ 和电纳 $B$ 对 $\omega$ 的变化率为正的那个定理。一旦得到这个结果，就可由此得出电抗函数的极点和零点必定在 $\omega$ 轴上交替出现的结论。图4.3表示了一个一般的一端口电抗终端。此终端中的场满足麦克斯韦方程：

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E}.$$

把这些方程的复数共轭数对 $\omega$ 求导数得

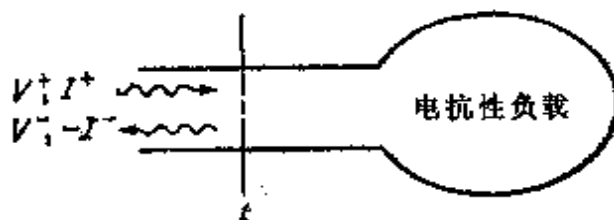


图 4.3 一端口电抗终端



$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial \omega} = j\omega\mu \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \omega} + j\mathbf{H}^* \frac{\partial \omega\mu}{\partial \omega}$$

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \omega} = -j\omega\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial \omega} - j\mathbf{E}^* \frac{\partial \omega\epsilon}{\partial \omega}$$

计及,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \omega} + \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial \omega} \times \mathbf{H} \right) &= \nabla \times \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \omega} \\ &- \mathbf{E} \cdot \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \omega} + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial \omega} \cdot \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial \omega} \cdot \nabla \times \mathbf{H} \end{aligned}$$

用上面的方程代入得

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \omega} + \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial \omega} \times \mathbf{H} \right) &= j \left( \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* \frac{\partial \omega\mu}{\partial \omega} \right. \\ &+ \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \frac{\partial \omega\epsilon}{\partial \omega} \left. \right) + j\omega \left( \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \omega} - \mu \mathbf{H}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \omega} \right. \\ &+ \left. \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial \omega} - \epsilon \mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \omega} \right) \end{aligned}$$

因为右边第二项为零, 故得

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \omega} + \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial \omega} \times \mathbf{H} \right) \\ = j \left( \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* \frac{\partial \omega\mu}{\partial \omega} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \frac{\partial \omega\epsilon}{\partial \omega} \right) \end{aligned}$$

若在此终端整个体积内进行积分, 并在左边用散度定理, 则得

$$\begin{aligned} \oint_S \left( \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \omega} + \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial \omega} \times \mathbf{H} \right) \cdot d\mathbf{S} &= -j \int_V \left( \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* \frac{\partial \omega\mu}{\partial \omega} \right. \\ &+ \left. \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \frac{\partial \omega\epsilon}{\partial \omega} \right) dV = -4j(W_m + W_e) \end{aligned} \quad (4.24a)$$

式中,  $W_m + W_e$  是储藏在无耗终端中总能量的时间平均值, (由 2.5 节中(2.53)式可以看出, )  $d\mathbf{S}$  的方向取为指向体积内部。

因为在理想导电波导壁上  $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$  和  $\mathbf{n} \times \partial \mathbf{E} / \partial \omega$  ( $\mathbf{n}$  为单位内法线矢)

为零，所以，(4.24a)式的面积分简化为只在端面  $t$  上的积分。在端面上的积分为

$$\int_t \left( \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \omega} + \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial \omega} \times \mathbf{H} \right) \cdot \mathbf{n} dS = V \frac{\partial I^*}{\partial \omega} + \frac{\partial V^*}{\partial \omega} I \quad (4.24b)$$

式中， $V$  和  $I$  为端面上的等效电压和等效电流。因为无耗电抗终端的  $V = jIX$ ，所以

$$\frac{\partial V^*}{\partial \omega} = -jX \frac{\partial I^*}{\partial \omega} - jI^* \frac{\partial X}{\partial \omega}$$

于是

$$V \frac{\partial I^*}{\partial \omega} + \frac{\partial V^*}{\partial \omega} I = jXI \frac{\partial I^*}{\partial \omega} - jXI \frac{\partial I^*}{\partial \omega} - jII^* \frac{\partial X}{\partial \omega}$$

从而可得出(4.24b)式为

$$II^* \frac{\partial X}{\partial \omega} = 4(W_m + W_e)$$

即

$$\frac{\partial X}{\partial \omega} = \frac{4(W_m + W_e)}{II^*} \quad (4.25)$$

其右边正比于储藏在终端中的总能量，且决不可能成为负的。因此，电抗函数的斜率始终是正的。如果在(4.24b)式中用  $jBV$  代替  $I$  则不难得出

$$\frac{\partial B}{\partial \omega} = \frac{4(W_m + W_e)}{VV^*} \quad (4.26)$$

因而，电纳也是频率的增函数。上面的关系式也证明电抗或电纳的频率敏感性正比于所储藏的平均总能量。在简单的  $Lc$  电抗网络的情况下，不难证明这些关系式。在本章末有一个习题就要明证它。

## ★4.4 $Z_{in}$ 的奇偶特性

在结束一端口阻抗函数的讨论之前，必须指出它的一个更一般的特性。这个特性就是  $Z_{in} = R + jX$  的实部是  $\omega$  的偶函数，而其虚部是  $\omega$  的奇函数。在上一章讨论群速的那一节中，已指出了其物理必然性。这个性质是由电路对实的时间激励函数的响应也必须是实数这一要求而产生的。也就是说，若  $\mathcal{V}(t)$  为端面上所加的电压，则由付立叶变换可得到其频谱为：

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \mathcal{V}(t) dt \quad (4.27)$$

其所流过的电流频谱为

$$I(\omega) = \frac{V(\omega)}{Z_{in}(\omega)} = \frac{V}{R + jX} \quad (4.28)$$

作为时间函数的电流为

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\omega)}{R(\omega) + jX(\omega)} e^{j\omega t} d\omega \quad (4.29)$$

它必须是一个实函数。这是理应如此的，因为，若

$$\frac{V(-\omega)}{R(-\omega) + jX(-\omega)} = \frac{V^*(\omega)}{(R(\omega) + jX(\omega))^*}$$

则(4.29)式变成

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{V(\omega) e^{j\omega t}}{R(\omega) + jX(\omega)} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{V(\omega) e^{j\omega t}}{R(\omega) + jX(\omega)} d\omega$$

我们可以证明它是一个实函数。右边的第一个积分式若用  $-\omega$  代替  $\omega$ ，则得

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[ \frac{V(-\omega) e^{-j\omega t}}{R(-\omega) + jX(-\omega)} + \frac{V(\omega) e^{j\omega t}}{R(\omega) + jX(\omega)} \right] d\omega \quad (4.30)$$

这个积分中的两项互为复数共轭，因而其和为实数，即

$$f(t) = \frac{1}{\pi} R_e \int_0^{\infty} \frac{V(\omega)e^{j\omega t}}{R(\omega) + jX(\omega)} d\omega \quad (4.31)$$

只有 $V$ 和 $R + jX$ 都满足所规定的条件时， $V/(R + jX)$ 才满足所规定的条件。显然，由(4.27)式，可得 $V(-\omega) = V^*(\omega)$ 。若

$$R(-\omega) + jX(-\omega) = \{R(\omega) + jX(\omega)\}^*$$

则

$$R(-\omega) = R(\omega) \quad X(-\omega) = -X(\omega)$$

即， $R$ 是 $\omega$ 的偶函数，而 $X$ 是 $\omega$ 的奇函数，与前面证明的一致。这些偶函数和奇函数的特性，对于理解由实验数据构成的阻抗函数近似表示式是有用的。例如，象下面这样一类级数

$$a_1\omega + a_3\omega^3 + a_5\omega^5 + \dots$$

可用来表示 $X$ ，而不表示 $R$ ，因为此级数是 $\omega$ 的奇函数。

## 4.5 N 端 口 电 路

图4.4表示以公共区域（即公共接合处）为终端的由 $N$ 个波导或传输线（或者是两者的组合）组成的接头。在所取的 $N$ 个端面之

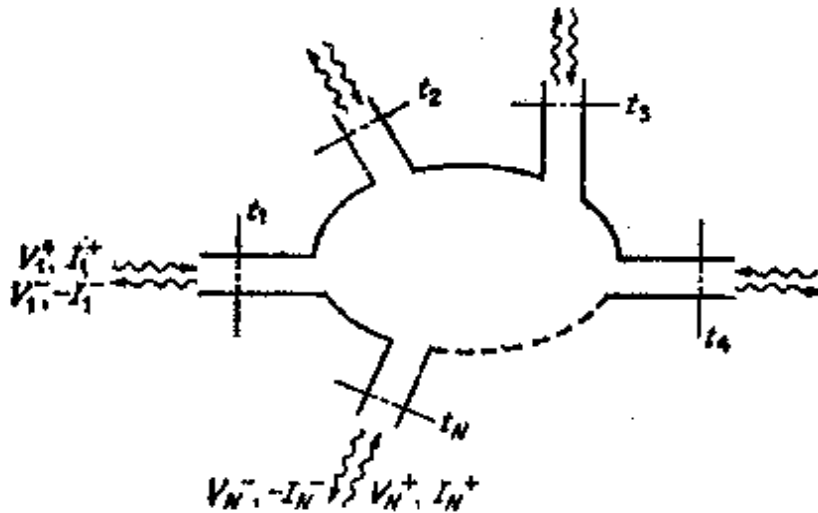


图 4.4  $N$  端口微波电路

间的区域，可以包含任意个无源元件。若每个波导只有一种传播模，则此电路就组成了  $N$  端口微波电路。若一个或一个以上的波导有几个独立的传播模，则电的端口数超过机械的端口数。因为每个模所传送的功率与所有其他模所传送的功率互不相关，所以功率可以通过与其模相应的电端口进入接头或由接头出来。为了使分析简化，假定每个波导只有一个传播模。把此理论推广到几个或所有波导都存在几个传播模的情况，也近乎正确。

设选取的端面离接头足够远，以致使端面上的场基本上就是主模传播的入射波和反射波场。适当地规定等效电压和电流，可以单值地规定端面上的这些场。显然，可以任意规定（即独立地选取）所有入射波的振幅。然后根据接头的物理特性确定所有反射波的振幅，即所有的  $V_n^-$  是  $V_n^+$  的线性函数。当  $V_n^+$  和  $V_n^-$  为已知时，由关系式

$$I_n^+ = Y_n V_n^+ \quad I_n^- = Y_n V_n^-$$

可求出对应的电流  $I_n^+$ 、 $I_n^-$ 。因为麦克斯韦方程是线性的，且假定接头的响应是线性的，故可取  $V_n^+$ 、 $V_n^-$ 、 $I_n^+$ 、 $I_n^-$   $4N$  个量作  $N$  个任意的线性无关的组合，以作为描述接头电性能的自变量。当用阻抗描述时，若取端面上的总电流  $I_n = I_n^+ + I_n^-$  为自变量，则在  $N$  个端面的电压  $V_n = V_n^+ + V_n^-$  为因变量，它与电流有如下的线性关系：

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \dots & Z_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_N \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

矩阵元为  $Z_{ij}$  的矩阵称为阻抗矩阵，它能完全地表示  $N$  端口电路的电特性。下面，我们来讨论此阻抗矩阵的几个特性。

首先，如果接头包含非互易媒质，如象等离子体（电离气体）或加直流磁偏置场的铁氧体（它在第 6 章中讨论），则一般说来  $Z_{ij} \neq Z_{ji}$ ，即阻抗矩阵 ( $Z$ ) 是不对称的。其次，由于每一个  $Z_{ij}$  是复数，它有两个独立项，所以，要完整地表示接头，需要  $2N^2$  个参量。若接头不包含任何非互易媒质，则  $Z_{ij} = Z_{ji}$ ，且阻抗矩阵是对

称的。在此情况下，因为有  $N^2 - N$  个参量是相等的，所以总共只需要  $2N^2 - (N^2 - N) = N(N+1)$  个独立参量，就能表示接头。最后，若接头是无损耗的（许多微波接头可以作这样的近似，而其误差可忽略），则所有  $Z_{ij}$  由于在接头中没有功率损耗而必定为纯虚数。在这种情况下，只需要有  $\frac{1}{2}N(N+1)$  个独立参量就能完全地表示接头。任何一个包含足够数量的电阻性和电抗性元件的网络，都可以在给定的频率下用来表示接头。但是，必须记住，当频率变化时，网络元件（电阻、电容和电感）的值也必须变化。除非网络参数的值随频率变化而变化，否则，很难找到一个特定的网络，能在一个频段内正确地表示接头。

上面的讨论也适用于导纳矩阵  $(Y)$ ，它表示端面上电流和总电压的关系，即

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \dots & Y_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_N \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

阻抗矩阵和导纳矩阵彼此是互逆的，所以

$$(Y) = (Z)^{-1} \quad (4.34)$$

### 阻抗矩阵对称性的证明

当接头所包含的媒质以标量参数  $\mu$  和  $\epsilon$  来表示其特性时，阻抗矩阵的对称性是容易证明的。假设所选取的入射波振幅  $V_i^+$  使除了第  $i$  个端面外，其余所有端面上的总电压  $V_n$  都等于零。并令其对应的场解为  $E_i$ 、 $H_i$ 。同理，令第二个场解为  $E_j$ 、 $H_j$ ，它们对应于除  $V_j$  外其余所有的入射波振幅  $V_n$  等于零的情形。当闭合面  $S$  内没有场源时，洛仑兹互易定理（方程（2.135））为

$$\oint_S (E_i \times H_j - E_j \times H_i) \cdot n ds = 0$$

设  $S$  面由包围接头的导电壁和  $N$  个端面所组成。如果导电壁为理想导体或其表面阻抗为  $Z_w$ （参看2.12节），那末导电壁上的积分

为零。因而只在端面上积分即可，即有

$$\sum_{n=1}^N \int_{t_n} (\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_i - \mathbf{E}_j \times \mathbf{H}_j) \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.35)$$

但是，对这里所研究的特定解来说，因为除  $V_i$  和  $V_j$  而外，取其余的  $V_n$  为零，所以  $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_i$  和  $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_j$ （即  $\mathbf{E}_{in}$ 、 $\mathbf{E}_{jn}$ ）除了  $t_i$  和  $t_j$  端面以外，在其余的端面上都分别得零。因而（4.35）式就成为

$$\int_{t_i} \mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_i \cdot \mathbf{n} ds = \int_{t_j} \mathbf{E}_j \times \mathbf{H}_j \cdot \mathbf{n} ds = 0$$

即

$$V_i (I_i)_i = V_j (I_j)_j \quad (4.36)$$

式中， $(I_i)_i$  为端面  $i$  处由加在端面  $j$  上的电压引起的电流。同理， $(I_j)_j$  为端面  $j$  处由加在端面  $i$  上的电压引起的电流。由表示接头导纳的（4.33）式得

$$\text{当 } n \neq i, V_n = 0 \text{ 时, } I_i = (I_i)_i = Y_{ij} V_j$$

$$\text{当 } n \neq j, V_n = 0 \text{ 时, } I_j = (I_j)_j = Y_{ji} V_i$$

因而（4.36）式为

$$V_i V_j Y_{ij} = V_j V_i Y_{ji}$$

即

$$Y_{ij} = Y_{ji} \quad (4.37)$$

这就证明了导纳矩阵的对称性。因为对称矩阵的逆矩阵也是对称矩阵，所以阻抗矩阵也是对称的。阻抗矩阵和导纳矩阵的对称性是互易性的一个结果。对  $\mu$  和  $\epsilon$ （或两者）为非对称矩阵的非互易媒质来说，（2.135）式不适用。在这种情况下，阻抗矩阵不再是对称的了。非互易微波器件在第6章中讨论。所以在这一节中不再加以说明了。

### 无损耗接头[Z]矩阵的虚数特性的证明

无耗接头的阻抗矩阵和导纳矩阵中的所有矩阵元都是纯虚数。设  $(V)$  和  $(I)$  分别为表示端电压和端电流的列矩阵。则它们的转置

矩阵 $(V)_i$ 、 $(I)_i$ 为行矩阵的形式,

$$(V)_i = (V_1 V_2 \cdots V_N)$$

$$(I)_i = (I_1 I_2 \cdots I_N)$$

进入接头总的复数功率为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(I^*)_i(V) &= \frac{1}{2}(I^*)_i(Z)(I) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N I_n^* Z_{nm} I_m = P_i + 2j\omega(W_m - W_e) \end{aligned} \quad (4.38)$$

因为无耗接头 $P_i=0$ ,所以上式二重和必为纯虚数.由于可以把 $I_n$ 选为自变量,故除了第 $n$ 个外,它们全都可以选为零.在这种情况下

$$\operatorname{Re}(I_n^* Z_{nn} I_n) = 0$$

或

$$\operatorname{Re} Z_{nn} = 0$$

若除了 $I_n$ 和 $I_m$ 以外全都选为零,则得

$\operatorname{Re}((I_n^* I_m + I_m^* I_n) Z_{nm} + I_n I_n^* Z_{nn} + I_m I_m^* Z_{mm}) = 0$ 但是 $I_n I_n^*$ 、 $I_m I_m^*$ 和 $I_n^* I_m + I_m^* I_n$ 都是实数, $Z_{nn}$ 、 $Z_{mm}$ 都是虚数,所以只有在

$$\operatorname{Re} Z_{nm} = 0$$

时,此方程才能成立.因而无耗接头所有的 $Z_{nm}$ 为纯虚数.

## 4.6 二端口接头

看来研究二端口接头这一特例比继续研究 $N$ 端口的一般理论更为合适。 $N$ 端口接头的另外一些性质,要求在本章末的几个习题中导出.图4.5表示二端口接头的三个例子.第一个例子是不等高的两个矩形波导(由于 $TE_{10}$ 模 $E$ 矢量处在包含阶梯的平面上而称为 $E$ 面阶梯)组成的接头.第二个例子是一个对称接头,它由较宽的中间波导连接的两个同样的矩形波导所组成.第三个二端口接头由典型的同轴线——波导转换接头所组成,同轴线中心导体伸入矩形波导中,作为一个辐射能量到矩形波导中或从矩形波导中耦合出能量的



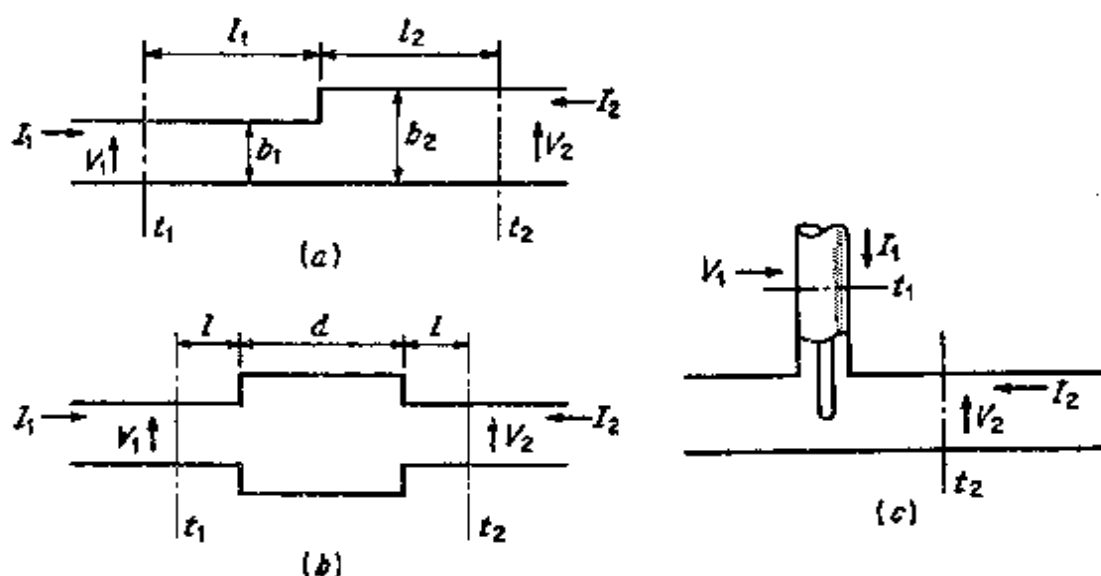


图 4.5 二端口接头的几个例子

天线。讨论这些特殊接头 是为了阐明二端口接头（或电路）的一般阻抗表示。

因为在每一不连续处含激励凋落模，所以端面须选得足够远，使在端面处这些衰减波的振幅可以忽略。在每一个端面上，分别地引入正比于总的横向电场和磁场的等效电压和电流。例如，对图4.5 a 的接头，设在每个端面上 $TE_{10}$ 模入射的和反射的横向场为（坐标 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 指左边波导，坐标 $x'$ 、 $y'$ 、 $z'$ 指右边波导，如图4.6所示）

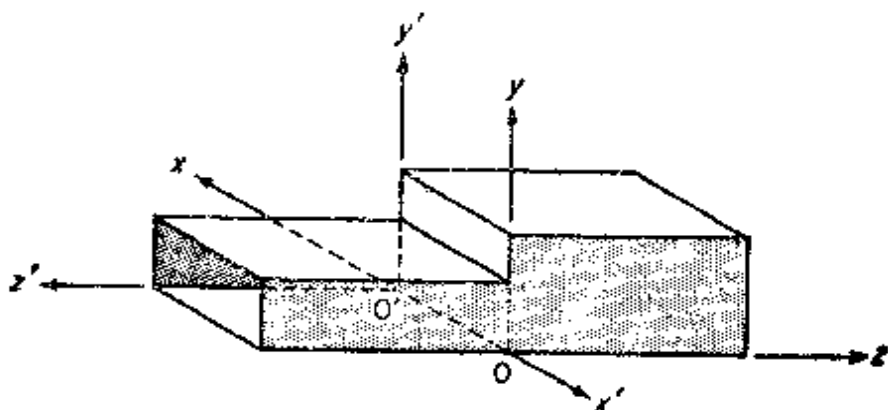


图 4.6 用来表示图4.5 a 接头的坐标

$$E_1 = (c_1^+ e^{j\beta z_1} + c_1^- e^{-j\beta z_1}) a_x \sin \frac{\pi x}{a} \text{ 在 } t_1 \text{ 处}$$

$$H_1 = -Y_w (c_1^+ e^{j\beta z_1} - c_1^- e^{-j\beta z_1}) a_x \sin \frac{\pi x}{a} \text{ 在 } t_1 \text{ 处}$$

$$E_2 = (c_2^+ e^{j\beta z_2} + c_2^- e^{-j\beta z_2}) a_x \sin \frac{\pi x'}{a} \text{ 在 } t_2 \text{ 处}$$

$$H_2 = -Y_w (c_2^+ e^{j\beta z_2} - c_2^- e^{-j\beta z_2}) a_x \sin \frac{\pi x'}{a} \text{ 在 } t_2 \text{ 处}$$

这些表示式是通过选取  $h_z = (j\pi Y_w / \beta a) \cos(\frac{\pi x}{a})$  得到的，其目的是为了简化横向场的表示式。设选取等效电压和等效电流为

$$\begin{aligned} V_1^+ &= K_1 C_1^+ e^{j\beta z_1} & V_1^- &= K_1 C_1^- e^{-j\beta z_1} \\ I_1^+ &= Y_w K_1 C_1^+ e^{j\beta z_1} & I_1^- &= Y_w K_1 C_1^- e^{-j\beta z_1} \\ V_2^+ &= K_2 C_2^+ e^{j\beta z_2} & V_2^- &= K_2 C_2^- e^{-j\beta z_2} \\ I_2^+ &= Y_w K_2 C_2^+ e^{j\beta z_2} & I_2^- &= Y_w K_2 C_2^- e^{-j\beta z_2} \end{aligned}$$

于是，等效传输线的特性导纳等于  $TE_{10}$  模的波阻抗  $Z_w = Y_w^{-1}$ ，为了保持功率不变，需要这样地取  $K_1$  和  $K_2$ ，以使

$$V_1^+ (I_1^+)^* = Y_w K_1^2 |C_1^+|^2 = Y_w |C_1^+|^2 \int_0^a \int_0^{b_1} \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx dy$$

或 
$$K_1 = \sqrt{ab_1/2} \text{ 和}$$

$$V_2^+ (I_2^+)^* = Y_w K_2^2 |C_2^+|^2 = Y_w |C_2^+|^2 \int_0^a \int_0^{b_2} \sin^2 \frac{\pi x'}{a} dx' dy'$$

或 
$$K_2 = \sqrt{ab_2/2}$$

若采用上述的等效电压和等效电流，则得

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

它适合于表示  $E$  面阶梯。像图 4.7 a 那样由  $T$  形网络连接两传输线所组成的等效电路，是  $T$  形接头合适的等效电路。当然，也可能有

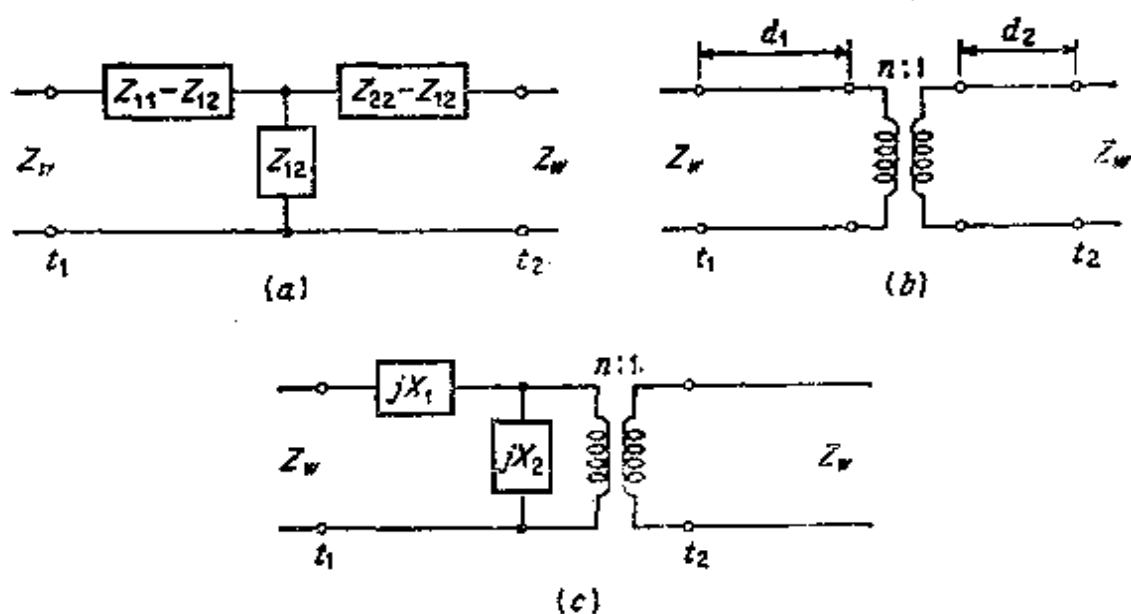


图 4.7 无耗二端口电路的等效电路

其它的等效电路。特别是当接头无耗时，可以使用任一个包括三个独立参量的电路。图4.7b表示由匝数比为 $n:1$ 的理想变压器连接两条长为 $d_1$ 和 $d_2$ 的传输线所组成的电路。图4.7c是这个电路的变形，其中用电抗元件 $jX_1$ 和 $jX_2$ 代替了传输线。

这三个电路中的任何一个电路，其参数可以用其余二个电路中的任一电路的参数来表示。用通常的方法就可以完成所要求的推导。

倘若引入适当定义的电压和电流，则前面的讨论同样地适用于图4.5的其他的二端口接头。同样，图4.7的等效电路可以被用来表示这些接头的性能。虽然等效网络的一般形式不难确定，但其参数的值是不容易求得的。在某些情况下，可以通过解析法计算网络参数，但在其他的许多情况下，必须通过实验测量确定。

因为图4.5b的接头对中心面完全对称，所以等效阻抗矩阵 $Z_{11} = Z_{22}$ 。对于这类无耗接头来说，其等效电路可以是包含两个独立参数的任一对称连接的电路。图4.8表示可能采用的几个典型电路。

前面的讨论，也适合于用导纳矩阵来表示，即

\* 典型的分析结果及其所使用的方法，参看R.E.Collin "Field Theory of Guided Waves" McGraw-Hill Book Company, New York 1960.

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

由(4.40)式表示的基本等效电路为如图4.9中所表示的 $\Pi$ 形网络。

例4.1 为了说明等效电路(假定它们在所研究的频率上的参数是已知的)的用途,我们研究图4.5C的同轴线——波导转换接头。设内阻抗为 $Z_w$ 的波源接到同轴线上,此同轴线与端面 $t_1$ 的距离为 $l$ 。输出波导接到与此波导匹配的负载上,即在端面 $t_2$ 上的阻抗为

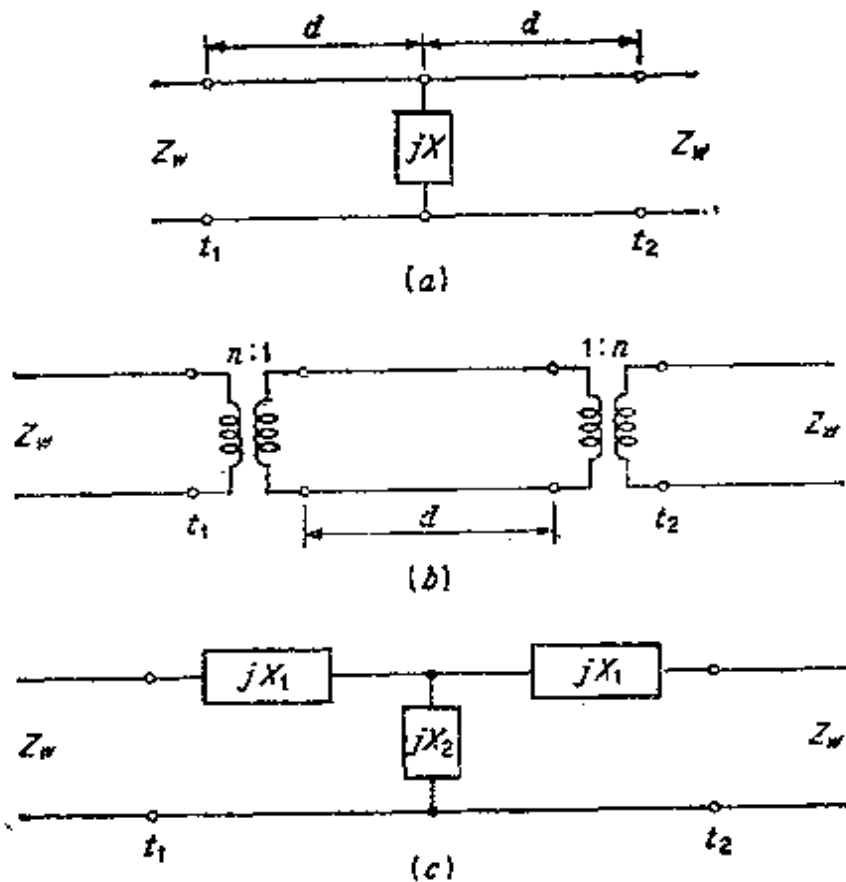


图 4.8 对称的二端口接头的等效电路

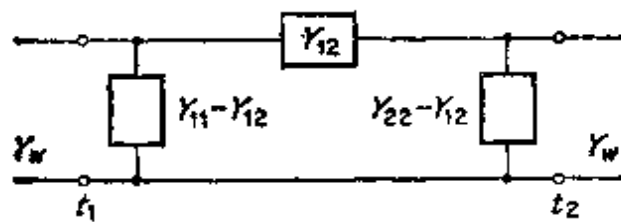


图 4.9 二端口接头导纳矩阵的等效电路

$Z_w$ 。全部电路表示在图4.10 a中。试计算传送到负载上的功率和在输入线上的驻波比。由通常的电路分析求出变换到  $t_1$  面上的等效负载阻抗为

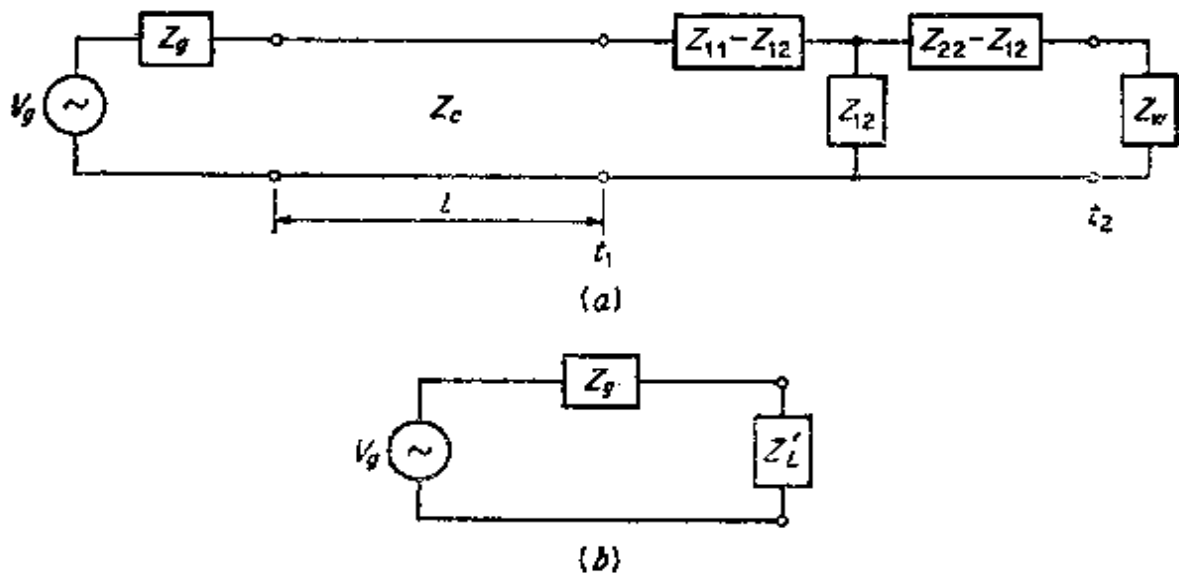


图 4.10 接到由同轴线馈电的波导上的波源的等效电路

$$Z_L = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22} + Z_w} \quad (4.41)$$

此阻抗通过长为  $l$  的同轴线后，在波源端面上的阻抗就变成

$$Z'_L = Z_c \frac{Z_L + jZ_c \tan \beta l}{Z_c + jZ_L \tan \beta l} \quad (4.42)$$

如图4.10 b所示。这个简化电路是不难求得的。波源供给的电流为

$$I_s = \frac{V_g}{Z_g + Z'_L} \quad (4.43)$$

传送到  $Z'_L$  上的功率为

$$P = \frac{1}{2} |I_s|^2 R_{Z'_L} \quad (4.44)$$

如果同轴线和接头的损耗可忽略不计，则此功率也就是传送到负载上的功率。

计算驻波比时，必须注意在同轴线的  $t_1$  面上端接等效阻抗为

$z_L$  因而所产生的反射系数  $\Gamma$  为

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (4.45a)$$

此反射形成的驻波比  $S$  为

$$S = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad (4.45b)$$

反射系数和驻波比只取决于等效端接阻抗  $Z_L$ 。

如同低频电路一样，若使  $Z_0$  等于  $Z_L'$  的复数共轭，则传送到负载上的功率为最大。其他低频网络的定理也同样适用。例如可以在端面  $t_2$  上应用戴维南定理，把此电路化为具有新的电压  $V_s'$  和新的内阻  $Z_s'$  的等效波源。通过把  $Z_0$  变换为  $t_1$  面上的等效阻抗，不难求出此新阻抗为

$$Z_{s'} = Z_0 \frac{Z_0 + jZ_L \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} \quad (4.46)$$

通过接头看去，这个阻抗在端面  $t_2$  上所呈现的阻抗为

$$Z_s' = Z_{22} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{11} + Z_{s'}} \quad (4.47)$$

$t_2$  处开路电压的计算不是很简单的。但是，通过连续两次使用戴维南定理，就可以较容易地得出所要求的结果。首先求平面  $t_1$  上的戴维南等效电路。这里，波源的等效内阻抗用上面得出的  $Z_{s'}$ 。设在同轴线开路的  $t_1$  处，由波源产生的电压波为

$$V^+ e^{-i\beta z} + V^- e^{i\beta z}$$

式中， $z$  为由波源开始算起的距离。因为在  $z=l$  处同轴线开路，所以总电流

$$I = Y_0 (V^+ e^{-i\beta z} - V^- e^{i\beta z})$$

在  $z=l$  处必须为零。于是得  $V^- = V^+ e^{-2i\beta l}$ 。因而，在波源端  $z=0$  处

$$V(0) = V^+ (1 + e^{-i2\beta l})$$

$$I(0) = Y_0 V^+ (1 - e^{-i2\beta l})$$

但  $I(0) = I_s$ ， $V_s = I_s Z_s + V(0)$ ，所以

$$V(0) = V^+(1 + e^{-2i\beta l}) = V_g - I_r Z_g = V_g - I(0) Z_g \\ = V_g - Y_g V^+ Z_g (1 - e^{-2i\beta l})$$

求解  $V^+$  得

$$V^+ = \frac{V_g}{(1 + Y_g Z_g) + (1 - Y_g Z_g) e^{-2i\beta l}} \quad (4.48)$$

现在不难求出  $t_1$  处的开路电压为

$$V_{0z} = V^+ e^{-i\beta l} + V^- e^{i\beta l} = 2V^+ e^{-i\beta l} \\ = \frac{2V_g e^{-i\beta l}}{(1 + Y_g Z_g) + (1 - Y_g Z_g) e^{-2i\beta l}} \quad (4.49)$$

在  $t_1$  处的戴维南等效电路就是图 4.11 中所表示的电路。

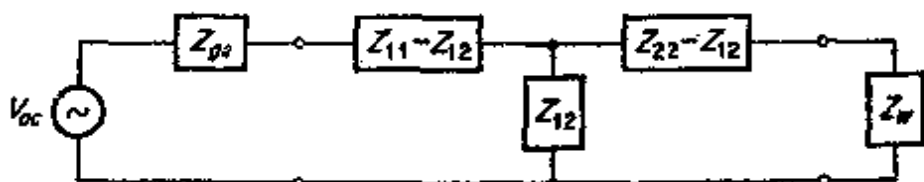


图 4.11 端面  $t_1$  处的戴维南等效电路

用通常的方法再应用一次戴维南定理，不难得出图 4.12 的电路。其中， $Z_g'$  即为 (4.47) 式， $V_g'$  为

$$V_g' = \frac{Z_{12} V_{0z}}{Z_{11} + Z_g} \quad (4.50)$$

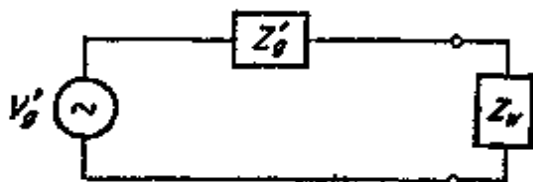


图 4.12 端面  $t_2$  处的戴维南等效电路

读者可以容易地证明，按图 4.12 的电路算出传送到负载  $Z_L$  上的功率，与由 (4.44) 式求得的功率是相同的（假定电路没有损耗），即

$$P = \frac{1}{2} \left| \frac{V_g'}{Z_g' + Z_L} \right|^2 Z_L \quad (4.51)$$

它等于(4.44)式。当电路存在损耗时，并非所有传送到(4.44)式的等效负载阻抗 $Z_L'$ 上的功率都被负载 $Z_L$ 所吸收。但是，即使存在其他的电路损耗，由(4.51)式仍能正确地得出传送到负载上去的功率。这个问题的另一解法是用等效T形网络(习题4.9)代替同轴线，此时，这个电路被简化为通常的集中参数网络。

几个二端口等效电路\*

图4.13画出了一些有用的等效电路。以及其中几个无耗二端口接头的对偶电路。下面列出用电路参数表示的阻抗参数 $Z_{11}$ 、 $Z_{22}$ 和 $Z_{12}$ 、或者是用阻抗参数表示的电路参数。这些方程同样适用于其对偶网络的导纳参数(用 $Y_{11}$ 代替 $Z_{11}$ ，用 $Y_0$ 代替 $Z_0$ 等)。应当指出，在这些电路中， $Z_0$ 是一个独立参数，即为特性阻抗，且不等于 $(\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$ 。

$$\begin{aligned}
 (a) \quad Z_{11} &= -jZ_0 \cot \beta l & Z &= Z_{22} - Z_{11} \\
 Z_{22} &= Z - jZ_0 \cot \beta l & \cos \beta l &= -\frac{Z_{11}}{Z_{12}} \\
 Z_{12} &= \pm jZ_0 \csc \beta l & Z_0 &= jZ_{12} \left[ 1 - \left( -\frac{Z_{11}}{Z_{12}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 (b) \quad Z_{11} &= Z_1 - j \cot \beta l & Z_1 &= Z_{11} + \sqrt{1 + Z_{12}^2} \\
 Z_{22} &= Z_2 - j \cot \beta l & Z_2 &= Z_{22} + \sqrt{1 + Z_{12}^2} \\
 Z_{12} &= \pm j \csc \beta l & \sin \beta l &= \pm \frac{j}{Z_{12}}
 \end{aligned}$$

若  $\beta l = \frac{\pi}{2}$ ，则取

$$\begin{aligned}
 Z_{11} &= Z_1 & Z_1 &= Z_{11} \\
 Z_{22} &= Z_2 & Z_2 &= Z_{22} \\
 Z_{12} &= jZ_0 & Z_0 &= -jZ_{12} \neq 1
 \end{aligned}$$

\* 本节中的材料系根据《C.G. Montgomery, R.H. Dicke, and E.M. Purcell, "Principles of Microwave Circuits", PP105—108, (McGraw-Hill Book Company, New York, 1948)》一书改写成的。



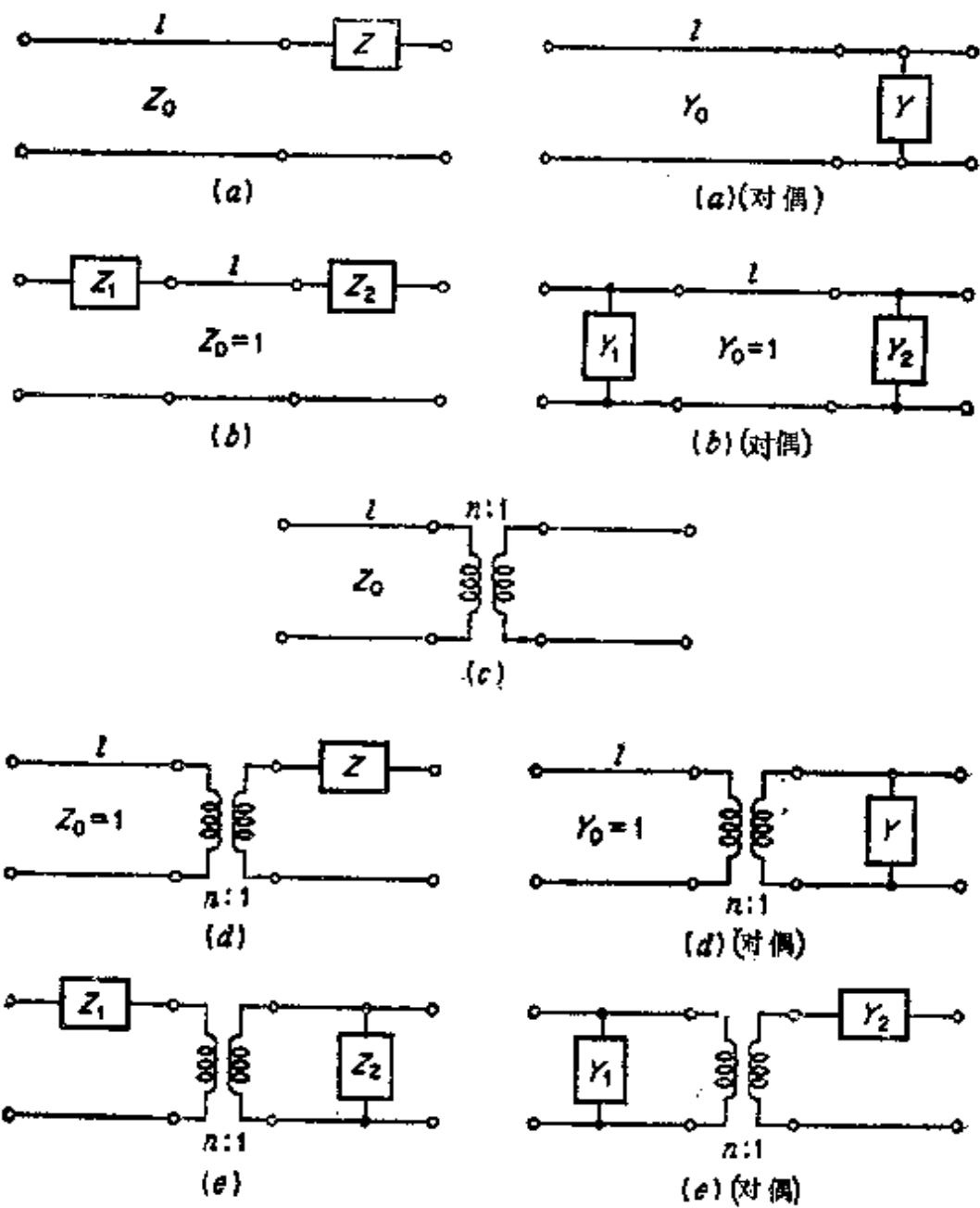


图 4.13 几个无耗二端口接头的等效电路

$$\begin{aligned}
 (c) \quad Z_{11} &= -jZ_0 \cot \beta l & \cos \beta l &= \frac{\sqrt{Z_{11}Z_{22}}}{Z_{12}} \\
 Z_{22} &= -j\frac{Z_0}{n^2} \cot \beta l & Z_0 &= -jZ_{11} \sqrt{\frac{Z_{12}^2}{Z_{11}Z_{22}} - 1} \\
 Z_{12} &= j\frac{Z_0}{n} \csc \beta l & n &= \sqrt{\frac{Z_{11}}{Z_{22}}} \\
 (d) \quad Z_{11} &= -j \cot \beta l & \cot \beta l &= jZ_{11} \\
 Z_{22} &= Z - \frac{j}{n^2} \cot \beta l & n &= \frac{\sqrt{1+Z_{11}^2}}{Z_{12}} \\
 Z_{12} &= \frac{j}{n} \csc \beta l & Z &= Z_{22} - \frac{Z_{11}Z_{12}^2}{1+Z_{11}^2} \\
 (e) \quad Z_{11} &= Z_1 + n^2 Z_2 & Z_1 &= Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}} \\
 Z_{22} &= Z_2 & Z_2 &= Z_{22} \\
 Z_{12} &= \pm n Z_1 & n &= \frac{Z_{12}}{Z_{22}}
 \end{aligned}$$

把传输线的长度考虑在内的等效电路，由于移动一个(或二个)端面便把此电路化为非常简单的形式。因而特别便于使用。例如，用图4.13c的等效电路来表示图4.14中端面 $t_1$ 和 $t_2$ 之间的接头。如果

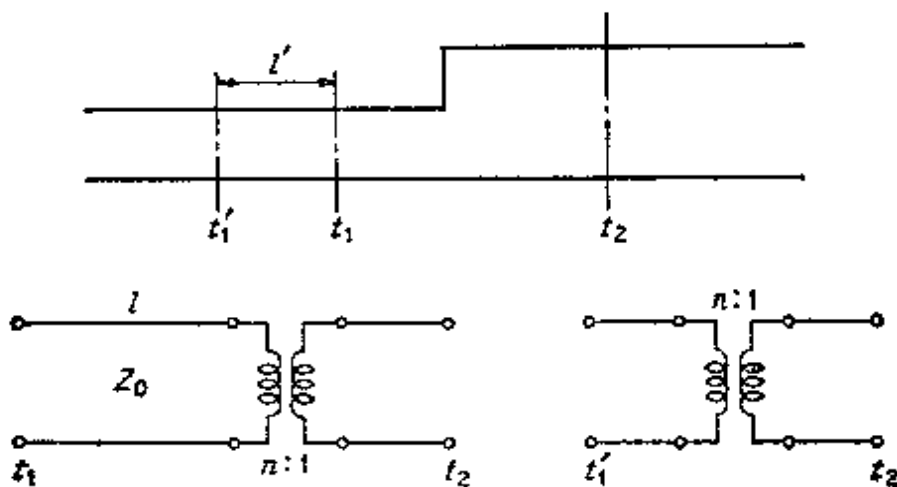


图 4.14 一个接头及其等效电路

把端面 $t_1$ 向左移动一个距离 $l'$ , 使 $\beta(l+l')=\pi$ , 即 $l+l'=\lambda g/2$ , 则此等效电路具有一段长为半个波导波长的传输线。而由于经过一段半波长的传输线其阻抗是不变化的, 它等效于匝数比为 $1:1$ 的变压器, 从而可以去掉这一段传输线, 使等效电路简化为单个理想变压器。这个新的等效电路表示新端面 $t'_1$ 与 $t_2$ 之间的接头。

## 4.7 散射矩阵表示法

由于在微波频率下电压、电流和阻抗是不能直接测量的, 所以上一节讨论的以阻抗来描述微波电路在很多方面是一种抽象概念。因而必须把这些量看作是间接量或导出量。通过对相对场强取样的小探针能够直接测量的量, 是驻波比、场的极小值位置和功率。前两个量可直接地得出反射系数, 只有在需要知道器件中场的绝对值时, 才需要测量功率。另一个能直接测量的参数是通过电路或接头的传输系数。它是传输波的振幅和相角与入射波的振幅和相角相比较而得出的相对大小。换句话说, 能直接测量的量是由接头所反射(或散射)的相对于入射波的振幅和相角。再者, 鉴于场方程和大多数微波器件是线性的, 故散射波振幅与入射波振幅成线性关系。表示此线性关系的矩阵称为散射矩阵。

下面研究图4.15的 $N$ 端口接头, 若有一个与等效电压 $V_1^+$ 相联系的波在端面 $t_1$ 处入射到接头上, 则在线1上产生的反射波为 $S_{11}V_1^+$ , 其中,  $S_{11}$ 是当波入射到线1上时, 线1的反射系数或散射系数。波也会从其他的接头处传输或散射出来, 其振幅正比于 $V_1^+$ 。这些振幅可以表示为 $V_n^- = S_{n1}V_1^+$ ,  $n=2, 3, \dots, N$ , 其中 $S_{n1}$ 是由线1到线 $n$ 的传输系数。当波由所有的线上入射时, 在每条线上的散射波包含有由所有入射波产生的影响。因而, 一般地可以写作

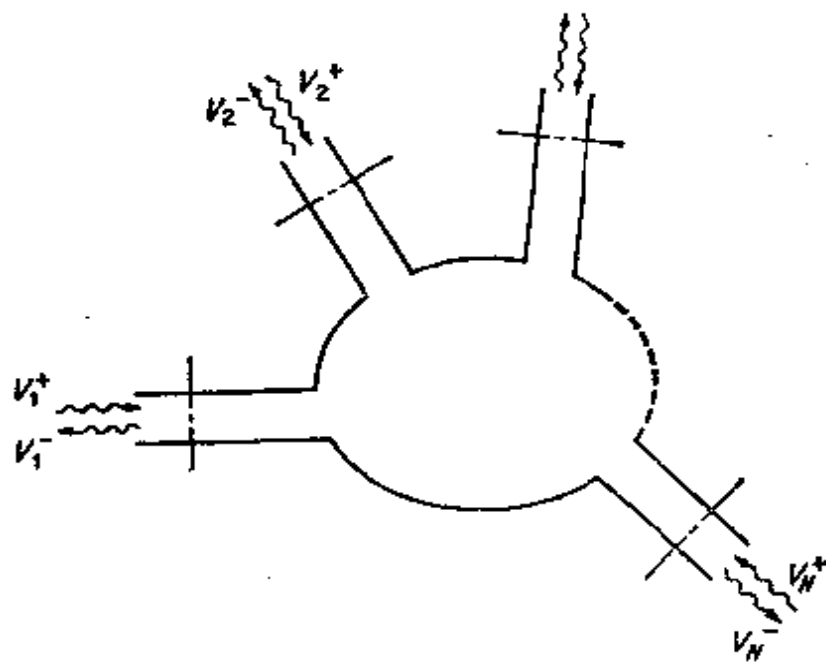


图 4.15 说明散射波的  $N$  端口接头

$$\begin{bmatrix} V_1^- \\ V_2^- \\ \dots \\ V_N^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & \dots & S_{1N} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & \dots & S_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{N1} & S_{N2} & S_{N3} & \dots & S_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^+ \\ V_2^+ \\ \dots \\ V_N^+ \end{bmatrix} \quad (4.52a)$$

或

$$(V^-) = (S)(V^+) \quad (4.52b)$$

式中的  $(S)$  称为散射矩阵。

当讨论接头的散射矩阵表示时，全选择等效电压（以及电流，但未明显表示出来）是方便的，因此对所有的  $n$  值所传输的功率可用  $\frac{1}{2} |V_n^+|^2$  来表示。这相当于取等效特性阻抗为  $1^*$ 。这样做的主要原因是为了对互易结构得到对称散射矩阵。如果不采用这种归一化，那末由于各条线上有不同的阻抗水准，使散射矩阵不能对称。应当指出，由于假定了归一化，和  $V = V^+ + V^-$ ，故  $I = I^+ - I^- = V^+ - V^-$ ，因而  $V^+ = \frac{1}{2}(V + I)$  和  $V^- = \frac{1}{2}(V - I)$ 。于是新变量  $V^+$  和  $V^-$  是在阻抗表示中所使用的变量  $V$  和  $I$  的线性组合。由于

\* 取任何不等于 1 的值也是可以，唯一的要求是：所有的传输线具有同样的特性阻抗，以使功率总是等于某一常数乘上  $|V^+|^2$ 。

这个原因，散射矩阵的计算式中不表明电流。如果需要，则可以由关系式  $I = V^+ - V^-$  求出。

当频率和端面位置给定时，散射矩阵元  $S_{mn}$  便有确定的值。若改变频率，则这些矩阵元的值也改变，这种改变，通常难以由解析方法导出。然而，在固定频率下，由端面位置移动所引起的散射矩阵元的改变是不难求得的。例如，设端面  $l_n$  向外移动  $l_n$ ，它对应于电相移  $\theta_n = \beta_n l_n$ ，其中的  $\beta_n$  为第  $n$  条线的传播相移常数。如果在这个新端面上入射波电压仍用  $V_n^+$  表示，则由线  $n$  传输到线  $m$  的传输系数  $S_{mn}$  ( $m \neq n$ ) 必须乘上  $e^{-i\theta_n}$ ，以表示波所必须经过的附加路径长度。在线  $n$  上的反射波相对于在新端面上的入射波多走了距离  $2l_n$ 。因而  $S_{nn}$  的新的数值是  $e^{-i2\theta_n} S_{nn}$ 。同样，波由线  $m$  到线  $n$  也必须多走距离  $l_n$ ，因而  $S_{nm}$  变为  $e^{-i\theta_n} S_{nm}$ 。在一般情况下，通过把  $(S)$  矩阵变换为如下的新  $(S')$  矩阵，是不难表示这些结果的：

$$(S') = \begin{pmatrix} e^{-i\theta_1} & & & & \\ & e^{-i\theta_2} & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ & & & & e^{-i\theta_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1N} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{N1} & S_{N2} & \dots & S_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta_1} & & & & \\ & e^{-i\theta_2} & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ & & & & e^{-i\theta_N} \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

式中， $\theta_n = \beta_n l_n$  是第  $n$  个端面的向外的电相移。

### 散射矩阵的对称性

对一个互易接头来说，如果所取的等效电压使所有模的功率都等于  $\frac{1}{2} |V_n^+|^2$ ，则散射矩阵是对称的，即  $S_{nm} = S_{mn}$ 。这一条件相当于用来代表波导的所有等效传输线的特性阻抗都等于 1。若电压不这样选取，则一般说， $(S)$  就不是对称的。习题 4.15 就是非对称的散射矩阵的一个例子。

利用已经知道的阻抗矩阵对称性，不难证明散射矩阵的对称

性。散射矩阵的对称性基本上是互易性的一个结果。就这一节中使用的归一化而言，

$$V_{\pm} = V_{\pm}^* + V_{\pm}^- \quad I_{\pm} = I_{\pm}^* - I_{\pm}^- = V_{\pm}^* - V_{\pm}^-$$

于是，由于  $(V) = (V^+) + (V^-) = (Z)(I) = (Z)(V^+) - (Z)(V^-)$ ，故得

$$((Z) + (U))(V^-) = ((Z) - (U))(V^+)$$

或

$$(V^-) = ((Z) + (U))^{-1}((Z) - (U))(V^+) \quad (4.54)$$

式中， $(U)$ 是单位矩阵。把这个结果与(4.52b)式比较证明，散射矩阵与阻抗矩阵有如下的关系：

$$(S) = ((Z) + (U))^{-1}((Z) - (U)) \quad (4.55a)$$

另一方面，有

$$(V^+) = \frac{1}{2}((V) + (I)) = \frac{1}{2}((Z) + (U))(I)$$

和

$$(V^-) = \frac{1}{2}((V) - (I)) = \frac{1}{2}((Z) - (U))(I)$$

由此可得

$$(V^-) = ((Z) - (U))((Z) + (U))^{-1}(V^+)$$

或

$$(S) = ((Z) - (U))((Z) + (U))^{-1} \quad (4.55b)$$

(4.55a)式的转置矩阵为

$$(S)_t = ((Z) - (U))_t((Z) + (U))_t^{-1}$$

但是由于括号内的矩阵都是对称的，故它们等于其转置矩阵，例如

$$((Z) - (U))_t = (Z) - (U)$$

因而

$$(S)_t = ((Z) - (U))((Z) + (U))^{-1}$$

现在，利用(4.55)式可得

$$(S)_t = (S) \quad (4.56)$$

这一结论只有在( $s$ )是对称矩阵时才能成立。

### 无耗接头的散射矩阵

对于无耗接头来说,由 $N$ 端口出来的总功率,必须等于总的入射功率。这一功率守恒条件的数学表示为

$$\sum_{n=1}^N |V_n^-|^2 = \sum_{n=1}^N |V_n^+|^2 \quad (4.57)$$

这个条件将对散射矩阵参数加若干限制,比如把独立参数的总数减到 $\frac{1}{2}N(N+1)$ 个,即与无耗接头的阻抗矩阵有同样数量的独立参数。用

$$V_n^- = \sum_{i=1}^N S_{ni} V_i^+$$

代替 $V_n^-$ ,功率守恒条件便可表示为

$$\sum_{n=1}^N \left| \sum_{i=1}^N S_{ni} V_i^+ \right|^2 = \sum_{n=1}^N |V_n^+|^2 \quad (4.58)$$

因为 $V_n^+$ 都是独立的入射波电压,所以若选除 $V_i^+$ 以外的所有 $V_n^+ = 0$ ,则得

$$\sum_{n=1}^N |S_{ni} V_i^+|^2 = |V_i^+|^2 \quad (4.59)$$

或

$$\sum_{n=1}^N |S_{ni}|^2 = \sum_{n=1}^N S_{ni} S_{ni}^* = 1 \quad (4.60)$$

因为下标 $i$ 是任意值,所以(4.60)式必须对所有 $i$ 值都成立。(4.60)式指出,对一个无耗接头散射矩阵的任一行与其同一行的共轭复数之积等于1。

除了上述对 $S_{ni}$ 的限制以外,还可以推出另外一些限制。如果除了 $V_i^+$ 和 $V_j^+$ 以外,取所有的 $V_n^+ = 0$ ,则(4.58)式便成为

$$\sum_{n=1}^N |S_{ni} V_i^+ + S_{nj} V_j^+|^2 = \sum_{n=1}^N (S_{ni} V_i^+ + S_{nj} V_j^+) (S_{ni} V_i^+ + S_{nj} V_j^+)^*$$

$$= |V_r^+|^2 + |V_r^+|^2$$

将其左边展开得

$$\sum_{n=1}^N |S_{nr} V_r^+|^2 + \sum_{n=1}^N |S_{nr} V_r^+|^2 + \sum_{n=1}^N S_{nr} S_{nr}^* V_r^+ (V_r^+)^* \\ + \sum_{n=1}^N S_{nr} S_{nr}^* V_r^+ (V_r^+)^* = |V_r^+|^2 + |V_r^+|^2$$

利用(4.59)式可使许多项抵消, 余留的各项为

$$\sum_{n=1}^N (S_{nr} S_{nr}^* V_r^+ (V_r^+)^* + S_{nr}^* S_{nr} V_r^+ (V_r^+)^*) = 0$$

鉴于 $V_r^+$ 和 $V_r^+$ 的独立性, 首先, 取 $V_r^+ = V_r^+$ , 则得

$$|V_r^+|^2 \sum_{n=1}^N (S_{nr} S_{nr}^* + S_{nr}^* S_{nr}) = 0 \quad (4.61a)$$

如果改取 $V_r^+ = jV_r^+$ , 而 $V_r^+$ 为实数, 则得

$$j |V_r^+|^2 \sum_{n=1}^N (S_{nr} S_{nr}^* - S_{nr}^* S_{nr}) = 0 \quad (4.61b)$$

因为 $V_r^+$ 和 $V_r^+$ 都不为零, 所以只有在

$$\sum_{n=1}^N S_{nr} S_{nr}^* = 0 \quad S \neq r \quad (4.62)$$

时, (4.61a)和(4.61b)两式才成立。(4.62)式说明: 散射矩阵的任一行与不同于该行的任一行的复数共轭之积为零。

(4.60)式和(4.62)式的条件是足以把散射矩阵的独立参数数目限制到 $\frac{1}{2}N(N+1)$ 个。其元素满足这两个条件的矩阵称为单式矩阵。为了进一步说明此矩阵的单式性, 利用矩阵代数重新导出上面的结果将是有益的。功率守恒条件(4.57)式可以表示为

$$(V^-)_i (V^-)^* = (V^+)_i (V^+)^* \\ = ((S)(V^+))_i ((S)(V^+))^* \\ = (V^+)_i (S)_i (S)^* (V^+)^*$$

对此方程分解因子, 得到

$$(V^+)_i ((U) - (S)_i (S)^*) (V^+)^* = 0$$



因为 $(V^+)$ 不等于零，所以此方程只有在

$$(S)_0(S)^* = (U) \quad (4.63a)$$

或

$$(S)^* = (S)_0^{-1} \quad (4.63b)$$

时才成立。(4.63b)式结果就是单式矩阵的定义。作出(4.63a)式所要求的矩阵的乘积，就可以得到条件(4.60)和(4.62)式。

## 4.8 二端口接头的散射矩阵

因为很多通用的微波电路是二端口接头，所以对二端口接头的矩阵表示法作更详细的研究。参阅图4.16，设此接头的散射参数为

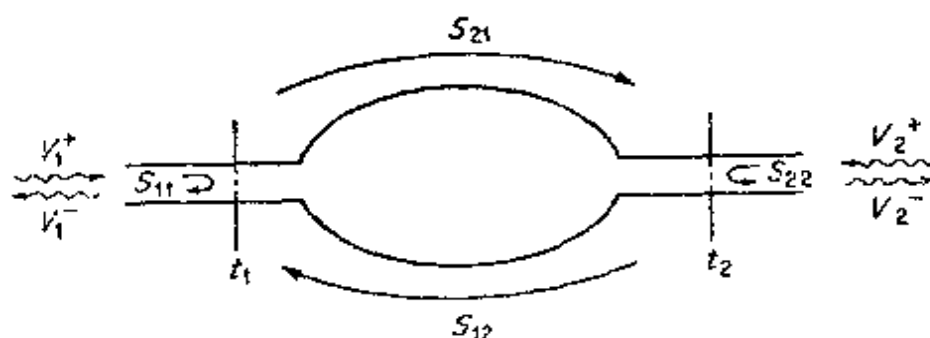


图 4.16 二端口接头

$S_{11}$ 、 $S_{12}$ 、 $S_{21}$ 和 $S_{22}$ ，则入射波振幅和散射波振幅的关系为

$$(V^-) = (S)(V^+) \quad (4.64a)$$

或

$$V_1^- = S_{11}V_1^+ + S_{12}V_2^+ \quad (4.64b)$$

$$V_2^- = S_{21}V_1^+ + S_{22}V_2^+ \quad (4.64c)$$

若输出波导端接匹配负载，则 $V_2^+ = 0$ 。由(4.64b)式可以看出， $S_{11}$ 是当波导2接匹配负载时，输入波导1中的反射系数。同理， $S_{21}$ 是由波导1到波导2的传输系数，当然，类似的叙述也适用于参数 $S_{22}$ 和 $S_{12}$ 。

设在波导2的端面 $t_2$ 上接入归一化阻抗 $\bar{Z}_2$ ，则可将 $V_2^-$ 认为是

$\bar{Z}_2$ 上的入射波，而 $V_2^+$ 是由 $\bar{Z}_2$ 所反射的波。两者之比必须等于负载的反射系数，因此，

$$\frac{V_2^+}{V_2^-} = \frac{\bar{Z}_2 - 1}{\bar{Z}_2 + 1} = S_L \quad (4.65)$$

代入(4.64)式，则得

$$\begin{aligned} V_1^- - S_{11}V_1^+ &= S_{12}V_2^+ = S_{12}S_LV_2^- \\ -S_{21}V_1^+ &= S_{22}S_LV_2^- - V_2^- \end{aligned}$$

求解 $V_1^-/V_1^+$ 得

$$\frac{V_1^-}{V_1^+} = S_{11} - \frac{S_{12}S_{21}S_L}{S_{22}S_L - 1} \quad (4.66)$$

它表明：当输出波导不接匹配负载时，波导1中输入反射系数如何修正。

对于互易接头来说， $S_{12} = S_{21}$ ，且此散射矩阵至多包含六个独立参数，它们分别是 $S_{11}$ 、 $S_{12}$ 和 $S_{22}$ 的振幅和相角。如果接头是无耗的，则散射矩阵只包含三个参数，因为各个 $S_{mn}$ 由(4.60)式和(4.62)式联系起来，而现在它们成为

$$S_{11}S_{11}^* + S_{12}S_{12}^* = 1 \quad (4.67a)$$

$$S_{22}S_{22}^* + S_{12}S_{12}^* = 1 \quad (4.67b)$$

$$S_{11}S_{12}^* + S_{12}S_{22}^* = 0 \quad (4.67c)$$

前两个方程说明

$$|S_{11}| = |S_{22}| \quad (4.68)$$

可见对无耗接头来说，输入和输出波导的反射系数在数值上是相等的。此外，由(4.67a)可得

$$|S_{12}| = \sqrt{1 - |S_{11}|^2} \quad (4.69)$$

如果令 $S_{11} = |S_{11}|e^{i\theta_1}$ ， $S_{22} = |S_{11}|e^{i\theta_2}$ 和 $S_{12} = (1 - |S_{11}|^2)^{\frac{1}{2}}e^{i\phi}$ ，则由(4.67c)式得

$$|S_{11}|(1 - |S_{11}|^2)^{\frac{1}{2}}(e^{i\theta_1 - i\phi} + e^{i\phi - i\theta_2}) = 0$$

或

$$e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = -e^{2i\phi}$$

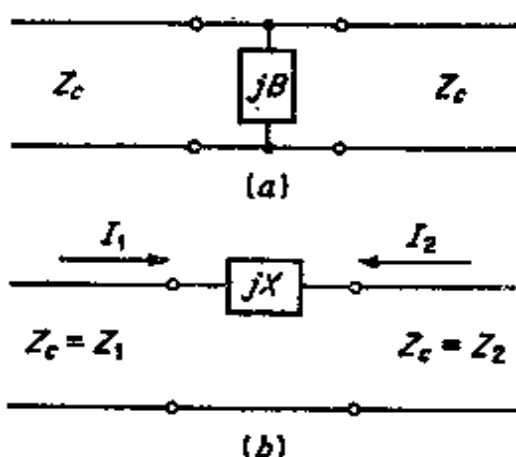
因而

$$\theta_1 + \theta_2 = 2\varphi - \pi \pm 2n\pi$$

即

$$\varphi = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \frac{\pi}{2} \mp n\pi \quad (4.70)$$

(4.69)式和(4.70)式完全地确定了用反射系数 $S_{11}$ 和 $S_{22}$ 表示的传



输系数 $S_{12}$ 。因为 $S_{11}$ 和 $S_{22}$ 是容易测量的，并且，知道了 $S_{11}$ 和 $S_{22}$ 就足以对无耗接头作出完全的描述，所以散射矩阵是表示无耗二端口微波电路的一种特别方便的方法。

下面研究两个简单的例子，来说明散射矩阵参数的求法。在图4.17a中，并联电纳 $jB$ 跨接到特性阻抗为 $Z_c$ 的传输线上。为了

求 $S_{11}$ ，假定输出线是匹配的，所以 $V_2^+ = 0$ 。在输入侧的反射系数为

$$S_{11} = \frac{Y_2 - Y_{in}}{Y_c + Y_{in}} = \frac{Y_c - Y_c - jB}{Y_c + Y_c + jB} = \frac{-jB}{2Y_c + jB}$$

考虑对称性，显然有 $S_{22} = S_{11}$ 。利用(4.69)式和(4.70)式，或者通过求匹配输出线的传输电压 $V_2^-$ ，可以计算出第三个参数 $S_{12}$ 。对纯并联元件，必得 $V_1^+ + V_1^- = V_2^- = V_1^+(1 + S_{11})$ 。因为同样有 $V_2^- = S_{21}V_1^+$ ，故得

$$S_{21} = 1 + S_{11} = S_{12} = \frac{2Y_c}{2Y_c + jB}$$

我们研究的第二个例子，是一个串联电抗 $jX$ 接到特性阻抗分别为 $Z_1$ 和 $Z_2$ 的两条线之间的情况，如图4.17b所示。在这个例子中，因为两条线的特性阻抗是不同的，所以，必须首先取归一化电

压。令  $V_1^+$ 、 $V_1^-$ 、 $V_2^+$ 、 $V_2^-$  为实际存在于输入和输出两边的波的传输线电压。单个传输波的功率通量为  $\frac{1}{2} Y_1 |V_1^+|^2$  和  $\frac{1}{2} Y_2 |V_2^+|^2$ 。若取归一化电压为  $\bar{V}_1^+ = Y_1^{\frac{1}{2}} V_1^+$  和  $\bar{V}_2^+ = Y_2^{\frac{1}{2}} V_2^+$ ，则功率通量为  $\frac{1}{2} |\bar{V}_1^+|^2$  和  $\frac{1}{2} |\bar{V}_2^+|^2$ ，且与电压波振幅的平方成正比。

设输出线是匹配的，则得

$$\frac{V_1^-}{V_1^+} = \frac{\bar{V}_1^-}{\bar{V}_1^+} = S_{11} = \frac{Z_{in} - Z_1}{Z_{in} + Z_1} = \frac{Z_2 - Z_1 + jX}{Z_2 + Z_1 + jX}$$

当输入线匹配时，可得

$$\frac{V_2^-}{V_2^+} = \frac{\bar{V}_2^-}{\bar{V}_2^+} = S_{22} = \frac{Z_1 - Z_2 + jX}{Z_2 + Z_1 + jX}$$

为了求出  $S_{21}$ ，再研究匹配的输出线。在输入线上，得  $V_1 = V_1^+ + V_1^- = V_1^+(1 + S_{11})$  和

$$I_1 = Y_1(V_1^+ - V_1^-) = Y_1 V_1^+(1 - S_{11})$$

由于通过串联元件的电流是连续的，因而

$$-I_2 = I_1 = Y_1 V_1^+(1 - S_{11})$$

但是，由于  $I_2^- = Y_2 V_2^-$ ，故  $Y_2 V_2^- = Y_1 V_1^+(1 - S_{11})$ 。这样，就可得到

$$\begin{aligned} S_{21} = S_{12} &= \frac{\bar{V}_2^-}{\bar{V}_1^+} = \left(\frac{Y_2}{Y_1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{V_2^-}{V_1^+} = \left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^{\frac{1}{2}} (1 - S_{11}) \\ &= \left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2 + jX} = \frac{2\sqrt{Z_1 Z_2}}{Z_1 + Z_2 + jX} \end{aligned}$$

$S_{12}$  和  $S_{21}$  相等是由于  $Z_1$  和  $Z_2$  在这个表示式里是对称的。如果用非归一化电压，那末对  $S_{11}$  和  $S_{22}$  来说，应得到同样的表示式，但应当把  $S_{21}$  和  $S_{12}$  改为

$$S_{21} = -\frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2 + jX}, \quad S_{12} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2 + jX}$$

## 4.9 传输矩阵表示法

当若干个微波电路以级联的方式连接在一起时，采用以输入量表示输出量的传输矩阵来表示每个接头或电路较为方便。其理由是，用这种表示法描述整个级联电路的矩阵，可以简单地用描述每个接头的矩阵相乘来得到。其自变量可以取为输入端电压  $V_1$  和电流  $I_1$ ，以及在输入侧入射波和反射波的振幅  $V_1^+$ 、 $V_1^-$ ，或者其他方便的线性无关的量。当选取电压和电流为自变量时，我们将称对应的矩阵为电压—电流传输矩阵。若选取入射波和反射波的振幅，则把此矩阵称为波振幅传输矩阵。为简单起见，我们将只研究二端口电路的级联。但是，我们不难把它推广到  $N$  端口电路的级联中去。

传输矩阵表示法大量地用于分析无限长的周期性结构，例如用于行波管和直线加速器的慢波结构中。这些例子在第 8 章中分析，这一节只研究其基本公式。

### 电压—电流传输矩阵

图 4.18a 表示一个输入总电压和总电流为  $V_1$ 、 $I_1$ ，输出总电压和总电流为  $V_2$ 、 $I_2$  的二端口接头。由于可以取  $V_2$  和  $I_2$  为自变量，且此接头是线性的，故因变量  $V_1$ 、 $I_1$  与  $V_2$ 、 $I_2$  的关系也是线性的。因此，可以写为

$$V_1 = \mathcal{A}V_2 + \mathcal{B}I_2 \quad (4.71a)$$

$$I_1 = \mathcal{C}V_2 + \mathcal{D}I_2 \quad (4.71b)$$

其中， $\mathcal{A}$ 、 $\mathcal{B}$ 、 $\mathcal{C}$ 、 $\mathcal{D}$  是表示该接头特性的适当常数。必须注意，在所有的端子上的电流正方向都取为向右。这样做传输输出电流  $I_2$  成为级联电路中下一个接头的输入电流，以此类推，如图 4.18b 所示。

(4.71) 式的矩阵形式为

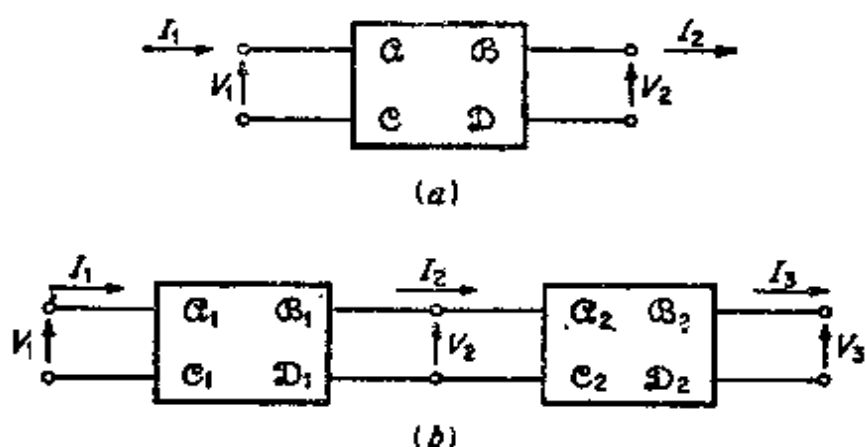


图 4.18 (a)二端口接头;  
(b)二端口接头的级联连接

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

把下列方程

$$V_1 = I_1 Z_{11} - I_2 Z_{12}$$

$$V_2 = I_1 Z_{12} - I_2 Z_{22}$$

改写成(4.71)式的形式, 就不难求出电压——电流传输矩阵与阻抗矩阵的关系。求解这两个方程可得

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}/Z_{12} & (Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2)/Z_{12} \\ 1/Z_{12} & Z_{22}/Z_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

不难把接头参数 $\mathcal{A}$ 、 $\mathcal{B}$ 、 $\mathcal{C}$ 、 $\mathcal{D}$ 与此式中的 $Z_{nm}$ 的对应表示式等同起来。对于互易接头来说, 其电压——电流传输矩阵的行列式为

$$\mathcal{A}\mathcal{D} - \mathcal{B}\mathcal{C} = 1 \quad (4.74)$$

由(4.73)式容易证明这点。

因为如图4.18b的级联连接可以写为

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 & \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{C}_1 & \mathcal{D}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_2 & \mathcal{B}_2 \\ \mathcal{C}_2 & \mathcal{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1 A_2 + B_1 C_2 & A_1 B_2 + B_1 D_2 \\ C_1 A_2 + D_1 C_2 & C_1 B_2 + D_1 D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.75)$$

可见，只消把各个传输矩阵乘起来，就容易求出以输出量表示的输入量。输出电压与输出电流之比由负载阻抗决定。

### 波振幅传输矩阵

波振幅传输矩阵表示接头输入侧的入射波振幅和反射波振幅与输出侧的入射波振幅和反射波振幅的关系。它与散射矩阵的关系，如同电压——电流传输矩阵与阻抗矩阵的关系一样。正如电压——电流传输矩阵表示法的情况一样，使一个接头的输出变量成为下一个接头的输入变量的这种方式来选定变量是方便的。参阅图4.19a，我们这样选定：

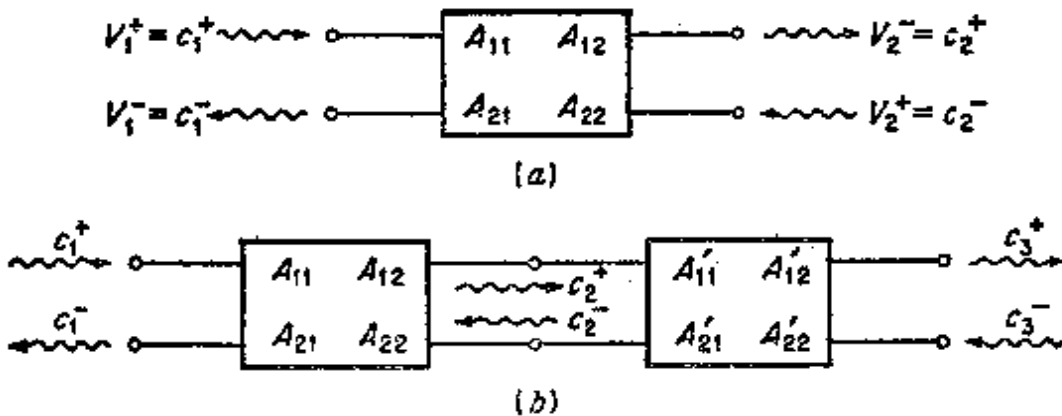


图 4.19 接头的波振幅传输矩阵表示法

$$c_1^+ = V_1^+ \quad (4.76a)$$

$$c_1^- = V_1^- \quad (4.76b)$$

$$c_2^+ = V_2^- \quad (4.76c)$$

$$c_2^- = V_2^+ \quad (4.76d)$$

$$c_3^+ = V_3 \quad (4.76e)$$

$$c_3^- = V_3^* \quad (4.76f)$$

上标 + 指的是向右边传播波的振幅，上标 - 指的是向左边传播波的振幅。因为输入量和输出量成线性关系，所以，可以写为

$$\begin{bmatrix} c_1^+ \\ c_1^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2^+ \\ c_2^- \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

式中的  $A_{nm}$  是表示此接头的适当常数。对于图 4.19b 的级联连接，可得

$$\begin{bmatrix} c_1^+ \\ c_1^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3^+ \\ c_3^- \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

若用散射矩阵表示单个接头，则得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_1^- \\ V_1^+ \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_1^- \\ c_1^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^- \\ V_1^+ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^+ \\ c_1^- \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.79)$$

求解这些方程的  $c_1^+$  和  $c_1^-$  可以得到

$$\begin{bmatrix} c_1^+ \\ c_1^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/S_{12} & -S_{22}/S_{12} \\ S_{11}/S_{12} & (S_{12}^2 - S_{11}S_{22})/S_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2^+ \\ c_2^- \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

根据 (4.80) 式，不难用  $S_{nm}$  来表示  $A_{nm}$ 。应当指出，(A) 矩阵的行列式等于 1，即

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1 \quad (4.81)$$

它容易由 (4.80) 式得到证明。但是，如果波的振幅没有被归一化，以致使功率等于  $\frac{1}{2} |C_n^+|^2$ ，等等，则 (A) 矩阵的行列式一般不等于 1（这是根据此情况下散射矩阵的不对称性而得出的）。本章末有几个习题说明这些问题。



## ★4.10 波导的激励

前几节已经详细地研究了无源微波接头的电路问题。为了全面起见，还需要研究在波导和传输线中激励起波的典型场源等效电路表示法。这个波导理论专题有些特殊，在本书中对它作全面的分析是不可能的，因为这将远超出本书的主题范围。但是，我们将介绍激励问题的某些方面，以作为选取适当的等效电路和描述典型的波源的基础；此外，它还能解决对微波工程有重要意义的若干耦合问题。此理论大部分是通过研究几个特殊例子来阐明的。

### 矩形波导中的探针耦合

图4.20表示一个通常的同轴线——波导的探针耦合装置。短路位置 $l$ 和探针长度 $d$ 可以调节，以便使同轴线传送到波导中的功率达到最大。同轴线的中心导体伸入波导形成一个电探针。任一个沿探针方向具有非零电场的波导模将在探针上激励起电流。根据互易

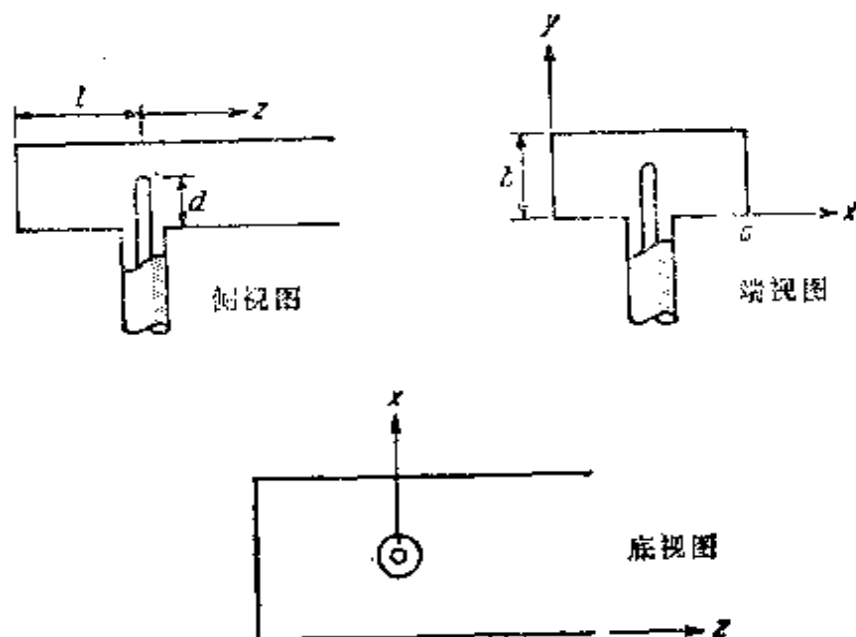


图 4.20 同轴线与波导的探针耦合

原理，当由 $TEM$ 波产生的探针电流自同轴线向波导入射时，也将激励起同样的波导模\*。因此，不难看出，为了与矩形波导中的主模 $TE_{10}$ 模耦合最紧，探针应该通过宽面中央伸入波导，使它与 $TE_{10}$ 模的最大电场位置重合。同时被激励起的凋落模是储存无功能量的局部场，它使接头具有电抗性质。短路波导段提供了一个可调电抗，用来抵消探针电抗。确定所激励起的凋落模的振幅，和算出储藏在这些非传播模中纯电抗能量，就可以求出探针的电抗\*\*。由于其具体计算颇为冗长，故下面只计算它所辐射的 $TE_{10}$ 模的振幅。

由于探针末端的电流必须为零，故对于细探针来说，其电流按正弦驻波分布是一种很好的近似。于是，我们假定探针电流为无限细线电流的形式：

$$I = I_0 \sin k_0(d-y) \quad 0 \leq y \leq d \quad x = a/2 \quad z = 0 \quad (4.82)$$

下面要求出由此电流所激励的 $TE_{10}$ 模的振幅。求此振幅的一般方法，是前面引用过的互易原理的数学公式，它将确定一个已知场源将激励起哪些波导模。下面推导出所需要的结果。

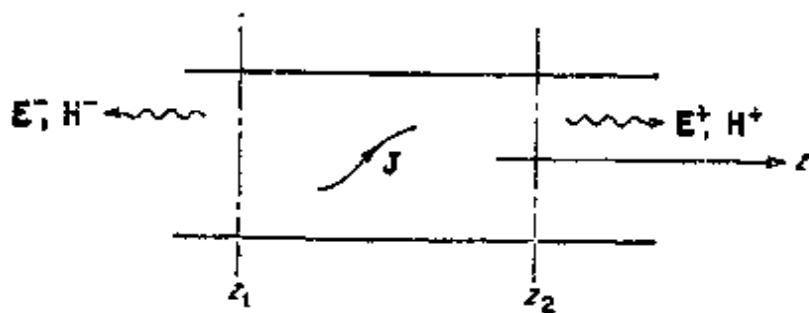


图 4.21 波导中的电流源

图4.21表示一个无限长的波导，其中的电流源 $J$ 位于 $z_1$ 和 $z_2$ 之间的区域。由此源所辐射的场可以表示为如下的无限多个波导模场的总和：

\* 这个互易原理对于确定在一给定的探针上能激励出什么模，是非常有用的。  
 \*\* 例如参看R.E.Collin, "Field Theory of Guided Waves," Chap. 7, McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.

$$\mathbf{E}^+ = \sum_n C_n^+ (\mathbf{e}_n + \mathbf{e}_{zn}) e^{-i\beta_n z} \quad z > z_2 \quad (4.83a)$$

$$\mathbf{H}^+ = \sum_n C_n^+ (\mathbf{h}_n + \mathbf{h}_{zn}) e^{-i\beta_n z} \quad z > z_2 \quad (4.83b)$$

$$\mathbf{E}^- = \sum_n C_n^- (\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_{zn}) e^{i\beta_n z} \quad z < z_1 \quad (4.83c)$$

$$\mathbf{H}^- = \sum_n C_n^- (-\mathbf{h}_n + \mathbf{h}_{zn}) e^{i\beta_n z} \quad z < z_1 \quad (4.83d)$$

(4.83)式中的  $n$  是求和指数，它意味着对所有可能出现的  $TE$  和  $TM$  模求和。应用洛仑兹互易公式(2.135)式，可以确定未知振幅  $C_n$ 。取图4.21中的波导壁和位于  $z_1$  和  $z_2$  处的横截面作为体积  $V$  的边界。设在洛仑兹互易公式中所用的场  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$  就是该电流源所辐射的场，此场由(4.83)式给出。取第  $n$  个波导模的场  $\mathbf{E}_n^-, \mathbf{H}_n^-$  来表示  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ ，即

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_n^- = (\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_{zn}) e^{i\beta_n z}$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_n^- = (-\mathbf{h}_n + \mathbf{h}_{zn}) e^{i\beta_n z}$$

因为场  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$  为  $V$  中无源时 ( $\mathbf{J}_2 = 0$ ) 的解，故(2.135)式为

$$\oint (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1 - \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J} dV$$

根据边界条件  $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_n^- = 0$ ，波导壁上的面积分为零。因为这些模是正交的，即

$$\int_{S_0} \mathbf{E}_n^\pm \times \mathbf{H}_m^\pm \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad n \neq m$$

所以，当在波导的横截面  $S_0$  上积分时，在  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$  的展开式中除了第  $n$  项以外，其余各项都为零。因为  $z_1$  处横截面上的积分恒等于零，故得

$$\int_{S_2} c_n^+ [(\mathbf{e}_n + \mathbf{e}_{zn}) \times (-\mathbf{h}_n + \mathbf{h}_{zn}) - (\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_{zn}) \times (\mathbf{h}_n + \mathbf{h}_{zn})] \cdot \mathbf{a}_z dS$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{s_1} c_1^* \{ (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_{21}) \times (-\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_{21}) - (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_{21}) \times (-\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_{21}) \} \cdot \mathbf{a}_z dS \\
& = -2c_1^* \int_{s_2} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{a}_z dS = \int_V \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{J} dV
\end{aligned}$$

因而  $c_1^*$  为

$$c_1^* = -\frac{1}{P_1} \int_V \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{J} dV = -\frac{1}{P_1} \int_V (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_{21}) \cdot \mathbf{J} e^{j\beta z} dV \quad (4.84a)$$

若把  $\mathbf{E}_2$ 、 $\mathbf{H}_2$  选为  $\mathbf{E}_2^*$ 、 $\mathbf{H}_2^*$ ，则得

$$c_2^* = \frac{1}{P_2} \int_V \mathbf{E}_2^* \cdot \mathbf{J} dV = -\frac{1}{P_2} \int_V (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{21}) \cdot \mathbf{J} e^{-j\beta z} dV \quad (4.84b)$$

式中，

$$P_1 = 2 \int_{s_0} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{a}_z dS \quad (4.84c)$$

且  $S_0$  为波导的横截面。归一化常数  $p_1$  取决于  $\mathbf{e}_1$  和  $\mathbf{h}_1$  所使用的表达式，而这些表达式的选取是任意的。

现在，把上述结果用来研究前面提出的探针问题。因为  $TE_{10}$  模的场为

$$E_x = e_x e^{-j\beta z} = \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z} \quad (4.85a)$$

$$H_z = h_z e^{-j\beta z} = -Y_w \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z} \quad (4.85b)$$

故得

$$P_{10} = 2 \int_0^a \int_0^b Y_w \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx dy = ab Y_w \quad (4.86)$$

式中， $Y_w$  是  $TE_{10}$  模的波导纳， $\beta$  是传播常数。

短路波导中的探针，等效于原来的探针加上置于无限长波导中  $z = -2l$  处的它的镜象，如图 4.22 所示。若假定辐射到  $z > 0$  区域的场为

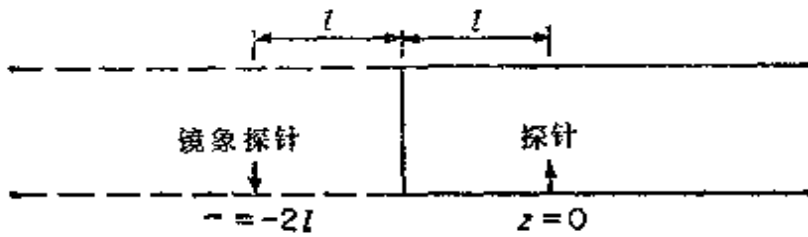


图 4.22 探针及其镜像

$$E_z^+ = c^+ \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z} \quad (4.87)$$

则应用(4.84a)式得

$$\begin{aligned} c^+ &= -\frac{1}{abY_w} \left[ \int_0^l I_0 \sin k_0(d-y) dy \right. \\ &\quad \left. - \int_0^d I_0 \sin k_0(d-y) e^{-2i\beta l} dy \right] \\ &= \frac{I_0 Z_w}{abk_0} (e^{-2i\beta l} - 1)(1 - \cos k_0 d) \end{aligned} \quad (4.88)$$

因为

$$E_{z0}^- = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{a} e^{i\beta z} = 1 & \text{在 } z=0, \quad x = \frac{a}{2} \text{ 处} \\ e^{-i2\beta l} & \text{在 } x = \frac{a}{2}, \quad z = -2l \text{ 处} \end{cases}$$

应当指出，镜像探针上的电流方向是相反的。这是使探针及其镜像的辐射场在短路处切向电场为零所必需的。

这样，由探针向  $z > 0$  处所辐射的  $TE_{10}$  模的总横向场为

$$E_x = \frac{I_0 Z_w}{abk_0} (e^{-2i\beta l} - 1)(1 - \cos k_0 d) \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z} \quad (4.89a)$$

$$H_x = -Y_w E_x \quad (4.89b)$$

总的辐射功率为

$$P = \frac{Y_w}{2} \int_0^a \int_0^b |E_x|^2 dx dy$$

$$= \frac{I_0^2 Z_w}{4abk_0^2} |e^{-2j\beta l} - 1|^2 (1 - \cos k_0 d)^2 \quad (4.90)$$

根据(4.82)式, 在探针天线基座上 ( $y = 0$ ), 同轴线总电流应为

$$I = I_0 \sin k_0 d$$

设由同轴线的基座看入的输入阻抗为  $Z_{in} = R_0 + jX$ , 则由复数坡印廷矢量定理得((4.14)式)

$$Z_{in} = R_0 + jX = \frac{P + 2j\omega(W_m - W_e)}{\frac{1}{2}II^*}$$

式中,  $P$  为辐射到波导中的功率,  $W_m - W_e$  是由非传输(凋落)模产生的、储藏在探针附近的无功能量。由于  $P$  已经由(4.90)式算出, 故可以计算输入电阻。利用恒等式  $1 - \cos 2\theta = 2\sin^2 \theta$  和  $\sin 2\theta = \sin \theta \cos \theta$ , 得到

$$R_0 = \frac{2P}{I_0^2 \sin^2 k_0 d} = \frac{Z_w}{2abk_0^2} |1 - e^{-2j\beta l}|^2 \tan^2 \frac{k_0 d}{2} \quad (4.91)$$

此输入电阻称为探针的辐射电阻。必须注意, 它的值随参数  $l$  和  $d$  (即短路位置和探针长度)的改变而改变。通过调整  $R_0$  使其等于同轴线的特性阻抗, 并引入一适当的电抗去抵消电抗  $jX$ , 能使传送的功率达到最佳值。下一章讨论抵消电抗的适当方法。

### 由线电流元的辐射

图4.23 a 和 b 表示波导中的线电流元。对于横向电流元的情况, 由(4.84)式得到

$$C_n^+ = C_n^- = -\frac{1}{P_n} \int \mathbf{e} \cdot \mathbf{J} dl \quad (4.92)$$

当只有单个模(比如说  $n = 1$  的模)传播时, 这个结果可以这样解释: 即一个横向电流源等效于跨接到代表波导的等效传输线上的一

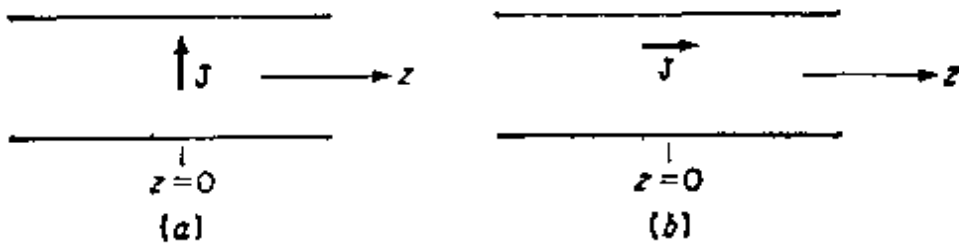
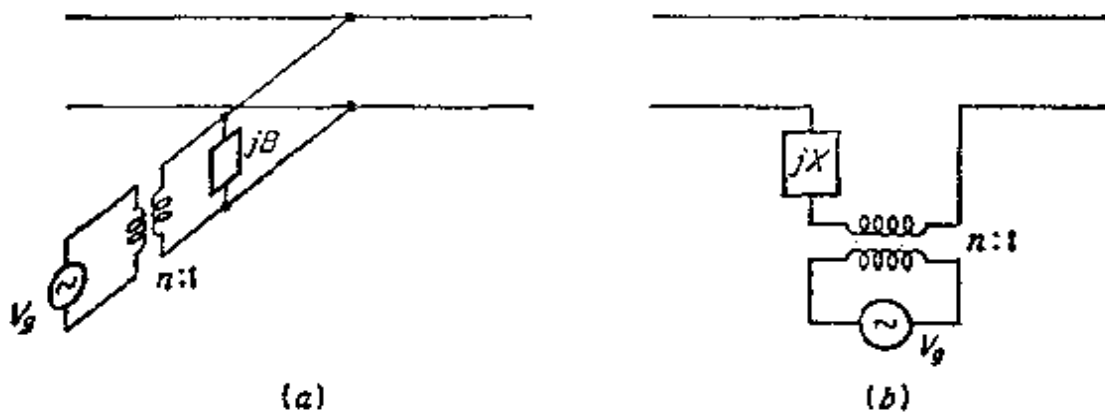


图 4.23 波导中的线电流元

图 4.24 波导中电流源的等效电路：  
(a) 横向电流源 (b) 轴向电流源

个并联电压源。其理由是：横向电流所辐射的横向场分量，在电流源的邻近两侧是相等的，这与越过源区域的等效电压的连续性等效。越过该电流源区域的横向磁场是不连续的，因而越过等效电压源的等效电流也是不连续的。图4.24表示这种类型的源对主传播模的等效电路。理想变压器作为电压源和传输线之间调整耦合的工具，以使其功率与波导中所辐射的功率一样大。并联电纳  $jB$  代表储藏在激起的凋落模场中的纯无功能量。

对于位于  $z = 0$  处的轴向电流，由 (4.84) 式得

$$C_n^+ = \frac{1}{P_n} \int J \cdot e_{nz} e^{j\beta_n z} dz$$

$$C_n^- = -\frac{1}{P_n} \int J \cdot e_{nz} e^{-j\beta_n z} dz$$

如果此电流在  $-l < z < l$  之间是  $z$  的对称函数，则由于  $e_{nz}$  不是  $z$

的函数而得

$$C_n^+ = -c_n^- = -\frac{1}{P_n} \int_{-l}^l \mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_{zn} \cos \beta_n z dz \quad (4.93)$$

这种情况下辐射的横向磁场越过该电流源时是连续的，而横向电场却是不连续的。因而，此电流源等效于与传输线串联的电压源，如图4.24b所示。

线电流元可以被看作振荡着的等效电偶极子。由麦克斯韦方程得

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{J} = j\omega \epsilon_0 \mathbf{E} + j\omega \mathbf{P} + \mathbf{J}$$

可见 $\mathbf{J}$ 与极化电流 $j\omega \mathbf{P}$ 以同样的方式包含在场方程中。因而，可以把 $\mathbf{J}$ 认为是等效的电偶极子 $\mathbf{P}$ 。即

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{J}}{j\omega}$$

### 由电流环的辐射

图4.25表示在波导中的线电流环。它辐射的第 $n$ 个模的振幅为

$$C_n^+ = -\frac{1}{P_n} \oint_C \mathbf{E}_n^- \cdot \boldsymbol{\tau} I dl$$

式中， $\boldsymbol{\tau} I$ 是沿着围线 $C$ 流动的矢量电流， $\boldsymbol{\tau}$ 是沿 $C$ 的单位矢量。

由斯托克斯定律得

$$C_n^+ = -\frac{I}{P_n} \oint_C \mathbf{E}_n^- \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{I}{P_n} \int_S \nabla \times \mathbf{E}_n^- \cdot \mathbf{n} dS$$

而 $\nabla \times \mathbf{E}_n^- = -j\omega \mathbf{B}_n^- = -j\omega \mu_0 \mathbf{H}_n^-$ ，所以

$$C_n^+ = -\frac{j\omega I}{P_n} \int_S \mathbf{B}_n^- \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.94a)$$

同理，

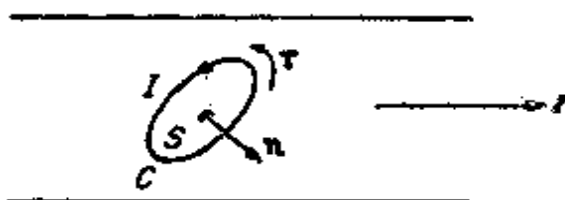


图 4.25 波导中的电流环



$$C_n^- = -\frac{j\omega I}{P_n} \int_S \mathbf{B}_n^+ \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.94b)$$

可见，第  $n$  个模激励的振幅正比于该模穿过此电流环时的总磁通。

如果此电流环很小，使第  $n$  个模的场  $\mathbf{B}_n$  在环面上可以认为是常数，则得

$$C_n^+ = \frac{j\omega I}{P_n} \mathbf{B}_n^+ \cdot \int_S \mathbf{n} dS = \frac{j\omega I}{P_n} \mathbf{B}_n^+ \cdot \mathbf{S}_0$$

这里  $I\mathbf{S}_0$  是此电流环的磁偶极矩  $\mathbf{M}$ ，其中的  $\mathbf{S}_0$  是环的面矢量，故得

$$C_n^+ = \frac{j\omega}{P_n} \mathbf{B}_n^- \cdot \mathbf{M} \quad (4.95a)$$

同理

$$C_n^- = -\frac{j\omega}{P_n} \mathbf{B}_n^+ \cdot \mathbf{M} \quad (4.95b)$$

由这些方程式可以看出，小电流环的辐射可以认为是磁偶极子的辐射。轴向磁偶极子（横向电流环）的等效源是一个并联电压源，而横向磁偶极子等效于串联电压源。

## ★4.11 波导的孔耦合\*

上述用等效电偶极子和磁偶极子辐射来表示的波导中电流辐射公式，能直接应用于波导公共壁上的小孔（即洞）耦合的情况。作为一级近似，导电壁上的小孔等效于与小孔垂直且强度正比于激励电场法线分量的电偶极子，加上在该孔平面上且强度正比于激励切向磁场的磁偶极子。其比例常数是与小孔的尺寸和形状有关的参数。这些常数称为孔的电极化率和磁极化率，它表示孔的耦合或辐射特性。\*下面对孔的这些性质的正确性作定量的讨论。

\* H. A. Bethe 首先提出“小孔绕射理论”（*Phys. Rev.*, Vol. 66, PP. 163—182, 1944）

\*\* 这些结果的推导，参看上述 Collin 书中的引文。

图4.26 a 表示在没有孔的导电表面上强度为  $E$  的法向电场。当在此壁上开一小孔时，边缘的电力线以图4.26 b 所表示的方式通过小孔。但这种场分布基本上由如图4.26 c 中所示的等效电偶极子所产生。注意电偶极子的位置垂直于小孔。

图4.26 d 中所示的场向磁力线，将以如图4.26 e 所示的方式通过孔的边缘。这些边缘场力线与孔平面上的磁偶极子所产生的场力线等效。

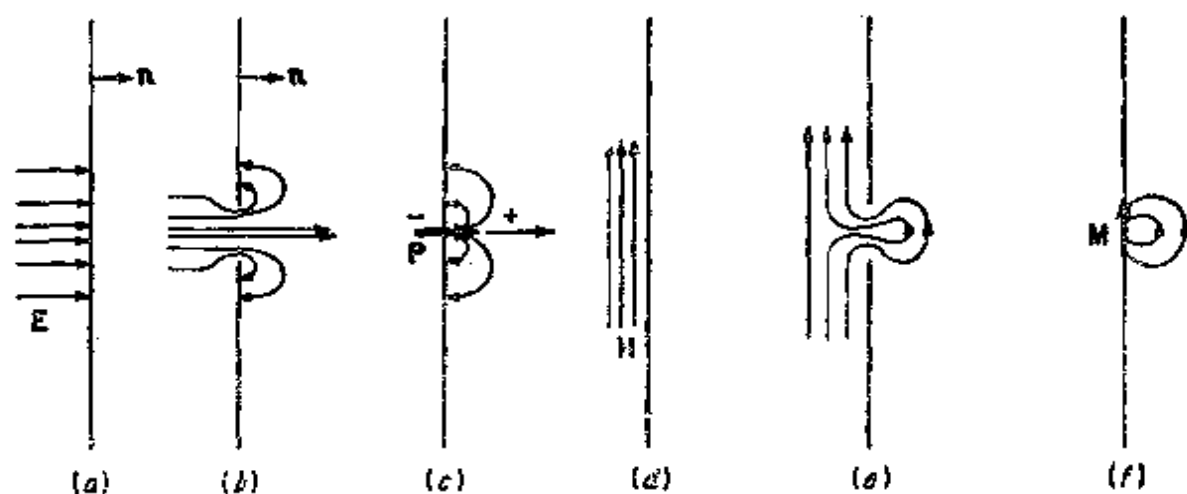


图 4.26 导电壁上的孔

当小圆孔的半径  $r_0 \ll \lambda_0$  时，其偶极矩与入射的无小孔时的电磁场有如下的关系：

$$P = -\epsilon_0 \alpha_e (n \cdot E) n \quad (4.96a)$$

$$M = -\alpha_m H_t \quad (4.96b)$$

式中， $n \cdot E$  是孔中心的法向电场， $H_t$  是孔中心的切向磁场。电极化率  $\alpha_e$  为

$$\alpha_e = -\frac{2}{3} r_0^3 \quad (4.97a)$$

磁极化率  $\alpha_m$  为

$$\alpha_m = \frac{4}{3} r_0^3 \quad (4.97b)$$

小孔的出现，也扰动了壁的内射侧的场。这些被扰动的场是由

等效偶极子所辐射的，这些偶极子等于 (4.96) 式所给出的  $P$  和  $M$  的负值，且位于壁的入射侧。当用等效的电和磁偶极子代替孔时，重要的是：注意它们的辐射场是假定孔被导电壁封闭的情况下计算的。等效偶极子正确地解释了在导电壁上通过孔耦合的场。也应指出，这个理论是一个只对小孔有效的近似理论，通过下面的例子将弄清楚此理论的应用。

### 横向壁上的小孔

图 4.27 a 表示在矩形波导横壁上的小圆孔。为了求激励场，假定小孔被封闭。由  $z < 0$  处入射的  $TE_{10}$  模被  $z = 0$  处的导电壁所反

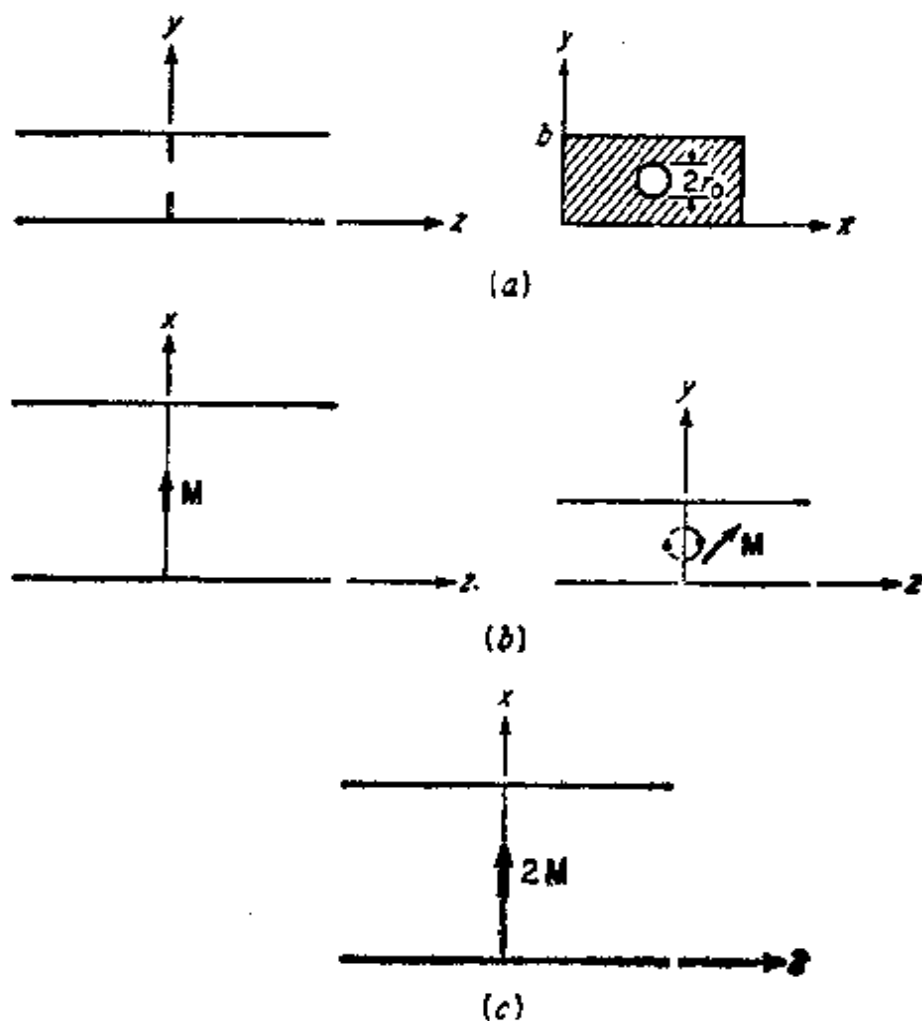


图 4.27 横向波导壁上的孔

射。从而在  $z < 0$  区域产生一个驻波场。此驻波场为

$$E_z = C(e^{-\beta z} - e^{+\beta z}) \sin \frac{\pi x}{a} \quad (4.98a)$$

$$H_x = -CY_w(e^{-\beta z} + e^{+\beta z}) \sin \frac{\pi x}{a} \quad (4.98b)$$

再加上一个磁场的  $z$  分量。对于目前讨论的问题，不需要知道此分量。

因为在孔上的法向电场为零，所以不产生感应的电偶极子。根据 (4.98) 式，孔中心的切向磁场为

$$H_x = -2CY_w$$

由此产生  $X$  方向的感应磁偶极子  $M$ ，且为

$$M = -\alpha_m H_x = 2CY_w \alpha_m = \frac{8}{3} r_0^3 CY_w \quad (4.99)$$

辐射到  $z > 0$  区域的场，就是如图 4.27 b 所示的磁偶极子  $M$  所辐射的场。这个偶极子等效于如该图所示的在  $yz$  平面上的半个圆电流环。为了求出横向导电壁上这个偶极子所辐射的场，可以应用镜象理论。因为在横向壁上半圆电流环的镜象是此电流环的另一半圆电流环，所以  $M$  的镜象就是磁矩为  $M$  的另一个磁偶极子。横向导电壁的影响，可用去掉导电壁但使偶极子的强度加倍来等效，如图 4.27 c 所示。设辐射到  $z > 0$  区域的场为

$$E_z^+ = Ae^{-\beta z} \sin \frac{\pi x}{a} = Ae_y e^{-\beta z}$$

$$H_x^+ = -AY_w e^{-\beta z} \sin \frac{\pi x}{a} = Ah_x e^{-\beta z}$$

则应用 (4.95 a) 式得

$$A = \frac{j\omega\mu_0}{P_{10}} H_z^-(2M) = \frac{j\omega\mu_0}{P_{10}} Y_w \left( \frac{16}{3} r_0^3 CY_w \right)$$

因为在此情况下场  $B_z^-$  就是  $-\mu_0 h_x = \mu_0 Y_w \sin(\pi x/a)$ ，常数  $P_{10}$  为

$$\begin{aligned}
 P_{1,0} &= -2 \int_0^a \int_0^b e_y h_x dx dy \\
 &= 2Y_w \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx dy = abY_w
 \end{aligned}$$

由此得

$$A = \frac{16}{3} r_0^3 \frac{j\omega\mu_0}{abZ_w} C \quad (4.100)$$

因为入射的  $TE_{10}$  模的振幅为  $C$ ，所以孔的传输系数为

$$\Gamma = \frac{A}{C} = \frac{16}{3} jr_0^3 \frac{\omega\mu_0}{abZ_w} = j \frac{16}{3} r_0^3 \frac{k_0 Z_0}{abZ_w} \quad (4.101)$$

孔的存在使场也散射到  $z < 0$  的区域。辐射到这个区域中的有效磁偶极矩等于 (4.99) 式的负值。现在，应用 (4.95b) 式得

$$E_y = A \sin \frac{\pi x}{a} e^{j\beta z}$$

对  $z < 0$  区域中被扰动的电场来说， $A$  由 (4.100) 式给出。 $z < 0$  区域的总电场是

$$E_y = (C e^{-j\beta z} + (A - C) e^{j\beta z}) \sin \frac{\pi x}{a}$$

因此，横向壁上小孔产生的反射系数为

$$\Gamma = \frac{A - C}{C} = \frac{A}{C} - 1 = j \frac{16}{3} r_0^3 \frac{\beta}{ab} - 1 \quad (4.102)$$

在 (4.101) 式中用  $k_0 Z_0 / \beta$  代替了  $Z_w$ 。当把  $j\bar{B}$  接到传输线上时，归一化并联电纳  $j\bar{B}$  应产生的反射系数为

$$\Gamma = \frac{1 - Y_{in}}{1 + Y_{in}} = \frac{1 - (1 + j\bar{B})}{1 + (1 + j\bar{B})} = \frac{-j\bar{B}}{2 + j\bar{B}}$$

当  $\bar{B}$  很大时，则得

$$\Gamma = \frac{-j\bar{B}}{j\bar{B}} \left(1 + \frac{2}{j\bar{B}}\right)^{-1} \approx -1 - j\frac{2}{\bar{B}}$$

把此式与 (4.102) 式比较表明：此孔等效于一个归一化的电感性

电纳

$$j\overline{B} = -j \frac{3ab}{8r_0^3\beta} \quad (4.103)$$

### 波导宽壁上的孔

图4.28表示在两个矩形波导的公共宽壁上有一个半径为  $a$  的圆孔。下波导中入射的场为  $TE_{10}$  模，且为

$$E_x = C \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z} \quad (4.104a)$$

$$H_x = -CY_w \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z} \quad (4.104b)$$

$$H_z = j \frac{\pi Y_w}{\beta a} C \cos \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z} \quad (4.104c)$$

在位于  $z = 0$ ， $x = d$  处的孔中心处激励场为

$$E_x = C \sin \frac{\pi d}{a}$$

$$\mathbf{H} = CY_w \left( -\mathbf{a}_x \sin \frac{\pi d}{a} + j \frac{\pi}{\beta a} \mathbf{a}_z \cos \frac{\pi d}{a} \right)$$

利用 (4.96) 式可得辐射到上波导的等效偶极子为

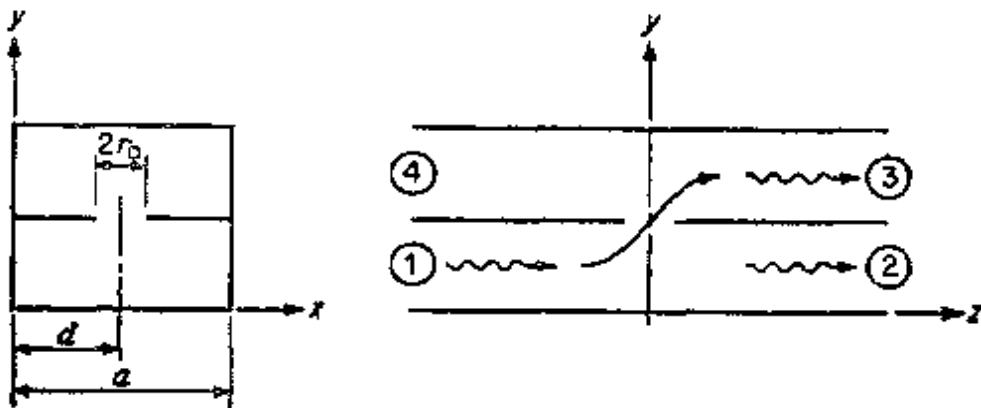


图 4.28 两波导的公共宽壁上的小孔

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \frac{2}{3} r_0^3 C \sin \frac{\pi d}{a} \mathbf{a}_x \quad (4.105a)$$

$$\mathbf{M} = -\frac{4}{3} r_0^3 C Y_w \left( -\mathbf{a}_x \sin \frac{\pi d}{a} + j \frac{\pi}{\beta a} \mathbf{a}_x \cos \frac{\pi d}{a} \right) \quad (4.105b)$$

取场  $\mathbf{E}_{10}^+$ 、 $\mathbf{E}_{10}^-$ 、 $\mathbf{B}_{10}^+$  和  $\mathbf{B}_{10}^-$  为

$$\mathbf{E}_{10}^+ = \mathbf{a}_y \sin \frac{\pi x}{a} e^{-\beta z}$$

$$\mathbf{E}_{10}^- = \mathbf{a}_y \sin \frac{\pi x}{a} e^{+\beta z}$$

$$\mu_0 \mathbf{H}_{10}^+ = \mathbf{B}_{10}^+ = -\mu_0 Y_w \left( \mathbf{a}_x \sin \frac{\pi x}{a} - j \frac{\pi}{\beta a} \mathbf{a}_x \cos \frac{\pi x}{a} \right) e^{-\beta z}$$

$$\mu_0 \mathbf{H}_{10}^- = \mathbf{B}_{10}^- = \mu_0 Y_w \left( \mathbf{a}_x \sin \frac{\pi x}{a} + j \frac{\pi}{\beta a} \mathbf{a}_x \cos \frac{\pi x}{a} \right) e^{+\beta z}$$

同时，令电偶极子所辐射的场为

$$\mathbf{E} = \begin{cases} A_1 \mathbf{E}_{10}^+ & z > 0 \\ A_2 \mathbf{E}_{10}^- & z < 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{H} = \begin{cases} A_1 \mathbf{H}_{10}^+ & z > 0 \\ A_2 \mathbf{H}_{10}^- & z < 0 \end{cases}$$

而由磁偶极子所辐射的场为

$$\mathbf{E} = \begin{cases} A_3 \mathbf{E}_{10}^+ & z > 0 \\ A_4 \mathbf{E}_{10}^- & z < 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{H} = \begin{cases} A_3 \mathbf{H}_{10}^+ & z > 0 \\ A_4 \mathbf{H}_{10}^- & z < 0 \end{cases}$$

电偶极子  $\mathbf{P}$  等效于电流元  $\mathbf{J}$  ( $\mathbf{J} = j\omega\mathbf{P}$ )。因为此偶极子的取向位于横向平面内，所以，由 (4.84) 式得

$$A_1 = A_2 = -\frac{1}{P_{10}} (j\omega\mathbf{P}) \cdot \mathbf{a}_x \sin \frac{\pi d}{a}$$

$$= -\frac{j\omega\epsilon}{abY_w} \frac{2}{3} r_0^3 C \sin^2 \frac{\pi d}{a} \quad (4.106)$$

由于P是无限小偶极子，故积分是不需要的。常数 $P_{10}$ 等于 $abY_w$ 。

由磁偶极子辐射的场可利用(4.95)式求出，于是

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{j\omega\mu_0 Y_w}{abY_w} \left( a_x \sin \frac{\pi d}{a} + j \frac{\pi}{\beta a} a_x \cos \frac{\pi d}{a} \right) \\ &\quad \cdot \left( -\frac{4}{3} r_0^3 C Y_w \right) \left( -a_x \sin \frac{\pi d}{a} + j \frac{\pi}{\beta a} a_x \cos \frac{\pi d}{a} \right) \\ &= j \frac{\omega\mu_0 Y_w}{ab} \frac{4}{3} r_0^3 C \left( \sin^2 \frac{\pi d}{a} + \frac{\pi^2}{\beta^2 a^2} \cos^2 \frac{\pi d}{a} \right) \end{aligned} \quad (4.107)$$

同理，可以得出

$$A_4 = \frac{j\omega\mu_0 Y_w}{ab} \frac{4}{3} r_0^3 C \left( -\sin^2 \frac{\pi d}{a} + \frac{\pi^2}{\beta^2 a^2} \cos^2 \frac{\pi d}{a} \right) \quad (4.108)$$

根据这些振幅的表达式，不难求出辐射到上波导中去的场。它们是

$$\mathbf{E} = \begin{cases} (A_1 + A_3) \mathbf{E}_{10}^+ & z > 0 \\ (A_2 + A_4) \mathbf{E}_{10}^- & z < 0 \end{cases} \quad (4.109a)$$

$$\quad (A_2 + A_4) \mathbf{E}_{10}^- \quad z < 0 \quad (4.109b)$$

$$\mathbf{H} = \begin{cases} (A_1 + A_3) \mathbf{H}_{10}^+ & z > 0 \\ (A_2 + A_4) \mathbf{H}_{10}^- & z < 0 \end{cases} \quad (4.109c)$$

$$\quad (A_2 + A_4) \mathbf{H}_{10}^- \quad z < 0 \quad (4.109d)$$

应当指出，电偶极子在两个方向上的辐射是相同的，而磁偶极子在两个方向上的辐射是不同的。通过正确地选取孔的位置 $d$ ，可能在一个方向得到零辐射。即可以使 $A_2 + A_4$ 为零。使(4.106)式与(4.108)式的负值相等得

$$\sin \frac{\pi d}{a} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{6} a} \quad (4.110)$$

对此位置上的孔， $A_2 + A_4 = 0$ ，但 $A_1 + A_3 \neq 0$ 。这是一个有意义的情况，因为它意味着在图4.28中进入端口1的功率经过端口2和



3 出来, 但不从端口 4 出来。如果波经由端口 2 入射, 则功率将由端口 1 和 4 出来, 而不从端口 3 出来。从对称性考虑, 这是显而易见的。具有这些性质的四端口接头称为定向耦合器, 在第 6 章将对它作更多的研究。

为了全面地分析这个例子, 还要求出由于孔的存在而散射到下波导中去的场。此场为 (4.105) 式的负值所给定的偶极子所辐射。由于此分析与计算  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$  和  $A_4$  相类似, 这里不再进行了。

## 习 题

4.1 试证明波导中的  $TM$  模在边界上任两点之间横向电场的线积分为零。

提示: 注意  $\nabla_t \mathbf{e}_z \cdot d\mathbf{l} = (de_z/dl) dl = e_z$  沿此路径的方向导数。对它进行积分并利用  $e_z$  的边界条件。换句话说, 由于没有轴向磁通量, 所以在横向平面上沿闭合路径的线积分必须得零。

4.2 试证明  $TE$  模在波导边界上两点之间的线积分与所选取的积分路径有关。

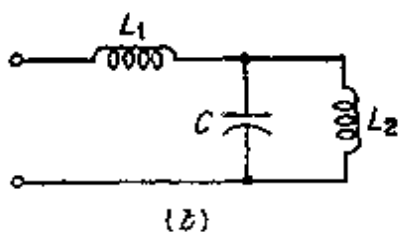
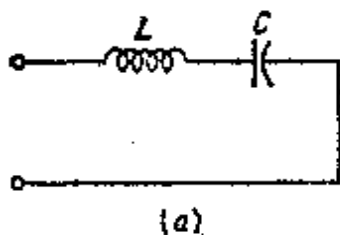
提示: 要注意: 因为有轴向磁场, 所以, 沿闭合路径的线积分不为零。

4.3 位于  $z = 0$  处的障碍物激起凋落的  $H$  模, 它自障碍物沿正  $z$  方向按指数衰减。试求复数坡印廷矢量在  $z = 0$  和  $z = \infty$  横截面上及各波导壁上对凋落模  $H_{nm}$  的积分, 并证明没有功率传送到  $z > 0$  的区域。同时, 证明在  $z > 0$  区域储藏在非传播  $H$  模中的无功能量主要是磁能。

提示: 由 (2.59) 式可见, 复数坡印廷矢量向内的总通量等于功率损耗 (在此题中, 取它等于零) 加  $zj\omega(W_m - W_e)$ 。

4.4 改为  $E$  模的情况下重复作习题 4.3。并证明非传播的  $E$  模主要储藏电能。

4.5 对如图所示的电路, 证明电抗函数的斜率等于 (4.25)



习题 4.5

式。

★4.6 选取  $N$  端口接头的激励, 使除了  $I_i$  以外所有的  $I_s=0$ , 从而对所有  $i$  来说,  $V_i=Z_{ii}I_i$ 。试证明所有的  $Z_{ii}$  的实部必为  $\omega$  的偶函数, 虚部必为  $\omega$  的奇函数。

★4.7 推广 (4.25) 式的结果, 证明对无耗  $N$  端口接头来说, 下式成立:

$$(I^*) \cdot \left[ \frac{\delta Z}{\delta \omega} \right] (I) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N I_n^* \frac{\delta Z_{nm}}{\delta \omega} I_m = 4j(W_e + W_m)$$

4.8 试证明 (4.51) 式和 (4.44) 式是相等的。

4.9 试证明特性阻抗为  $Z_c$  长度为  $l$  的传输线等效于具有如下参数的  $T$  形网络:

$$Z_{11} = Z_{22} = -jZ_c \cot \beta l \quad Z_{12} = \pm jZ_c \csc \beta l$$

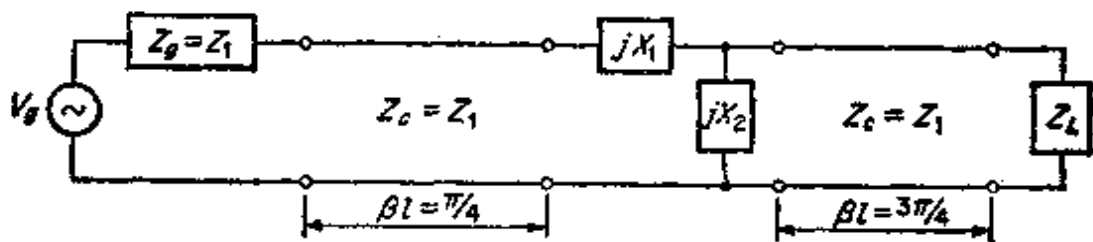
4.10 设  $Z_{sc}^1$ 、 $Z_{sc}^2$ 、 $Z_{oc}^1$ 、 $Z_{oc}^2$  分别为终端 2 短路, 终端 1 短路, 终端 2 开路, 终端 1 开路的  $T$  形网络的输入阻抗。用这些阻抗证明此  $T$  形网络的参数为

$$Z_{11} = Z_{oc}^1 \quad Z_{22} = Z_{oc}^2 \quad Z_{12}^2 = (Z_{oc}^1 - Z_{sc}^1)Z_{oc}^2 = (Z_{oc}^2 - Z_{sc}^2)Z_{oc}^1$$

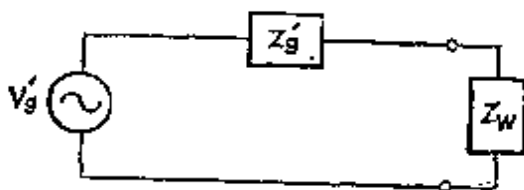
并利用这些关系式证明图 4.13d 和 e 的电路方程式。

4.11 对如图的微波电路, 求传送到负载  $Z_L$  上的功率, 并求出两段传输线中的驻波比。假定  $Z_L = 2Z_1$ ,  $X_1 = X_2 = Z_1$ ,  $V_g = 5$  伏 (峰值)。

4.12 一个特定的微波接头的等效  $T$  形网络参数为  $Z_{11} = j2$ ,  $Z_{12} = j/\sqrt{2}$ ,  $Z_{22} = -j0.25$ 。试求其另一个 (如图所示) 等效电路的参数。

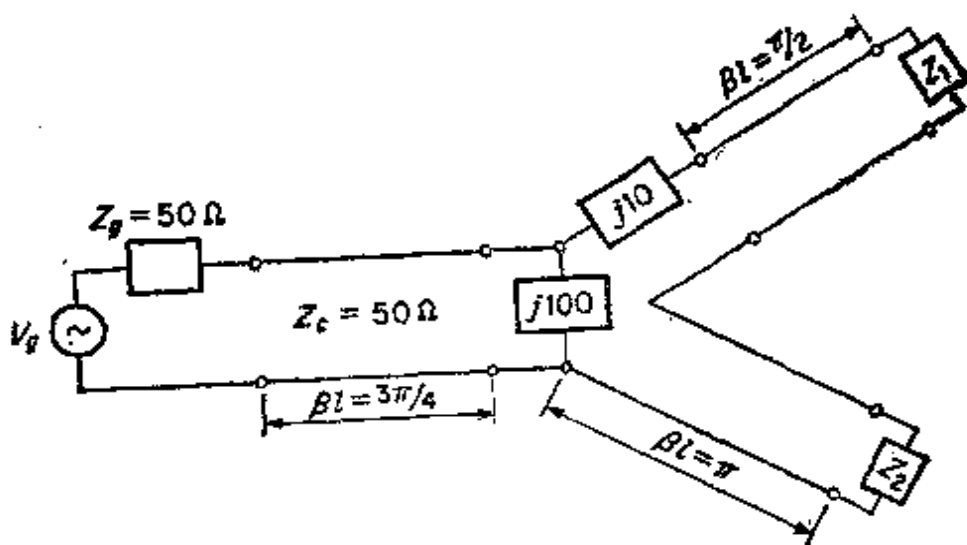


习题 4.11



习题 4.12

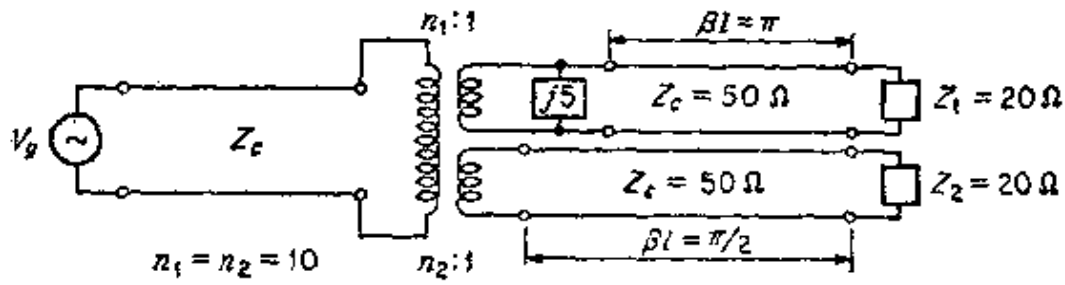
4.13 设有如图所示的三端口接头，试计算传送到负载  $Z_1 = 40$  欧姆和  $Z_2 = 60$  欧姆上的功率。假定  $V_g = 10$  伏特（峰值）。



习题 4.13

4.14 对于如图所示电路，求由波源传送到  $Z_1$  和  $Z_2$  的功率与总发送功率之比。要使此线上驻波比最小（假定  $Z_2$  为实数），输入线的特性阻抗应为何值？

4.15 设有如图所示的特性阻抗为  $Z_1$  和  $Z_2$  两段传输线所组成的接头。试证明当传输线采用通常的电压和电流时，其散射矩阵的



习题 4.14

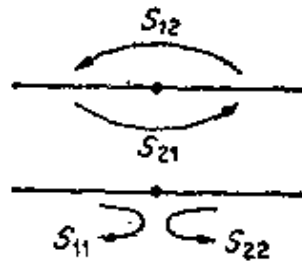
参数为

$$S_{11} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad S_{22} = -S_{11}$$

$$S_{12} = \frac{2Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad S_{21} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$$

并证明归一化电压  $(V_1^+)'$  和  $(V_2^+)'$  为  $(V_1^+)' = \sqrt{Y_1} V_1^+$ ,  $(V_2^+)' = \sqrt{Y_2} V_2^+$ , 不带一撇的量是传输线通常的电压。证明采用归一化电压时, 散射矩阵参数为

$$S_{11} = -S_{22} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad S_{12} = S_{21} = \frac{2\sqrt{Z_1 Z_2}}{Z_2 + Z_1}$$



习题 4.15

4.16 宽为  $a$  高为  $b$  的矩形波导中  $TE_{11}$  模的场可由下式推出,

$$h_z = C \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$$

试在下列两种情况下, 求其等效传输线的电压  $V^+$  和电流  $I^+$  的表示式: (1)  $Z_c = Z_w = TE_{11}$  模的波阻抗; (2)  $Z_c = 1$ .

4.17 试应用复数坡印廷矢量定理证明: 当波振幅被归一化而

使  $VV^* = II^*$ ，即等效特性阻抗为 1 时，一端口微波终端的反射系数  $\Gamma$  满足如下关系式：

$$(1 + \Gamma)(1 - \Gamma^*) = \frac{Zj\omega(W_m - W_e) + P_s}{\frac{1}{2}VV^*}$$

4.18 试证明长为  $l$  和特性阻抗为  $Z_c$  的一段传输线的参数  $\mathcal{A}$ 、 $\mathcal{B}$ 、 $\mathcal{C}$ 、 $\mathcal{D}$  为  $\mathcal{A} = \mathcal{D} = \cos\beta l$ ， $\mathcal{B} = jZ_c \sin\beta l$ ， $\mathcal{C} = jY_c \sin\beta l$ 。

4.19 试证明长度为  $l$  的一段传输线其波振幅传输矩阵为具有下列元的对角矩阵：

$$A_{11} = e^{i\beta l}, A_{22} = e^{-i\beta l}, A_{12} = A_{21} = 0.$$

4.20 设有如习题 4.15 那样的两段传输线所组成的接头。利用通常的传输线电压证明表示此接头的  $(A)$  矩阵参数为  $A_{11} = A_{22} = (Z_1 + Z_2)/2Z_1$ ， $A_{12} = A_{21} = (Z_2 - Z_1)/2Z_1$ 。当采用归一化波振幅（电压）时，证明  $A_{11} = A_{22} = (Z_1 + Z_2)/(2\sqrt{Z_1 Z_2})$ ， $A_{12} = A_{21} = (Z_2 - Z_1)/(2\sqrt{Z_1 Z_2})$ 。

4.21 试求跨接到具有单位特性阻抗的传输线上的并联电纳  $jB$  的  $(A)$  矩阵的参数。当电抗  $jX$  串联到上述传输线时，求其  $(A)$  矩阵的参数。

4.22 当采用归一化电压时，证明一个二端口接头的散射矩阵参数可用下列等效  $T$  形网络参数表示：

$$S_{11} = \frac{\Delta - 1 + Z_{11} - Z_{22}}{\Delta + 1 + Z_{11} + Z_{22}}$$

$$S_{12} = S_{21} = \frac{2Z_{12}}{\Delta + 1 + Z_{11} + Z_{22}}$$

$$S_{22} = \frac{\Delta - 1 + Z_{22} - Z_{11}}{\Delta + 1 + Z_{11} + Z_{22}}$$

式中， $\Delta = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2$ 。

4.23 试证明  $T$  形网络参数与散射矩阵参数有如下的关系：

$$Z_{11} = -\frac{(1+S_{11})(1-S_{22})+S_{12}^2}{W}$$

$$Z_{22} = -\frac{(1-S_{11})(1+S_{22})+S_{12}^2}{W}$$

$$Z_{12} = \frac{2S_{12}}{W}$$

式中,  $W = (1-S_{11})(1-S_{22}) - S_{12}^2$ .

4.24 在波导中的不连续处, 测得散射矩阵参数如下:

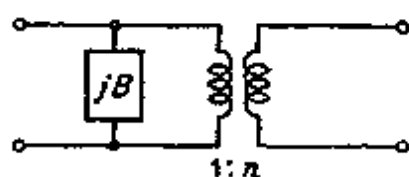
$$S_{11} = \frac{1}{3} + j\frac{2}{3} \quad S_{12} = j\frac{2}{3} \quad S_{22} = \frac{1}{3} - j\frac{2}{3}$$

试求表示此不连续的等效  $T$  形网络参数 (习题 4.23)。

4.25 测得一个  $E$  面阶梯 (图 4.6) 有如下的参数:

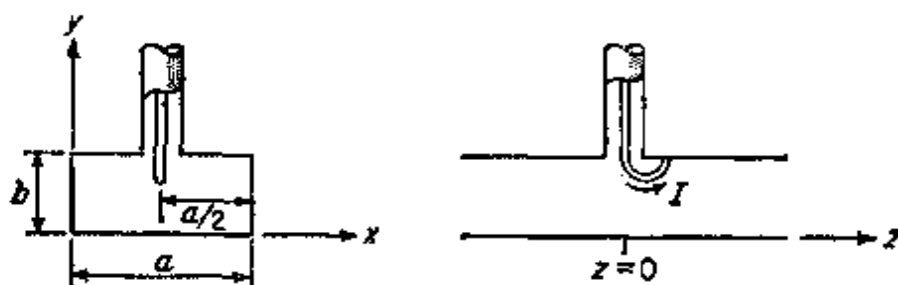
$$S_{11} = \frac{1-j}{3+j} \quad S_{22} = \frac{-(1+j)}{3+j}$$

并用如图所示形式的等效电路来表示此接头。由上面给出的数据, 求电纳  $jB$  和理想变压器的匝数比  $n:1$ 。



习题 4.25

★4.26 设如图的电流环面积小到能应用 (4.95) 式, 且环的面积等于  $S_0$ 。试求该电流环所辐射的  $TE_{10}$  模的场。



习题 4.26

★4.27 若习题 4.26 中的电流环在  $z = -l$  处被短路, 求此电流环所辐射的  $TE_{10}$  模的场。

★4.28 一个恒定的直线电流  $I$  在  $X=a/2$ 、 $z=0$  处穿过矩形波导的中心。试证明总的辐射电场为：

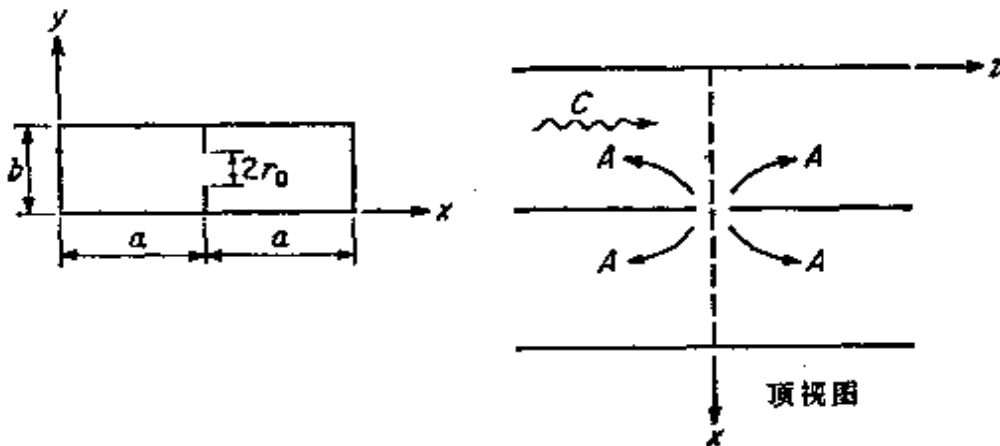
$$E_z = -\frac{j\omega\mu_0 I}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{a} e^{-\gamma_n |z|}$$

式中， $\gamma_n = j\beta_n = \left( \frac{n^2\pi^2}{a^2} - k_0^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

★4.29 两个矩形波导具有一个公共侧壁，侧壁上的小圆孔位置如图所示。若入射的  $TE_{10}$  模振幅为  $C$ ，试证明向两个方向辐射的  $TE_{10}$  模的振幅在第二波导中为

$$A = \frac{-j\omega\mu_0}{abk_0 Z_0 \beta} \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \frac{3}{4} r_0^3 C$$

并证明在输入波导中的反射系数为  $A/C$ 。



习题 4.29

### 参 考 文 献

1. Ghose, R.N., "Microwave circuit Theory and Analysis", chaps. 4, 9, and, 11, McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.
2. Kerns, D.M., Basis of Application of Network Equations to Waveguide Problems, J. Res. Natl. Bur. Std., Vol. 42, PP. 515—540, 1949.
3. Marcuvitz, N. (ed.), "Waveguide Handbook", McGraw-Hill Book Company, New York, 1951.

4. *Montgomery, C.G., R.H.Dicke, and E.M.Purcell(eds.), "Principles of Microwave Circuits," McGraw-Hill Book Company, New York, 1948.*
5. *Panneborg, A.E., "on the Scattering Matrix of Symmetrical Waveguide Junctions, Philips Res. Rept., Vol.7.PP.131-157, 1952.*
6. *Ramo, S., and J.R.Whinnery, "Fields and Waves in Modern Radio," 2d ed, chap.11, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1953.*



## 第5章 阻抗变换和匹配

这一章将讨论与阻抗匹配有关的重要问题，比如任意负载阻抗与给定传输线的匹配，或者两条不同特性阻抗传输线的匹配。还将介绍获得最大功率传输的阻抗匹配方法；以及1/4波长变换器和渐变传输线阻抗变换器的宽频带设计方法。为便于阐明理论，首先介绍解决许多传输线和波导阻抗问题的图解工具，即史密斯圆图。

### 5.1 史密斯圆图

3.5节已经指出：负载阻抗 $Z_L$ 经过特性阻抗为 $Z_0$ 的传输线的一段长度 $l$ 后，可变换为阻抗

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} \quad (5.1)$$

倘若能以适当定义的等效电压和等效电流正确地说明这些阻抗，则公式(5.1)对相移常数为 $\beta$ 的任何波导系统都是正确的。换言之，当 $Z_{in}(l)$ 为(5.1)式时，距离终端为 $l$ 的反射系数 $\Gamma(l)$ 唯一地给定为

$$\Gamma(l) = \frac{Z_{in}(l) - Z_0}{Z_{in}(l) + Z_0} \quad (5.2)$$

反射系数是可测量的物理量，因而，可以用线上任一点 $l$ 的反射系数 $\Gamma$ 和负载上的反射系数 $\Gamma_L$ ，对归一化阻抗 $Z_{in}/Z_0$ 和 $Z_L/Z_0$ 作适当的规定，即

$$\bar{Z}_{in} = \frac{Z_{in}}{Z_0} = \frac{1 + \Gamma(l)}{1 - \Gamma(l)} = \frac{1 + \Gamma_L e^{-2j\beta l}}{1 - \Gamma_L e^{-2j\beta l}} \quad (5.3a)$$

$$\bar{Z}_L = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L} \quad (5.3b)$$

史密斯圆图就是如(5.1)式所表示的一段传输线阻抗变换特性的图示法。显然,在直角坐标阻抗平面上,用一个坐标表示实部(即电阻),另一个坐标表示电抗,来画出 $Z_L$ 和 $Z_{in}$ 所有的值是不现实的,因为这将需要一张半无限大的纸。另一方面,由于 $|\Gamma| \leq 1$ ,故所有反射系数的值,都落在反射系数平面上的单位圆内。而且,根据(5.3a)式, $\Gamma$ 的每一个值规定了一个归一化输入阻抗的值,所以,在反射系数和输入阻抗之间存在着——对应关系。在反射系数平面上画的是等输入电阻线和等输入电抗线,而不是等反射系数线。对于一个给定的反射系数值,可以由此曲线直接地读出其对应的输入阻抗。此外,沿传输线移动距离 $d$ ,只相当于反射系数变化了一个因子 $e^{-2j\beta d}$ 。这只需旋转一个角度 $2\beta d$ ,使对应的阻抗点在等半径的圆上转过这样一个角度移到新的值上。可见,圆图使沿传输线的阻抗变换,变成直接而有效的图解方法。下面对圆图和应用作更具体的描述。此外,在本章的后几节,将借助史密斯圆图来解决若干阻抗匹配问题。

设反射系数 $\Gamma$ 用极坐标形式表示为

$$\Gamma = \rho e^{j\theta}, \quad (5.4)$$

式中,  $\rho = |\Gamma|$ ,  $\theta = \arg \Gamma = \arg \Gamma_L - 2\beta l$ 。设归一化输入阻抗为

$$\bar{Z}_{in} = \frac{Z_{in}}{Z_0} = \bar{R} + j\bar{X} = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} = \frac{1+\rho e^{j\theta}}{1-\rho e^{j\theta}} \quad (5.5)$$

由(5.5)式,不难求出在反射系数平面( $\rho$ 、 $\theta$ 平面)上等 $\bar{R}$ 和等 $\bar{X}$ 曲线是(习题5.1)

$$\left(u - \frac{\bar{R}}{\bar{R}+1}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{(\bar{R}+1)^2} \quad (5.6a)$$

$$(u-1)^2 + \left(v - \frac{1}{\bar{X}}\right)^2 = \frac{1}{\bar{X}^2} \quad (5.6b)$$

式中,  $u = \rho \cos \theta$ ,  $v = \rho \sin \theta$ ,  $u$ 、 $v$ 是 $\rho$ 、 $\theta$ 平面上的直角坐标。上述等 $\bar{R}$ 和等 $\bar{X}$ 曲线是两组圆,画在图5.1中。

为了便于使用圆图,沿圆图的圆周上附带标出了用波长 $\lambda$ 表示

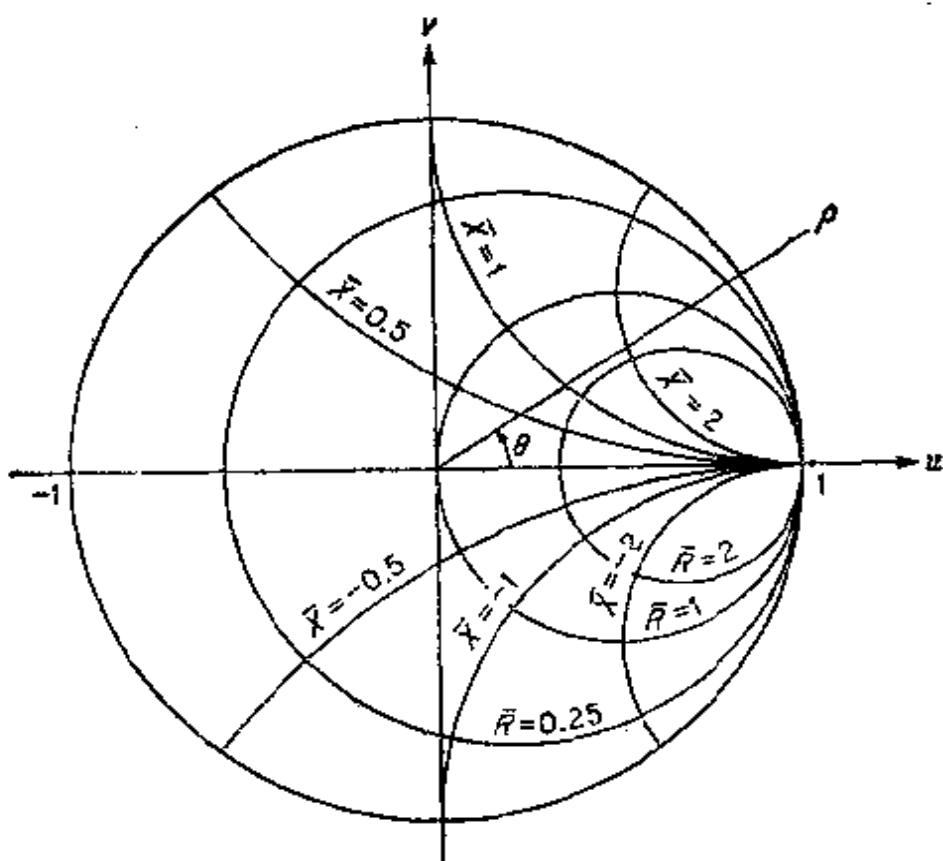


图 5.1 反射系数平面上的等  $\bar{R}$  圆和等  $\bar{X}$  圆

的旋转角  $2\beta l = 4\pi l/\lambda$  的标度。必须注意，离开负载（向波源）移动相当于圆图上顺时针方向绕行，如图 5.2 所示。沿传输线走  $l = \lambda/2$  的距离，在圆图上就绕行一整周。每隔  $\lambda/2$  的距离输入阻抗重复一次其本身的值。角标度的原点任意地选在圆的左侧。

下面举例说明圆图的应用。设一传输线端接负载阻抗为  $\bar{R}_1 + j\bar{X}_1 = 0.5 + j0.5$ 。则此点位于图 5.2 中并标为  $P_1$ 。可以用如下的方法求出离此点距离为  $l = 0.2\lambda$  处对应的输入阻抗：首先通过  $P_1$  作一个等半径的圆。由  $P_1$  点沿此圆向顺时针方向转过角度  $2\beta l = 0.8\pi$  径，而到达新的阻抗点  $P_2$ 。这个旋转角是容易得出，即先把过  $P_1$  点的矢径与圆图周界角标度的交点的波长数读出来，再加上  $0.2\lambda$  就行了。由圆图求得的新的归一化阻抗值为

$$\bar{R}_2 + j\bar{X}_2 = 2 - j1.04$$

如果由阻抗为  $\bar{R}_1 + j\bar{X}_1$  的  $P_1$  点开始，在等半径的圆周上移动

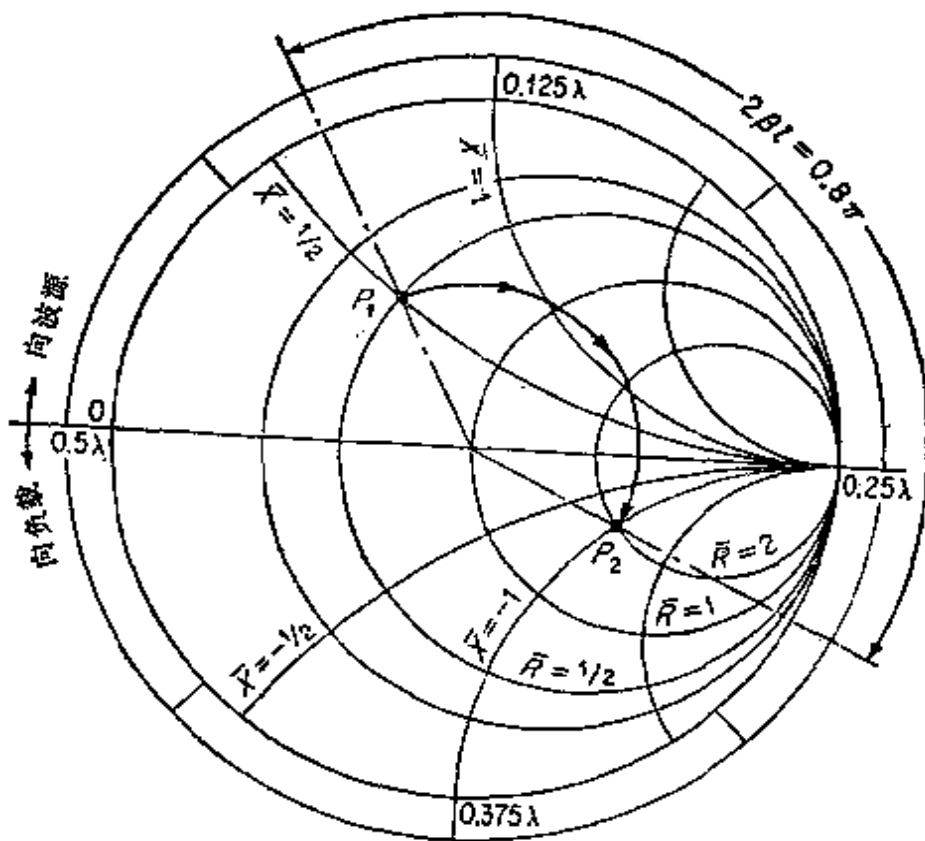


图 5.2 史密斯圆图

$\lambda/4$ 而到达完全相反的一点上, 则  $\Gamma_1$  变为  $-\Gamma_1$  ( $2\beta l$  变化了  $\pi$ ), 其阻抗为

$$\bar{R}_2 + j\bar{X}_2 = \frac{1 - \Gamma_1}{1 + \Gamma_1} = \frac{1}{\bar{R}_1 + j\bar{X}_1} = \bar{G}_1 + j\bar{B}_1$$

可见, 如果把  $\bar{R}_2$  和  $j\bar{X}_2$  看作输入电导和输入电纳, 则与已知的输入阻抗  $\bar{R}_1 + j\bar{X}_1$  相对应的归一化输入导纳  $\bar{G}_1 + j\bar{B}_1$ , 可以从其阻抗点  $P_1$  的反相点的阻抗数值得出。为了弄清这一点, 只要指出  $P_2$  点上的  $\bar{R}_2 + j\bar{X}_2$  就是  $P_2$  点上的归一化输入阻抗, 并且等于离此点距离为  $l = \lambda/4$  处的  $P_1$  点上归一化输入导纳即可。

史密斯圆图也同样可以用来求导纳变换。只需要把等电阻和等电抗曲线 ( $\bar{R}$  和  $j\bar{X}$  为常数的曲线) 看作等电导  $\bar{G}$  和等电纳  $\bar{B}$  曲线就行了, 并注意正的  $\bar{X}$  对应于感抗, 而正的  $\bar{B}$  对应于容纳。

有耗传输线任一点上的反射系数为

$$\Gamma = \Gamma_L e^{-2\alpha l - 2j\beta l} = \rho_L e^{-2\alpha l - 2j\beta l + j\theta_L} \quad (5.7)$$

由于由负载向波源移动时,  $\rho = \rho_L e^{-2\alpha l}$ , 即不断地减小, 因而它沿着螺旋线移动, 最后终止于圆图的中心。如图5.3所示。实际作法是: 首先在  $\rho$  为常数的圆周上转过角度  $2\beta l$ , 然后径向地移动到距中心为  $\rho_L e^{-2\alpha l}$  处。许多实用的圆图附有便于读数的标度, 以便容易地得出向内旋进的量。应当指出, 圆图的中心表示匹配情况 ( $\rho = 0$ )。

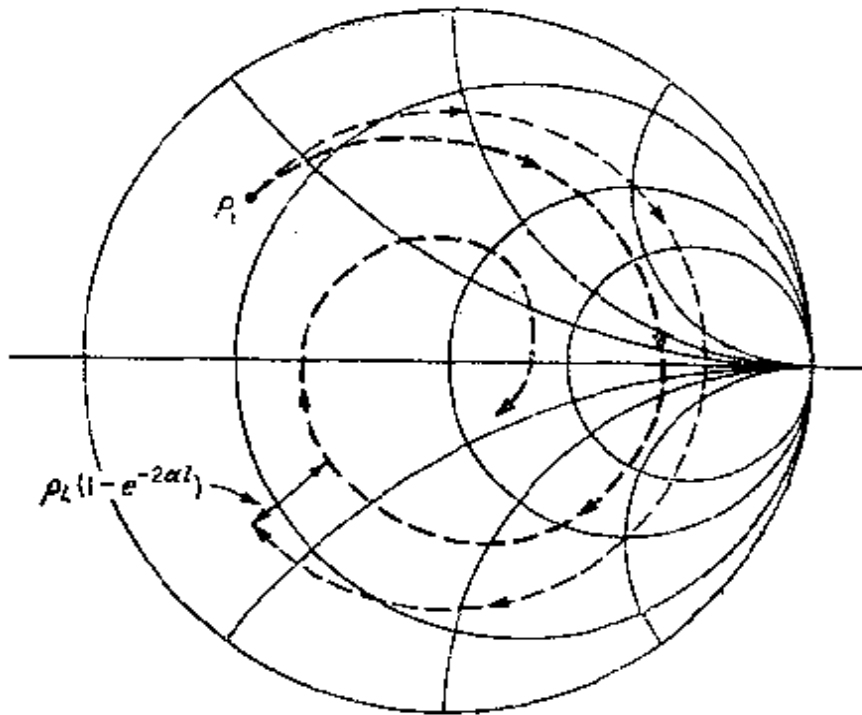


图 5.3 有耗传输线在史密斯圆图上的阻抗点向内螺旋示意图

## 5.2 用电抗元件进行阻抗匹配

当用其长度为几个波长的传输线或波导把已知负载接到波源上时, 最好使负载和波源与传输线或波导都匹配。这样做有几个理由。最重要的一个是它使匹配的频率敏感性大为减小。虽然从传输线的波源端看去, 变换后的负载阻抗可与波源匹配而得到最大功率传输。但是, 工作频率的微小变动, 将会使长线的电长度  $\beta l$  改变  $\pi$  弧度的很大部分, 因此, 显著地改变了由波源端看去的实际负载阻

抗，从而也改变了所需要的匹配条件。为了避免匹配的频率敏感性，负载和波源应各自地与传输线或波导进行匹配。

负载与传输线不匹配的另一个缺点是，当只在波源端使用匹配网络时，如果原来的负载严重地失配，则沿传输线可能有很大的驻波场。这就使系统的功率容量降低，因为当传送的功率给定时，驻波场更容易使场强达到介质击穿的最大值。此外，当沿线存在驻波电流时，还会引起更大的传输损耗。

可以用来匹配已知负载阻抗与传输线或波导的方法，同样可以用来匹配波源与传输线。因而，我们只需讨论任意负载阻抗与传输线的匹配就足够了。为了方便，我们采用归一化阻抗。所讨论的第一个匹配方法，是使用当作电抗元件的传输线短路（或开路）段，称为枝节匹配。但是，它所包含的原理具有普遍性。只要用适当的并联或串联电抗元件，代替传输线的枝节，就可以把它用于任何波导系统。本章后面有一节讨论可以采用的几个典型的电抗元件。

## 单枝节匹配

### 第 1 种情况 并联枝节

设一传输线终端接归一化导纳为  $\overline{Y}_L = \overline{G}$  的纯电导负载，如图 5.4 所示。在距离负载为  $d$  的某一点上，归一化输入导纳应为  $\overline{Y}_{in} = 1 + j\overline{B}$ 。在这一点上跨接一个归一化输入电纳为  $-j\overline{B}$  的枝节到线上，就可得到

$$\overline{Y}_{in} = 1 + j\overline{B} - j\overline{B} = 1$$

即满足匹配条件。为了使其频率敏感性尽可能的小，这个枝节应该接到导

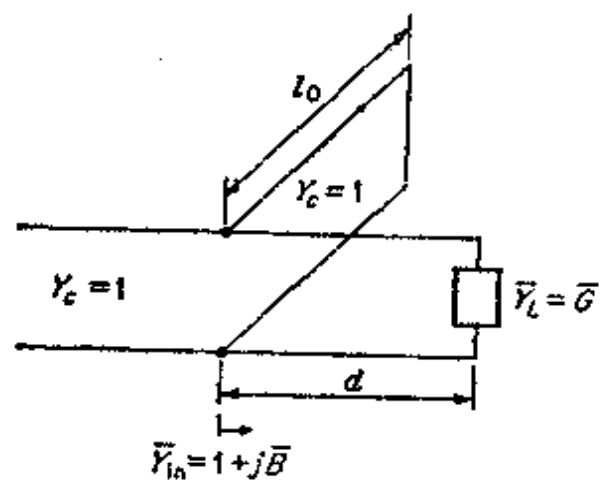


图 5.4 并联单枝节匹配网络

纳为  $\bar{Y}_{in} = 1 + j\bar{B}$  且  $d$  的值最小处。这个枝节既可以是开路线，也可以是短路线，后者是最常用的一种形式，因为它容易调整和有良好的机械强度。

为求出  $d$  的位置，必须解方程：

$$\bar{Y}_{in} = 1 + j\bar{B} = \frac{\bar{Y}_L + jt}{1 + j\bar{Y}_L t} \quad t = \tan \beta d$$

若假定  $\bar{Y}_L = \bar{G}$  为纯实数，则要求

$$(1 + j\bar{B})(1 + j\bar{G}t) = \bar{G} + jt$$

使上式两边实部和虚部分别相等得

$$1 - \bar{B}\bar{G}t = \bar{G} \quad (5.8a)$$

$$j(\bar{B} + \bar{G}t) = jt \quad (5.8b)$$

由 (5.8b) 式得  $\bar{B} = (1 - \bar{G})t$ ，把它代入 (5.8a) 式得

$$t = \frac{1 - \bar{G}}{\bar{B}\bar{G}} = \frac{1 - \bar{G}}{(1 - \bar{G})\bar{G}t}$$

或

$$t^2 = \tan^2 \beta d = 1/\bar{G}$$

用  $(1 - \cos^2 \beta d)/\cos^2 \beta d$  代替  $\tan^2 \beta d$ ，最后得

$$d = \frac{\lambda}{2\pi} \cos^{-1} \sqrt{\frac{\bar{G}}{1 + \bar{G}}} \quad (5.9)$$

式中， $\beta = 2\pi/\lambda$ 。要注意，根据所取的平方根符号的不同， $d$  可能有两个主值。若用  $1 + \cos 2\beta d$  代替  $2\cos^2 \beta d$ ，则得另一个关系式，即

$$1 + \cos 2\beta d = \frac{2\bar{G}}{1 + \bar{G}}$$

和

$$\cos 2\beta d = \frac{\bar{G} - 1}{\bar{G} + 1}$$

由此可得

$$d = \frac{\lambda}{4\pi} \cos^{-1} \frac{\bar{G} - 1}{\bar{G} + 1} \quad (5.10)$$

若 $d_1$ 是(5.10)式的一个解,则由于 $\pm d_1 \pm n\lambda/2$ 都是(5.10)式的解,故 $\lambda/2 - d_1$ 是(5.10)式的另一个解。

因为 $\tan^2 \beta d = 1/\bar{G}$ ,故输入电纳 $j\bar{B}$ 的值为

$$\bar{B} = (1 - \bar{G})j = -\frac{1 - \bar{G}}{\sqrt{\bar{G}}} \quad (5.11)$$

由关系式

$$\bar{Y}_{in} = -j\bar{B} = -j \cot \beta l_0$$

和(5.11)式,可以求出使输入电纳为 $-j\bar{B}$ 时所需要的短路枝节的长度 $l_0$ 。于是

$$\cot \beta l_0 = \frac{1 - \bar{G}}{\sqrt{\bar{G}}}$$

或

$$l_0 = \frac{\lambda}{2\pi} \tan^{-1} \frac{\sqrt{\bar{G}}}{1 - \bar{G}} \quad (5.12)$$

式中, $\sqrt{\bar{G}}$ 符号的选取必须使(5.11)式中的 $\bar{B}$ 具有正确的符号。若 $0 < d < \lambda/4$ ,则应采用正的平方根,而若取另一个解( $\lambda/4 < d < \lambda/2$ ),则必须采用负的平方根。

当 $\bar{Y}_{in}$ 为复数时,可进行类似的分析,但更复杂一些。一般改用下面的步骤。首先确定由负载到一个电压最小值的位置。在这一点上反射系数为负实数,输入导纳为纯实数,即为

$$\bar{Y}_{in} = \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma} = \frac{1 + \rho}{1 - \rho} = S \quad (5.13)$$

式中, $S$ 是线上的驻波比。设 $d_0$ 为由电压最小点到 $\bar{Y}_{in} = 1 + j\bar{B}$ 点的距离,如图5.5所示。需要求解的枝节位置 $d_0$ 和枝节长度 $l_0$ 的方程



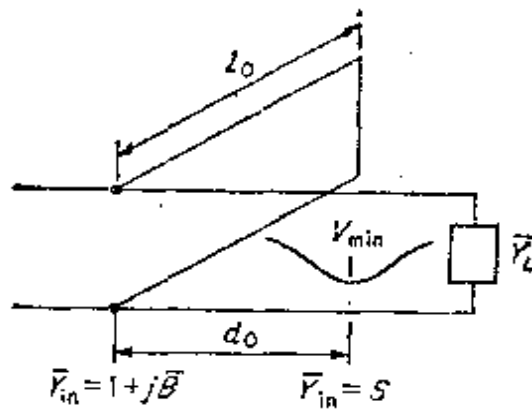


图 5.5 以电压最小点为基准的枝节的位置

与前面给出的方程相同，但用  $S$  代替  $\bar{G}$ 。因而

$$d_0 = \frac{\lambda}{4\pi} \cos^{-1} \frac{S-1}{S+1} \quad (5.14a)$$

$$l_0 = \frac{\lambda}{2\pi} \tan^{-1} \frac{\sqrt{S}}{S-1} \quad (5.14b)$$

求出由负载到  $V_{\min}$  点的距离，再加上  $d_0$ ，就是由负载到枝节的距离。要注意  $d_0 \pm \lambda/2$  同样是一个适用的枝节位置。因而，如果  $d_0 - \lambda/2$  仍在负载的波源一侧，则枝节应放在这一点，而不放在  $d_0$  点，以便减小匹配的频率敏感性。

### 第 2 种情况 串联枝节

在电压最小位置上  $\bar{Z}_{in} = S - 1$ 。在离此点距离为  $d_0$  的某一位置上， $\bar{Z}_{in} = 1 + j\bar{X}$ 。若在此点串联接入一个归一化输入电抗为  $-j\bar{X}$  的枝节，则总的归一化输入电抗变为 1，从而满足了匹配条件。图 5.6 表示串联枝节匹配网络。

为了求  $d_0$ ，必须解方程

$$\bar{Z}_{in} = 1 + j\bar{X} = \frac{S^{-1} + j \tan \beta d_0}{1 + jS^{-1} \tan \beta d_0}$$

这个方程与前面研究过的方程是相同的，只是用  $\bar{X}$ 、 $S^{-1}$  代替  $\bar{B}$ 、 $S$ ，因而其解为

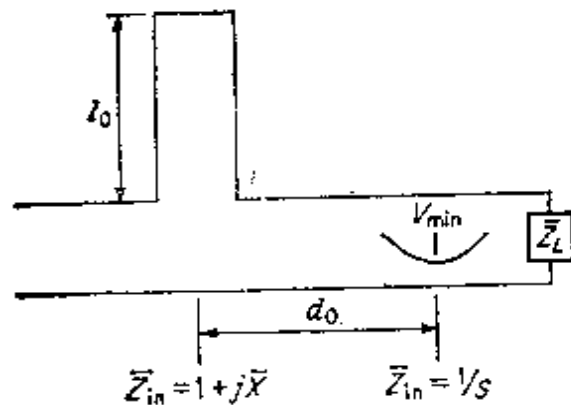


图 5.6 串联枝节

$$d_0 = \frac{\lambda}{4\pi} \cos^{-1} \frac{S^{-1} - 1}{S^{-1} + 1} = \frac{\lambda}{4\pi} \cos^{-1} \frac{1 - S}{1 + S}$$

$$= \pm \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4\pi} \cos^{-1} \frac{S - 1}{S + 1} \quad (5.15a)$$

$$\bar{X} = \left(1 - \frac{1}{S}\right) \tan \beta d_0 = \frac{S - 1}{\sqrt{S}} \quad (5.15b)$$

式中， $\sqrt{S}$ 的符号必须取得与  $\tan \beta d_0$ 的符号相一致，即当  $0 < d_0 < \lambda/4$  时，用  $+\sqrt{S}$ ；当  $\lambda/4 < d_0 < \lambda/2$  时，用  $-\sqrt{S}$ 。

所需要的枝节长度由下式决定

$$j \tan \beta l_0 = -j \bar{X}$$

因而，由 (5.15b) 式得

$$l_0 = -\frac{\lambda}{2\pi} \tan^{-1} \frac{1 - S}{\sqrt{S}} \quad (5.16)$$

对同轴线来说，因为它容易做成并联枝节，而难于做成串联枝节，故并联枝节最通用。单枝节匹配装置有一个缺点，即负载不同，枝节接入的位置也不同。使用间隔固定且与负载距离固定的两个枝节，可以克服这个缺点。但是，这种双枝节匹配装置不能匹配所有可能的负载电纳。下一节将介绍双枝节匹配的原理。

### 5.3 双枝节匹配网络

双枝节调配器（或叫匹配网络）表示在图5.7中。我们可以把归一化负载导纳 $\bar{Y}_L$ 变换为在 $aa$ 平面上的等效负载导纳 $\bar{Y}_L = \bar{G}_L + j\bar{B}_L$ ，并如图5.7b所示的那样去处理而不失其普遍性。

设在图5.8中的史密斯圆图上 $P_1$ 点代表 $\bar{Y}_L$ 。则加上第一个枝

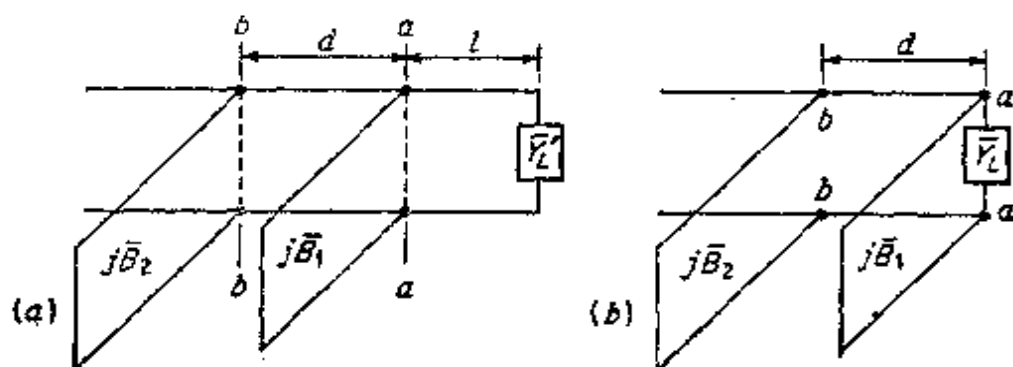


图 5.7 双枝节调配器

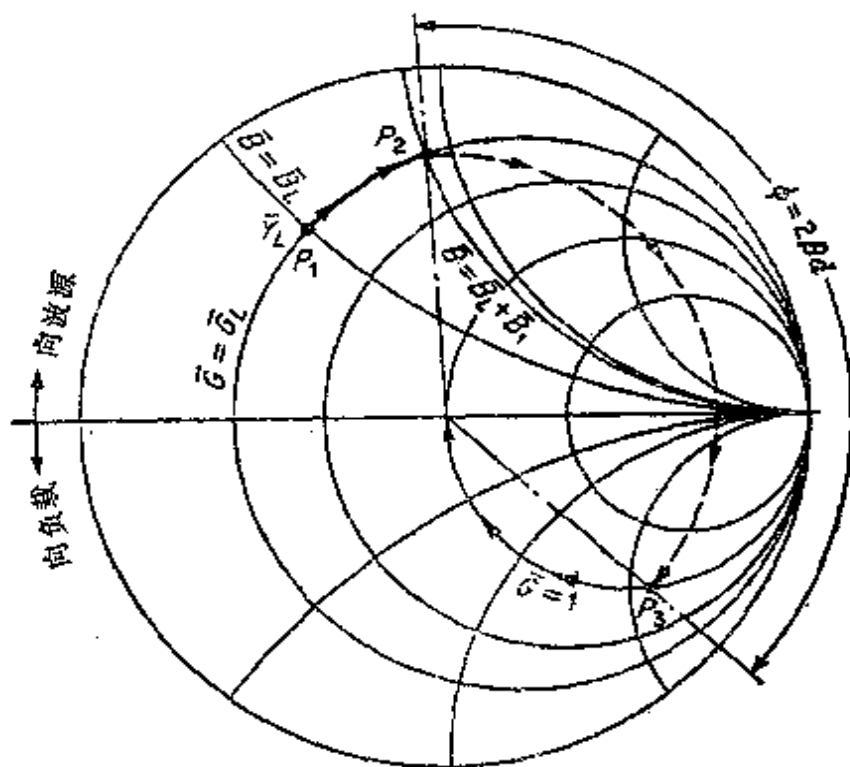


图 5.8 双枝节调配器工作过程的图示法



$\bar{G}_0$  的电导圆在 Q 点与旋转后的  $\bar{G} = 1$  的圆相切。不难看出, 距离  $d$  越小, 可以匹配的负载导纳范围越大 (参看图 5.10 中  $d = \lambda/8, \varphi = \pi/2$  的情况)。也应指出, 由于  $\bar{G}_0$  总是大于 1, 所以,  $\bar{G} < 1$  的任何负载都能够匹配。

在图 5.7 的  $aa$  平面上,  $\bar{Y}_L = \bar{G}_L + j\bar{B}_L$ 。恰在第一个枝节的左边得  $\bar{Y}_0 = \bar{G}_L + j\bar{B}_L + j\bar{B}_1$ 。恰在第二个枝节的右边得

$$\bar{Y}_0 = \frac{\bar{G}_L + j\bar{B}_L + j\bar{B}_1 + jt}{1 + jt(\bar{G}_L + j\bar{B}_L + j\bar{B}_1)} \quad t = \tan \beta d \quad (5.17)$$

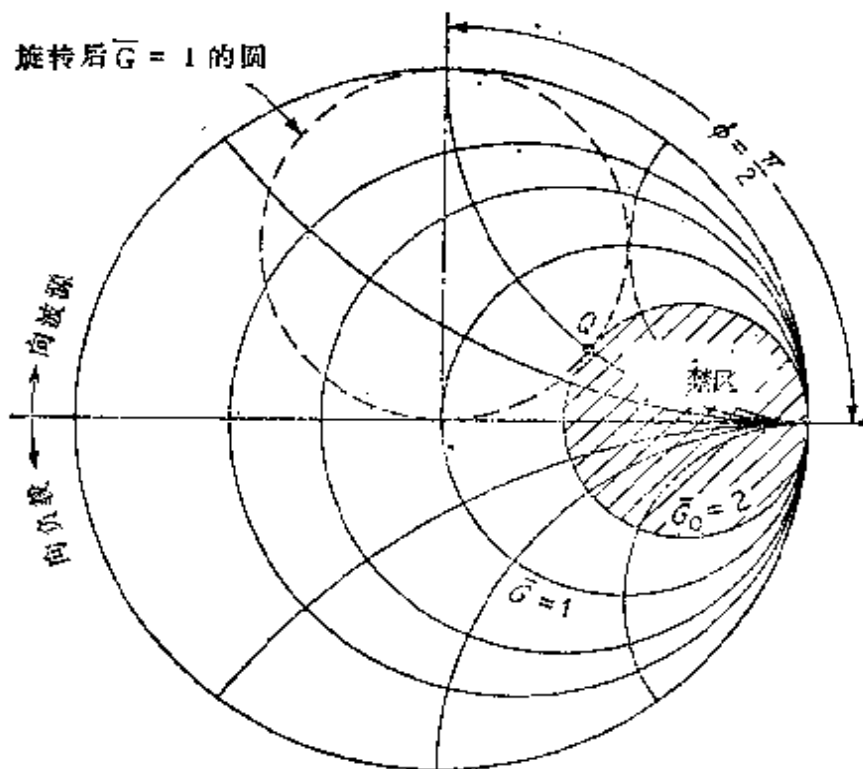


图 5.10  $d = \lambda/8$  时不能匹配的负载阻抗范围

因为  $\bar{Y}_0$  必须等于  $1 + j\bar{B}$ 。所以 当使 (5.17) 式实部等于 1 时, 可得

$$\bar{G}_L^2 - \bar{G}_L \frac{1+t^2}{t^2} + \frac{(1 - \bar{B}_L t - \bar{B}_1 t)^2}{t^2} = 0 \quad (5.18a)$$

或

$$\bar{G}_L = \frac{1+t^2}{2t^2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4t^2(1-\bar{B}_L t - \bar{B}_1 t)^2}{(1+t^2)^2}} \right] \quad (5.18b)$$

要注意 (5.18b) 式中的根号里为 1 减去一个正数。由于  $\bar{G}_L$  必须为实数，故根号里这一项必须为正或为零。因而平方根里的数值在零与 1 之间，即  $\bar{G}_L$  限制在

$$0 \leq \bar{G}_L \leq \frac{1+t^2}{t^2} = \frac{1}{\sin^2 \beta d} \quad (5.19)$$

当  $d$  选定时， $\bar{G}_0 = \text{CSC}^2 \beta d$  圆以外的所有负载导纳都可以匹配。例如，当  $d = \lambda/8$ ， $\beta d = \frac{\pi}{4}$ ， $\varphi = 2\beta d = \pi/2$  时， $\bar{G}_0 = 2$  的圆以外的所有负载导纳值都可以匹配，如图 5.10 所示。当  $d = \lambda/4$  时， $\bar{G}_L \leq 1$  圆的所有  $\bar{Y}_L$  值都可以匹配。

虽然，从理论上说，通过选取  $d$  接近于零或  $\lambda/2$  使  $\text{CSC}^2 \beta d$  变为无穷大，就可以使任何负载阻抗都能匹配。但是，实际上这是不对的。所能得到的枝节电纳最大值受所使用传输线衰减的限制。如果用  $j\beta + \alpha$  代替  $j\beta$ ，那末，就会发现，即使间隔为  $\lambda/2$ ，也不能匹配所有的负载导纳。此外，枝节间隔接近  $\lambda/2$ ，将使匹配网络具有很高的频率敏感性。所以实际上宁愿取  $\lambda/8$  或  $3\lambda/8$  的间隔。在较高频率下，采用较大的间隔，这是因为波长太短不允许采用  $\lambda/8$  的间隔。

双枝节匹配网络的完整的解析解是不难得出的。求解 (5.18) 式可得第一个枝节电纳  $\bar{B}_1$  为

$$\bar{B}_1 = -\bar{B}_L + \frac{1 \pm \sqrt{(1+t^2)\bar{G}_L - \bar{G}_L^2 t^2}}{t} \quad (5.20)$$

式中  $\bar{B}_L$ 、 $\bar{G}_L$  和  $t = \tan \beta d$  都是已知的。使 (5.17) 式的虚部等于  $j\bar{B}$  得

$$\bar{B} = \frac{(1 - \bar{B}_L t - \bar{B}_1 t)(\bar{B}_L + \bar{B}_1 + t) - \bar{G}_L t}{(1 - \bar{B}_L t - \bar{B}_1 t)^2 + \bar{G}_L t^2}$$

把  $\bar{B}_1$  的表示式代入此方程得

$$\bar{B} = \frac{\pm \sqrt{G_L(1+t^2) - \bar{G}'_L t^2 - \bar{G}_L}}{\bar{G}_L t} \quad (5.21)$$

(5.20) 式和 (5.21) 式中上下符号须一致。为满足匹配条件，第二个枝节的电纳必须选  $-j\bar{B}$ 。

### 5.4 三枝节调配器

利用如图 5.11 所示的三枝节调配器，可以克服双枝节调配器不能匹配任意负载导纳的缺点。枝节 1 提供的电纳  $j\bar{B}_1$ ，使  $\bar{Y}_L + j\bar{B}_1$  在枝节 2 的右边正好变为某一新的导纳  $\bar{Y}'_L$ 。枝节 2 和 3 是匹配  $\bar{Y}'_L$  与

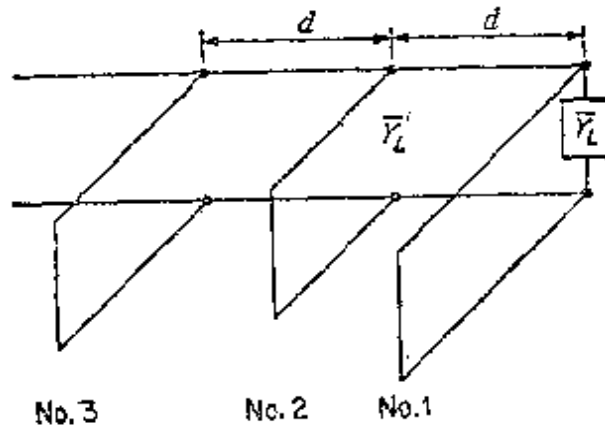


图 5.11 三枝节调配器

传输线的普通双枝节调配器。当  $\bar{Y}'_L$  中的  $\bar{G}'_L < \text{CSC}^2 \beta d$  时，这两个枝节将匹配所有的  $\bar{Y}'_L$  值。因而，枝节 1 的作用是保证  $\bar{Y}_L$  添加电纳  $j\bar{B}_1$  后，变为具有  $\bar{G}'_L$  小于  $\text{CSC}^2 \beta d$  的导纳  $\bar{Y}'_L$ 。为了求得适当的  $j\bar{B}_1$  的值，要注意  $\bar{Y}_L$  移动距离  $d$  后，导纳  $\bar{Y}_L + j\bar{B}_1$  必须变到  $\bar{G}_0 = \text{CSC}^2 \beta d$  圆以外的  $P_1$  点，如图 5.12 所示。若把  $\bar{G}_0 = \text{CSC}^2 \beta d$  圆旋转一个角度  $-\varphi = -2\beta d$  则不难立即看出，为了保持  $\bar{Y}'_L$  在  $\bar{G}_0 = \text{CSC}^2 \beta d$  圆以外， $\bar{Y}_L$  所应添加的  $j\bar{B}_1$  值的范围。图 5.13 表示这个方法。在这个例子中， $\bar{Y}_L$  落在旋转后的圆  $\bar{G}_0 = \text{CSC}^2 \beta d$  之中，因而必须添加电纳  $j\bar{B}_1$ ，以便使总负载  $\bar{Y}_L + j\bar{B}_1$  移动到  $P_1$  或  $P_2$  以外的

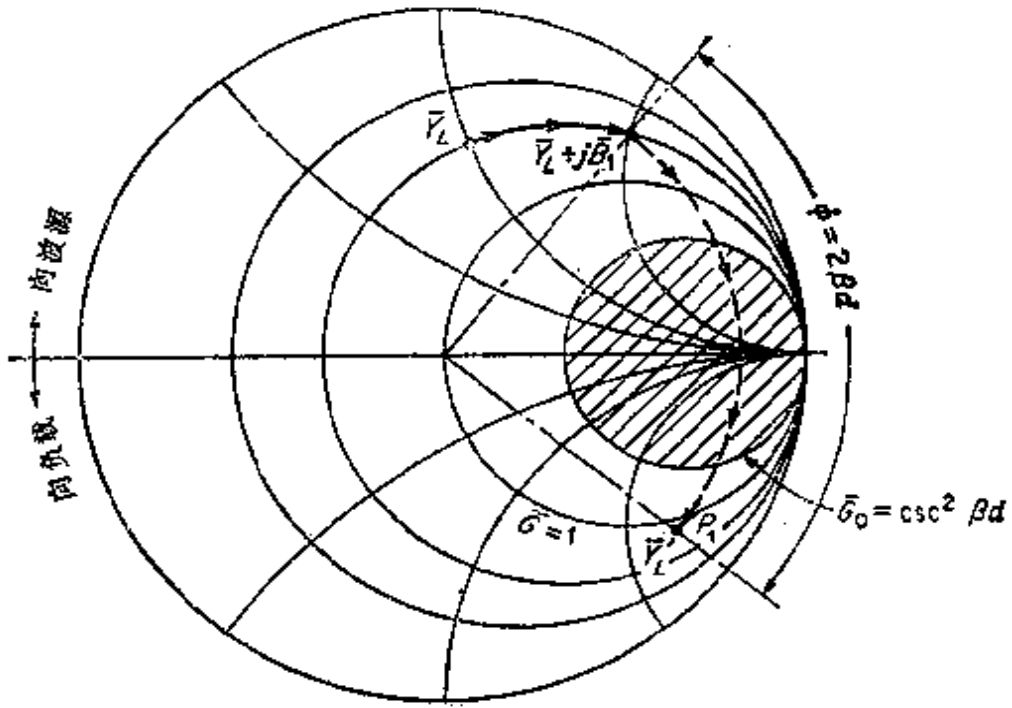


图 5.12 把  $\bar{Y}_L$  变换为  $\bar{Y}'_L$  的方法

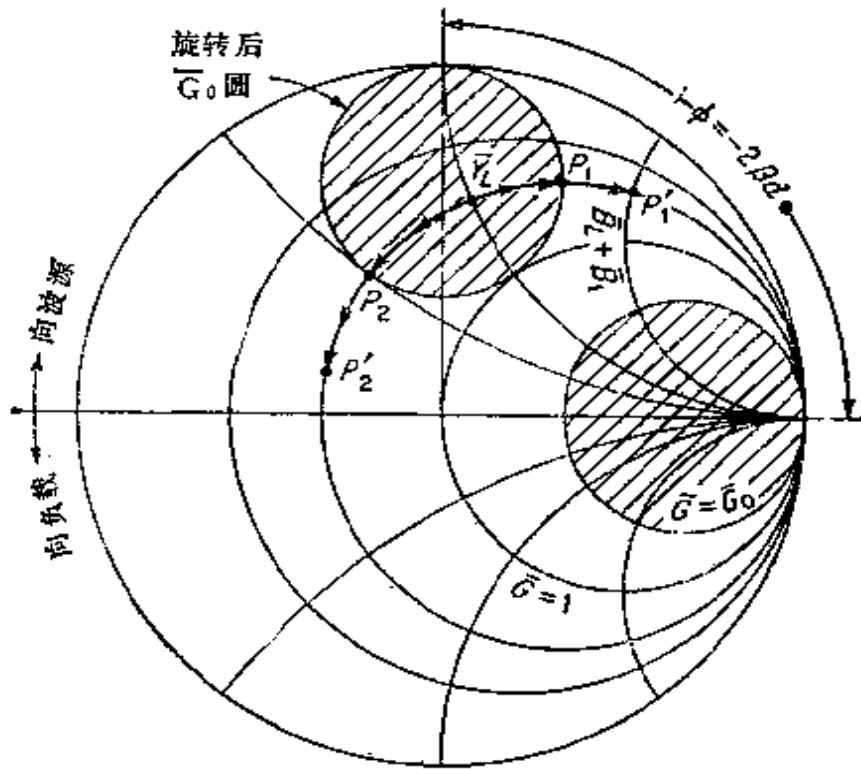


图 5.13 三枝节制配器  $j\bar{B}_1$  的图解



某点上（比如说 $P_1$ 或 $P_2$ 点上），这就提供了得到可靠匹配的余量。这样，变到枝节2位置上的总负载将落在 $\overline{G}_0 = \text{CSC}^2 \beta d$ 圆之外，因而可用枝节2和3匹配。

三枝节调配器可以匹配任何负载导纳。可以把它认为是两个双枝节调配器的串联，即

$$j\overline{B}_2 = j\overline{B}'_2 + j\overline{B}'_1$$

这样，即使在中间只有一个实际枝节，但是， $j\overline{B}_2$ 的一部分与两个双枝节调配器的每一枝节端有关。

## 5.5 波导电抗元件

为了使任意负载阻抗与波导或传输线匹配，可以用具有并联电纳作用的其他元件，来代替传输线枝节。这一节讨论在矩形波导中所使用的几种电抗元件\*，此波导中保持主模 $TE_{10}$ 模传输。这里所得出的电抗元件的归一化电纳公式是近似的，它精确到百分之十或更好些。这些公式的推导需要具体地求解边值问题，超出了本书的范围\*\*。

### 电感性并联元件

图5.14表示几种对 $TE_{10}$ 模起并联感性电纳作用的矩形波导元件。它们包括如图5.14 a 和 b 所示的跨接在波导窄边上的薄金属窗；如图5.14 c 所示的细圆柱；如图5.14 d 所示的小圆孔。当 $TE_{10}$

\* 关于电纳值和等效电路的详细情况，参看[N. Marcuvitz (ed.), "Waveguide Handbook," McGraw-Hill Book Company, New York, 1951.]一书。

\*\* 关于推导电纳公式所应用的典型方法，可参看：

R. E. Collin, "Field Theory of Guided Waves", chaps. 6-8, McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.

L. Lewin, "Advanced Theory of Waveguide," Iliffe Books, Ltd., London, 1951.

H. Motz, "Electromagnetic Problems of Microwave Theory," Methuen & Co., Ltd., London, 1951.

模入射到任一个这样的不连续处时，将激励起 $TE_{n0}$ 凋落模，以便产生一个总的场，来满足障碍物上切向电场为零这一边界条件。这些非传播模主要储藏磁能，因而障碍物呈现电感性。

这些障碍物的归一化感性电纳近似值是：对图 5.14 a,

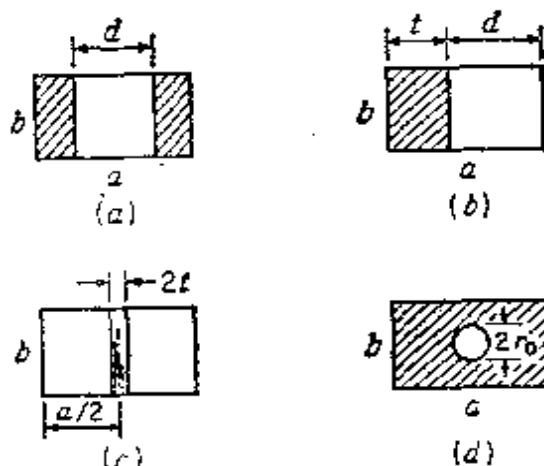


图 5.14 电感性并联元件。(a)对称膜片；(b)不对称膜片；(c)细圆柱；(d)小圆孔

$$\bar{B} = \frac{2\pi}{\beta a} \cot^2 \frac{\pi d}{2a} \left( 1 + \frac{a\gamma_3 - 3\pi}{4\pi} \sin^2 \frac{\pi d}{a} \right) \quad (5.22)$$

式中， $\beta = (k_0^2 - (\pi/a)^2)^{\frac{1}{2}}$ ， $\gamma_3 = ((3\pi/a)^2 - k_0^2)^{\frac{1}{2}}$

对图 5.14 b,

$$\bar{B} = \frac{2\pi}{\beta a} \cot^2 \frac{\pi d}{2a} \left( 1 + \csc^2 \frac{\pi d}{2a} \right) \quad (5.23)$$

对图 5.14 c 的细电感性柱，

$$\bar{B} = \frac{4\pi}{\beta a} \left[ \ln \frac{a}{\pi t} - 1 + 2 \left( \frac{a}{\pi t} \right)^2 \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \left( \frac{\pi}{a\gamma_n} - \frac{1}{n} \right) \sin^2 \frac{n\pi t}{a} \right] \quad (5.24)$$

式中， $\gamma_n = (n\pi/a)^2 - k_0^2)^{\frac{1}{2}}$ ， $t$  为该柱的半径。对图 5.14 d 的中心小圆孔，

$$\bar{B} = \frac{3ab}{8\beta r_0^3} \quad (5.25)$$

### 电容性并联元件

图 5.15 表示的是可以用作匹配的典型的电容性并联元件。它们包括如图 5.15 a 和 b 所示的跨接在波导宽边上的金属片所形成的电容性膜片；如图 5.15 c 所示的贯穿波导的细圆棒；以及如图 5.15 d

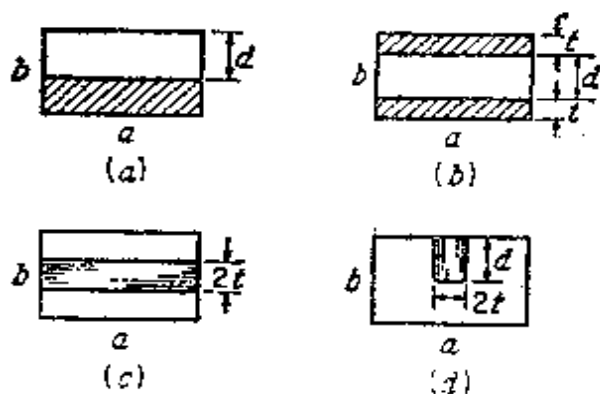


图 5.15 电容性并联元件(a)不对称电容性膜片, (b)对称的电容性膜片, (c)电容性棒, (d)电容性柱

所示的伸入波导中的细圆柱。图5.15 d 所表示的柱的作用更像跨接在传输线上的 LC 串联网路。当它的贯穿深度为  $0.7b$  和  $0.9b$  时,会发生谐振,并几乎起类似于理想短路线的作用。当长度大于此谐振长度时,该柱等效于一个电感性并联电纳。实际上,对于有限粗细的柱来说,其等效电路为一个 T 形网络,但对于直径很小的柱来说(直径约小于  $0.05a$ ), T 形网络中的串联元件是可以忽略的。

图5.15 所表示障碍物的归一化电纳近似表示式如下:

对图5.15 a 的不对称膜片,

$$\bar{B} = -\frac{4\beta b}{\pi} \left[ \ln \csc \frac{\pi d}{2b} + \left( \frac{\pi}{b\gamma_1} - 1 \right) \cos^4 \frac{\pi d}{2b} \right] \quad (5.26)$$

式中,  $\beta = [k_0^2 - (\pi/a)^2]^{\frac{1}{2}}$ ,  $\gamma_1 = [(\pi/b)^2 - \beta^2]^{\frac{1}{2}}$

对图5.15 b 的对称膜片,

$$\bar{B} = -\frac{2\beta b}{\pi} \left[ \ln \csc \frac{\pi d}{2b} + \left( \frac{2\pi}{b\gamma_2} - 1 \right) \cos^4 \frac{\pi d}{2b} \right] \quad (5.27)$$

式中,  $\gamma_2 = [2\pi/b]^2 - \beta^2]^{\frac{1}{2}}$

对于图5.15 c 的电容性棒和图5.15 d 所示的柱没有简单的近似公式可以利用。列文得出了容性棒 T 形网络参数的解析式,这里就不复述了\*

\* 见本章前面一个注释中引证的列文所著书的第 2 章。该书对各种波导结构的等效电路参数作了许多精辟的和有启发性的介绍。

## 波导枝节调配器

单枝节匹配网络的一种近似等效装置是图 5.16a 所示的滑动螺钉调配器。它由安装在滑动支架上的一个深度可变的螺钉组成，滑动支架沿波导至少在半个波长的距离上可自由地沿纵向移动。螺钉通过波导宽壁中心的窄槽伸入波导中。由于此窄槽是沿电流流线开的，故它对波导内部场的扰动可以忽略。因为螺钉的位置至少能在半个波导波长上进行调整，所以它不需要伸入到会变为感性元件的深度，就是说，在所有情况下，用并联电容性电纳都可得到匹配。回顾单枝节匹配理论将会证明这点。

图 5.16b 中表示间隔固定为  $3\lambda_g/8$  的三个深度可调螺钉，它基本

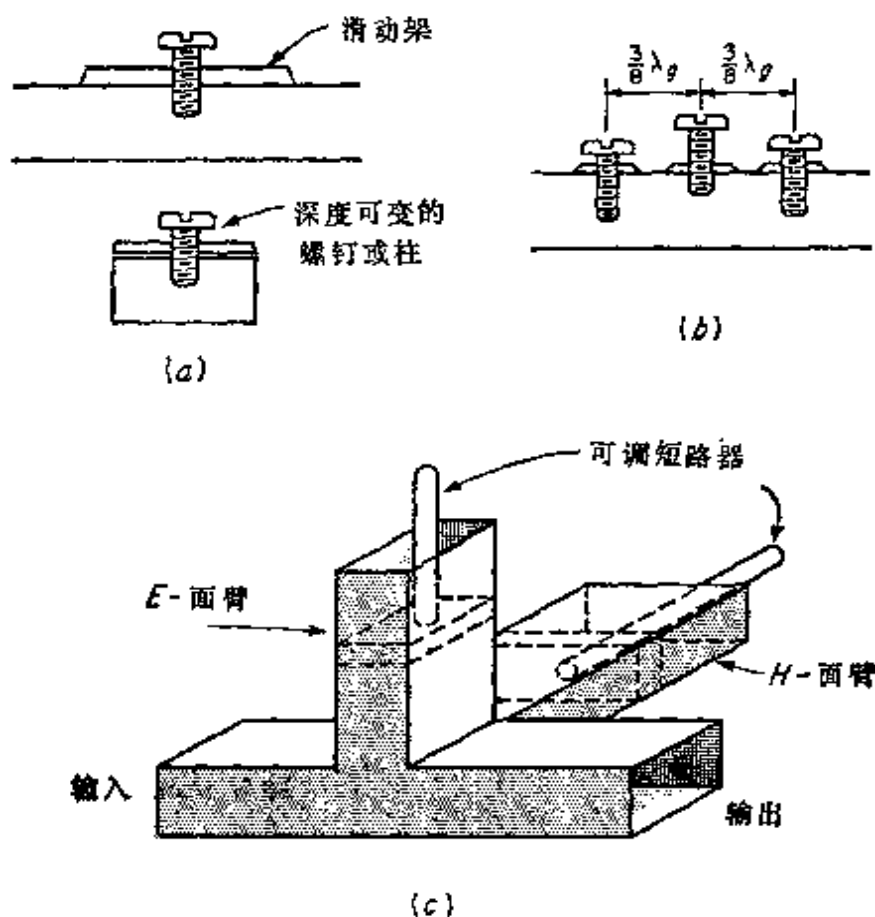


图 5.16 波导调配器。(a)滑动式螺钉调配器；(b)三螺钉调配器；(c)E—H面调配器。

上等效于三枝节调配器。即使单个螺钉所能得到的电纳数值范围有限，它也能够匹配多种多样的负载。

还有几种电路其外形上更像实际短路传输线枝节。图 5.16c 表示  $E$  面枝节和  $H$  面枝节的组合，称为  $E-H$  调配器。在  $E$  面臂和  $H$  面臂上短路片的位置是可变的，所以可匹配的负载阻抗范围很宽。但是，不论是  $E$  面接头还是  $H$  面接头，其等效电路都远比简单的并联或串联连接的传输线更为复杂。因为这些接头的尺寸与波长为同一数量级，所以在它们的附近产生非常复杂的场结构。然而，由于不可能有功率流通过终端短路的臂，故它们仍能作为匹配用的可调电抗元件。

## 5.6 $\lambda/4$ 变换器

$\lambda/4$  变换器主要用作连接两个不同特性阻抗的波导系统的中间匹配段。例如：连接两段特性阻抗不同的传输线；连接一个空心波导和部分或全部填充介质的波导；连接两个宽度不同、高度不同或宽度高度均不同的波导；以及使微波透镜的介质与自由空间相匹配。若只要求在窄频带上匹配，则可用单节变换器。而为了在宽频带上获得良好的匹配，通常要用二节、三节甚至三节以上的  $\lambda/4$  变换器中间段。本节介绍这些多节  $\lambda/4$  变换器的最佳设计。

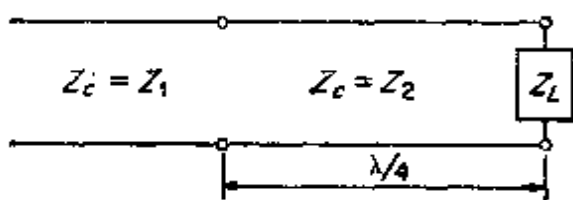


图 5.17  $\lambda/4$  变换器

研究如图 5.17 中所表示的使特性阻抗为  $Z_1$  的传输线与纯电阻负载阻抗  $Z_L$  相匹配的问题，不难解释  $\lambda/4$  变换器所包含的基本原理。如果把特性阻

抗为  $Z_2$  长为  $\lambda/4$  的传输线，作为连接主传输线和负载的中间段，则呈现在主传输线上的等效负载阻抗为

$$Z = Z_2 \frac{Z_L + jZ_2 \tan(\beta\lambda/4)}{Z_2 + jZ_L \tan(\beta\lambda/4)} = \frac{Z_1^2}{Z_L} \quad (5.28)$$

若取  $Z_2$  等于  $\sqrt{Z_1 Z_L}$ , 则  $Z = Z_1$ , 负载就与主线匹配。换句话说,  $\lambda/4$  长的传输线中间段把负载阻抗  $Z_L$  变换成阻抗  $Z_1$ , 从而起匝数比为  $\sqrt{Z_1/Z_L}$  的理想变压器作用。完全匹配只是在变换器长度为  $\lambda/4$  (或  $n\lambda/2 + \lambda/4$ ) 的频率上才能获得。

令  $\theta$  是频率为  $f$  时此变换器的电长度, 即  $\beta(f)l = \theta$ , 这里相移常数  $\beta$  已被写作频率的函数。对于空气填充的传输线中的  $TEM$  波来说,  $\beta l = 2\pi fl/C$ 。在任一频率下, 呈现在主线上的输入阻抗为

$$Z_{in} = Z_1 \frac{Z_L + jZ_2 t}{Z_2 + jZ_L t} \quad (5.29)$$

式中,  $t = \tan \theta = \tan \beta l$ 。因此, 反射系数为

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{Z_{in} - Z_1}{Z_{in} + Z_1} = \frac{Z_2(Z_L - Z_1) + jt(Z_2^2 - Z_1 Z_L)}{Z_2(Z_L + Z_1) + jt(Z_2^2 + Z_1 Z_L)} \\ &= \frac{Z_L - Z_1}{Z_L + Z_1 + jt2\sqrt{Z_1 Z_L}} \end{aligned} \quad (5.30)$$

后一形式是利用关系式  $Z_2^2 = Z_1 Z_L$  得到的。 $\Gamma$  的数值 (用  $\rho$  表示) 是不难计算的, 它等于

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{Z_L - Z_1}{[(Z_L + Z_1)^2 + 4t^2 Z_1 Z_L]^{1/2}} \\ &= \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2\sqrt{Z_1 Z_L} \sec \theta}{Z_L - Z_1}\right)^2\right]^{1/2}} \end{aligned} \quad (5.31)$$

当  $\theta$  接近于  $\pi/2$  时, (5.31) 式近似为

$$\rho = \frac{|Z_L - Z_1|}{2\sqrt{Z_1 Z_L}} |\cos \theta| \quad (5.32)$$

图5.18画出了  $\rho$  对  $\theta$  的曲线, 它本质上是  $\rho$  对频率的曲线。因为输入阻抗随频率作周期性的变化, 所以  $\rho$  对频率或  $\theta$  也作周期性的变化, 即变换器的电长度每变化一个  $\pi$ , 阻抗重复一次原来的数值。若  $\rho_m$  是反射系数所能容许的最大值, 则由此变换器提供的有效带宽对应于图5.18中  $\angle\theta$  的范围。因为在  $\theta = \pi/2$  的两边  $\rho$  的数值急速地增加,

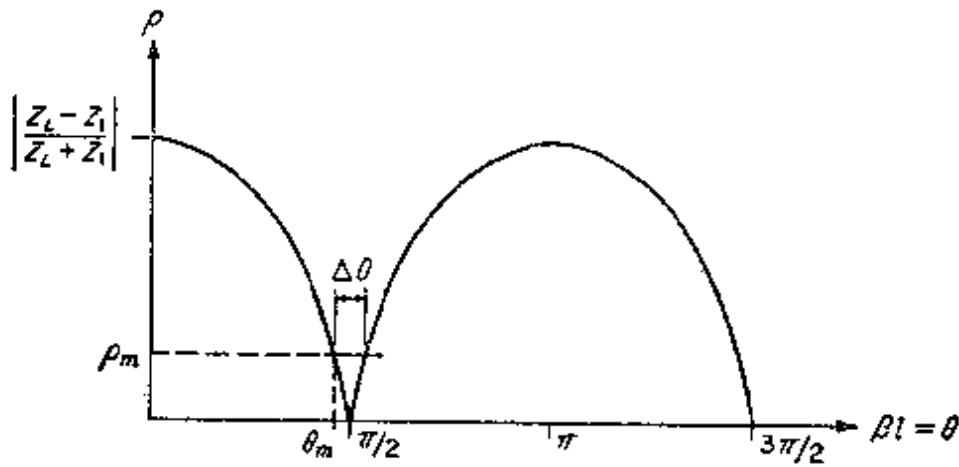


图 5.18 单节  $\lambda/4$  变换器的带宽特性

所以有效带宽是很窄的。由(5.31)式，通过使  $\rho$  等于  $\rho_m$ ，可以求出有效通带边缘上的  $\theta$  值，于是

$$\theta_m = \cos^{-1} \left| \frac{2\rho_m \sqrt{Z_1 Z_L}}{(Z_L - Z_1) \sqrt{1 - \rho_m^2}} \right| \quad (5.33)$$

在 *TEM* 波的情况下， $\theta = \beta l = \frac{f}{f_0} \frac{\pi}{2}$ ，式中的  $f_0$  是对应于  $\theta = \pi/2$  时的频率。此时，带宽为

$$\Delta f = 2(f_0 - f_m) = 2\left(f_0 - \frac{2f_0 \theta_m}{\pi}\right)$$

其相对带宽为

$$\frac{\Delta f}{f_0} = 2 - \frac{4}{\pi} \cos^{-1} \left| \frac{2\rho_m \sqrt{Z_1 Z_L}}{(Z_L - Z_1) \sqrt{1 - \rho_m^2}} \right| \quad (5.34)$$

式中，(5.33)式的解取  $\theta_m < \pi/2$ 。

虽然在许多情况下由单节变换器提供带宽可能就足够了。但是，也有许多情况必须提供更宽的带宽。应用多节变换器可以获得尽可能宽的带宽。为了阐明一种也能用来设计其他微波器件（如定向耦合器和天线阵）的理论，我们首先来讨论多节变换器的近似理论。随后介绍由更精确的分析所得到的结果。

必须注意，在前面的讨论中，是假定特性阻抗  $Z_1$  和  $Z_2$  与频率无关的。对传输线来说，这是良好的近似，但是对波导来说，其波

阻抗是随频率而变的，从而使分析变得相当复杂。此外，在不同的传输线段或波导段的接合处，会激励起电抗性的场，这是由于横截面的几何尺寸的改变（为了得到所要求的特性阻抗）而引起的。在每一个接合处，这些接头的影响常常用纯电纳来表示\*。这个电纳元件也会使实际变换器的性能与忽略接头效应的理想变换器的性能有差别。这里不考虑这些限制只研究理想变换器的理论，也就是说，接头效应和等效特性阻抗对频率的依赖性都忽略不计。因此，所得出的理论对于非理想情况，只能作定性的说明\*\*。

## 5.7 小反射理论

为了准备对多节 $\lambda/4$ 变换器作近似分析，需要先求得由几个小反射障碍物引起的总反射系数的一些结果。设负载阻抗 $Z_L$ 通过电长度为 $\beta L = \theta$ 且特性阻抗为 $Z_2$ 传输线的中间段接到特性阻抗为 $Z_1$ 的传输线上，如图5.19所示。每一个接头处的反射系数和传输系数为

$$\Gamma_1 = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad \Gamma_2 = -\Gamma_1$$

$$T_{21} = 1 + \Gamma_1 = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad T_{12} = 1 + \Gamma_2 = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

\* S.B.Cohn, *Optimum Design of Stepped Transmission Line Transformers*, IRE Trans., Vol. MTT-3, PP. 16-21, April, 1955. 本文介绍切比雪夫变换器的近似理论，并逐步介绍计算电抗的方法。

\*\* 关于波导变换器的典型应用，可参看

R.E.Collin and J.Brown, *The Design of Quarter-wave Matching Layers for Dielectric Surfaces*, Proc. IEE, Vol. 103, Pt. C, PP. 153-158, March, 1956.

L. Young, *Optimum Quarter-wave Transformers*, IRE Trans., Vol. MTT-8, PP. 478-482, September, 1960, also *Inhomogeneous Quarter-wave Transformers of Two Sections*, *ibid.*, PP. 645-649, November, 1960.

E.S.Hensperger, *Broad-band Stepped Transformers from Rectangular to Doubleridged Waveguide*, IRE Trans., Vol. MTT-6, PP. 311-314, July, 1958.



$$\Gamma_3 = \frac{Z_L - Z_2}{Z_L + Z_2}$$

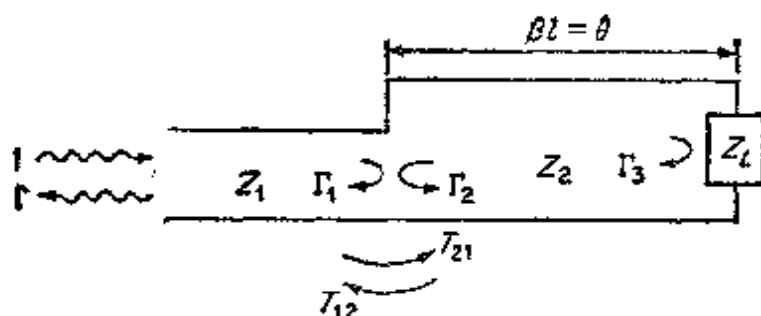


图 5.19 具有两个反射接头的微波电路

设入射波的振幅为 1，总的反射波的复振幅为  $\Gamma$ ，它等于总的反射系数。当入射波投射到第一个接头时，产生一个振幅为  $\Gamma_1$  的部分反射波。而振幅为  $T_{21}$  的传输波则入射到第二个接头处。其中的一部分被反射，即有一个振幅为  $\Gamma_3 \Gamma_{21} e^{-2j\theta}$  的波自右边入射到第一个接头处。而此波的一部分以振幅  $T_{12} T_{21} \Gamma_3 e^{-2j\theta}$  向前传输，另一部分以振幅  $\Gamma_2 \Gamma_3 T_{12} T_{21} e^{-2j\theta}$  反射回负载  $Z_L$ 。图 5.20 表示所产生的无限多次反射波的前面几次反射。振幅为  $\Gamma$  的总反射波，是通过第一个接头处向左边传输的所有各部分波的总和。此和为

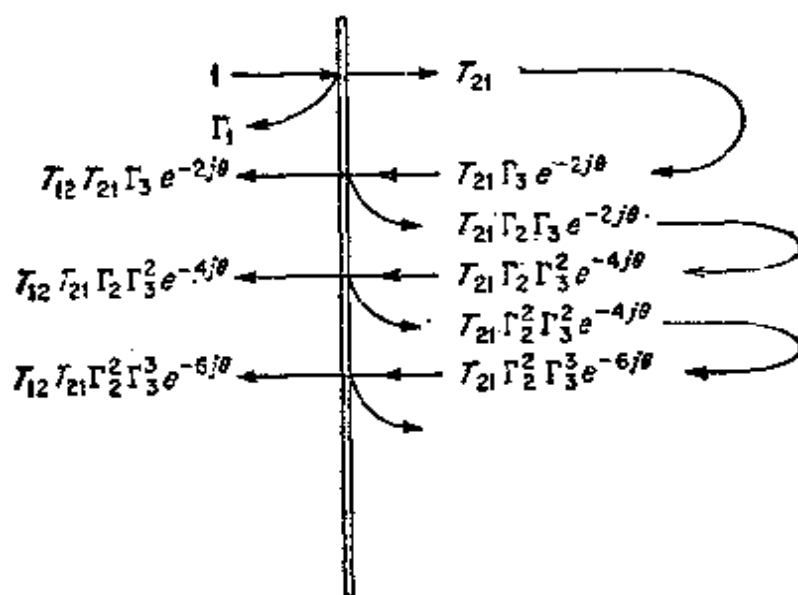


图 5.20 在具有两个反射接头的电路中波的多次反射

$$\begin{aligned}\Gamma &= \Gamma_1 + T_{12}T_{21}\Gamma_3 e^{-2j\theta} + T_{12}T_{21}\Gamma_3^2\Gamma_2 e^{-4j\theta} + \dots \\ &= \Gamma_1 + T_{12}T_{21}\Gamma_3 e^{-2j\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_3^n \Gamma_2^n e^{-2jn\theta}\end{aligned}$$

求这个几何级数的和，不难得出  $\left[ \text{注意 } \sum_{n=0}^{\infty} r^n = (1-r)^{-1} \right]$

$$\Gamma = \Gamma_1 + \frac{T_{12}T_{21}\Gamma_3 e^{-2j\theta}}{1 - \Gamma_2\Gamma_3 e^{-2j\theta}}$$

用  $1 + \Gamma_2 = 1 - \Gamma$  代替  $T_{12}$ ，和用  $1 + \Gamma_1$  代替  $T_{21}$  得

$$\Gamma = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_3 e^{-2j\theta}}{1 + \Gamma_1\Gamma_3 e^{-2j\theta}} \quad (5.35)$$

若  $|\Gamma_1|$  和  $|\Gamma_3|$  都比 1 小得多，则  $\Gamma$  的良好近似为

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_3 e^{-2j\theta} \quad (5.36)$$

这个结果表明，在小反射时，总的反射系数正好是只考虑一次反射时所得到的反射系数。这个结果将用来作为讨论多级  $\lambda/4$  变换器的一阶理论。应当指出，若  $|\Gamma_1| = |\Gamma_3| = 0.2$ ，则  $\Gamma$  的误差不超过 4%，这可以作为此近似公式精确度的标志。

## 5.8 多节 $\lambda/4$ 变换器的近似理论

图 5.21 表示  $N$  节  $\lambda/4$  变换器。第一个接头处的反射系数为

$$\Gamma_0 = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} = \rho_0 \quad (5.37a)$$

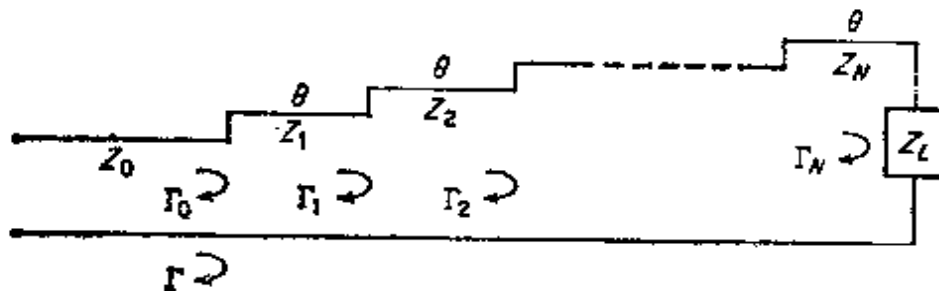


图 5.21 多节  $\lambda/4$  变换器

同理，第  $n$  个接头处的反射系数为

$$\Gamma_n = \frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1} + Z_n} = \rho_n \quad (5.37b)$$

最后一个接头处的反射系数为

$$\Gamma_N = \frac{Z_L - Z_N}{Z_L + Z_N} = \rho_N \quad (5.37c)$$

注意  $Z_0$  是特性阻抗，这里未必一定等于  $(\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$ 。每一节具有同样的电长度  $\beta l = \theta$ ，在匹配频率  $f_0$  上等于  $\lambda/4$ 。负载阻抗  $Z_L$  假定为纯电阻，它可以大于或小于  $Z_0$ 。这里取大于  $Z_0$  的情况，故所有的  $\Gamma_n = \rho_n$ ，其中， $\rho_n$  为  $\Gamma_n$  的大小。若  $Z_L$  小于  $Z_0$ ，则所有的  $\Gamma_n$  皆为负实数，在理论上所需要作的修改只是用  $-\rho_n$  代替所有的  $\rho_n$ 。

作为第一级近似，总的反射系数只取一次反射波的总和，即为

$$\Gamma = \rho_0 + \rho_1 e^{-2j\theta} + \rho_2 e^{-4j\theta} + \dots + \rho_N e^{-2jN\theta} \quad (5.38)$$

式中， $e^{-2jn\theta}$  是考虑到由各个部分波经过不同的距离而引入的相位迟延。

对这个问题，假定变换器为对称是有利的，这使  $\rho = \rho_N$ ， $\rho_1 = \rho_{N-1}$ ， $\rho_2 = \rho_{N-2}$  等等。在这种情况下，(5.38) 式变成

$$\Gamma = e^{-jN\theta} (\rho_0 (e^{jN\theta} + e^{-jN\theta}) + \rho_1 (e^{j(N-2)\theta} + e^{-j(N-2)\theta}) + \dots) \quad (5.39)$$

式中的最后一项，当  $N$  为奇数时，为  $\rho_{(N-1)/2} (e^{j\theta} + e^{-j\theta})$ ；当  $N$  为偶数时，为  $\rho_{N/2}$ 。由此可见，对称变换器的反射系数  $\Gamma$  为付主叶余弦级数：

$$\Gamma = 2e^{-jN\theta} (\rho_0 \cos N\theta + \rho_1 \cos(N-2)\theta + \dots + \rho_n \cos(N-2n)\theta + \dots) \quad (5.40)$$

在(5.40)式中的最后一项，当  $N$  为奇数时，为  $\rho_{(N-1)/2} \cos\theta$ ；当  $N$  为偶数时，为  $\frac{1}{2} \rho_{N/2}$ 。现在应该清楚了，选取适当的反射系数  $\rho_n$  (从而也就是  $Z_n$ )，就可以得到各种通带特性。因为此级数为余弦级数，所以它所规定的周期函数以间隔  $\pi$  为周期，它相当于每节变换器的长度改变半个波长的频率范围。确定  $\rho_n$  以获得最平坦和等波纹

通带特性的问题，以下两节给出。

## 5.9 二项式变换器

如果  $\rho = |\Gamma|$ ，且在匹配频率  $f_0$ （这时  $\theta_0 = \pi/2$ ）上对频率（或  $\theta$ ）的前  $N-1$  个导数为零，则可得到最平坦的通带特性。要获得这样的特性，需要取

$$\Gamma = A(1 + e^{-2j\theta})^N \quad (5.41a)$$

因此

$$\rho = |\Gamma| = |A2^N(\cos \theta)^N| \quad (5.41b)$$

当  $\theta = 0$  或  $\pi$  时，得  $\Gamma = (Z_L - Z_0)/(Z_L + Z_0)$ ，且由(5.41a)式得到  $\Gamma = A2^N$ 。因而常数  $A$  为

$$A = 2^{-N} \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (5.42)$$

利用二项式展开(5.41)式得

$$\Gamma = 2^{-N} \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} (1 + e^{-2j\theta})^N = 2^{-N} \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \sum_{n=0}^N C_n^N e^{-12n\theta} \quad (5.43)$$

式中，二项式系数为

$$C_n^N = \frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1)}{n!} = \frac{N!}{(N-n)!n!} \quad (5.44)$$

注意  $C_n^N = C_{N-n}^N$ ， $C_0^N = 1$ ， $C_1^N = N = C_{N-1}^N$ ，等等。比较(5.43)式与(5.38)式可以看出，必须选取

$$\rho_n = 2^{-N} \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} C_n^N = \rho_{N-n} \quad (5.45)$$

因为  $C_n^N = C_{N-n}^N$

为了使特性阻抗  $Z_n$  的解简单，最好作进一步的近似。因为我们已经规定所有的  $\rho_n$  都很小，故可以利用下面的结果

$$\ln \frac{Z_{n+1}}{Z_n} \approx 2 \frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1} + Z_n} = 2\rho_n$$

于是得

$$\ln \frac{Z_{n+1}}{Z_n} = 2\rho_n = 2^{-N} C_n^N \ln \frac{Z_L}{Z_0} \quad (5.46)$$

我们已经在上述式中应用了近似式:

$$\ln \frac{Z_L}{Z_0} = 2 \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} + \frac{2}{3} \left( \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \right)^3 + \dots \approx 2 \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

(5.46)式是阻抗的对数解, 由于它们正比于二项式系数, 故称此变换器为二项式变换器。此理论是近似的, 为了得到正确的结果, 必须把 $Z_L$ 的范围限制在

$$0.5Z_0 < Z_L < 2Z_0$$

作为一个例子, 我们研究两节变换器。由于 $C_0^2 = 1$ 和 $C_1^2 = 2$ , 故从(5.46)式得

$$\ln \frac{Z_1}{Z_0} = \frac{1}{4} \ln \frac{Z_L}{Z_0} \quad \text{或} \quad Z_1 = Z_L^{\frac{1}{4}} Z_0^{\frac{3}{4}}$$

和

$$\ln \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{1}{2} \ln \frac{Z_L}{Z_0}, \quad \text{或} \quad Z_2 = Z_L^{\frac{3}{4}} Z_0^{\frac{1}{4}}$$

虽然使用了近似理论, 但是在两节变换器的特定情况下, 得出上述 $Z_1$ 和 $Z_2$ 的值是正确的, 而非近似解。这个结论指明了近似理论的精确性。

图5.22表示的这种通带特性是从最平坦变换器得出的。设 $\rho_m$ 是 $\rho$ 所能容许的最大值。则当 $\rho = \rho_m$ 时, 其角度 $\theta_m$ 为

$$\theta_m = \cos^{-1} \left| \frac{2\rho_m}{\ln(Z_L/Z_0)} \right|^{1/N} \quad (5.47)$$

由(5.41b)式也可得同样的结果。在各级变换器由传输线组成的情况下,  $\theta = \pi f/2f_0$ , 因而相对带宽为

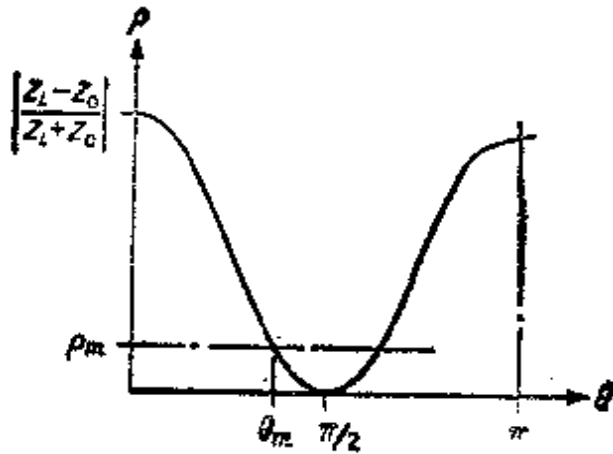


图 5.22 最平坦变换器的通带特性

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{2(f_0 - f_m)}{f_0} = 2 - \frac{4}{\pi} \cos^{-1} \left| \frac{2\rho_m}{\ln(Z_L/Z_0)} \right|^{1/N} \quad (5.48)$$

因为  $\theta_m = \pi f_m / 2f_0$ 。要注意，在 (5.48) 式中的反余弦函数，取为使  $\theta_m < \pi/2$ 。比较图 5.18 和图 5.22 可以看出，多级最平坦变换器比单级最平坦变换器能够提供更宽的有效带宽。

## 5.10 切比雪夫变换器

除最平坦通带特性外，另一个同样有用的特性，是容许  $\rho$  在通带内以振荡的方式在零与  $\rho_m$  之间变动。为获得具有如图 5.23 所示的

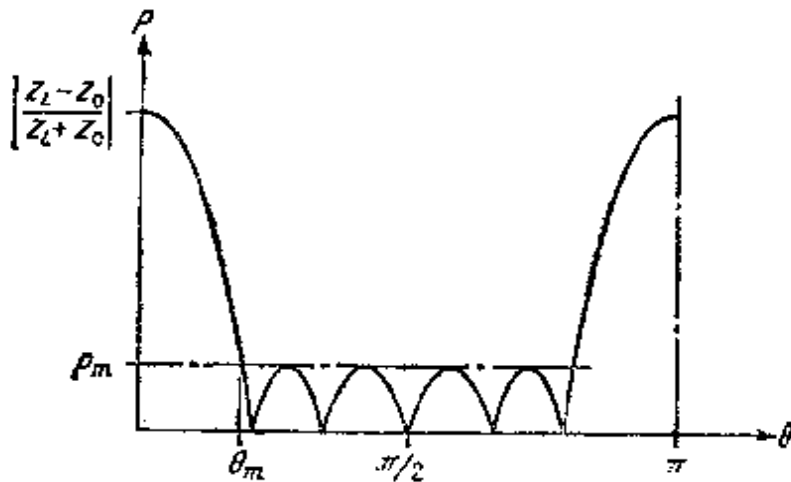


图 5.23 由切比雪夫变换器得到的等波纹特性

等波纹特性而设计的变换器就属于这种类型，它比二项式变换器的带宽有显著的增加。使 $\rho$ 按照切比雪夫多项式变化，就得到等波纹特性，所以此变换器命名为切比雪夫变换器。有多少节变换器，通带中就可能在多少个频率上 $\rho$ 为零。为了研究如何把切比雪夫多项式用于这个设计中，首先必须研究这些多项式的基本特性。

用 $T_n(x)$ 表示的几次切比雪夫多项式是一个以 $x$ 为自变量的几次多项式。它的前四个多项式和递推公式为

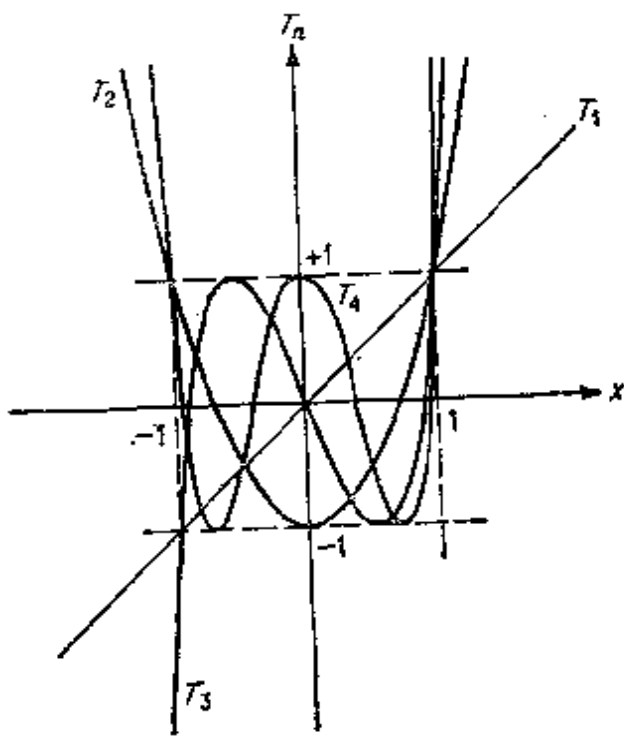


图 5.24 切比雪夫多项式

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1} - T_{n-2}$$

当 $x$ 在 $|x| \leq 1$ 的范围内时， $T_n$ 在 $\pm 1$ 之间摆动；而当 $x$ 在这个范围以外时， $T_n$ 的大小无限地增加。图5.24是前四个多项式的图形。若用 $\cos\theta$ 代替 $x$ ，则得

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta \quad (5.49)$$

这表明，在 $-1 \leq x \leq 1$ 范围内， $|T_n| \leq 1$ 。当 $\theta$ 由0变到 $\pi$ 时， $x$ 的对应范围由+1变到-1。因为我们希望 $\rho$ 只在 $\theta_m$ 到 $\pi - \theta_m$ 范围内具有等波纹特性，所以不能直接地使用 $T_n(\cos\theta)$ 。若改为研究

$$T_n\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta_m}\right) = \cos n\left(\cos^{-1}\frac{\cos\theta}{\cos\theta_m}\right) \quad (5.50)$$

则可以看出，当 $\theta = \theta_m$ 时，自变量将等于1；而当 $\theta_m < \theta < \pi - \theta_m$ 时，自变量将小于1。因此，这个函数把 $T_n$ 的等波纹振荡限制在所要求的通带内。

(5.50)式所给出的函数是以 $\cos\theta/\cos\theta_m$ 作自变量的几次多项

式。由于 $(\cos\theta)^n$ 可以被展开为余弦项级数，比如 $\cos\theta, \cos 2\theta, \dots, \cos n\theta$ ，故可以推测(5.50)式是其形式为(5.40)式的级数。因而可以取

$$\begin{aligned}\Gamma &= 2e^{-jN\theta}(\rho_0 \cos N\theta + \rho_1 \cos(N-2)\theta + \dots + \rho_n \cos(N-2n)\theta + \dots) \\ &= Ae^{-jN\theta} T_N(\sec\theta_m \cos\theta)\end{aligned}\quad (5.51)$$

式中， $A$ 为待定常数。当 $\theta=0$ 时，得

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = AT_N(\sec\theta_m)$$

所以

$$A = \frac{Z_L - Z_0}{(Z_L + Z_0) T_N(\sec\theta_m)}$$

因而得

$$\Gamma = e^{-jN\theta} \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \frac{T_N(\sec\theta_m \cos\theta)}{T_N(\sec\theta_m)}\quad (5.52)$$

在通带中 $T_N(\sec\theta_m \cos\theta)$ 的最大值为1。所以

$$\rho_m = \frac{Z_L - Z_0}{(Z_L + Z_0) T_N(\sec\theta_m)}\quad (5.53a)$$

若通带（因而也就是 $\theta_m$ ）被指定，则通带容许值 $\rho_m$ 就固定了，或者反过来也一样。由(5.53a)式得

$$T_N(\sec\theta_m) = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \rho_m^{-1}$$

或者利用 $\cos\theta=1$ 的(5.50)式得

$$\sec\theta_m = \cos\left(\frac{1}{N} \cos^{-1} \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \rho_m^{-1}\right)\quad (5.53b)$$

它是用通带容许值 $\rho$ （即 $\rho_m$ ）表示的 $\theta_m$ 。

为了求解(5.51)式的未知量 $\rho_n$ ，需要下面的结果：

$$\begin{aligned}(\cos\theta)^n &= 2^{-n} e^{-jn\theta} (1 + e^{2j\theta})^n = 2^{-n} e^{-jn\theta} \sum_{m=0}^n C_n^m e^{j2m\theta} \\ &= 2^{-n+1} (C_0^n \cos n\theta + C_1^n \cos(n-2)\theta + \dots)\end{aligned}$$



$$+ C_m^n \cos(n-2m)\theta + \dots) \quad (5.54)$$

(5.54)式的最后一项, 当  $n$  为偶数时, 为  $\frac{1}{2}C_m^n$ ; 当  $n$  为奇数时, 为  $C_{(n-1)/2}^m$ 。利用(5.54)式和前述的  $T_n(x)$  的表示式, 可以得到下列式子:

$$T_1(\sec \theta_m \cos \theta) = \sec \theta_m \cos \theta \quad (5.55a)$$

$$\begin{aligned} T_2(\sec \theta_m \cos \theta) &= 2(\sec \theta_m \cos \theta)^2 - 1 \\ &= \sec^2 \theta_m (1 + \cos 2\theta) - 1 \end{aligned} \quad (5.55b)$$

$$\begin{aligned} T_3(\sec \theta_m \cos \theta) &= \sec^2 \theta_m (\cos 3\theta + 3 \cos \theta) \\ &\quad - 3 \sec \theta_m \cos \theta \end{aligned} \quad (5.55c)$$

$$\begin{aligned} T_4(\sec \theta_m \cos \theta) &= \sec^4 \theta_m (\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3) \\ &\quad - 4 \sec^2 \theta_m (\cos 2\theta + 1) \end{aligned} \quad (5.55d)$$

这些结果足以用来设计长度达到四级的变换器。实际中极少用更多的级数。

作为一个例子, 我们研究两级变换器的设计, 它是用来匹配  $Z_0 = 1$  的线与  $Z_0 = 2$  的线或  $Z_L = 2$  的负载的。设  $\rho$  的最大容许值  $\rho_m = 0.05$ 。则应用(5.55a)式可得

$$T_2(\sec \theta_m) = 2 \sec^2 \theta_m - 1 = \frac{1}{3(0.05)} = 6.67$$

从而得  $\sec \theta_m = 1.96$ ,  $\theta_m = 1.04$ 。于是所得到的相对带宽为

$$\frac{\Delta\theta}{\pi/2} = \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - 1.04 \right) = 0.675$$

由(5.51)式、(5.52)式和(5.55b)式得(参考(5.40)式下面关于  $\rho$  的余弦级数中最后一项的说明)

$$\begin{aligned} 2\rho_0 \cos 2\theta + \rho_1 &= \rho_m T_2(\sec \theta_m \cos \theta) \\ &= \rho_m \sec^2 \theta_m \cos 2\theta + \rho_m (\sec^2 \theta_m - 1) \end{aligned}$$

所以

$$\rho_0 = \frac{1}{2} \rho_m \sec^2 \theta_m = \rho_2 = 0.096$$

$$\rho_1 = \rho_m (\sec^2 \theta_m - 1) = 0.142$$

阻抗 $Z_1$ 和 $Z_2$ 为

$$Z_1 = \frac{1+\rho_0}{1-\rho_0} Z_0 = 1.21, \quad Z_2 = \frac{1+\rho_1}{1-\rho_1} Z_1 = 1.62$$

图5.25画出了其通带特性曲线。

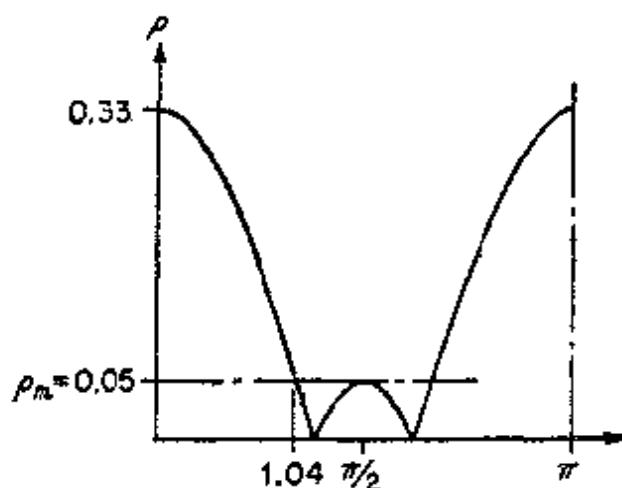


图 5.25 两节切比雪夫变换器的通带特性( $\rho_m = 0.05$ 、 $Z_L/Z_0 = 2$ )

## ★5.11 切比雪夫变换器（精确的结果）

具有等波纹通带特性的多级变换器精确理论也已经被提出来了（见本书末的参考文献），因为其分析较长，这里只给出两级和三级变换器的最后结果。

研究理想多级变换器的精确理论时，为了方便，引入功率损耗比 $P_{LR}$ ，它的定义是可用功率（入射功率）与传送到负载上的实际功率之比。若入射功率为 $P_i$ ，则反射功率为 $\rho^2 P_i$ ，传送到负载上的功率为 $(1-\rho^2)P_i$ 。所以

$$P_{LR} = \frac{P_i}{(1-\rho^2)P_i} = \frac{1}{1-\rho^2} \quad (5.56a)$$

以及

$$\rho = \sqrt{\frac{P_{LR}-1}{P_{LR}}} \quad (5.56b)$$

若  $T$  为总传输系数, 则  $|T|^2 = 1 - \rho^2$ .

任一变换器  $Z_{in}$  的表示式是不难求得的, 它可以由这个  $\rho$  (因而也就是  $P_{LR}$ ) 求出。当由  $P_{LR}$  求  $Z_{in}$  时,  $P_{LR}$  可以用如下的形式表示:

$$P_{LR} = 1 + Q_{2N}(\cos \theta) \quad (5.57)$$

式中,  $Q_{2N}(\cos \theta)$  为以  $\cos \theta$  为自变量的  $2N$  次偶数多项式, 其系数为

阻抗  $Z_0$  的函数。为了求得等波纹特性, 现在把  $P_{LR}$  规定为

$$P_{LR} = 1 + k^2 T_N^2(\sec \theta_m \cos \theta) \quad (5.58)$$

式中,  $k^2$  为  $P_{LR}$  的通带容限, 也就是由于  $T_N$  的最大值为 1, 故在通带内  $P_{LR}$  的最大值为  $1 + k^2$ 。通过使 (5.57) 式和 (5.58) 式相等, 可以得到能够求解的各种特性阻抗的代数方程式。

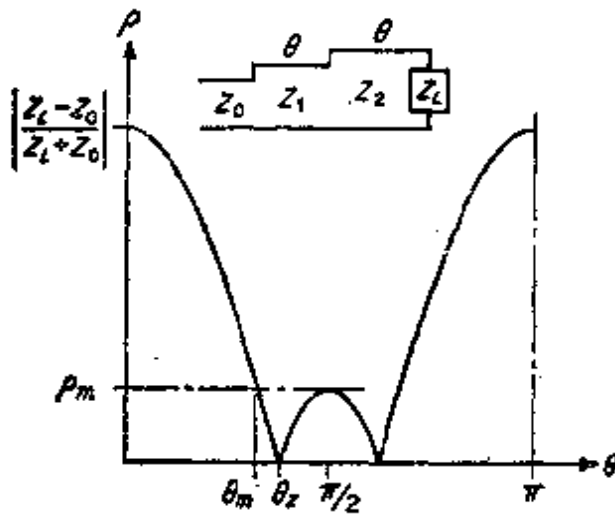


图 5.26 两节切比雪夫变换器的通带特性

图 5.26 为一个两级变换器的  $\rho$  对  $\theta$  的曲线。此变换器的

$$P_{LR} = 1 + \frac{(Z_L - Z_0)^2}{4Z_L Z_0} \frac{(\sec^2 \theta_x \cos^2 \theta - 1)^2}{\tan^4 \theta_x} \quad (5.59)$$

式中,  $\theta_x$  是  $\rho$  第一次变为零的  $\theta$  值。在通带中  $P_{LR}$  的最大值为

$$1 + \frac{(Z_L - Z_0)^2}{4Z_L Z_0} \cot^4 \theta$$

所以

$$\rho_m = \left( \frac{k^2}{1 + k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.60)$$

式中,  $k^2 = \cot^4 \theta_x (Z_L - Z_0)^2 / 4Z_L Z_0$ 。  $Z_1$  和  $Z_2$  所要求的值为

$$Z_1^2 = Z_0^2 \left[ \frac{(Z_L - Z_0)^2}{4Z_0^2 \tan^4 \theta_x} + \frac{Z_L}{Z_0} \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{(Z_L - Z_0)Z_0}{2 \tan^2 \theta_x} \quad (5.61a)$$

$$Z_2 = \frac{Z_L}{Z_1} Z_0 \quad (5.61b)$$

$\theta_m$  的值为

$$\theta_m = \cos^{-1} \sqrt{2} \cos \theta_r \quad (5.62a)$$

且只要  $2\Delta\theta/\pi = \Delta f/f_0$  (若不相等, 则(5.62b)式为  $2\Delta\theta/\pi$ ), 则

$$\frac{\Delta f}{f_0} = 2 - \frac{4}{\pi} \cos^{-1} \sqrt{2} \cos \theta_r \quad (5.62b)$$

如果先确定带宽, 则  $\theta_r$  以及  $\theta_m$  (由(5.62a)式) 也都固定了。从而由(5.60)式可求出  $\rho_m$ 。反之, 若先给定  $\rho_m$ , 就确定了带宽。

当  $\theta$  趋近于极限值  $\pi/2$  时,  $\rho$  的两个零值合并而得到一最平坦变换器。由(5.61)式可以看出, 在此情况下 (与近似理论相比),

$$Z_1 = Z_L^{\frac{1}{4}} Z_0^{\frac{3}{4}} \quad (5.63a)$$

$$Z_2 = Z_L^{\frac{3}{4}} Z_0^{\frac{1}{4}} \quad (5.63b)$$

对最平坦变换器来说, 在  $\rho = \rho_m$  这一点上  $\theta_m$  的值为

$$\theta_m = \cos^{-1} \cot \theta_r \quad (5.64)$$

式中,  $\theta_r$  仍为切比雪夫变换器中所定义的量。可用(5.62)式和(5.64)式来比较由切比雪夫变换器和最平坦变换器所能获得的带宽。图5.27中对  $N=2$  和  $N=3$  时的情况作了比较, 可以看出在最大容限值  $\rho_m$  相同的情况下, 切比雪夫变换器能得到宽得多的带宽。

图5.28表示三级切比雪夫变换器的通带特性。其功率损耗比为

$$P_{LR} = 1 + \frac{(Z_L - Z_0)^2}{4Z_L Z_0} \frac{(\sec^2 \theta_r \cos^2 \theta - 1)^2 \cos^2 \theta}{\tan^4 \theta_r} \quad (5.65)$$

通带容限  $k^2$  为

$$k^2 = \frac{(Z_L - Z_0)^2}{4Z_L Z_0} \frac{2 \cos \theta_r}{3 \sqrt{3} \tan^2 \theta_r} \quad (5.66)$$

根据此式, 可以由(5.60)式求出  $\rho_m$ 。还可得到一个一般性结论: 给定  $k^2$ , 可确定带宽, 而且反过来也成立。  $\theta_m$  的值为

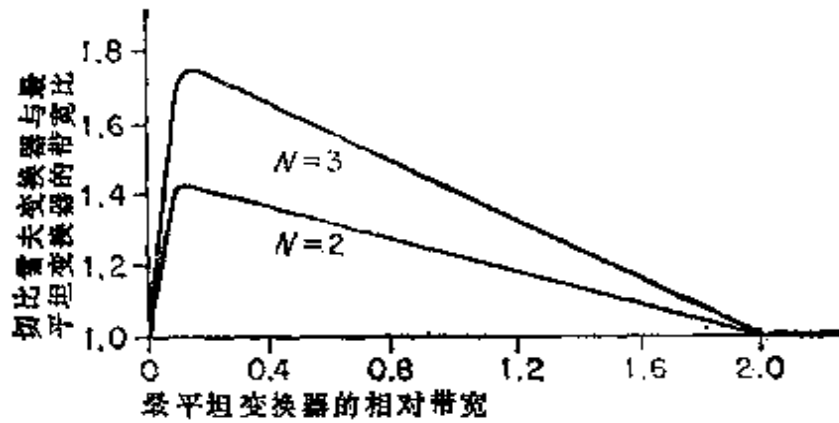


图 5.27 切比雪夫变换器和最平坦变换器带宽的比较

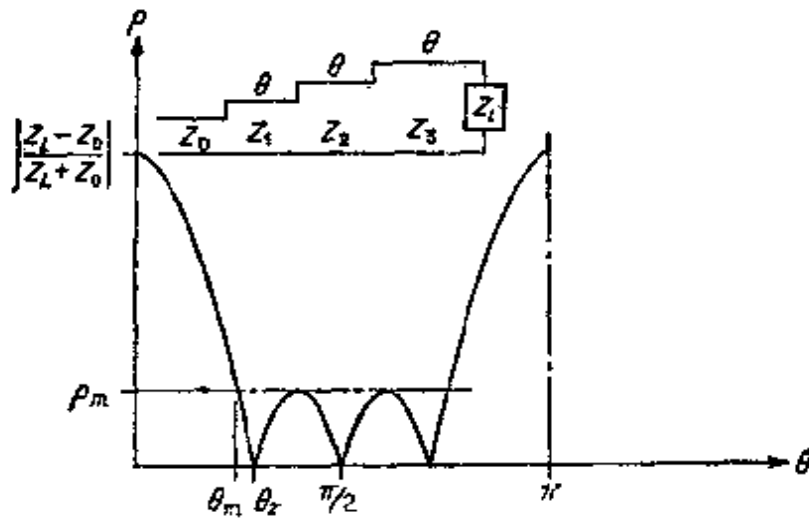


图 5.28 三节切比雪夫变换器的通带特性

$$\theta_m = \cos^{-1} \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \theta_r \quad (5.67a)$$

对于  $\Delta f/f_0 = 2\Delta\theta/\pi$  的传输线,

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{2(\pi/2 - \theta_m)}{\pi/2} = 2 - \frac{4}{\pi} \cos^{-1} \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \theta_r \quad (5.67b)$$

通过求解下式可确定特性阻抗  $Z_1$ :

$$\frac{Z_L - Z_0}{\tan^2 \theta_r} = \frac{Z_1^2}{Z_0} + 2 \left( \frac{Z_L}{Z_0} \right)^{\frac{1}{2}} Z_1 - \frac{Z_L Z_0^2}{Z_1^2} - 2 \left( \frac{Z_L}{Z_0} \right)^{\frac{1}{2}} Z_1^{-1} Z_0 \quad (5.68a)$$

而 $Z_2$ 和 $Z_3$ 为

$$Z_2 = (Z_L Z_0)^{\frac{1}{2}} \quad (5.68b)$$

$$Z_3 = \frac{Z_L Z_0}{Z_1} \quad (5.68c)$$

当 $\theta_m$ 趋近于 $\pi/2$ 时，三个零值合并到 $\pi/2$ 点上，这就得到了最平坦变换器。通过使(5.68a)式左边为零，可得到 $Z_1$ 所需要的值。下面将得出， $Z_1 = Z_L^\alpha Z_0^{1-\alpha}$ ，其中， $\frac{1}{8} \leq \alpha < \frac{1}{4}$ 。随着 $Z_L/Z_0$ 接近于1， $\alpha$ 将趋近于 $1/8$ ，当 $Z_L/Z_0$ 的值较大时， $\alpha$ 将趋近于 $1/4$ 。用取各种 $\alpha$ 值的试探法（注意 $Z_1$ 的方程为四次方程），可很容易地求出 $Z_1$ 的解。最平坦变换器 $\theta_m$ 的值和带宽为

$$\theta_m = \cos^{-1} \left[ \left( \frac{2}{3\sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\cos \theta_m}{(\sin \theta_m)^{\frac{2}{3}}} \right] \quad (5.69a)$$

$$\frac{\Delta f}{f_0} = 2 - \frac{4}{\pi} \theta_m \quad (5.69b)$$

切比雪夫变换器是一种最佳的设计，没有其他的设计能用较小的通带容限得到更宽的带宽。如果作不同于(5.58)式的另一种选择时，(5.57)式中多项式的 $Q_{2N}$ 可以在同样的带宽下给出较小的通带容限，那末，下面将指出，多项式 $Q_{2N}$ 的曲线与多项式 $T_N^2$ 至少应有 $N+1$ 个点相交。而由于多项式是以 $\cos \theta$ 为自变量的偶函数，所以它们至多有 $N+1$ 个系数。因而 $Q_{2N}$ 必须等于 $T_N^2$ （因为 $Q_{2N}$ 与 $T_N^2$ 有 $N+1$ 个公共点）。但是，这与原来假定的 $Q_{2N}$ 能产生一个较好的结果相矛盾，因此，证明了切比雪夫变换器是一种最佳的设计。

## 5.12 渐变传输线

在用来匹配特性阻抗不同的两条传输线的多节 $\lambda/4$ 变换器中，阻抗电平的变化，可用许多不连续阶梯来获得。另一种是利用渐变过渡段，即它的特性阻抗以平滑方式连续地由一条线的特性阻抗变

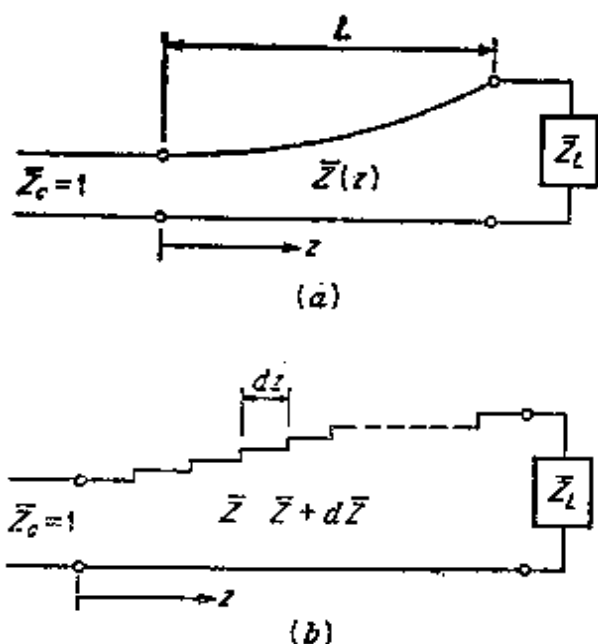


图 5.29 作为匹配段的渐变传输线

化阻抗为  $\bar{Z}_L$  的负载（假定为纯电阻性负载）的渐变传输线的示意图。此渐变线归一化阻抗为  $\bar{Z}$ ，它是沿渐变线距离  $z$  的函数。图 5.29 b 表示的是一种与所研究的连续渐变线相近似的渐变线，由许多微分长度  $dz$  线段所组成，而从这一段到相邻的一段其阻抗变化一个微分量  $d\bar{Z}$ 。

在  $z$  处的阻抗阶跃变化  $d\bar{Z}$  产生一个微分反射系数

$$\begin{aligned}
 d\Gamma_0 &= \frac{\bar{Z} + d\bar{Z} - \bar{Z}}{\bar{Z} + d\bar{Z} + \bar{Z}} \approx \frac{d\bar{Z}}{2\bar{Z}} = \frac{1}{2} d(\ln \bar{Z}) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dz} (\ln \bar{Z}) dz \quad (5.70)
 \end{aligned}$$

在渐变线的输入端，由这个阶梯所产生的对输入反射系数的贡献为

$$d\Gamma_i = e^{-12\beta z} \frac{1}{2} \frac{d}{dz} (\ln \bar{Z}) dz$$

如果假定总的反射系数可以由所有各部分贡献的总和来计算的话，如同多节  $\lambda/4$  变换器近似理论那样，则输入反射系数为

到另一条线的特性阻抗，这种类型的过渡段或匹配段称为渐变传输线。与前述多节变换器近似理论相类似的渐变传输线的近似理论，是不难推论出来的。下面介绍这个近似理论。下一节对渐变线上反射系数的准确微分方程作推导，同时也对此近似理论的正确性作简要的评价。

图 5.29 a 表示用来匹配归一化阻抗为 1 的线与归一

$$\Gamma_i = \frac{1}{2} \int_0^L e^{-i2\beta z} \frac{d}{dz} (\ln \bar{Z}) dz \quad (5.71)$$

式中， $L$ 是渐变线的总长度。若 $\bar{Z}$ 随 $z$ 的变化是已知的，则 $\Gamma_i$ 不难由上式求出。一个有更大实际意义的问题是综合问题，即给出了具有所需频率函数特性的 $\Gamma_i$ 以确定 $\bar{Z}(z)$ 。在处理综合问题以前，先介绍实际渐变线设计的两个例子。

### 指数渐变线

指数渐变线是一种 $\ln \bar{Z}$ 作线性变化的渐变线。因而 $\bar{Z}$ 由1到 $\ln \bar{Z}_L$ 按指数变化，即

$$\ln \bar{Z} = \frac{z}{L} \ln \bar{Z}_L \quad (5.72a)$$

$$\bar{Z} = e^{(z/L) \ln \bar{Z}_L} \quad (5.72b)$$

把(5.72)式代入(5.71)式得

$$\Gamma_i = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\ln \bar{Z}_L}{L} e^{-i2\beta z} dz = \frac{1}{2} e^{-i\beta L} \ln \bar{Z}_L \frac{\sin \beta L}{\beta L} \quad (5.73)$$

式中已经假定所论及的传输线其 $\beta = k = 2\pi/\lambda$ ，且不是 $z$ 的函数。图5.30画出了 $\rho_i = |\Gamma_i|$ 对 $\beta L$ 的变化曲线。因为 $k = 2\pi f/(\mu\epsilon)^{1/2}$ ，所

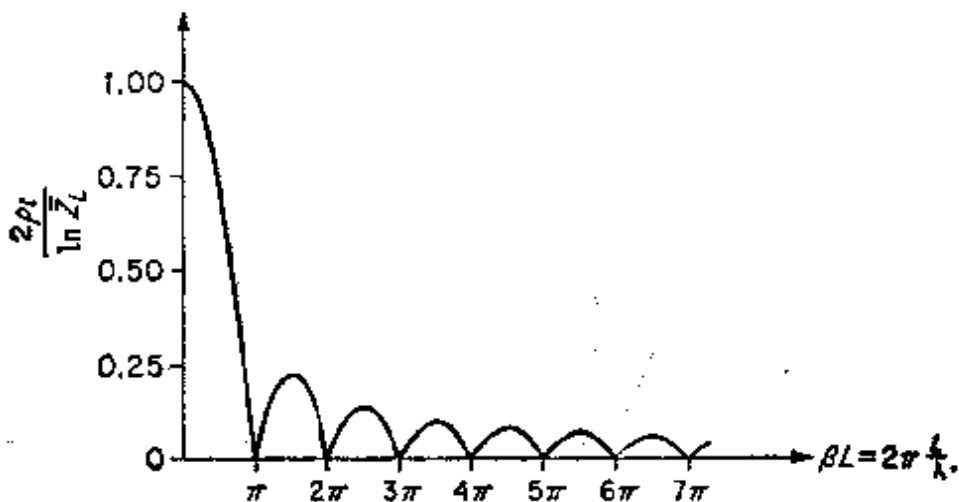


图 5.30 指数渐变线的输入反射系数



以当渐变线长度固定时，它就是 $\rho_1$ 随频率变化的曲线。要注意当 $L$ 大于 $\lambda/2$ 时，其反射系数很小，第一个旁瓣最大值约为主瓣最大值的22%。

具有三角分布的渐变线

若取 $d(\ln \bar{Z})/dz$ 为三角函数的形式

$$\frac{d(\ln \bar{Z})}{dz} = \begin{cases} \frac{4z}{L^2} \ln \bar{Z}_L & 0 \leq z \leq \frac{L}{2} \\ \frac{4}{L^2} (L-z) \ln \bar{Z}_L & \frac{L}{2} \leq z \leq L \end{cases} \quad (5.74)$$

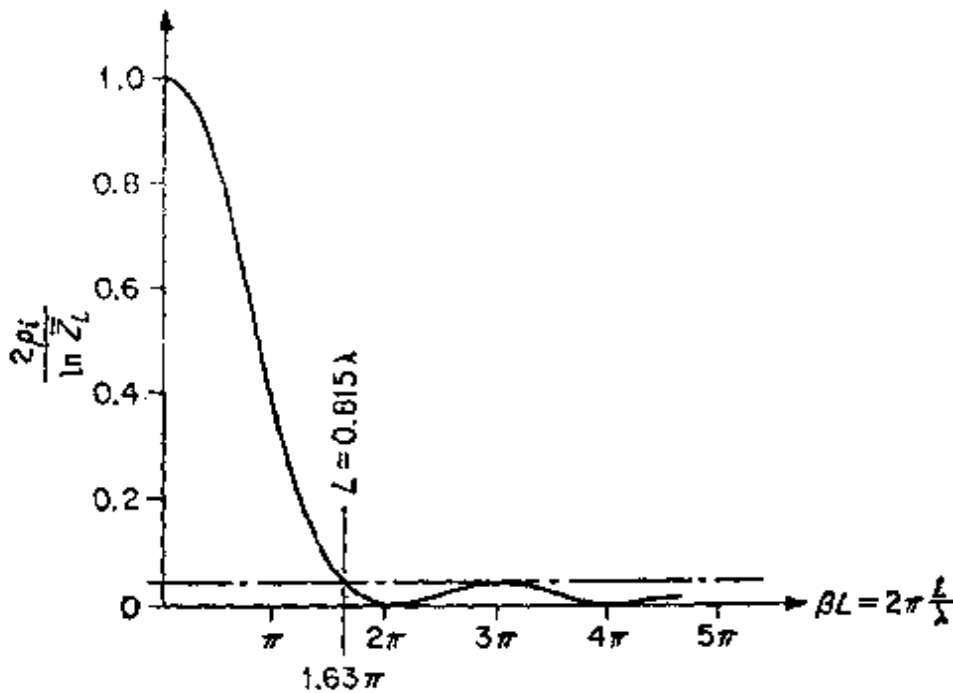
则可得到具有更满意特性的匹配段。对(5.74)式进行积分得

$$\bar{Z} = \begin{cases} e^{[2(z/L)^2] \ln \bar{Z}_L} & 0 \leq z \leq \frac{L}{2} \\ e^{(4z/L - 2z^2/L^2 - 1) \ln \bar{Z}_L} & \frac{L}{2} \leq z \leq L \end{cases} \quad (5.75)$$

把(5.74)式代入(5.71)式，并进行直接积分得

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} e^{-j\beta L} \ln \bar{Z}_L \left[ \frac{\sin(\beta L/2)}{\beta L/2} \right]^2 \quad (5.76)$$

图5.31是 $\rho_1$ 对 $\beta L$ 的曲线。把它与指数渐变线作比较可以看出，这



种渐变线第一个旁瓣最大值小于主瓣峰值的 5%。但是，这个小的反射系数数值出现在渐变线的长度约为  $3\lambda/2$ （即其长度两倍于指数渐变线）那一点上。如果  $\bar{Z}_L$  远大于 1，则取具有三角分布的渐变线更好一点，因为它对所有的频率都有更小的  $\rho_i$  值。此渐变线的长度大于  $0.815\lambda$ ，对应于图 5.31 通带的低端。

### ★5.13 渐变传输线的综合

为了方便，这里重新写出 (5.71) 式：

$$\Gamma_i(2\beta) = \frac{1}{2} \int_0^L e^{-i2\beta z} \frac{d(\ln \bar{Z})}{dz} dz \quad (5.77)$$

此式可以认为是函数  $d(\ln \bar{Z})/dz$  的付立叶变换，它在区域  $0 \leq z \leq L$  以外为零\*。由它的逆变换公式得

$$\frac{1}{2} \frac{d(\ln \bar{Z})}{dz} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\beta z} \Gamma_i(2\beta) 2d\beta \quad (5.78)$$

这个公式在原则上解决了综合问题，因为它给出了为获得确定的  $\Gamma_i(2\beta)$  所需要的  $d(\ln \bar{Z})/dz$  值。为了简化下面的讨论，引入如下的归一化变量是适宜的：

$$p = 2\pi \frac{z - L/2}{L} \quad (5.79a)$$

$$u = \frac{\beta L}{\pi} = \frac{2L}{\lambda} \quad (5.79b)$$

在这种情况下，(5.77) 式变成

$$\Gamma_i = \frac{1}{2} e^{-i\beta L} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\beta u} \frac{d(\ln \bar{Z})}{dp} dp \quad (5.80)$$

现在，定义  $g(p)$  为

\* F. Bolinder, 在 "Fourier Transforms in the Theory of Inhomogeneous Transmission Lines" (Proc. IRE, Vol. 38, p. 1354, November, 1950.) 一文中首先指明了这个付立叶变换关系式。

$$g(p) = \frac{d(\ln \bar{Z})}{dp} \quad (5.81a)$$

和  $F(u)$  为

$$F(u) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i pu} g(p) dp \quad (5.81b)$$

于是

$$\Gamma_i = \frac{1}{2} e^{-i p L} F(u) \quad (5.82)$$

现在，可以把付立叶变换对 (5.77) 式和 (5.78) 式表示为

$$F(u) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i pu} g(p) dp \quad (5.83a)$$

$$g(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i pu} F(u) du \quad (5.83b)$$

现在可以把综合问题陈述如下：指定一个反射系数特性  $F(u)$ ，它应给出所要求的渐变性能，还应使 (5.83b) 式算出的  $g(p)$  是一个在  $|p| > \pi$  区域外恒等于零的函数。后一个限制与  $d(\ln \bar{Z})/dz$  只在区域  $0 \leq z \leq L$  内不为零的物理要求相符合。显然，不能任意地指定  $F(u)$ ，因为一般说来，这会导致在整个无限区域  $-\infty < p < \infty$  都出现  $g(p)$ 。例如，若取  $-1 \leq u \leq 1$  时  $F(u)$  等于 1，而在  $u$  为其他值时  $F(u)$  为零，则由 (5.83b) 式就得出

$$g(p) = \frac{\sin p}{\pi p} \quad -\infty < p < \infty$$

要实现这样的  $g(p)$ ，需要无限长的渐变线，显然是一个不实际的解。为了得到实际上可能实现的解，必须先导出对  $F(u)$  所加的限制，然后才能进一步探讨综合问题。

为了导出对  $F(u)$  的适当限制，设  $g(p)$  被展开为如下的复数付立叶级数：

$$g(p) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i n p} & -\pi \leq p \leq \pi \\ 0 & |p| > \pi \end{cases} \quad (5.84)$$

式中,  $a_n$  现在还是未定系数, 它受到使  $g$  成为实函数的条件  $a_n = a_{-n}^*$  的限制。代入 (5.83 a) 式得

$$\begin{aligned} F(u) &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{\sin \pi(u-n)}{\pi(u-n)} \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (-1)^n \frac{\sin \pi u}{\pi(u-n)} = 2\pi \frac{\sin \pi u}{\pi u} \\ &\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (-1)^n \frac{u}{u-n} \end{aligned} \quad (5.85)$$

系数  $a_n$  可能与  $F(u=n)$  有关, 当  $u$  等于整数  $n$  时,

$$\lim_{u \rightarrow n} \frac{\sin \pi(u-n)}{\pi(u-n)} = 1$$

且

$$\lim_{u \rightarrow n} \frac{\sin \pi(u-m)}{\pi(u-m)} = 0$$

于是,  $F(n) = 2\pi a_n$ , 或  $a_n = F(n)/2\pi$ , 所以

$$F(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) \frac{\sin \pi(u-n)}{\pi(u-n)} \quad (5.86)$$

这个结果就是用于通信理论中熟知的取样定理的陈述。它说明借助于插值公式 (5.86) 式, 根据  $u = n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 时已知的  $F(u)$  取样值, 可唯一地重新组成  $F(u)$ 。现在可以看出, 指定  $F(u)$  的一个可能的方法, 是要放宽对  $F(u)$  的限制, 即只要在  $u$  的整数上指定  $F(u)$  即可。但是, 这不是一个完全满意的解决办法。因为我们事先不知道是否只在  $u$  为整数时确定了  $F(u)$ , 尽管在  $a_n = F(n)/2\pi$  时, 可由 (5.84) 式给出的  $g(p)$  来实现, 但由 (5.86) 式给出的结果  $F(u)$  将对所有  $u$  值是一个可接受反射系数特性。

在选取  $F(u)$  时, 我们希望得到更大灵活性。现在来看一看如何做到这一点的。假定在  $|n| > N$  时所有的  $a_n$  都为零, 则在这种情况下

$$g(p) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{inp} \quad (5.87a)$$

$$F(u) = 2\pi \frac{\sin \pi u}{\pi u} \sum_{n=-N}^N (-1)^n a_n \frac{u}{u-n} \quad (5.87b)$$

(5.87b) 式中的级数可以认为是如下形式函数的部分分式展开式:

$$\frac{Q(u)}{\prod_{n=1}^N (u^2 - n^2)}$$

式中, 除了为使  $a_n = a_n^*$  而限定  $Q(-u) = Q(u)^*$  以外,  $Q(u)$  是以  $u$  为自变量的任意  $2N$  次多项式, 其分母为  $N$  项  $(u^2 - 1)$ 、 $(u^2 - 4)$  … 的乘积。利用部分分式展开公式得

$$\begin{aligned} \frac{Q(u)}{\prod_{n=1}^N (u^2 - n^2)} &= \sum_{m=-N}^N \frac{Q(m)}{(u-m)2m \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N (m^2 - n^2)} \\ &\quad + \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{Q(u)}{u^{2N}} \\ &= \frac{uQ(u)}{u \prod_{n=1}^N (u^2 - n^2)} \\ &= \sum_{m=-N}^N \frac{uQ(m)}{(u-m)2m \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N (m^2 - n^2)} \\ &\quad + \frac{Q(0)}{\prod_{n=1}^N (-n^2)} \end{aligned} \quad (5.88)$$

式中, 带一撇的表示不计入  $m = 0$  的项。用

$$(-1)^m a_m = \frac{Q(m)}{2m \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N (m^2 - n^2)} \quad (5.89a)$$

$$a_0 = \frac{Q(0)}{\prod_{n=1}^N (-n^2)} \quad (5.89b)$$

代入 (5.88) 式, 就可以看出, 它与 (5.87b) 式中的级数具有同样的形式。

现在可以把  $F(u)$  的表示式写成

$$F(u) = 2\pi \frac{\sin \pi u}{\pi u} \frac{Q(u)}{\prod_{n=1}^N (u^2 - n^2)} \quad (5.90)$$

式中,  $Q(u)$  是以  $u$  为自变量的任意  $2N$  次多项式, 对它的限制是  $Q(-u) = Q^*(u)$ 。这个结果说明, 被 (5.90) 式分母抵消了的前  $2N$  个  $\sin \pi u$  的零点, 可通过适当选取  $Q(u)$ , 为  $2N$  个任意设置的新零点所代替。如果  $g(p)$  是一个常数 (指数渐变线), 则  $F(u)$  应正比于  $(\sin \pi u) / \pi u$ 。但是, 在  $g(p)$  展开式中有  $2N + 1$  个有用的系数, 可以重新排列  $(\sin \pi u / \pi u)$  的  $2N$  个零点, 以获得更合适的  $F(u)$ 。这样, 我们就把综合问题化为指定一个任意多项式  $Q(u)$  的问题。为了说明此理论, 下面讨论两个例子。

为了定性地理解应如何规定  $Q(u)$ , 先把  $F(u)$  想象为在  $\beta L$  轴或  $u$  轴上面某一高度上水平延伸橡皮带, 然后把  $F(u)$  的零点设想为橡皮带上被固定在  $u$  轴上的点。如果此橡皮带以很密的间隔被固定到  $u$  轴的许多点上, 那末, 在被固定的两点之间的橡皮带不会比  $u$  轴高出许多。同样, 在这个区域中对应的反射系数也是很小的。在二重零点上, 橡皮带固定的方式是使其斜率也为零。其结果是使橡皮带的高度随离此点的距离更慢地增加。有效零点 (可以把此带固定于其上的点) 的数目是确定的, 等于函数  $\sin \pi u$  的零点。多项式

$Q(u)$ 仅仅是使其零点的位置改变一下。

参阅图5.30, 它表示指数渐变线的特性, 令 $\beta L = \pi$ 的零点移至 $2\pi$ 处, 使此点上形成双重零点。同样令 $3\pi$ 处的零点移至 $4\pi$ 处, 以形成双重零点, 以此类推。则能在每隔一个零点进行这种搬移, 以便在 $u = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8$ 等处产生双重零点的函数 $Q(u)$ , 可以取为

$$Q(u) = \prod_{n=1}^N (u^2 - 4n^2)^2$$

由(5.90)式得

$$F(u) = 2\pi \frac{\sin \pi u}{\pi u} \frac{\prod_{n=1}^N (u^2 - 4n^2)^2}{\prod_{n=1}^N (u^2 - n^2)}$$

现在我们希望使 $N$ 趋向无限大。但是, 在这种情况下, 此乘积不收敛, 所以必须把 $F(u)$ 的表示式改为如下的形式:

$$F(u) = C \frac{\sin \pi u}{\pi u} \cdot \frac{\prod_{n=1}^{2N} (1 - u^2/4n^2)^2}{\prod_{n=1}^N (1 - u^2/n^2)}$$

因为 $Q$ 包含一个任意的常系数, 故这种修改是允许的。所有的常数可以被合并为一个常数 $C$ 。若我们注意到下列正弦函数的无穷乘积表示式

$$\frac{\sin \pi u}{\pi u} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)$$

$$\left[\frac{\sin(\pi u/2)}{\pi u/2}\right]^2 = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u^2}{4n^2}\right)^2$$

就不难看出, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, 则得

$$F(u) = C \left[ \frac{\sin(\pi u/2)}{\pi u/2} \right]^2 \quad (5.91)$$

这就是前面讨论过的具有三角形函数  $d(\ln \bar{Z})/dz$  渐变线的反射系数特性。在这里，是通过直接综合的方法，得出了这个等距双重零点渐变线的解。由图5.31可以看出，双重零点的指定使  $F(u)$  (即  $\rho_i$ ) 在零点之间保持很小的值。如前面指出的那样，根据 (5.91) 式， $g(p)$  的付立叶级数展开式的系数  $a_n$  为

$$a_n = -\frac{1}{2\pi} F(n) = -\frac{C}{2\pi} \left[ \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} \right]^2 \quad (5.92)$$

读者不难证明，具有上面这个系数的  $g(p)$  ((5.87 a) 式) 的展开式是一个三角形波。为了确定常数  $C$ ，对 (5.81 a) 式积分得

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(p) dp = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d(\ln \bar{Z})}{dp} dp = \ln(\bar{Z}) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \ln \bar{Z}_L$$

但由 (5.84) 式得

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(p) dp = 2\pi a_0$$

所以

$$a_0 = -\frac{1}{2\pi} \ln \bar{Z}_L \quad (5.93)$$

现在由 (5.92) 式可以得出

$$a_0 = -\frac{1}{2\pi} \ln \bar{Z}_L = -\frac{C}{2\pi}$$

所以， $C = \ln \bar{Z}_L$ 。用这一  $C$  值不难证明，与 (5.91) 式中  $F(u)$  相对应的反射系数与 (5.76) 式是一样的。

作为第二个例子，我们研究  $F(u)$  在  $u = \pm 2$  处有三重零点的渐变线的综合。这可以通过把  $u$  等于  $\pm 1$  和  $\pm 3$  处的零点移到  $u = \pm 2$  处的零点上来实现。在  $u = \pm 2$  附近颇大的区域其合成反射系数应保持非常小，在此情况下， $N = 3$ ，并取

$$Q(u) = C(u^2 - 4)^3$$



于是,

$$F(u) = 2\pi C \frac{\sin \pi u}{\pi u} \frac{(u^2 - 4)^3}{(u^2 - 1)(u^2 - 4)(u^2 - 9)}$$

图5.32中画出了  $|F(u)/F(0)|$  的曲线。不出所料,  $F(u)$  在  $|u| = 2$  附近的颇大区域保持很小。因为  $u = 3$  处的零点已经移走, 所以在这一点上  $F(u)$  有较大的值。但是, 对于在  $L \approx \lambda$  附近的频率范围, 这种渐变线是一个良好的设计。

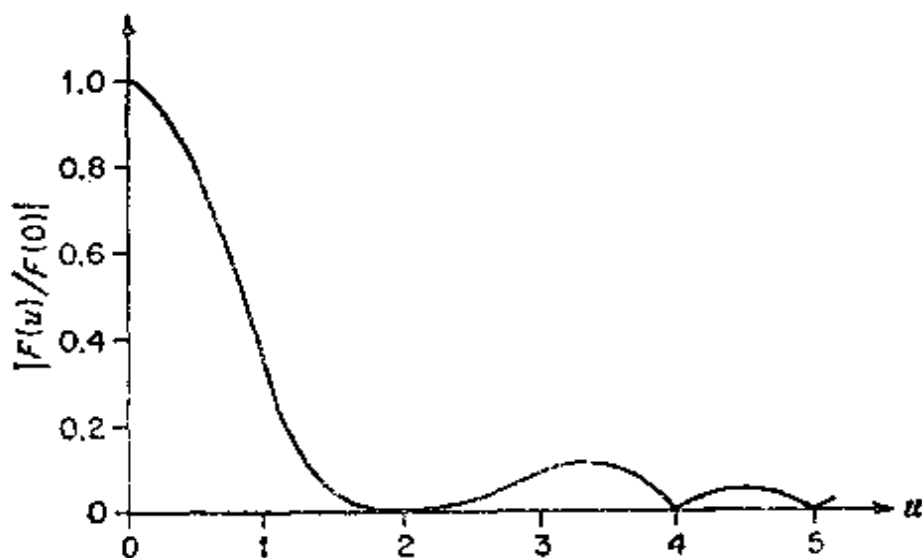


图 5.32 在  $|u| = 2$  处具有三重零点的渐变线的反射系数特性

$g(p)$  展开式的系数为

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} F(0) = \frac{1}{2\pi} \ln \bar{Z}_L$$

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2\pi} F(1) = \frac{0.316}{2\pi} \ln \bar{Z}_L$$

$$a_2 = a_{-2} = 0$$

$$a_3 = a_{-3} = \frac{1}{2\pi} F(3) = -\frac{0.098}{2\pi} \ln \bar{Z}_L$$

$$a_n = a_{-n} = 0 \quad n > 3$$

所以

$$g(p) = \frac{d(\ln \bar{Z})}{dp} = \frac{\ln \bar{Z}_L}{2\pi} (a_0 + 2a_1 \cos p + 2a_3 \cos 3p)$$

$$= \frac{\ln \bar{Z}_L}{2\pi} (1 + 0.632 \cos p - 0.196 \cos 3p)$$

积分后得

$$\ln \bar{Z} = \frac{\ln \bar{Z}_L}{2\pi} (p + 0.632 \sin p - 0.0653 \sin 3p) + C$$

积分常数  $C$  根据在  $p = -\pi$  处,  $\ln \bar{Z} = 0$ ; 或在  $p = \pi$  处,  $\ln \bar{Z} = 0$  的条件来确定。于是得  $C = \frac{1}{2} \ln \bar{Z}$ , 和

$$\ln \bar{Z} = \frac{\ln \bar{Z}_L}{2\pi} (p + \pi + 0.632 \sin p - 0.0653 \sin 3p)$$

根据 (5.79 a) 式, 用  $2\pi(z - L/2)$  代替  $p$  后, 就可指明  $\ln \bar{Z}$  与  $z$  的函数关系, 从而完成此渐变线的设计。

由于前面综合方法包含着近似性, 故必须谨慎使用。只要  $d(\ln \bar{Z})/dz$  很小, 此理论就是正确的。也就是说,  $\ln \bar{Z}$  必须为  $z$  的慢变函数, 以便使沿渐变线各处的反射系数非常小, 即  $|\Gamma(z)|^2 \ll 1$ 。这意味着  $|g(p)|$  (从而也就是所有的  $|a_n|$ ) 不允许假定过大的值。从而使  $|F(\ln)|$  也不致太大。若在某一  $u$  值附近零点集中太多, 则在这个区域外的  $F(u)$  可能变得过大, 从而使此理论的精确程度受到影响。这样的“超匹配”设计必须避免。

## ★5.14 切比雪夫渐变线

若使切比雪夫变换器的级数无限地增加, 而保持其总长度不变, 则得到切比雪夫渐变线。此渐变线具有等振幅的旁瓣, 并在以下的两种意义上它是最佳设计, 即当渐变线长度固定时, 旁瓣振幅最小; 或者反过来。在旁瓣振幅给定时, 此渐变线的长度最短。因此, 它是用来衡量其他渐变线和最佳设计差距有多大的一种很好的渐变线。已指出, 当切比雪夫变换器的级数趋向于无限多时, 其反

射系数便成为\*

$$\Gamma_i = \frac{1}{2} e^{-\beta L} \ln \bar{Z}_L \frac{\cos L \sqrt{\beta^2 - \beta_0^2}}{\cosh \beta_0 L} \quad (5.94)$$

式中,  $\beta_0$  是通带低端  $\beta$  的值, 如图 5.33 所示. 当  $\beta$  由零增加到  $\beta_0$  时, 由于在这个范围内  $\cos L \sqrt{\beta^2 - \beta_0^2} = \cos hL \sqrt{\beta_0^2 - \beta_0^2}$ , 故  $\Gamma_i$  的振幅  $\rho_i$  减少到最终值  $(\ln \bar{Z}_L) / (2 \cosh \beta_0 L)$ . 此外, 分子中的

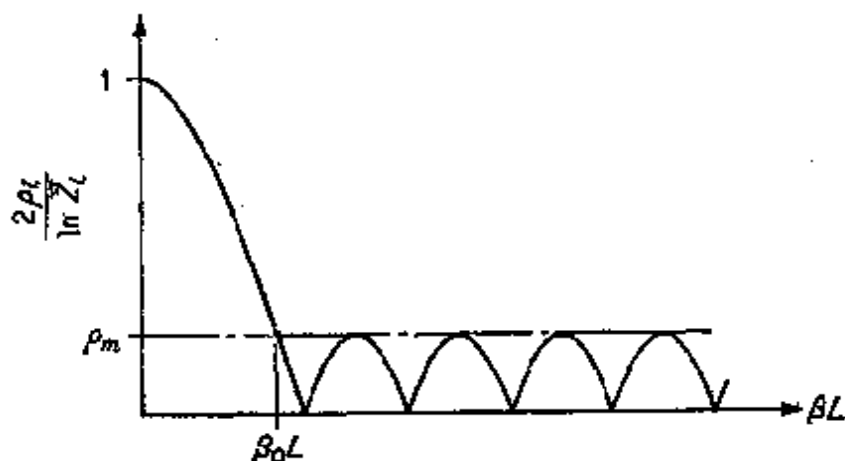


图 5.33 切比雪夫渐变线的反射系数特性

函数为余弦函数, 它在  $\pm 1$  之间摆动, 并产生等振幅的旁瓣. 主瓣对旁瓣的振幅比等于  $\cosh \beta_0 L$ . 因此, 若规定使  $\rho_i$  在通带内保持小于或等于某一最大值  $\rho_m$ , 则在通带低端频率 (它决定  $\beta_0$ ) 被选定的情况下, 此渐变线的长度  $L$  就被固定了. 故得

$$\cosh \beta_0 L = \frac{\ln \bar{Z}_L}{2 \rho_m} \quad (5.95)$$

反之, 若  $\beta_0$  和渐变线的长度  $L$  都给定, 则通带容限  $\rho_m$  就固定了.

前面所得的理论可用来确定函数  $g(p)$ , 由  $g(p)$  即可得出由 (5.94) 式表示的反射系数. 再用变量  $u$  来表示, 就可得函数  $F(u)$  为

\* R.E. Collin, *The Optimum Tapered Transmission Line Matching Section*, Proc. IRE, Vol. 44, pp. 539—548, April, 1956.

$$F(u) = (\ln \bar{Z}_L) \frac{\cos \pi \sqrt{u^2 - u_0^2}}{\cos h\pi u_0} \quad (5.96)$$

式中,  $\pi u = \beta L$ ,  $\pi u_0 = \beta_0 L$ 。函数  $\cos \pi \sqrt{u^2 - u_0^2}$  可用无穷乘积的形式表示为

$$\cos \pi \sqrt{u^2 - u_0^2} = \cos h\pi u_0 \prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \frac{u^2}{u_0^2 + \left(n - \frac{1}{2}\right)^2} \right]$$

它是(5.90)式的多项式  $Q(u)$  当  $N \rightarrow \infty$  时的极限值。与渐变线综合的第一个例子一样,  $\sin \pi u$  项已被无穷乘积  $\prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - u^2/n^2 \right)$  消去。但是, 由于在任何情况下  $2\pi a_n = F(u)$ , 故不需要此展开式。由(5.96)式得

$$a_n = a_{-n} = \frac{1}{2\pi} F(n) = \frac{\ln \bar{Z}_L}{2\pi} \frac{\cos \pi \sqrt{n^2 - u_0^2}}{\cos h\pi u_0} \quad (5.97)$$

于是,

$$\begin{aligned} g(p) &= \frac{\ln \bar{Z}_L}{2\pi \cos h\pi u_0} (\cos h\pi u_0 + 2 \cos \pi \sqrt{1 - u_0^2} \cos p \\ &\quad + 2 \cos \pi \sqrt{4 - u_0^2} \cos 2p + \dots) \\ &= \frac{\ln \bar{Z}_L}{2\pi \cos h\pi u_0} \left( \cos h\pi u_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \pi \sqrt{n^2 - u_0^2} \cos n p \right) \end{aligned} \quad (5.98)$$

对  $p$  积分得

$$\begin{aligned} \ln \bar{Z} &= \frac{\ln \bar{Z}_L}{2\pi \cos h\pi u_0} \left( p \cos h\pi u_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi \sqrt{n^2 - u_0^2}}{n} \sin n p \right) \\ &\quad + C \end{aligned} \quad (5.99)$$

式中,  $C$  为积分常数。为使这个结果变得更加适合于计算, 加上和减去一个相似的级数是适宜的, 即

$$\ln \bar{Z} = \frac{p \ln \bar{Z}_L}{2\pi} + \frac{\ln \bar{Z}_L}{\pi \cos h\pi u_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} \sin n p$$

$$+ \frac{\ln \bar{Z}_L}{\pi \cosh u_0 \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi \sqrt{n^2 - u_0^2} - \cos n\pi}{n} \sin n\rho$$

$$+ C$$

因为  $\cos \pi \sqrt{n^2 - u_0^2}$  当  $n$  变成很大时趋于  $\cos n\pi$ ，所以第二个级数是快速收敛的。第一个级数可以认为是锯齿形函数  $S(\rho)$  的付立叶正弦级数， $S(\rho)$  为

$$S(\rho) = \begin{cases} -\frac{\rho}{2\pi} \frac{\ln \bar{Z}_L}{\cos h\pi u_0} & -\pi < \rho < \pi \\ 0 & \rho = \pm \pi \end{cases} \quad (5.100)$$

这个函数的周期开拓如图 5.34 所示。因而可得

$$\ln \bar{Z} = \frac{\rho \ln \bar{Z}_L}{2\pi} + S(\rho) + \frac{\ln \bar{Z}_L}{\pi \cosh \pi u_0}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi \sqrt{n^2 - u_0^2} - \cos n\pi}{n} \sin n\rho + C$$

在  $\rho = \pi$  时，得  $\ln \bar{Z} = \ln \bar{Z}_L$ ，同时，由于在这一点上  $S(\rho)$  和  $\sin n\rho$  为零，故  $C + \frac{1}{2} \ln \bar{Z}_L = \ln \bar{Z}_L$ ，即  $C = \frac{1}{2} \ln \bar{Z}_L$ 。当  $-\pi < \rho < \pi$  时，最后结果为

$$\ln \bar{Z} = \left( \frac{\rho}{2\pi} + \frac{1}{2} - \frac{\rho}{2\pi \cosh \pi u_0} \right) \ln \bar{Z}_L$$

$$+ \frac{\ln \bar{Z}_L}{\pi \cosh \pi u_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi \sqrt{n^2 - u_0^2} - \cos n\pi}{n} \sin n\rho$$

$$(5.101)$$

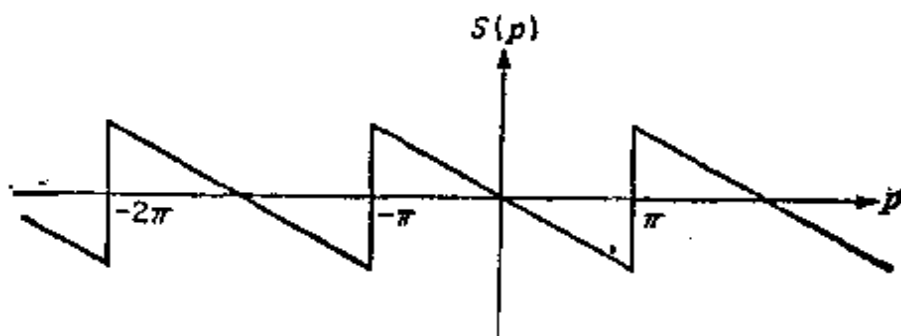


图 5.34 锯齿波函数

上述结果一个有意义的特点是，当  $p$  由  $-\pi - \omega$  变化到  $-\pi + \epsilon$  时（其中， $\epsilon \ll 1$ ）， $\ln \bar{Z}$  以阶跃的方式由 0 变到  $(\ln \bar{Z}_L)/(2 \cosh \pi u_0)$ 。而且，在此渐变线的另一端，当通过  $p = \pi$  的点时， $\ln \bar{Z}$  突然地由  $\ln \bar{Z}_L - (\ln \bar{Z}_L)/(2 \cosh \pi u_0)$  变到  $\ln \bar{Z}_L$ 。这意味着此最佳渐变线每一端的阻抗都有阶跃变化。注意到当频率很高而使此渐变线的长度有好几个波长时，由渐变线平滑部分的反射变为零，就不难理解阻抗跃变的物理原因。这就是，为了仍然保持等幅度的旁瓣，必须使阻抗产生两个阶跃变化，以得到反射系数

$$\rho_i = \frac{\ln \bar{Z}_L}{2} \frac{\cos \beta L}{\cos h \beta_0 L} \quad \text{当 } \beta \gg \beta_0 \text{ 时}$$

计算表明，在同样的通带容限和低端截止频率下，切比雪夫渐变线比  $d(\ln \bar{Z})/dz$  取三角形函数形式的渐变线要短 27%，这是切比雪夫渐变线优越性的一个表现。如果这两种渐变线做成同样长，则切比雪夫渐变线的主瓣对旁瓣的比为 84%，而具有三角形分布渐变线的该比值只有 21%。

## ★5.15 反射系数的精确方程式

输入反射系数  $\Gamma_0$  的基本方程(5.71)式是在忽略各个微分段之间的所有多次反射情况下导出的。下面导出的精确方程式，能用来估计近似理论有效的范围。为了以后的比较，首先按照近似理论导出描述线上任一点  $z$  的总反射系数的微分方程式。

参阅图 5.35，令  $d\Gamma_0$  为由  $z$  处间隔为  $dz$  的特性阻抗的变化  $d\bar{Z}$  引起的反射系数。前面已指出，这个微分反射系数为（参看 (5.70) 式）

$$d\Gamma_0 = \frac{1}{2} \frac{d(\ln \bar{Z})}{dz} dz$$

在  $z$  处的总反射系数为由  $z$  到  $L$  的各微分反射系数  $d\Gamma_0$  的总和。即为

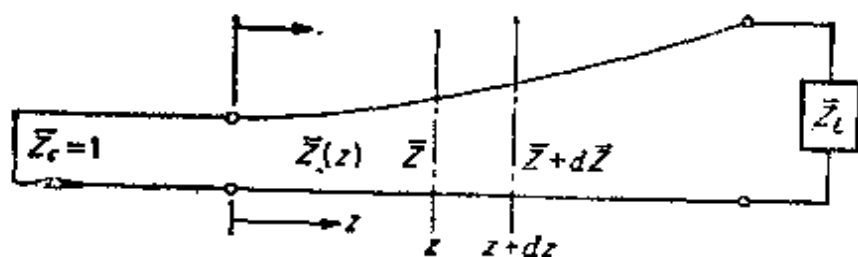


图 5.35 渐变传输线

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2} \int_z^L e^{-i2\beta(z-u)} \frac{d(\ln \bar{Z})}{du} du$$

式中， $u$  为虚设变量，它是由  $z = 0$  处算起向负载端的距离。当以  $z$  处正向传播波为基准时，在  $u$  处引起的反射波的相角为  $2\beta(z-u)$ 。

将  $\Gamma(z)$  对  $z$  求导数得

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dz} &= \frac{2j\beta}{2} \int_z^L e^{i2\beta(z-u)} \frac{d(\ln \bar{Z})}{du} du \\ &\quad - \frac{1}{2} e^{-i2\beta(z-z)} \frac{d(\ln \bar{Z})}{du} \Big|_{u=z} \\ &= 2j\beta\Gamma - \frac{1}{2} \frac{d(\ln \bar{Z})}{dz} \end{aligned} \quad (5.102)$$

这是此渐变线任一点  $z$  上总反射系数的近似微分方程式。

为了求出  $\Gamma$  的精确微分方程式，令  $\bar{Z}_{in}$  为  $z$  处的输入阻抗， $\bar{Z}_{in} + d\bar{Z}_{in}$  为  $z + dz$  处的输入阻抗，则得

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{in} &= \bar{Z} \frac{\bar{Z}_{in} + d\bar{Z}_{in} + j\bar{Z} \tan(\beta dz)}{\bar{Z} + j(\bar{Z}_{in} + d\bar{Z}_{in}) \tan(\beta dz)} \\ &\approx \bar{Z} \frac{\bar{Z}_{in} + d\bar{Z}_{in} + j\bar{Z}\beta dz}{\bar{Z} + j(\bar{Z}_{in} + d\bar{Z}_{in})\beta dz} \\ &\approx (\bar{Z}_{in} + d\bar{Z}_{in} + j\bar{Z}\beta dz) \left( 1 - j \frac{\bar{Z}_{in}}{\bar{Z}} \beta dz \right) \\ &\approx \bar{Z}_{in} + d\bar{Z}_{in} + j\beta \bar{Z} dz - j \frac{\bar{Z}_{in}}{\bar{Z}} \beta dz \end{aligned}$$

此式化简过程中，已用 $\beta dz$ 代替了 $\tan(\beta dz)$ ，并忽略了两个微分项的乘积，以及用了如下的近似式：

$$\left[ \bar{Z} + j(\bar{Z}_{in}\beta dz) \right]^{-1} \approx \bar{Z}^{-1} \left( 1 - j \frac{\bar{Z}_{in}}{\bar{Z}} \beta dz \right)$$

来代替上式中第二式的分母。把上面 $\bar{Z}_{in}$ 的表示式整理后得

$$\frac{d\bar{Z}_{in}}{dz} = j\beta \left( \frac{\bar{Z}_{in}^2}{\bar{Z}} - \bar{Z} \right)$$

另一方面， $\bar{Z}_{in}$ 也可写为

$$\bar{Z}_{in} = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \bar{Z}$$

所以

$$\frac{d\bar{Z}_{in}}{dz} = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \frac{d\bar{Z}}{dz} + \frac{2\bar{Z}}{(1-\Gamma)^2} \frac{d\Gamma}{dz}$$

把 $d\bar{Z}_{in}/dz$ 的两个方程式联立起来，用 $\bar{Z}(1+\Gamma)/(1-\Gamma)$ 代替 $\bar{Z}_{in}$ ，并利用关系式 $\bar{Z}^{-1} d\bar{Z}/dz = d(\ln \bar{Z})/dz$ ，最后得

$$\frac{d\Gamma}{dz} = 2j\beta\Gamma - \frac{1}{2}(1-\Gamma^2) \frac{d(\ln \bar{Z})}{dz} \quad (5.103)$$

如果把(5.103)与(5.102)式比较，则可看出，近似方程式与精确方程式的不同，只在于 $d(\ln \bar{Z})/dz$ 项的系数差 $1-\Gamma^2$ 倍。若沿线各点的 $|\Gamma^2| \ll 1$ ，则可望由近似方程得到很接近于精确方程的结果。

精确方程式(5.103)称为李卡其方程，由于有 $\Gamma^2$ 项，故它是一个非线性方程，且不具有熟知的通解。这个方程只在某些特定情况下（如像习题5.28中指数渐变线那样的情况）才能够积分。但是，应用精确理论不会由于缺少(5.103)式的通解，而发生那么多的实际困难，因为当不能像一般渐变线那样确定特性阻抗 $\bar{Z}$ 时，数值积分或迭代法总是可以应用的。若此渐变线变化非常慢，则在 $z$ 平面上的 $\bar{Z}(z)$ 可取与该渐变线具有同样横截面尺寸的均匀线的特性阻抗。而对这种慢变化的渐变线，近似理论是有效的，并能给出良好的结果。所以，不需要用更复杂的李卡其方程。对于快变化的渐变



线，沿线的场结构被扰动到这样的程度，以至不能用简单的方法确定  $\bar{Z}(z)$ 。事实上，为了确定  $\bar{Z}(z)$ ，不得不去解新的边值问题，并应由这个解得出沿线反射系数的值。因此，可以断定，除了慢变化的渐变线外，不可能确定  $\bar{Z}(z)$ ，故精确方程式在实际中是不重要的。

对于波导渐变线，由于  $\beta$  是横截面尺寸的函数，因而， $\beta$  沿此渐变线是  $z$  的函数。在此情况下，为了对近似方程(5.102)进行积分，引入如下的辅助变量  $\theta$ ：

$$\theta = \int_0^z 2\beta(z) dz \quad d\theta = 2\beta dz$$

所以

$$\frac{d}{dz} = \frac{d}{d\theta} \frac{d\theta}{dz} = 2\beta \frac{d}{d\theta}$$

于是得

$$\frac{d\Gamma}{dz} = 2\beta \frac{d\Gamma}{d\theta} = 2j\beta\Gamma - \beta \frac{d(\ln \bar{Z})}{d\theta}$$

或

$$\frac{d\Gamma}{d\theta} = j\Gamma - \frac{1}{2} \frac{d(\ln \bar{Z})}{d\theta} \quad (5.104)$$

对它积分不难得到(两边乘  $e^{-j\theta}$ ，并注意到  $d\Gamma e^{-j\theta}/d\theta = -j\Gamma e^{-j\theta} + e^{-j\theta} d\Gamma/d\theta$ )

$$\Gamma(\theta) e^{-j\theta} \Big|_0^{\theta_0} = -\frac{1}{2} \int_0^{\theta_0} e^{-j\theta} \frac{d(\ln \bar{Z})}{d\theta} d\theta$$

式中

$$\theta_0 = \int_0^L 2\beta dz$$

若在  $z = L$  处  $\bar{Z} = \bar{Z}_L$ ，则  $\Gamma(\theta_0) = 0$ 。而由于  $\Gamma(0) = \Gamma_1$ ，故得

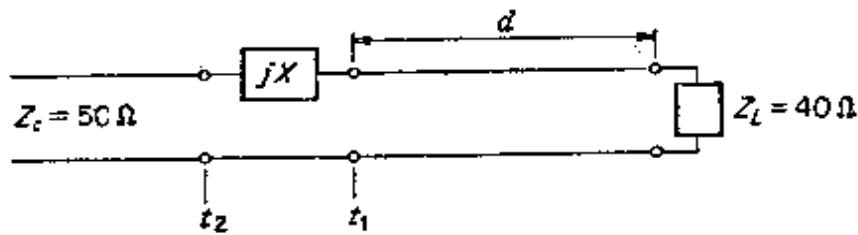
$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\theta_0} e^{-j\theta} \frac{d(\ln \bar{Z})}{d\theta} d\theta \quad (5.105)$$

用新的变量  $\theta$  表示以后，这个问题在形式上就与前面相同了。但是，确定为  $\theta$  函数的  $\overline{Z}(\theta)$ ，在转换回  $z$  的函数时可能相当困难。因此，可能难以作出适用于(5.105)式的普遍综合程序，虽然，除了最后的步骤，即为了确定渐变线的形状而把  $\overline{Z}(\theta)$  表示为  $z$  的函数这一点以外，在原则上它与前面研究过的问题，在形式上是相同的。

## 习 题

5.1 试证明在反射系数平面上  $R = \text{常数}$  和  $x = \text{常数}$  的曲线是由(5.6a)式和(5.6b)式给出的圆。

5.2 在下图的电路中，为使  $t_1$  平面上  $Z_{in}$  的电阻部分等于 50 欧姆， $d$  的最小值应该为何值？并求使  $t_2$  平面上的  $Z_{in}$  等于 50 欧姆时  $jX$  所需要的数值。



习题 5.2

5.3 在端接归一化阻抗  $\overline{Z}_L$  的某一传输线上，已测得驻波比  $S$  等于 2，电压最小值出现在离负载  $\lambda/4$  处。问  $\overline{Z}_L$  为何值？并求使此负载与该线匹配的并联单枝节的位置和长度。

5.4 若用串联枝节去匹配习题5.3中给定的负载，求枝节长度和接入的位置。

5.5 归一化负载  $\overline{Z}_L = 2$  接到一传输线上。在负载上出现电压的最大值还是最小值？为在频率  $f_1$ （其对应波长为  $\lambda_1$ ）下匹配负载与传输线，试求并联枝节的位置与长度。在枝节参数和负载固定时，设波长增加到  $1.1\lambda_1$ ，问新的枝节电纳值是多少？线上的驻波比为何值？设波长为  $\lambda_1$  时把该枝节向波源方向移动到离其原来位

置 $\lambda_1/2$ 处，当波长增加到 $1.1\lambda_1$ 时，线上的驻波比为何值？说明当枝节放在距负载较远处时，匹配的频率敏感性较高。

5.6 用间隔为 $0.25\lambda$ 的双枝节来匹配归一化导纳为 $\overline{Y}_L = 0.5 + j1$ 的负载。试求所需的枝节电纳。

5.7 能否用枝节间隔为 $\lambda/10$ 的双枝节调配器，来匹配归一化导纳为 $\overline{Y}_L = 2.5 + j1$ 的负载？

5.8 能匹配归一化负载导纳 $\overline{Y}_L = 1.5 + j2$ 的双枝节调配器，若其枝节间隔限制在大于 $\lambda/4$ ，问两个枝节最小间隔为何值？若此间隔必须小于 $\lambda/4$ ，问能够使用的枝节最大间隔为何值？

5.9 试证明 $d = \lambda/4$ 的双枝节调配器枝节电纳所需要的值为

$$B_1 = -B_L \pm (G_L(1 - G_L))^{1/2}$$

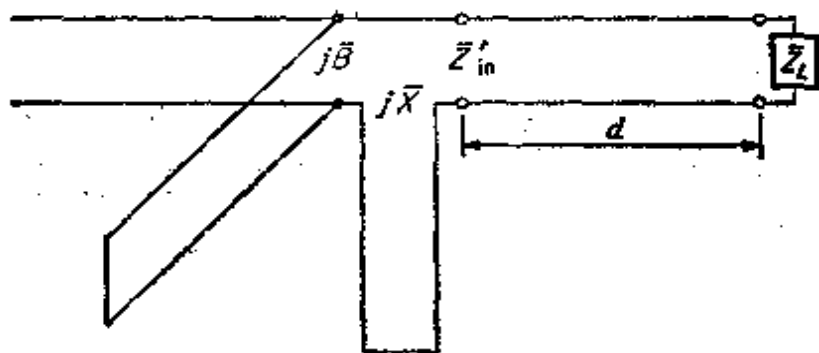
$$B_2 = \pm \left( \frac{1 - G_L}{G_L} \right)^{1/2}$$

提示：当 $\tan\beta d$ 变为无限大时，对(5.20)式和(5.21)式取极限。

5.10 间隔 $d = 0.49\lambda$ 的双枝节调配器使归一化负载 $\overline{Y}_L = 4 + j4$ 得到匹配。试应用(5.20)式和(5.21)式求所需要的枝节电纳值。若现在提高频率，使 $\lambda$ 变为 $\lambda_1$ ，其中的 $d = 0.5\lambda_1$ ，求线上的驻波比 $S$ 。用此习题来说明高频敏感性与枝节间隔接近于 $\lambda/2$ 有关。

5.11 用衰减常数为 $\alpha = 0.01$ 奈贝/米的线作为短路枝节。试利用公式 $Y_{in} = Y_0 \coth(\alpha + j\beta)l$ ，求此枝节所能给出的归一化电纳最大值。若 $\alpha = 0.02$ ，枝节电纳所能得到的最大值为何值？

5.12 设有图示的串并联匹配电路。当离任意负载 $\overline{Y}_L = \overline{G}_L + j$



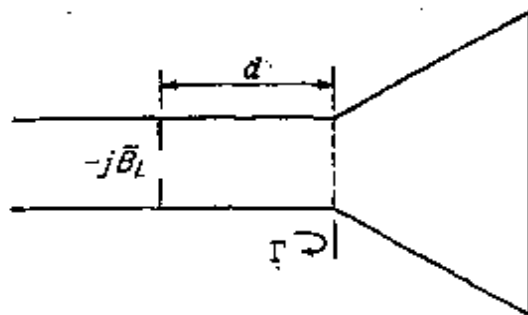
$\bar{B}_L$  距离为  $d$  处匹配时，串联枝节的电抗和并联枝节的电纳为何值？

提示：注意在并联枝节位置上的  $\bar{Y}_{in}$  等于  $(j\bar{X} + \bar{Z}_{in}')^{-1}$ ，式中的  $\bar{Z}_{in}'$  恰好是串联枝节右边的输入阻抗。再加上条件  $\bar{Y}_{in} = 1 + j\bar{B}$ ，就可得出所需的  $j\bar{X}$  的值。

5.13 利用史密斯圆图，用图解的方法解习题5.12。

提示： $\bar{Y}_{in}$  必须落在  $\bar{G} = 1$  的圆上。而  $\bar{Y}_{in}$  可由  $\bar{Z}_{in} = j\bar{X} + \bar{Z}_{in}'$  点绕圆图转  $180^\circ$  得到。所以，为了使  $\bar{Y}_{in}$  落在  $\bar{G} = 1$  的圆上，可选取  $j\bar{X}$  使  $\bar{Z}_{in}$  落在转过了  $180^\circ$  的  $\bar{R} = 1$  的圆上。

5.14 一个喇叭天线由矩形波导馈电，其中传播  $TE_{10}$  模。接头处产生的反射系数为  $\Gamma = 0.3e^{j\pi/4}$ 。此喇叭的归一化输入导纳为多少？求出使波导与喇叭匹配时所需要的归一化电纳值，以及用波导波长表示的由电感性膜片接入处到喇叭的距离  $d$ 。



习题 5.14

5.15 在  $f = 10000$  兆赫时，匹配  $100$  欧姆的负载与特性阻抗为  $50\Omega$  的线（空气填充），所需要的  $\lambda/4$  变换器的长度和阻抗为何值？保持反射系数小于  $0.1$  时的工作频段为何范围？

5.16 试设计两节二项式变换器，以匹配习题5.15给出的负载。当  $\rho_{max} = 0.1$  时，所得到的带宽为多宽？

5.17 试设计一个三节二项式变换器，来匹配  $100$  欧姆负载与特性阻抗为  $50$  欧姆的线，设其容许的最大电压驻波比为  $1.1$ 。能得到多宽的带宽？画出  $\rho - f$  曲线。

5.18 试设计一个两节切比雪夫变换器，来匹配  $100$  欧姆的负载与特性阻抗为  $50$  欧姆的线，设其容许的最大电压驻波比为  $1.2$ 。

得到的带宽有多宽？画出  $\rho-f$  曲线（应用近似理论）。

★5.19 用精确理论设计一个两节切比雪夫变换器，以匹配一归一化负载  $\overline{Z}_L = 5$  与一传输线，要求的相对带宽为 0.6。总的  $\rho_m$  为何值？

★5.20 试设计一个三节切比雪夫变换器（精确理论），以匹配习题 5.19 中所给定的负载，所要求的带宽同上。计算  $\rho_m$  并指出所获得的改善。

★5.21 设  $x_i$  是  $T_N(x)$  的一个零点，即  $T_N(x_i) = 0$ 。并设  $\cos\theta$  的对应值为  $\cos\theta_i$ 。注意当  $\sec\theta_m \cos\theta = \sec\theta_m \cos\theta_i$  时， $T_N(\sec\theta_m \cos\theta) = 0$ 。利用结果

$$T_N(\cos\varphi) = \cos N\varphi$$

去计算  $T_2(x)$  的各个零点。注意这些零点出现在  $\cos 2\varphi = 0$ ，即  $\varphi = \pi/4, 3\pi/4$  和  $x_i = \cos\varphi_i$  时。利用这些结果和关系式  $\sec\theta_m = x_i \sec\theta_i$  去证明两节变换器，

$$P_{LR} = 1 + k^2 T_2^2(\sec\theta_m \cos\theta)$$

可化为 (5.59) 式。注意，当  $\theta = 0$  时， $\rho^2 = (Z_L - Z_0)^2 / (Z_L + Z_0)^2$ ，所以

$$k^2 = \frac{(Z_L - Z_0)^2}{4 Z_L Z_0 T_2^2(\sec\theta_m)}$$

5.22 某一个特殊的应用要求获得反射系数特性为

$$\rho_i = C \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right)^2 \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

其归一化负载阻抗等于 2。问  $C$  必须为何值？利用  $N$  节变换器的近似理论，设计一个接近上面指定的  $\rho_i$  的四级变换器。把  $\rho_i$  展开为付立叶余弦级数，以确定其系数  $\rho_n$ 。画出总的  $\rho_i$  随  $\theta$  变化的曲线，并与指定的特性曲线比较。证明指定的  $\rho_i$  的近似值就是最小方差近似值。若变换器的级数无限地增加，能否得到指定的  $\rho_i$  值？

5.23 利用一个居中的  $\lambda/4$  变换器，来匹配一段空心矩形波导和一段介质填充的矩形波导。求匹配段的长度及相对电容率，已知



习题 5.23

$a = 2.5$  厘米,  $f = 10000$  兆赫,  $\kappa_0 = 2.56$ 。画出  $\rho_i$  随频率  $f$  的变化曲线。注意这里适用的阻抗是  $TE_{10}$  模的波阻抗。 $\kappa_0$  是输出波导中的相对电容率。

5.24 设计一个两节二项式变换器, 去匹配习题 5.23 中的空心波导和介质填充的波导, 已知两个中间匹配段的相对电容率分别为  $\kappa_1$  和  $\kappa_2$ 。画出输入反射系数随频率的变化曲线。

5.25 求  $d(\ln Z)/dz = C \sin \pi(z/L)$  的渐变线  $\rho_i$  的表示式。并确定使在  $z = L$  处,  $\ln Z = \ln Z_L$ ; 在  $z = 0$  处,  $\ln Z = 0$  时的  $C$ 。画出  $\rho_i - \beta L$  曲线。

★5.26 设计一段在  $\beta l = \pm 2\pi$  和  $\pm 3\pi$  处具有双重零点的渐变线。画出此渐变线  $F(u) - u$  曲线。并求作为  $z$  的函数的  $\ln Z$ 。把在  $\pm \pi$  和  $\pm 4\pi$  处的零点移到  $\pm 2\pi$ 、 $\pm 3\pi$  处后, 再做此设计。

★5.27 把在  $\pm 2\pi$ 、 $\pm 3\pi$ 、 $\pm 4\pi$  处的零点移到指定点后, 设计一段在  $\beta L = \pm \pi$ 、 $\pm 1.25\pi$ 、 $\pm 1.5\pi$ 、 $\pm 1.75\pi$  处具有单零点的渐变线。画出总的  $F(u)$  曲线。并求此渐变线的  $\ln Z$  ( $z$  的函数) 的展开式。注意在  $\pi < \beta L < 2\pi$  范围内, 零点靠近的间隔须保持  $\rho_i$  为很小值, 而在  $\pm 3\pi$  和  $\pm 4\pi$  处零点的移去, 会使  $\rho_i$  在这个区域中出现一个大的值。

★5.28 试证明对于指数渐变线来说, (5.103) 式输入反射系数的精确解为

$$\Gamma_i = \frac{A \sin(BL/2)}{B \cos(BL/2) + 2j\beta \sin(BL/2)}$$

式中,  $A = (\ln Z_L)/L$ ,  $B = \sqrt{4\beta^2 - A^2}$ 。

★5.29 试证明沿一慢变化的渐变线的输入阻抗近似微分方程

为 (在所有点上  $Z_{in} \approx Z$ )

$$\frac{dZ_{in}}{dz} = 2j\beta(Z - Z_{in})$$

积分此式, 就可以得出端接负载阻抗为  $Z_L$  的指数线的输入阻抗。

### 参 考 文 献

#### $\lambda/4$ 变换器

1. Collin, R.E., *Theory and Design of Wide Band Multisection Quarter-Wave Transformers*, Proc.IRE, Vol.43, PP.179—185, February, 1955.
2. Coth, S.B., *Optimum Design of Stepped Transmission line Transformers*, IRE Trans., Vol.MTT-3, PP.16—21, April, 1955.
3. Riblet, H.J., *General Synthesis of Quarter-Wave Impedance Transformers*, IRE Trans., Vol.MTT-5, PP.36—43, January, 1957.
4. Young, L., *Tables for Cascaded Homogeneous Quarter-Wave Transformers*, IRE Trans., Vol.MTT-7, PP.233—237, April, 1959. See also IRE Trans., Vol. MTT-8, PP.243—244, for Corrections.
5. Solymar, L., *Some Notes on the Optimum Design of Stepped Transmission line Transformers*, IRE Trans., Vol.MTT-6, PP.374—378, October, 1958.

#### 渐变线

6. Bolinder, F., *Fourier Transforms in the Theory of Inhomogeneous Transmission lines*, Proc.IRE, Vol.38, P.1354, November, 1950.
7. Klopfenstein, R.W., *A Transmission line Tap of Improved Design*, Proc.IRE, Vol.44, PP.31—35, January, 1956.
8. Collin, R.E., *The Optimum Tapered Transmission line Matching Section*, Proc.IRE, Vol.44, PP.539—548, April, 1956.
9. Bolinder, F., *Fourier Transforms in the Theory of Inhomogeneous Transmission lines*, Trans.Roy.Inst.Techol., Stockholm, no. 48, 1951.
10. Matsumaru, K., *Reflection Coefficient of E-plane Tapered Waveguides*, IRE Trans., Vol.MTT-6, PP.143—149, April, 1958.
11. Johnson, R.C., *Design of Linear Double Tapers in Rectangular Waveguides*, IRE Trans., Vol.MTT-7, PP.374—378, July, 1959.

## 第6章 无源微波器件

这一章研究在实验室和微波通信系统中常用的几种微波器件。对其中的某些器件，只作定性的讨论。本章后面部分所讨论的非互易铁氧体器件是特别重要的。

### 6.1 终端器

常用的波导和传输线终端器有两类：一类是匹配负载；另一类是可变短路器。它是一种可调整的电抗性负载。这些终端器广泛地用于实验室，以测量微波电路元件的阻抗或散射参数。匹配负载是吸收全部入射波功率的终端器，因而，它相当于终端接特性阻抗的线。可变短路器是把入射波功率全部反射的终端器。反射波的相位随短路器位置的变化而变化，因而，改变短路器的位置，相当于改变终端器的电抗。

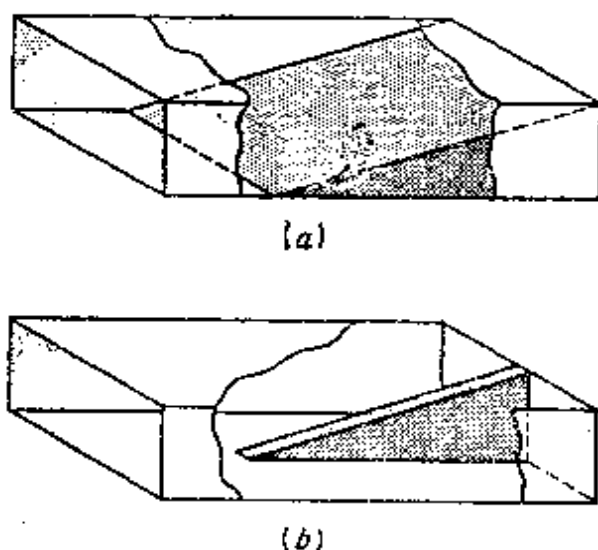


图 6.1 波导匹配负载，(a)有损耗的尖劈；  
(b)渐变的电阻片。

普通的波导匹配负载是嵌入波导中的有耗材料做成的一块渐变的尖劈或板，如图 6.1 所示。因为材料是有损耗的，所以入射波功率被它吸收了。同时，由于它是逐渐地进入有耗材料做成的尖劈中而避免了反射。所以，这种终端器可以认为是一段有损耗的渐变传



输线。通常，全长为一个或一个以上波长的有耗渐变线做成的匹配负载，就足以使它的输入驻波比达到1.01或者更小。

### 可变短路器

用于波导中的可调短路器最简单的形式是用铜或其他良导体做成的活塞，它与波导是密接的，如图6.2所示。利用千分尺的传动，可改变活塞的位置。但是，这种简单的可调短路器在电性能上不是很满意的。在活塞与波导壁之间不规律的接触，使有效的电短路位置无规则地偏离活塞前面的实际短路位置。此外，通过活塞可能引起一些功率漏泄，其结果是使反射系数小于1。采用下面讨论的扼流型活塞，可以解决这些问题。



图 6.2 一种简单的波导短路器

扼流型活塞是  $\lambda/4$  变换器阻抗变换特性应用之一例。例如，设负载阻抗  $Z_L$  接近于零，若通过两节  $\lambda/4$  变换器来看此阻抗，则如图6.3所示那样，由输入端看的阻抗为

$$Z'_s = \left( \frac{Z_1}{Z_2} \right)^2 Z_L \quad (6.1)$$

若取  $Z_2$  远大于  $Z_1$ ，则新的阻抗  $Z'_s$  由于  $Z_L$  乘上因子  $(Z_1/Z_2)^2$  后会比

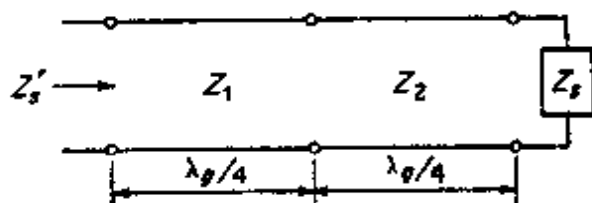


图 6.3 两节  $\lambda/4$  变换器

$Z_L$  更接近于短路。这就是扼流型活塞所应用的基本原理。当频率变化时，这两节变换器就不再是  $\lambda/4$  长，这个优点也自然消失了。但是，只要合理的设计，10%或更宽的带宽是可

以达到的。在要求很严格的应用中，可采用两节以上的  $\lambda/4$  变换器。上述理论适用于在矩形波导中使用的扼流型活塞。

矩形波导中主模  $TE_{10}$  模在波导内壁上的表面电流，沿两侧壁是上下流动的，而在两宽壁上既有横向又有轴向流动。对图 6.2 所示的简单的短路活塞来说，轴向电流必然流过上下两波导壁之间的间隙，并垂直地越过活塞的前表面。沿侧壁流动的电流是上下流动的，不需要越过波导壁与活塞的前表面之间的间隙。可见，不规则接触的表现只由上下两壁上流动的轴向电流引起。为了避免这种不规则的接触，活塞可以做成如图 6.4 的形式。此活塞的宽度是均匀

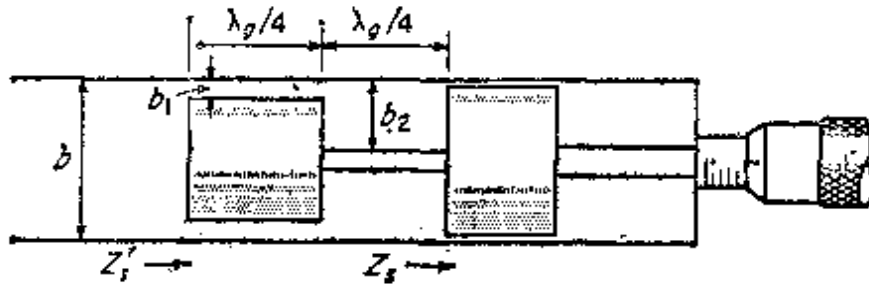


图 6.4 扼流型可调短路活塞(侧视图)

的，且稍比波导内壁宽度小些。但是，活塞的高度却做成不均匀的。前一段长度为  $1/4$  波导波长，而其高度比波导高度  $b$  减低  $2b_1$ 。其间隙  $b_1$  在使前一段波导与上下壁不接触的要求下尽可能的小。第二段的长度也是  $1/4$  波导波长，但在保证活塞机械强度的条件下，使  $b_2$  尽可能的大。最后一段底座，做成与波导滑动配合。这两段  $\lambda/4$  变换器的等效特性阻抗与  $2b_1/b$  和  $2b_2/b$  成正比，并与输入波导的特性阻抗有关。于是，应用 (6.1) 式得归一化输入阻抗为

$$Z_i' = \left( \frac{b_1}{b_2} \right)^2 Z_s$$

通过良好的机械设计， $b_2$  能做得比  $b_1$  大十倍，因而在性能上可以比非扼流型短路活塞改善 100 倍。

和上述活塞稍有差别的另一种活塞（如图 6.5 所示）也是经常使用的。这种活塞采用两段折叠的  $\lambda/4$  变换器。内线在  $aa$  平面上把

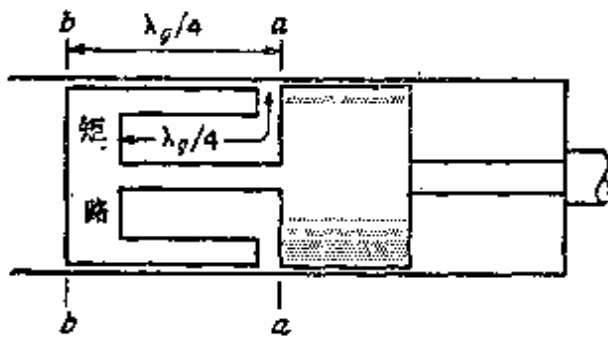


图 6.5 另一种扼流型活塞的结构

短路阻抗变成理想开路。在这一点上，即在开路点或者说无穷大阻抗点上，轴向电流为零。所以，在接触点 $aa$ 上没有电流流过波导壁和活塞之间的间隙。另一段（即外面的） $\lambda/4$ 变换器把 $aa$ 处的开路阻抗变换为活塞前端，即图6.5中 $bb$

平面处的短路阻抗。这种类型的短路活塞具有很好的性能。

这种折叠的 $\lambda/4$ 变换器，也用来做成连接两段波导的扼流接头，以及用于调谐空腔谐振器的旋转接头中等等\*。

## 6.2 衰 减 器

衰减器有固定的和可变的两种类型。只要求提供固定衰减量时使用固定衰减器。而对于常用来测量传输系数的桥式结构则可使用可变衰减器。可变衰减器有许多组成方法，我们只详细地研究一种类型，即旋转式衰减器。用作匹配负载的简单衰减器由一个薄的渐变电阻片组成，电阻片伸入波导的深度是可调的，它通过矩形波导宽壁中心所开的纵向缝隙伸入波导内。这种类型衰减器的衰减量与电阻片伸入的深度以及频率有较复杂的关系。

一种较精密的衰减器是利用一段工作于截止频率以下的长度可调的波导做成的。这类衰减器的缺点，是用减少输入波导与输出波导之间的耦合，而不是用吸收入射功率的办法来衰减其输出。其结果是在较大的衰减时，输入波导中的反射系数接近于1，这往往是不希望的。

到目前为止，已研制成的最满意的精密衰减器也许是旋转式衰

\* 例如参看G. L. Ragan(ed.), "Microwave Transmission Circuits", McGraw-Hill Book Company, New York, 1948.

减器，现在我们对它作较为详细的讨论。这种衰减器的主要部分，包括两段逐渐过渡的矩形—圆波导，和能自由旋转的圆波导中间段，如图6.6。在每一段过渡段的输出端放一块很薄的渐变电阻片，

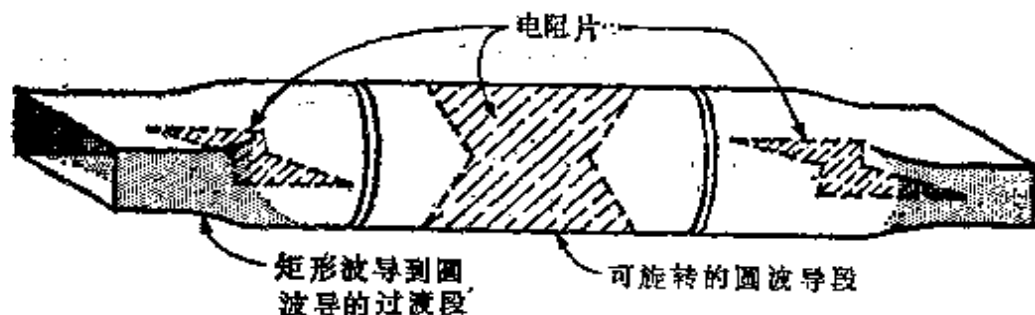


图 6.6 旋转式衰减器的基本构造

其方向平行于矩形波导的宽壁。在圆波导中间段中也放一块类似的电阻片。由矩形波导进来的 $TE_{10}$ 模被变为圆波导中的 $TE_{11}$ 模，由于是逐渐过渡，其反射可以忽略。 $TE_{11}$ 模的极化是使其电场垂直于过渡段中的薄电阻片。这样，此电阻片对 $TE_{11}$ 模不起作用。因为中间段电阻片是能旋转的，即它与进来的 $TE_{11}$ 模电场相对方位是可以变化的，因而，此模的衰减量是可调节的。

参阅图6.7，设电阻片中心置于与 $TE_{11}$ 模电场极化方向成 $\theta$ 角的位置上。沿 $x$ 方向极化的 $TE_{11}$ 模可以分解为沿 $u$ 方向极化和沿 $v$ 方向极化的两个 $TE_{11}$ 模，如图6.7所示。平行于电阻片的那部分场将被吸收，而垂直于电阻片那部分场将传输。但是，进入过渡段以后，传输模又不与这一段的电阻片垂直，所以，会出现一些附加

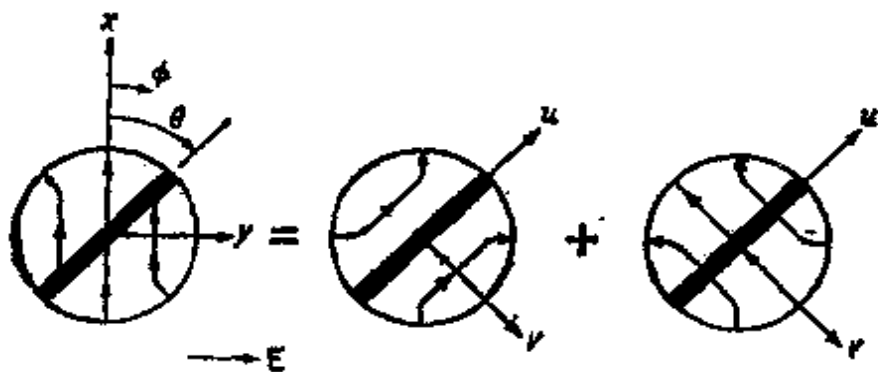


图 6.7  $TE_{11}$ 模分解为两个相互垂直的极化波

衰减。

为了推导出衰减与旋转角  $\theta$  关系的表示式，我们研究  $TE_{11}$  模电场的解析式。取  $x$  方向极化的电场为（表3.4）

$$\mathbf{E} = \frac{J_1(p'_{11}r/a)}{r} \mathbf{a}_r \cos \varphi - \frac{p'_{11}}{a} J'_1 \left( \frac{p'_{11}r}{a} \right) \mathbf{a}_\varphi \sin \varphi \quad (6.2)$$

这里暂不考虑传播因子  $e^{-j\beta z}$ 。由于

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \sin(\varphi - \theta + \theta) = \cos \theta \sin(\varphi - \theta) \\ &\quad + \sin \theta \cos(\varphi - \theta) \end{aligned}$$

同理，

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos(\varphi - \theta + \theta) = \cos \theta \cos(\varphi - \theta) \\ &\quad - \sin \theta \sin(\varphi - \theta) \end{aligned}$$

故（6.2）式可写为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \cos \theta \left[ \frac{J_1}{r} \mathbf{a}_r \cos(\varphi - \theta) - \frac{p'_{11}}{a} J'_1 \mathbf{a}_\varphi \sin(\varphi - \theta) \right] \\ &\quad - \sin \theta \left[ \frac{J_1}{r} \mathbf{a}_r \sin(\varphi - \theta) + \frac{p'_{11}}{a} J'_1 \mathbf{a}_\varphi \cos(\varphi - \theta) \right] \quad (6.3) \end{aligned}$$

它相当于把  $\theta$  处认为是角变量  $\varphi$  的新原点。（6.3）式括号中的第一项是与图6.7中沿  $u$  轴电场一致的  $TE_{11}$  模，括号中的第二项是与  $v$  轴极化一致的  $TE_{11}$  模。由于第一部分完全被吸收，故只有乘上  $\sin \theta$  的那部分传送到输出过渡段。若假定中间段中的电阻片平行于  $y$  轴，则只有取  $x$  方向极化的传输场分量才能传输。过渡段输入端的场为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\sin \theta \left[ \frac{J_1}{r} \mathbf{a}_r \sin(\varphi - \theta) + \frac{p'_{11}}{a} J'_1 \mathbf{a}_\varphi \cos(\varphi - \theta) \right] \\ &= \sin^2 \theta \left( \frac{J_1}{r} \mathbf{a}_r \cos \varphi - \frac{p'_{11}}{a} J'_1 \mathbf{a}_\varphi \sin \varphi \right) \\ &\quad - \sin \theta \cos \theta \left( \frac{J_1}{r} \mathbf{a}_r \sin \varphi + \frac{p'_{11}}{a} J'_1 \mathbf{a}_\varphi \cos \varphi \right) \quad (6.4) \end{aligned}$$

其中的第一部分为沿  $x$  方向极化的  $TE_{1,1}$  模，且是传输波。比较 (6.4) 式和 (6.2) 式表明，传输场振幅降到入射场振幅的  $\sin^2 \theta$  倍。所以，若用分贝表示，则其所产生的衰减为

$$\alpha = -20 \log(\sin^2 \theta) = -40 \log(\sin \theta) \quad (6.5)$$

(6.5) 式一个值得注意的特点是衰减只随旋转角  $\theta$  而变化，其结果被证实是很接近于实际的。

### 6.3 相 移 器

相移器是当波通过时能产生可调相角变化的器件。理想的情况是，它与该输入线和输出线完全匹配，且其衰减应为零。这些要求在一个合理的近似程度上是能够满足的。相移器有各种各样的结构\*。本节讨论两种类型，即线性相移器和旋转式相移器。

#### 线性相移器

线性相移器由置于矩形波导中的三块介质板组成，如图 6.8 所示。其居中的板通过适当的传动机构可沿纵向自由移动。该传动机

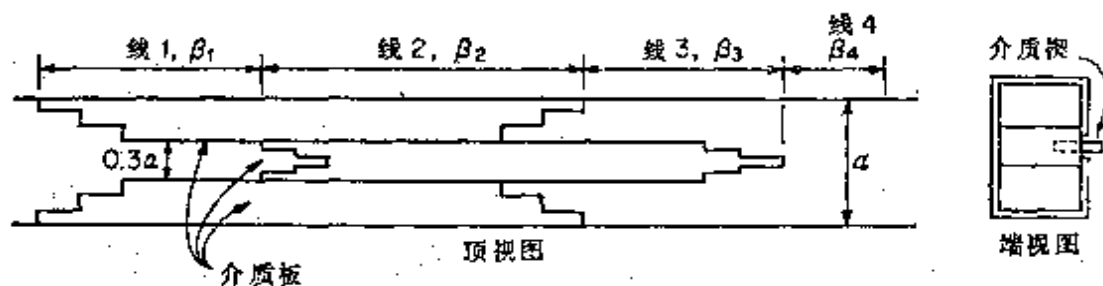


图 6.8 线性相移器

构可以用一个介质楔锁定，介质楔由开在波导的一个宽面上的长中心隙缝伸出来。介质板的每一端做成阶梯的形式，以作为宽频带多节  $\lambda/4$  变换器，使部分填充波导与空的和全部填充的波导匹配。当

\* R. E. Collin, *Waveguide Phase Changer*, *Wireless Eng.*, vol. 32, pp. 82-88, March, 1955.

中间板的宽度约为 $0.3a$ 时，可以算出两个传播常数 $\beta_1$ 和 $\beta_3$ 之和大于 $\beta_2 + \beta_4$ 。若中间板向右移动一个距离 $x$ ，则它使线1和线3伸长 $x$ ，使线2和线4缩短同样距离 $x$ 。结果，通过这种结构的波的相位变化为

$$\Delta\varphi = ((\beta_1 + \beta_3) - (\beta_2 + \beta_4))x \quad (6.6)$$

因而，得到与位移成正比的相移。当此板的相对电容率增加时，所得到的相移量也增加。当材料的相对电容率为2.56和三厘米波导的 $a = 0.9$ 英寸时，所得到的相移约为0.4弧/厘米。16厘米左右的位移所得相位变化将超过 $360^\circ$ 。由于相移器的作用各不相同，所以刻度长度和位移要足够大，以便精确地调整和读数。用于三厘米波长的相移器具体设计数据参看有关文献。

### 旋转式相移器

旋转式相移器是广泛用于微波测量的一种精密相移器。它的基本结构类似于旋转式衰减器，只是中间电阻片被一个半波长板代替，外边两个电阻片被两个 $\lambda/4$ 板代替。这两个 $\lambda/4$ 板把线极化 $TE_{11}$ 模转化为圆极化模，或者反过来。半波长板产生的相移，等于旋转角 $\theta$ 的两倍。下面分析其工作原理。

圆极化场就是其 $x$ 和 $y$ 分量的大小相等但时间相位差 $90^\circ$ 的场\*。 $\lambda/4$ 板是一种这样的器件，即当线极化波入射到它上面时，便产生一个圆极化波。图6.9表示旋转式相移器的基本结构。 $\lambda/4$ 板可以由如图6.9b所示的介质材料片做成。当 $TE_{11}$ 模的极化方向平行于该板时，其传播常数 $\beta_1$ 大于它的极化方向垂直于该板时的情况，即 $\beta_1 > \beta_2$ ，其中 $\beta_2$ 是垂直极化传播常数。 $\lambda/4$ 板的长度 $l$ 的选取是使相位差 $(\beta_1 - \beta_2)l$ 等于 $90^\circ$ 。介质板的两端做成渐变的，使反射减少到可以忽略。半波长板除了其长度增加到使它产生 $180^\circ$ 的相差外，在结构上与 $\lambda/4$ 板是类似的。

- 同前面一个注释中的文献。
- 在6.6节详细地讨论圆极化场。

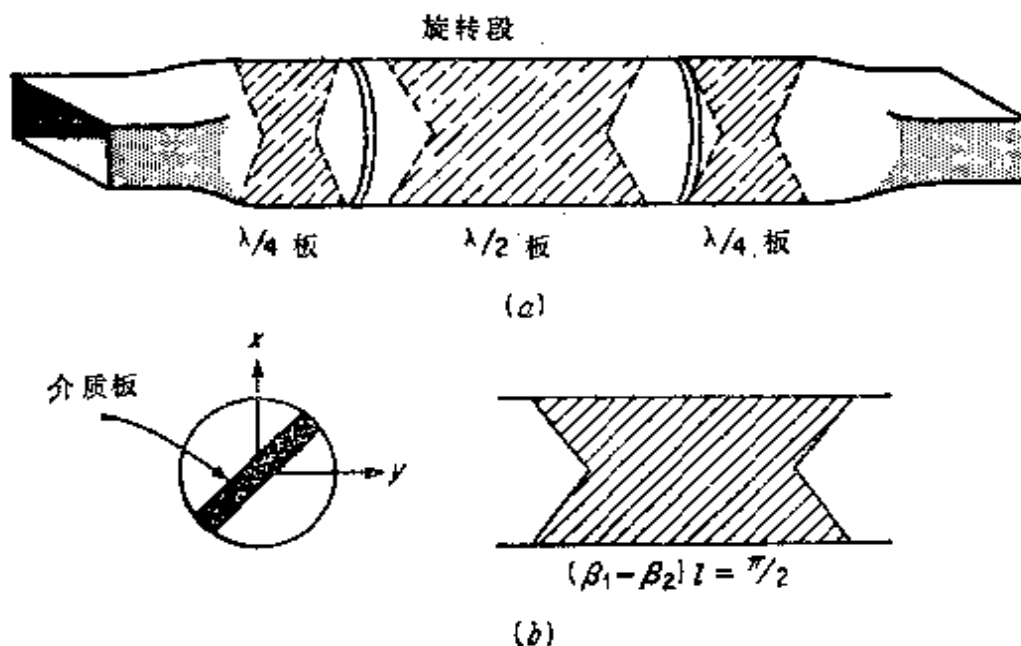


图 6.9 (a) 旋转式相移器; (b)  $\lambda/4$  板

在旋转式相移器中,  $\lambda/4$  板处于与矩形波导的宽壁成  $45^\circ$  角的位置。进来的  $TE_{11}$  模可以被分解为两个极化波, 即与  $\lambda/4$  板平行的和垂直的两个极化波, 如图 6.10 所示。假定入射模为 (6.2) 式,

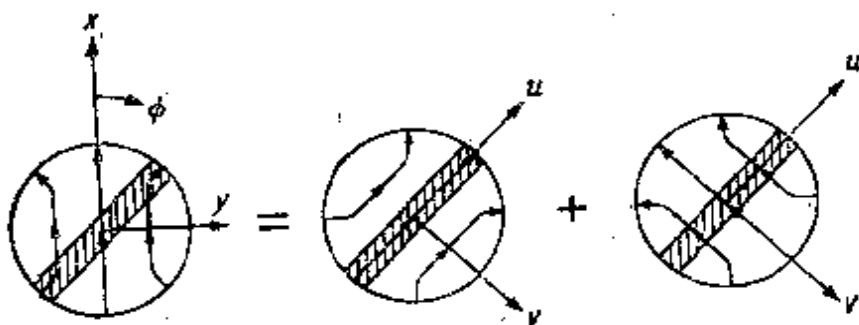


图 6.10 入射的  $TE_{11}$  模的分解

即

$$\mathbf{E} = \frac{J_{11}}{r} \mathbf{a}_r \cos \varphi - \frac{P_{11}}{a} J'_{11} \mathbf{a}_\varphi \sin \varphi$$

设用下式代替  $\cos \varphi$ :



$$\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

用下式代替 $\sin\varphi$ ,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

则上述的入射场的表示式可写成

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \quad (6.7a)$$

式中

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \frac{J_1}{r} a_r \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{p'_{11}}{a} J'_1 a_\varphi \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (6.7b)$$

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \frac{J_1}{r} a_r \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{p'_{11}}{a} J'_1 a_\varphi \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (6.7c)$$

场 $\mathbf{E}_1$ 的极化平行于该介质板，而场 $\mathbf{E}_2$ 的极化垂直于该介质板。由于 $(\beta_2 - \beta_1)l = -\pi/2$ ，故这些场通过 $\lambda/4$ 板后，便成为

$$\mathbf{E}'_1 = \mathbf{E}_1 e^{-i\beta_1 l} \quad (6.8a)$$

$$\mathbf{E}'_2 = \mathbf{E}_2 e^{-i\beta_2 l} = \mathbf{E}_2 e^{-i\beta_1 l} e^{-i(\beta_2 - \beta_1)l} = j\mathbf{E}_2 e^{-i\beta_1 l} \quad (6.8b)$$

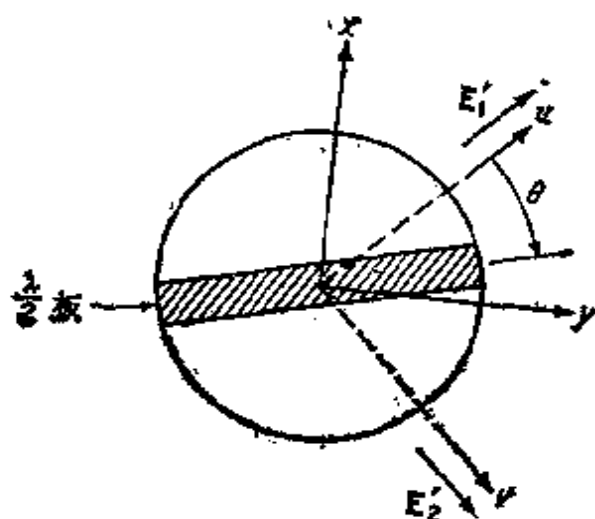


图 6.11 半波长板的方位

合成场由振幅相等时间相位差 $90^\circ$ 相互正交极化的 $TE_{11}$ 模组成，因而构成了一个圆极化场。

其次，研究半波长板对上述圆极化场的作用。设半波长板对 $\lambda/4$ 板转过一角度 $\theta$ ，如图6.11所示。则把角变量 $\varphi$ 的原点变到 $\pi/4 + \theta$ 点，即利用如下关系式：

$$\begin{aligned}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4} - \theta + \theta\right) \\ &= \cos\theta \cos\left(\varphi - \theta - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\theta \sin\left(\varphi - \theta - \frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) &= \sin\theta \cos\left(\varphi - \theta - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\theta \sin\left(\varphi - \theta - \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

就可以用相对于半波长板平行极化和垂直极化的  $TE_{11}$  模来表示场  $\mathbf{E}'_1 + \mathbf{E}'_2$ 。于是可得

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\beta_1 l} \left\{ \cos\theta \left[ \frac{J_1}{r} \mathbf{a}_r \cos\left(\varphi - \theta - \frac{\pi}{4}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{p'_{11}}{a} J'_1 \mathbf{a}_\varphi \sin\left(\varphi - \theta - \frac{\pi}{4}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \sin\theta \left[ \frac{J_1}{r} \mathbf{a}_r \sin\left(\varphi - \theta - \frac{\pi}{4}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{p'_{11}}{a} J'_1 \mathbf{a}_\varphi \cos\left(\varphi - \theta - \frac{\pi}{4}\right) \right] \right\} \quad (6.9a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'_2 &= -\frac{j\sqrt{2}}{2} e^{-j\beta_1 l} \left\{ \cos\theta \left[ \frac{J_1}{r} \mathbf{a}_r \sin\left(\varphi - \theta - \frac{\pi}{4}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{p'_{11}}{a} J'_1 \mathbf{a}_\varphi \cos\left(\varphi - \theta - \frac{\pi}{4}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sin\theta \left[ \frac{J_1}{r} \mathbf{a}_r \cos\left(\varphi - \theta - \frac{\pi}{4}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{p'_{11}}{a} J'_1 \mathbf{a}_\varphi \sin\left(\varphi - \theta - \frac{\pi}{4}\right) \right] \right\} \quad (6.9b)\end{aligned}$$

平行于半波长板的极化场有一个按  $\cos(\varphi - \theta - \pi/4)$  变化的  $r$  分量，而垂直极化波的电场有一个按  $\sin(\varphi - \theta - \pi/4)$  变化的  $r$  分量。因而，由 (6.9) 式得

$$\mathbf{E}'_1 + \mathbf{E}'_2 = \mathbf{E}'_3 + \mathbf{E}'_4 \quad (6.10a)$$

式中

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}'_1 &= \sqrt{\frac{2}{2}} e^{-j\beta_1 l} (\cos \theta - j \sin \theta) \left[ \frac{J_1}{r} \mathbf{a}_r \cos\left(\varphi - \theta - \frac{\pi}{4}\right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\rho'_{11}}{a} J'_1 \mathbf{a}_\varphi \sin\left(\varphi - \theta - \frac{\pi}{4}\right) \right] \\
 &= \sqrt{\frac{2}{2}} e^{-j\beta_1 l - j\theta} \left[ \frac{J_1}{r} \mathbf{a}_r \cos\left(\varphi - \theta - \frac{\pi}{4}\right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\rho'_{11}}{a} J'_1 \mathbf{a}_\varphi \sin\left(\varphi - \theta - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (6.10b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}'_2 &= \frac{-j\sqrt{2}}{2} e^{-j\beta_1 l - j\theta} \left[ \frac{J_1}{r} \mathbf{a}_r \sin\left(\varphi - \theta - \frac{\pi}{4}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\rho'_{11}}{a} J'_1 \mathbf{a}_\varphi \cos\left(\varphi - \theta - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (6.10c)
 \end{aligned}$$

由于  $2(\beta_2 - \beta_1)l = -\pi$ ，故经过长为  $2l$  的半波长板以后，此场便成为

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}'_1 e^{-2j\beta_1 l} \quad (6.11a)$$

$$\mathbf{E}_4 = \mathbf{E}'_2 e^{-2j\beta_2 l} = \mathbf{E}'_2 e^{-2j(\beta_2 - \beta_1)l - 2j\beta_1 l} = -\mathbf{E}'_2 e^{-2j\beta_1 l} \quad (6.11b)$$

这个新的场在输出波导中可以再一次分解为两个  $TE_{10}$  模，其极化分别平行于和垂直于  $\lambda/4$  板。若假定此板平行于  $\lambda/4$  板，则把角变量  $\varphi$  参考  $\pi/4$  为原点，就能得到所需要的分解。若仿照前面使用的方法，则得

$$\mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4 = \mathbf{E}'_3 + \mathbf{E}'_4 \quad (6.12a)$$

式中

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}'_3 &= \sqrt{\frac{2}{2}} e^{-3j\beta_1 l - j2\theta} \left[ \frac{J_1}{r} \mathbf{a}_r \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\rho'_{11}}{a} J'_1 \mathbf{a}_\varphi \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (6.12b)
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}'_4 = \frac{j\sqrt{2}}{2} e^{-3j\beta_1 l - j2\theta} \left[ \frac{J_1}{r} \mathbf{a}_r \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right.$$

$$\left. + \frac{p'_{11}}{a} J'_1 a_r \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \quad (6.12c)$$

最后，经过第二个 $\lambda/4$ 板之后，输出场便成为

$$E_0 = E'_3 + E'_4 \quad (6.13a)$$

式中

$$E'_3 = E'_3 e^{-j\beta_1 l} \quad (6.13b)$$

$$E'_4 = E'_4 e^{-j\beta_1 l} = jE'_4 e^{-j\beta_1 l} \quad (6.13c)$$

把场 $E'_3$ 和 $E'_4$ 合起来，则得

$$E_0 = e^{-j\beta_1 l} e^{-2j\theta} \left( \frac{J_1}{r} a_r \cos \varphi - \frac{p'_{11}}{a} J'_1 a_r \sin \varphi \right) \quad (6.14)$$

它又是一个线性极化的 $TE_{11}$ 模，其极化方向与由(6.2)式和(6.7)式的入射场的极化方向相同。但是，必须注意其相位已经改变了 $4\beta_1 l + 2\theta$ 。可见，把半波长板转过角度 $\theta$ ，所传送的波的相位变化 $2\theta$ 。相位变化与机械旋转的关系简单，是旋转式相移器的主要优点。

除了用介质板外，圆波导还可以用金属片或金属棒加载，作为产生 $90^\circ$ 和 $180^\circ$ 相移的相移段。福克斯的论文中讨论了这些方法。<sup>\*</sup>

## 6.4 定向耦合器

定向耦合器是具有下述性质的四端口微波接头。图6.12是它的一个略图。理想的定向耦合器具有这样的特性，即由端口1入射的波，只把功率耦合到端口2和3，而不耦合到端口4中去。同理，由端口4入射的功率，只耦合到端口2和3，而不耦合到端口1中去。可见，端口1和4是不耦合的。当波由端口2或3入射时，其功率只耦合到端口1和4，所以，端口2和3也是不耦合的。此外，四个端口都是匹配的，也就是说，若三个端口的终端都接匹配

<sup>\*</sup> A. G. Fox, *An Adjustable Waveguide Phase Changer*, Proc. IRE, vol. 35, pp. 1489—1498, December, 1947.

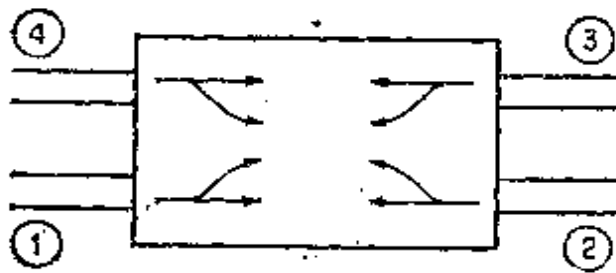


图 6.12 定向耦合器(箭头表示功率流动的方向)

桥。例如，若雷达发射机接到端口 1，天线接到端口 2，微波晶体检波器接到端口 3，匹配负载接到端口 4，则端口 3 中接收到的功率，只与由发射机向天线方向传输的功率成正比。因为天线所反射的波（如果它存在的话）是不耦合到端口 3 的，所以，检波器所监视的是发射机的功率输出。

通常的定向耦合器由两个波导组成，波导的公共壁上开有适当的耦合孔，如图 6.13 所示。由于要求这些器件在一个频段内工作，故不可能在整个频段内得到理想的性能。定向耦合器的性能由两个参数——耦合系数和方向性系数来衡量。设  $P_1$  为端口 1 的入射功率， $P_3$  为端口 3 的正向耦合功率，则用分贝表示的耦合系数为

$$C = 10 \log \frac{P_3}{P_1} \quad (6.15)$$

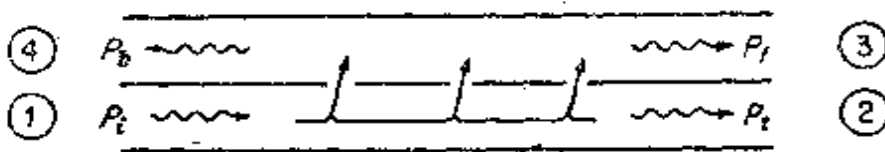


图 6.13 孔耦合波导定向耦合器

理想情况下，端口 4 中反向耦合功率  $P_4$  为零。方向性系数  $D$  用以度量在多大程度上能做到这一点。它的定义是

$$D = 10 \log \frac{P_3}{P_4} \quad (6.16)$$

方向性系数用以衡量耦合到第二个波导所要求的方向上去的功率的多寡。

负载，则第四个端口也呈现端接匹配负载时的特性，因而这个端口中的入射波不会受到反射。

定向耦合器广泛地用为微波测量和功率监视的阻抗

理想定向耦合器的若干特性可以由散射矩阵的对称性和单式性推断出来(见4.7节)。如图6.12所示的定向耦合器,可以不严格地认为是具有如下特性的四端口接头:

$$S_{14} = S_{33} = 0$$

$$S_{11} = S_{22} = 0$$

即端口1和2匹配,且耦合参数 $S_{12}$ 、 $S_{13}$ 、 $S_{24}$ 和 $S_{34}$ 不等于零。于是,此散射矩阵的形式为

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & 0 \\ S_{12} & 0 & 0 & S_{24} \\ S_{13} & 0 & S_{33} & S_{34} \\ 0 & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

若以1行乘3行的复数共轭,并以2行乘4行的复数共轭,则由于散射矩阵的单式性而得

$$S_{13}S_{33}^* = 0 \quad S_{24}S_{44}^* = 0$$

因为 $S_{13}$ 和 $S_{24}$ 假定为非零,故由这两个式子得 $S_{33} = S_{44} = 0$ ,即所有的四个端口都是匹配的。因而此散射矩阵便成为

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & 0 \\ S_{12} & 0 & 0 & S_{24} \\ S_{13} & 0 & 0 & S_{34} \\ 0 & S_{24} & S_{34} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

设用1行乘4行的共轭数,同样,用2行乘3行的共轭数,则得

$$S_{12}S_{24}^* + S_{13}S_{34}^* = 0 \quad S_{12}S_{13}^* + S_{24}S_{34}^* = 0$$

若注意到 $|S_{12}S_{24}^*| = |S_{12}| |S_{24}|$ ,则由这些式子可得出

$$|S_{12}| |S_{24}| = |S_{13}| |S_{34}| \quad (6.19a)$$

$$|S_{12}| |S_{13}| = |S_{24}| |S_{34}| \quad (6.19b)$$

若用(6.19b)式除(6.19a)式,则得

$$\frac{|S_{24}|}{|S_{13}|} = \frac{|S_{13}|}{|S_{24}|}$$

即

$$|S_{13}| = |S_{24}| \quad (6.20a)$$

可见，端口 1 和 3 之间的耦合与端口 2 和 4 之间的耦合是相同的。用 (6.20a) 式代入 (6.19a) 式也可得

$$|S_{12}| = |S_{34}| \quad (6.20b)$$

所以，端口 1 和 2 之间的耦合也与端口 3 和 4 之间的耦合相同。

因为第 1 行与其本身的共轭数相乘等于 1，所以

$$|S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 = 1 \quad (6.21a)$$

同理

$$|S_{12}|^2 + |S_{24}|^2 = 1 \quad (6.21b)$$

在端口 1 中适当地选取端面，就可以调整  $S_{12}$  的相位，使  $S_{12}$  为实数（参看 (4.53) 式）。故设  $S_{12}$  为正实数  $C_1$ 。同理，在端口 3 中适当选取端面，可以使  $S_{13}$  为一个正的虚数  $jC_2$ ，其中的  $C_2$  为正实数。于是可得

$$C_1^2 + C_2^2 = 1 \quad (6.22)$$

我们也可以在端口 4 中取参考面使  $S_{34}$  为实数，于是根据 (6.20b) 式，它等于  $C_1$ 。由前所述， $S_{12}S_{24}^* + S_{13}S_{34}^* = 0$ ，故现在必须使  $S_{24}$  等于  $jC_2$ 。于是，理想定向耦合器散射矩阵的最简单形式为

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & C_1 & jC_2 & 0 \\ C_1 & 0 & 0 & jC_2 \\ jC_2 & 0 & 0 & C_1 \\ 0 & jC_2 & C_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

这里，根据 (6.22) 式， $C_2 = (1 - C_1^2)^{\frac{1}{2}}$ 。

由无耗的互易四端口接头散射矩阵的单式性也可以证明：若四个端口都匹配，则此器件必然是定向耦合器\*。

\* C.G. Montgomery, R.H. Dicke, and E.M. Purcell, "Principles of Microwave Circuits", sec. 9.10, McGraw-Hill Book Company, New York, 1948.

## 定向耦合器的设计

制作定向耦合器有许多方案。以下阐述几种较常用的孔耦型定向耦合器。这些设计是根据4.11节中所介绍过的小孔耦合理论作出的。此理论最初由贝蒂提出\*。

### 公用耦合孔双波导定向耦合器

公用耦合孔双波导定向耦合器由两个矩形波导组成，它是利用位于两波导公共宽壁中心的小圆孔进行耦合的。为了实现定向耦合，两波导的轴线必须成 $\theta$ 角，如图6.14a所示。这种设计的变形由类似的装置组成，其 $\theta = 0$ ，但有一个如图6.14b那样的偏置孔。

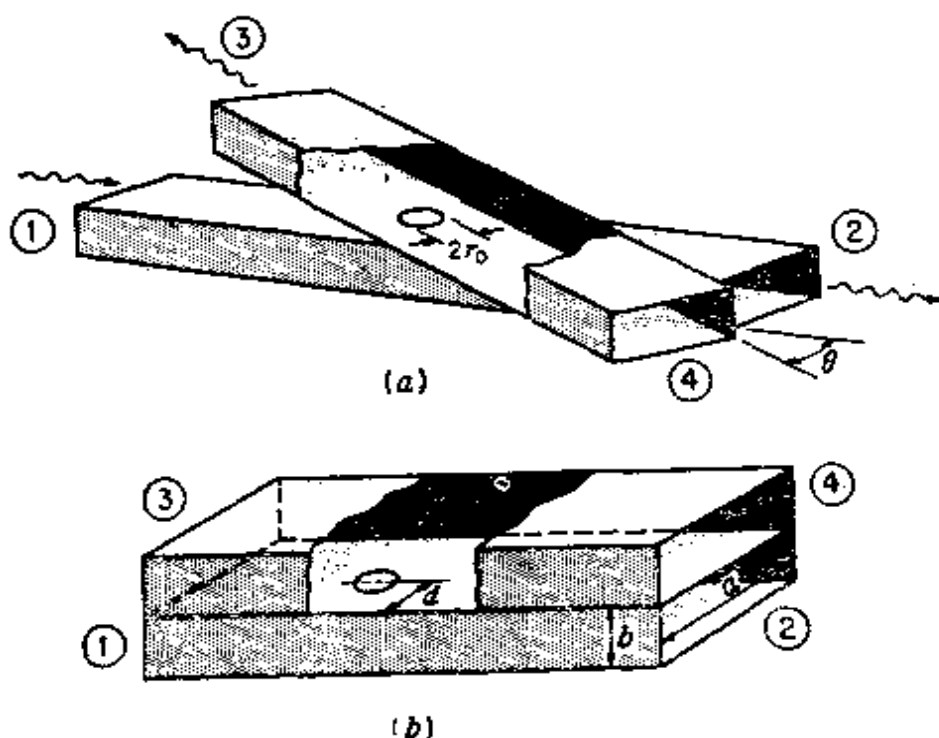


图 6.14 公用耦合孔双波导定向耦合器

图6.14b中的定向耦合器的理论，已在4.11节中讨论过了。在波导1中入射的振幅为 $A$ 的 $TE_{10}$ 模，在此孔上产生一个法向电偶极子

\* H. A. Bethe, *Theory of Diffraction by Small Holes*, *Phys. Rev.*, Vol. 66, pp. 163—182, 1944.



和一个方向与入射波的磁场方向相同的切向磁偶极子。在上波导中法向电偶极子和磁偶极子的轴向分量对称地向两个方向辐射，而磁偶极子的横向分量不对称地辐射。所以，通过适当地调整角度  $\theta$  或孔的位置  $d$ ，使向端口 4 方向的辐射能够被抵消，而使端口 3 方向的辐射增强。由(4.106)、(4.107)和(4.108)式可以得出电偶极子所辐射的场在两个方向上的振幅为

$$B_1 = -\frac{j\omega\epsilon_0}{abY_w} \frac{2}{3} r_0^3 A \sin^2 \frac{\pi d}{a} \quad (6.24a)$$

而磁偶极子在端口 4 方向上辐射场的振幅为

$$B_2 = \frac{j\omega\mu_0 Y_w}{ab} \frac{4}{3} r_0^3 A \left( \sin^2 \frac{\pi d}{a} + \frac{\pi^2}{\beta^2 a^2} \cos^2 \frac{\pi d}{a} \right) \quad (6.24b)$$

在端口 3 的方向辐射场的振幅为

$$B_3 = \frac{j\omega\mu_0 Y_w}{ab} \frac{4}{3} r_0^3 A \left( -\sin^2 \frac{\pi d}{a} + \frac{\pi^2}{\beta^2 a^2} \cos^2 \frac{\pi d}{a} \right) \quad (6.24c)$$

为了抵消端口 3 方向的辐射，必须使  $B_1 + B_3 = 0$ 。由此方程求出孔的位置  $d$  为

$$\sin \frac{\pi d}{a} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{6} a} \quad (6.25a)$$

在改为抵消端口 4 方向上的辐射时，须使  $B_1 + B_2$  为零，从而得

$$\sin \frac{\pi d}{a} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{2} a} \quad (6.25b)$$

设此孔开在中心，则  $d = a/2$ ， $\cos \pi d/a = 0$ 。只在  $\lambda_0 = \sqrt{2} a$  的情况下，才得到  $\theta = 0$  的定向耦合器。当  $\lambda_0$  为其他值时，可以把上波导旋转一个角度  $\theta$ ，使横向磁场与磁偶极子的耦合减少到  $\cos \theta$ 。使  $B_2 \cos \theta$  与  $-B_1$  相等，就可以求出所需要的角度为

$$\cos \theta = \frac{k_0^2}{2\beta^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda_g}{\lambda_0} \right)^2 \quad (6.26)$$

若用一个位于中心的孔，则只有一种可能性：

对于图6.14a的定向耦合器，端口3中耦合波的振幅为

$$B_1 + B_3 \cos \theta$$

所以其耦合系数为

$$C = -20 \log \left| \frac{B_1 + B_3 \cos \theta}{B_1 - B_3 \cos \theta} \right|$$

$$= -20 \log \left[ \frac{4}{3} \frac{\beta r_0^2}{ab} \left( \cos \theta + \frac{k_0^2}{2\beta^2} \right) \right] \quad (6.27)$$

其方向性系数为

$$D = 20 \log \left| \frac{B_1 + B_3 \cos \theta}{B_1 - B_3 \cos \theta} \right| = 20 \log \frac{2\beta^2 \cos \theta + k_0^2}{2\beta^2 \cos \theta - k_0^2} \quad (6.28)$$

若波导壁具有一定的厚度，则孔所产生的耦合量会减小。由壁的厚度引起的衰减，可以把孔认为是工作于截止频率之下的圆波导，来作近似计算。

### 双孔定向耦合器

双孔定向耦合器由两个矩形波导组成，它们由间隔  $1/4$  波导波长 ( $\lambda_g/4$ ) 的两个相同的孔耦合，如图6.15所示。一般说来，此孔具有方向性，亦即在正反两个方向辐射不同振幅的场。振幅为1的波由端口1入射时，设耦合到第二波导中正向场的振幅为  $B_f$ ，反向场的振幅为  $B_b$ 。由于  $B_f$  和  $B_b$  是入射波振幅为1时耦合过来的场，故它们称为孔耦合系数。若只有很少量的入射功率通过第一孔耦合，则在第二孔处的入射波的振幅基本上仍为1。因而第二孔把同样大小的功率耦合到第二波导中。但是，必须注意，由于路径长度的不同，由第二孔耦合的场其相位相对于由第一孔耦合的场要差  $-\beta d$ 。在第二波导  $bb$  平面处总的正向波为  $2B_f e^{-i\beta d}$ ，而在  $aa$  平面上总的反向波为

\* C.G. Montgomery, "Technique of Microwave Measurements," sec. 14.3, McGraw-Hill Book Company, New York, 1947.

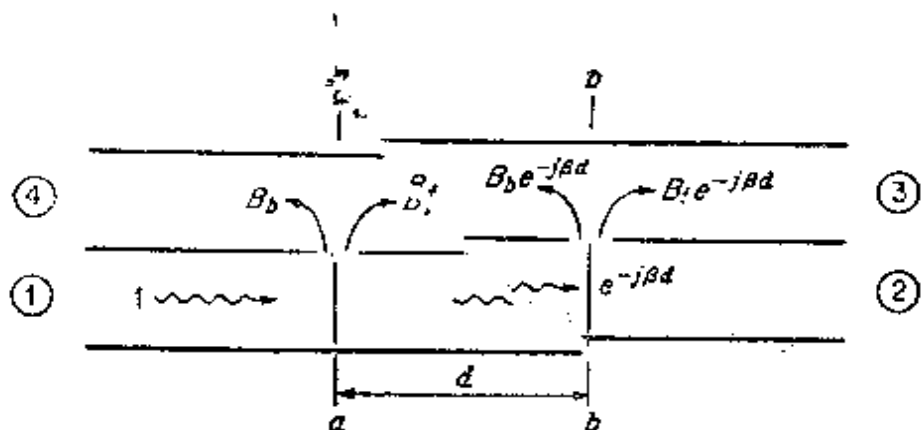


图 6.15 双孔定向耦合器

$B_b (1 + e^{-2j\beta d})$ 。可见，由于在两个波导中正向路径长度总是相同的，故正向波总是同相相加的。而反向波每当  $2\beta d = n\pi$ ,  $n = 1, 3, 5, \dots$  时，将反相相加。尤其是当  $d = \lambda_g/4$  时，将使反相波完全抵消。所以，其耦合系数为

$$C = -20 \log 2 |B_f| \quad (6.29)$$

方向性系数为

$$\begin{aligned} D &= 20 \log \frac{2 |B_f|}{|B_b| |1 + e^{-2j\beta d}|} = 20 \log \frac{|B_f|}{|B_b| |\cos \beta d|} \\ &= 20 \log \left| \frac{B_f}{B_b} \right| + 20 \log |\sec \beta d| \end{aligned} \quad (6.30)$$

其方向性系数为单个孔本身的方向性系数加上与孔的阵列有关的方向性系数（此情况下仅为二元阵）之和。由于  $B_f$  和  $B_b$  为孔耦合参数，且一般是频率的慢变函数，故耦合系数  $C$  对频率不特别敏感。但是，由于阵因子  $\sec \beta d$  对频率敏感，所以，方向性系数是易随频率而变的函数。

### 斯文格反相耦合器

斯文格反相耦合器是为了使耦合系数  $C$  和方向性系数  $D$  的频率敏感性互相交换而设计的。它通过使一个孔辐射的场为另一个孔辐射场的负值来实现。参阅图 6.15，设第一孔辐射场为  $B_f$ 、 $B_b$ ，第二孔辐射场为  $-B_f$ 、 $-B_b$ ，则在任何情况下，上波导  $bb$  平面上总的场为  $B_f -$

$B_3 = 0$ 。因而端口 3 与端口 1 不耦合。考虑到由于传播效应而引起的相位变化后。在  $aa$  平面上总的场为

$$B_1 - B_3 e^{-2i\beta d} = e^{-i\beta d} B_2 2i \sin \beta d$$

于是在端口 1 和 4 之间的耦合系数为

$$C = -20 \log_2 |B_2 \sin \beta d| \quad (6.31)$$

它在  $d = \lambda_g/4$  时达到最大值。这种耦合器的方向性系数  $D$  在理论上为无限大，且与频率无关。而对于耦合系数  $C$ ，虽然由于在  $\pi/2$  附近  $\sin \beta d$  比  $\cos \beta d$  变化更慢，而使其频率敏感性不如 (6.30) 式给出的方向性系数  $D$ ，但它对频率还是很敏感的。实际上，方向性系数  $D$  并不真是无限大，而是由于在前面的讨论中，假定了每个孔上有同样大小的入射场，且每个孔都把同样大小的场辐射到上波导中去所得的结果。由于两孔之间存在着相互作用，故把两孔所耦合的场认为是等振幅的，只在弱耦合的情况下才是近似正确的。

图 6.16a 表示一个典型的反相耦合器。由于在窄壁上  $TE_{10}$  模的法向电场和横向磁场为零，因而，仅由孔感应的轴向磁偶极矩把这种模耦合到上波导中去。因为下波导中的  $TE_{10}$  模轴向磁场在孔中心的两侧具有相反的符号，所以，产生了感应的偶极子  $Mz$  和  $-Mz$ 。这些偶极子对称地向两个方向辐射，但相位相反，以获得所需要的反相的定向耦合器。

另外两种常用的双孔定向耦合器是莫雷诺交叉波导耦合器和里布莱特  $T$  形槽耦合器，也把它们画在图 6.16 中。在安德森的论文中给出了这些耦合器以及斯文格反相耦合器的列线计算图\*。

### 多元定向耦合器

为了在一个频段内有较高的方向性系数，可以应用多孔的定向耦合器。这些耦合器的理论与设计，和第 5 章中多节  $\lambda/4$  变换器得出的相似。图 6.17 表示具有  $N + 1$  个元的耦合器，其所有的孔间间

\* T.N. Anderson, *Directional Coupler Design Nomograms*, *Microwave J.*, Vol. 2, pp. 34—38, May, 1959.

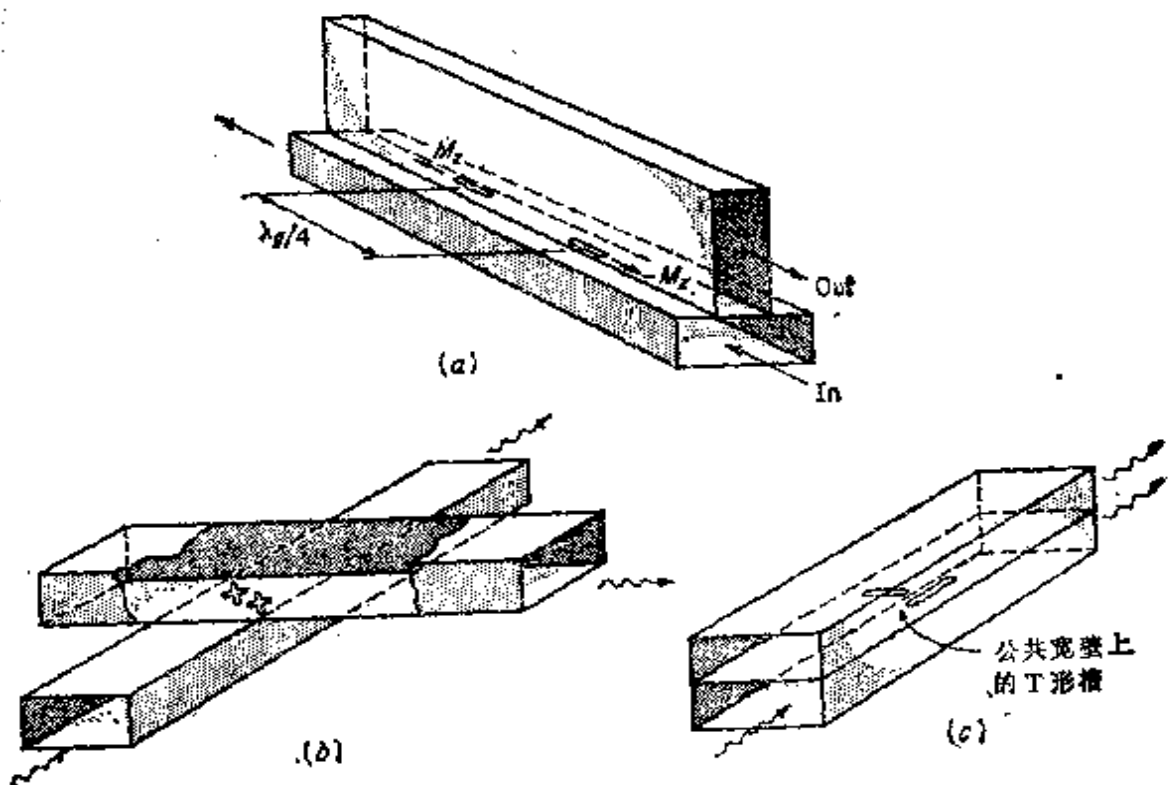


图 6.16 (a)斯文格反相耦合器;  
 (b)莫雷诺交叉波导耦合器;  
 (c)里布莱特T形槽耦合器。

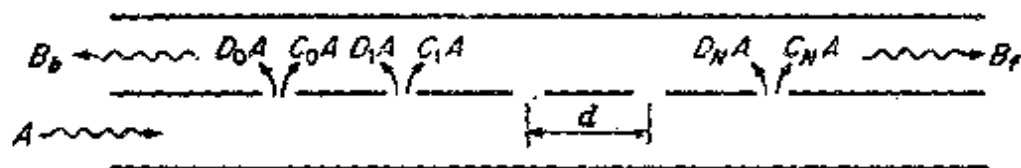


图 6.17 多元定向耦合器

隔皆等于  $d$ 。假定总的耦合功率与入射功率比起来较小，则在每一个耦合孔上的入射波，基本上可认为具有同样的振幅  $A$ （除附加的相位变化外）。设在正方向孔的耦合系数为  $C_n$ ， $n = 0, 1, 2, \dots, N$ ；在反方向孔的耦合系数为  $D_n$ ， $n = 0, 1, 2, 3, \dots, N$ 。则上波导中第  $N$  个孔的位置上总的正向波为

$$B_t = A e^{-i\beta N d} \sum_{n=0}^N C_n \quad (6.32)$$

在第一孔的平面上总的反向波振幅为

$$P_b = A \sum_{n=0}^N D_n e^{-i\beta 2^n d} \quad (6.33)$$

其耦合系数和方向性系数分别为

$$C = -20 \log \left| \sum_{n=0}^N C_n \right| \quad (6.34)$$

$$D = -20 \log \frac{\left| \sum_{n=0}^N D_n e^{-i\beta 2^n d} \right|}{\left| \sum_{n=0}^N C_n \right|} \\ = -C - 20 \log \left| \sum_{n=0}^N D_n e^{-i\beta 2^n d} \right| \quad (6.35)$$

我们现在假定所有的孔都是相同的，则耦合系数 $D_n$ 可以表示为与频率无关的振幅常数 $d_n$ 和与频率有关的因子 $T_n$ 之积。于是，

$$D = -C - 20 \log |T_b| - 20 \log \left| \sum_{n=0}^N d_n e^{-i\beta 2^n d} \right| \quad (6.36)$$

前面两项是与各个孔有关的方向性系数，最后一项是由阵因子引起的方向性。在下面的讨论中，将只涉及阵因子

$$F = \left| \sum_{n=0}^N d_n e^{-i\beta 2^n d} \right| \quad (6.37)$$

的设计，使它在尽可能宽的波段内尽量的小。

(6.37)式的阵因子基本上与 $N$ 节 $\lambda/4$ 变换器的反射系数表示式相同。因而，取 $d_n$ 正比于二项式系数 $C_n^N$ ，可以得到最平坦通带特性，即

$$d_n = K C_n^N \quad (6.38)$$

式中， $K$ 为比例常数。

当 $D_n$ 可以用 $T_n d_n$ 的形式表示时, 则一般说 $C_n$ 可以用 $C_n T_n$ 的形式表示, 其中的 $C_n$ 是与频率无关的振幅常数。在保持孔的形状和位置不变的情况下, 通过改变孔的尺寸可以调整 $c_n$ 和 $d_n$ 。对于一个类型已知的孔,  $T_n$ 、 $T_n$ 和 $c_n$ 与 $d_n$ 之间的关系应该是已知的。通常大致选 $T_n$ 和 $T_n$ 使 $c_n = d_n$ 。因而得

$$C = -20 \log |T_n| \left| \sum_{n=1}^N d_n \right| = -20 \log K |T_n| \left| \sum_{n=1}^N C_n \right| \quad (6.39)$$

波段中心的耦合系数 $C$ 已知时, (6.38)式中的比例常数就固定了。

为了在通带内得到等波纹特性, 阵因子 $F$ 需正比于切比雪夫多项式。若取对称阵列, 即 $d_0 = d_N$ 、 $d_1 = d_{N-1}$ 等等, 则得(由(5.40)式)

$$F = \left| \sum_{n=0}^M 2d_n \cos(N-2n)\beta d \right| \quad (6.40)$$

式中, 当 $N$ 为奇数时,  $M = (N-1)/2$ ; 当 $N$ 为偶数时,  $M = N/2$ 。应当指出, 由于第一孔已被记作第零个孔, 故 $N$ 为奇数时, 孔为偶数个。在(6.40)式中, 当 $N$ 为偶数时, 第 $M$ 项为 $d_M$ ; 当 $N$ 为奇数时, 第 $M$ 项为 $2d_M \cos(N-2M)\beta d$ 。为了得到切比雪夫型的特性曲线, 如同(5.51)式中那样, 需取

$$F = \left| \sum_{n=0}^M 2d_n \cos(N-2n)\theta \right| = K |T_N(\sec \theta_n \cos \theta)| \quad (6.41)$$

式中,  $\theta = \beta d$ , 且 $\sec \theta_n$ 为 $\sec \beta d$ 在通带的上下两边带的值。在通带的中心,  $\theta = \pi/2$ , 相当于间隔 $d = \lambda_g/4$ 。常数 $K$ 选在通带中心, 以得到所需要的耦合系数 $C$ 的值, 这时,  $\theta = \pi/2$ 。因为由(6.41)式可得

$$\left| \sum_{n=1}^N d_n \right| = K |T_N(\sec \theta_n)|$$

以 $c_n = d_n$ 代入(6.39)式则得

$$C = -20 \log |T_f| \left| \sum_{n=0}^N C_n \right| = -20 \log |T_f| \left| \sum_{n=0}^N d_n \right|$$

$$= -20 \log K |T_f| |T_N(\sec \theta_m)| \quad (6.42)$$

若利用(6.36)、(6.41)和(6.42)式, 则可将方向性系数的表示式写作

$$D = 20 (\log K |T_f/T_N(\sec \theta_m)| - \log |T_b| - \log K |T_N(\sec \theta_m \cos \theta)|)$$

$$= 20 \left[ \log \left| \frac{T_f}{T_b} \right| + \log \left| \frac{T_N(\sec \theta_m)}{T_N(\sec \theta_m \cos \theta)} \right| \right] \quad (6.43)$$

因为 $T_f/T_b$ 是频率的函数, 所以 $D$ 将不具有切比雪夫型的特性。但是, 由于 $T_f/T_b$ 除了靠近频带中心以外其方向性系数是很小的, 故通常它与实际的切比雪夫特性的偏离很小。对一种谨慎的设计来说, 我们可根据 $T_f/T_b$ 对方向性的贡献可忽略, 而取 $D$ 的极小值。无疑, 对于宽频带的设计来说, 这应是通带边缘的情况。依阵因子 $F$ 的贡献, 通带中方向性系数的最小值 $D_m$ 出现在

$$T_N(\sec \theta_m \cos \theta) = 1$$

之时。因而, 把 $D_m$ 定义为

$$D_m = 20 \log |T_N(\sec \theta_m)|$$

这个方程式表明, 若规定 $D_m$ , 则 $\sec \theta_m$ 就固定, 从而也就固定了带宽; 或者反过来。因而, 我们必须先规定 $D_m$ 或者 $\sec \theta_m$ , 以固定其他的量。然后对(6.42)式求解常数 $K$ , 并用波段中心耦合系数 $C$ 的已知值来表示。再根据(6.41)式求出系数 $d_n$ 。

作为一个例子, 我们研究三孔切比雪夫定向耦合器的设计, 它是利用两矩形波导之间公共宽壁上的偏置圆孔来耦合的, 如图6.14b所示。对于半径为 $r_n$ 的第 $n$ 个孔来说, 其正向耦合的场为(6.24a)式和(6.24c)式之和。因而, 当 $A=1$ 时, 耦合场的振幅等于耦合系数 $C_n$ , 亦即

$$C_n = r_n^3 \left[ -\frac{j\omega\epsilon_0}{abY_w} - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{\pi x_0}{a} + \frac{j\omega\mu_0 Y_w}{ab} - \frac{4}{3} \left( -\sin^2 \frac{\pi x_0}{a} \right) \right]$$



$$\left. + \frac{\pi^2}{\beta^2 a^2} \cos^2 \frac{\pi x_0}{a} \right) \Bigg] = r_n^3 T_t \quad (6.44a)$$

这里已把孔的位置叫做  $x_0$ ，以免与孔的轴向间隔  $d$  相混淆。反向耦合的场为(6.24a)式和(6.24b)式之和，并在  $A=1$  时得耦合系数  $D_n$ 。于是

$$D_n = r_n^3 \left[ \frac{-j\omega\epsilon_0}{abY_n} - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{\pi x_0}{a} + \frac{j\omega\mu_0 Y_n}{ab} - \frac{4}{3} \left( \sin^2 \frac{\pi x_0}{a} + \frac{\pi^2}{\beta^2 a^2} \cos^2 \frac{\pi x_0}{a} \right) \right] = r_n^3 T_s \quad (6.44b)$$

因子  $T_t$  和  $T_s$  已选取使  $c_n = d_n = r_n^3$ ，且只是各孔半径的函数。

当因子  $T_t/T_s$  的贡献忽略时，若规定  $D_n$  等于40分贝，则(6.43)式为

$$40 = 20 \log |T_N(\sec \theta_n)|$$

即

$$|T_N(\sec \theta_n)| = 100$$

因为三孔定向耦合器  $N=2$ ， $T_2(x) = 2x^2 - 1$ ，故得

$$\sec \theta_n = \sqrt{50.5} = 7.1$$

即  $\theta_n = 81.9^\circ$  或  $98.1^\circ$ 。求解  $\beta d = \theta_n$ ，可得通带边缘上的对应频率，其中的  $d$  这样选取，即在中心频率处使  $\beta d = \pi/2$ 。

若规定耦合系数  $C$  为20分贝(入射功率的1%)，则由(6.42)式得

$$K |T_t T_N(\sec \theta_n)| = 0.1$$

因而

$$K = 10^{-3} |T_t|^{-1}$$

下一个步骤是用通带中心处的波导参数由(6.44a)式计算  $T_t$ 。完成这个步骤后，利用(6.41)式可得到

$$\begin{aligned} 2d_0 \cos 2\theta + d_1 &= K(2(\sec \theta_n \cos \theta)^2 - 1) \\ &= K(\sec^2 \theta_n (1 + \cos 2\theta) - 1) \end{aligned}$$

最后一个步骤是由下式选取孔的半径：

$$r_s^3 = r_0^3 = d_0 = \frac{1}{2} K \sec^2 \theta_n$$

$$r_1^0 = d_1 = K(\sec^2 \theta_m - 1)$$

这是一个谨慎的设计，因为对于只有三个孔的情形来说，如果孔的位置  $x_0$  依(6.25)式选为在通带中心处  $T_0 = 0$ ，则可用的带宽并不特别宽，而因子  $T_0/T_1$  在全波段对方向性系数有十分显著的作用。

实际上，我们规定通带的下边频和上边频分别为  $f_1$  和  $f_2$ 。而令对应的  $\beta$  值为  $\beta_1$  和  $\beta_2$ 。因为对波导来说， $\beta$  是频率的非线性函数，故通带中心频率对应于  $\frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)$ ，而不是  $\frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ 。这个结果是由于  $\beta$  与  $\theta$  成线性关系而引起的，而电相移  $\theta$  是包含在设计公式中的参数。

## 6.5 混合接头

图6.18表示一个常用于电话增音电路中的混合线圈。它具有这样的性质，即当接入适当的外部阻抗时，由端口1输入的信号，同等地耦合到端口2和3中去，而不耦合到端口4中去。同理，由端口3输入的信号，同等地耦合到端口1和4，而不耦合到端口2，等等。

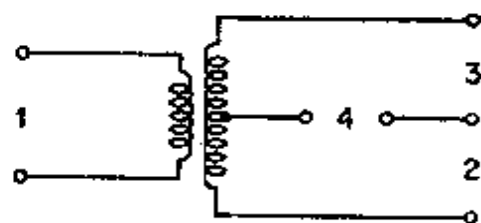


图 6.18 混合线圈

具有这些特性的四端口微波接

头称为混合接头。图6.19a表示一个T形混合接头，它是混合接头的一种通用形式。当  $TE_{10}$  波由端口1入射时，此接头中的电场如图6.19b中所示。此电场对中心面为偶对称，而在臂4中的  $TE_{10}$  波必须有一个奇对称的电场（用短划线表示在图6.19b）中，所以它不能在臂4中激励起  $TE_{10}$  波。因此，端口1和4之间没有耦合。根据有关对称性的研究可以看出，端口1和2与1和3之间的耦合显然是相同的。

当  $TE_{10}$  波由臂4入射时，此接头中的电场如图6.19c所示。由对称性同样可证明它不耦合到端口1中去（根据互易性这也是必

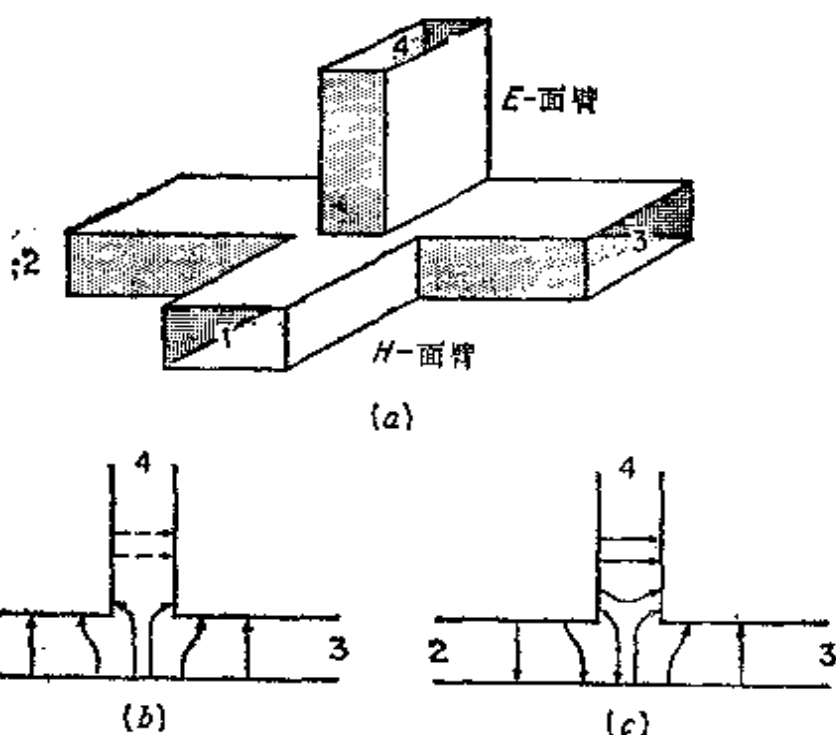


图 6.10 (a) T形混合接头; (b) 由端口 1 入射的波的电场图; (c) 由端口 4 入射的波的电场图

然的)。由端口 4 耦合到端口 2 和 3 中的场大小相等，但相位差  $180^\circ$ 。因为根据对称性， $S_{12} = S_{13}$ ， $S_{24} = -S_{34}$ 。所以，这种混合 T 形接头的散射矩阵的形式为

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{12} & S_{23} & S_{33} & -S_{24} \\ 0 & S_{24} & -S_{24} & S_{44} \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

在 E 面臂和 H 面臂中，可以放入不破坏接头对称性的匹配元件来使  $S_{11} = S_{44} = 0$ 。对于无耗结构，可以证明散射矩阵的单式性要求  $S_{22} = S_{33} = 0$ ，以便使所有的端口都是匹配的。此外，因  $S_{23} = 0$ ，故端口 2 和 3 以及端口 1 和 4 都是不耦合的。此混合 T 形接头现在成为一个具有 3 分贝耦合的定向耦合器，虽然它的运用不存在任何玄妙之处，但常称它为“魔 T”。

当  $S_{11} = S_{44} = 0$  时，此散射矩阵便成为

$$\{S\} = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{12} & S_{23} & S_{33} - S_{24} & \\ 0 & S_{24} - S_{24} & 0 & \end{bmatrix}$$

第二行与其共轭数相乘得

$$|S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{24}|^2 = 1 \quad (6.46a)$$

对第三行作同样处理可得类似的表示式:

$$|S_{12}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{33}|^2 + |S_{24}|^2 = 1 \quad (6.46b)$$

若把这两个方程相减, 则得

$$|S_{22}|^2 - |S_{33}|^2 = 0 \quad (6.46c)$$

所以,  $|S_{22}| = |S_{33}|$ 。对第一行和第四行亦作同样处理, 则得

$$2|S_{12}|^2 = 1, \quad \text{即} \quad |S_{12}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2|S_{24}|^2 = 1 \quad \text{即} \quad |S_{24}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以

$$|S_{12}| = |S_{24}| = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (6.47)$$

把(6.47)式代入(6.46a)式中得

$$1 + |S_{22}|^2 + |S_{23}|^2 = 1$$

即  $|S_{22}|^2 + |S_{23}|^2 = 0$ 。只有在  $S_{22}$  和  $S_{23}$  两者都为零时, 其和才能等于零。由(6.46c)式可得出  $S_{33}$  也等于零。

把上述结果代入后, 散射矩阵的化简形式便成为

$$\{S\} = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & 0 & 0 & S_{24} \\ S_{12} & 0 & 0 & -S_{24} \\ 0 & S_{24} - S_{24} & 0 & \end{bmatrix}$$

通过在臂 1 和 4 中适当地选取端面, 可使  $S_{12}$  和  $S_{24}$  两者都为实数。这样, 在利用了(6.47)式后, 魔  $T$  的散射矩阵就可以表示为如下的

形式:

$$[S] = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

另一种形式的混合接头是图6.20中所示的环路（有时称为环形

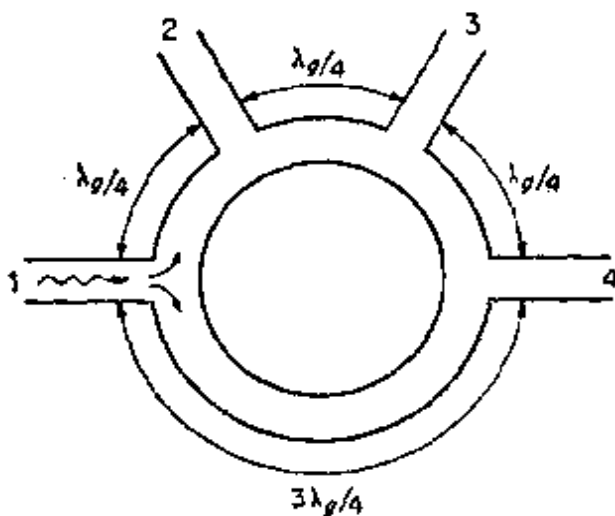


图 6.20 环形混合接头

波导电桥)。为了了解它的工作情况，设波由端口1入射。这个波分成相等的两个波，沿着此环路反向传播，这两个波同相到达端口2和4，而反相到达端口3。可见，端口1和3是不耦合的。同理，端口2和4由于其两个耦合路径相差 $\lambda_g/2$ ，故也是不耦合的。

魔T接头用于微波阻抗桥（类似于熟知的惠斯登电桥）、

鉴频器电路和平衡混频器中，也用于其他的设备中。下面叙述平衡混频器。

### 微波平衡混频器

在超外差接收机中，应用平衡混频器来抵消在中频放大器输入端的本振噪声。其典型装置如图6.21所示。在魔T的直通臂两端各放一个微波晶体二极管，本振信号由H面臂送入，并将以同相到达二极管处。信号由E面臂送入，并将以反相到达二极管处。由本振频率和信号频率在两个非线性二极管中混频所产生的中频信号（即差频信号）应是反相的。但是，本振噪声在这两个二极管中应是同相的。把二极管输出送到平衡的中频输入端（推挽结构），可以看出本振噪声被抵消，而中频信号却是同相相加。采用魔T接头所得

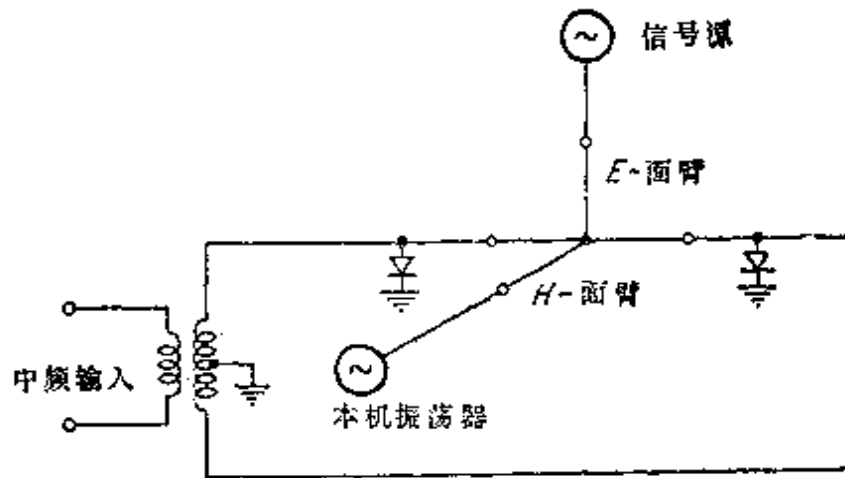


图 6.21 微波平衡混频器

到的另一个好处是防止由本机振荡器产生的辐射。因为  $E$  面臂和  $H$  面臂是不耦合的，所以，本振信号不能耦合到接在  $E$  面臂的天线上去。

## 6.6 微波在铁氧体中的传播

适用于微波频率的铁氧体材料的研制结果，产生了大量的新型微波器件。其中有一些具有非互易的电性能，即通过该器件的传输系数，对各个传播方向上是不同的。一经理解了微波在无限大铁氧体媒质中传播的基本性质，就可以理解铁氧体器件的工作原理。本节研究平面波在具有恒定偏置磁场  $B_0$  作用下的无限大铁氧体媒质中的传播。下面将指出，沿  $B_0$  方向传播的自然模是左旋或右旋圆极化波，它们具有不同的传播常数。此外，我们将看到，铁氧体的导磁率不是简单的标量，而是一个张量，它可以用一个矩阵来表示。

铁氧体是具有特定电阻率的陶瓷类材料，其电阻率比金属大  $10^4$  倍，其相对电容率约为 10 到 15 或者更大一些。铁氧体是由金属氧化物的混合物烧结而成。它的化学成分一般为  $MO \cdot Fe_2O_3$ ，其中的  $M$  为二价的金属，比如锰、镁、铁、锌、镍、镉等等，或者是它们的混合物。相对导磁率通常为几千。铁氧体的磁性主要由与电

子自旋相联系的磁偶极矩引起。把自旋电子当作回转陀螺，可以得出磁化过程的经典图象，特别是可得出各向异性的磁性能。

电子具有若干固有的特性，比如其电荷  $-e = -1.602 \times 10^{-19}$  库仑，其质量  $m = 9.107 \times 10^{-31}$  千克，且具有在数值上等于  $\frac{1}{2} h$ ，或  $0.527 \times 10^{-34}$  焦耳·米（ $h$  为普朗克常数除以  $2\pi$ ）的角动量  $P$  及磁偶极矩  $m$ ，后者等于一个波尔磁子，即  $m = eh/2m = 9.27 \times 10^{-24}$  安培·米<sup>2</sup>。对于电子来说，角动量  $P$  和磁偶极矩  $m$  是反平行的。

磁矩与角动量之比称为旋磁比  $\gamma$ ，即

$$\gamma = \frac{m}{P} \quad (6.49)$$

将电子放在均匀的恒定磁场  $B_0$  中，就会有转矩  $T$

$$T = m \times B_0 = -\gamma P \times B_0 \quad (6.50)$$

作用于此偶极矩上。这个转矩将使偶极轴围绕平行于  $B_0$  的轴

进动，如图 6.22 所示。运动的方程是根据角动量的变化率等于转矩这个条件得到的，因而为

$$\frac{dP}{dt} = T = -\gamma P \times B_0 = \omega_0 \times P \quad (6.51a)$$

或

$$\gamma P B_0 \sin \varphi = \omega_0 P \sin \varphi = m B_0 \sin \varphi \quad (6.51b)$$

式中， $\omega_0$  是指向  $B_0$  方向的进动角速度矢量， $\varphi$  为  $m$  和  $B_0$  之间的夹角。在自由进动时，其角速度  $\omega_0$  为

$$\omega_0 = \gamma B_0$$

它与角度  $\varphi$  无关。此角速度  $\omega_0$  常常称为拉莫频率。

若把一个小的交流磁场迭加到恒定场  $B_0$  上，则磁偶极矩将产生

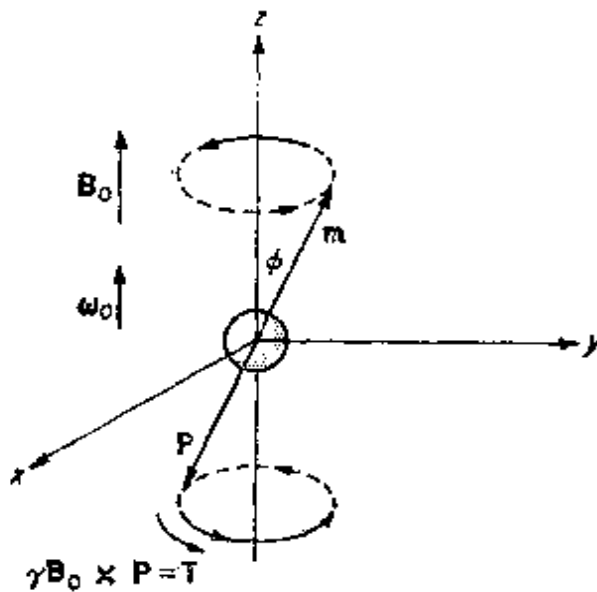


图 6.22 自旋电子的自由进动

强迫进动。尤其重要的是交流磁场在垂直于 $\mathbf{B}_0$ 的平面上是圆极化的情况。当交流场的 $x$ 和 $y$ 分量大小相等时间相位差 $90^\circ$ 时，就得到圆极化场。于是可令交流磁场为相量

$$\mathbf{B}_1 = B_1(\mathbf{a}_x + ja_y) \quad (6.52a)$$

假定 $B_1$ 为实数，则实际的场为

$$\mathbf{B}_1 = B_1 \operatorname{Re}(\mathbf{a}_x + ja_y)e^{j\omega t} = B_1(\mathbf{a}_x \cos \omega t - \mathbf{a}_y \sin \omega t) \quad (6.52b)$$

此合成场具有一个恒定幅度 $B_1$ ，但它在空间中的取向是变化的，即随时间旋转。在时刻 $t$ 此合成场矢量与 $x$ 轴所成的角度为

$$\tan^{-1} \frac{B_y}{B_x} = -\tan^{-1} \tan \omega t = -\omega t$$

因而，它以速度 $-\omega$ 旋转，如图6.23 a所示。正是场矢量在空间中的这种旋转，才得到了圆极化场。若上述交流场是沿 $Z$ 方向传播波的场，则可以认为左旋圆极化波。若从传播方向看进去，旋转的方

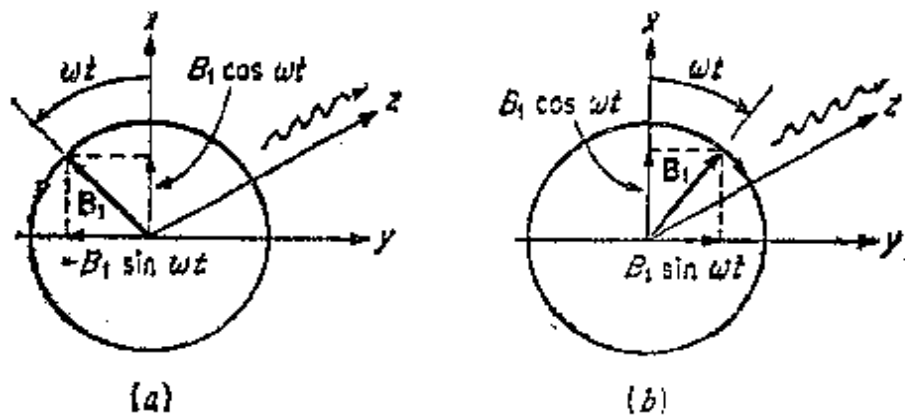


图 6.23 圆极化波的磁场：(a)左旋(或负旋)圆极化；(b)右旋(或正旋)圆极化。

向是顺时针的，则此波称为右旋圆极化波。右旋圆极化波的交流磁场应为

$$\mathbf{B}_1 = B_1(\mathbf{a}_x - ja_y) \quad (6.53)$$

若把左旋圆极化的交流磁场迭加在恒定磁场 $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{a}_z$ 上，则总的合成场 $\mathbf{B}_1$ 与 $z$ 轴倾斜成一夹角 $\theta = \tan^{-1}(B_1/B_0)$ ，且围绕 $Z$ 轴以速率 $-\omega$ 旋转，如图6.24 a所示。在稳态条件下，磁偶极子轴将以同



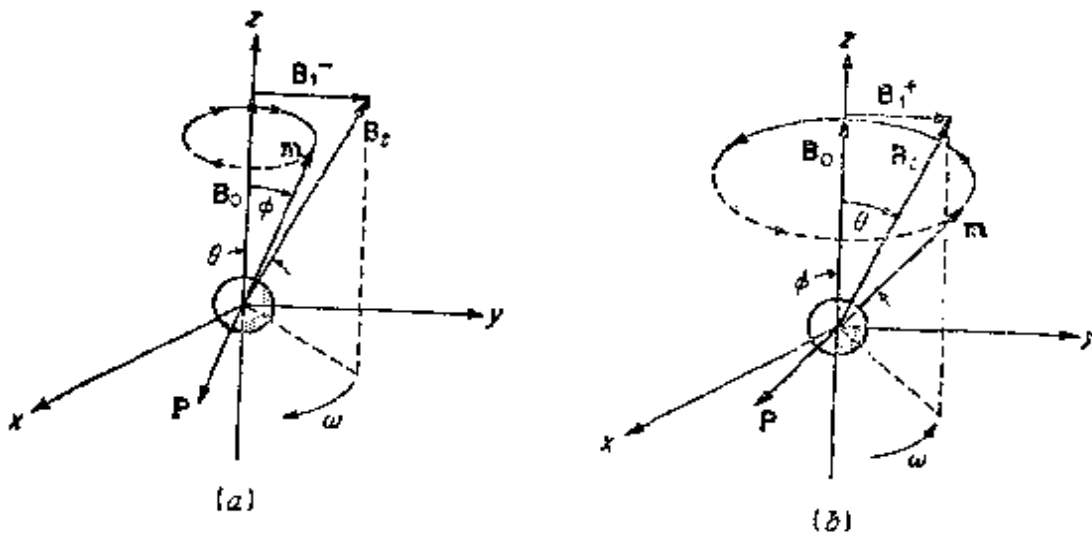


图 6.24 自由电子的强迫进动

样的速率围绕着Z轴强迫进动。可见，为了得到引起反时针方向进动的转矩，进动角 $\varphi$ 必须小于 $\theta$ ，如图6.24 a所示。由运动方程(6.51)式得

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_1 = -\gamma \mathbf{P} \times \mathbf{B}_1 = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\omega \mathbf{a}_z \times \mathbf{P}$$

或

$$-\gamma P B_1 \sin(\theta - \varphi) = -\omega P \sin \varphi$$

展开 $\sin(\theta - \varphi)$ ，并用 $B_1$ 代替 $B_1 \sin \theta$ ，用 $B_0$ 代替 $B_1 \cos \theta$ ，求得 $\tan \varphi$ 为

$$\tan \varphi = \frac{\gamma B_1}{\gamma B_0 + \omega} = \frac{\gamma B_1}{\omega_0 + \omega} \quad (6.54)$$

对左旋（也叫负旋）圆极化交流场在 $xy$ 平面与 $\mathbf{B}_1$ 同步旋转的 $\mathbf{m}$ 的分量是： $m^- = m \sin \varphi = m_0 \tan \varphi$ ，式中， $m_0 = m \cos \varphi$ 是 $\mathbf{m}$ 的Z向分量。由于 $B_1$ 远小于 $B_0$ ，故角度 $\varphi$ 是很小的，从而使 $m_0$ 近似地等于 $m$ ，利用(6.54)式得

$$m^- = m_0 \tan \varphi = \frac{\gamma m_0 B_1}{\omega_0 + \omega} \quad (6.55)$$

若把右旋（正旋）圆极化交流场迭加到恒定场 $\mathbf{B}_0$ 上，则引起围

绕Z轴的顺时针方向的强迫进动。只有当角度 $\varphi$ 大于角度 $\theta$ 时，才能得到在这个方向引起进动的转矩，如图6.24 b所示。在这种情况下，由运动方程(6.51)得

$$\gamma B_1 \sin(\varphi - \theta) = \omega \sin \varphi$$

由此可得，

$$\tan \varphi = \frac{\gamma B_1}{\omega_0 - \omega} \quad (6.56)$$

在 $xy$ 平面上与正旋圆极化交流场同步旋转的磁化分量为

$$m^+ = m_0 \tan \varphi = \frac{\gamma m_0 B_1}{\omega_0 - \omega} \quad (6.57)$$

前面的讨论已经指出了单个自旋电子在磁场中运动的基本特性，这个磁场是由沿Z轴的恒定场和在 $xy$ 平面上的小的圆极化交流场所组成的。铁氧体材料可以认为是单位体积中 $N$ 个有效自旋电子的集合体。因为电子之间的间隔属于原子数量级，所以，从宏观的观点看，可以把每单位体积的磁偶极子密度认为是“抹成”连续分布的。单位体积中的总磁偶极矩为 $\mathbf{M} = N\mathbf{m}$ 。当恒定场 $\mathbf{B}_0$ 大到足以使铁氧体中的磁化达到饱和时， $\mathbf{M} = \mathbf{M}_s$ 。在饱和的铁氧体中，所有的自旋都是非常紧密地耦合的，所以，整个模型基本上可作为单个大磁偶极子处理。按照关系式 $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H}_0 + \mathbf{M}_s)$ ，这个磁化强度 $\mathbf{M}_s$ 对总的内场 $\mathbf{B}$ 有贡献。因为 $\mu_0 \mathbf{M}_s$ 与 $\mathbf{M}_s$ 的矢积为零，对转矩没有贡献，故作用于 $\mathbf{M}_s$ 上的转矩只由场 $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}$ 引起。于是，在磁化强度的运动方程中，产生转矩的场为 $\mu_0 \mathbf{H}$ ，其中， $\mathbf{H}$ 为铁氧体媒质中总的恒定磁场强度加上交流磁场强度。即

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma(\mathbf{M} \times \mathbf{B}) = -\gamma\mu_0 \mathbf{M} \times (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = -\gamma\mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}$$

设在铁氧体中磁场强度为 $\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1 \pm$ ，式中的 $\mathbf{H}_1 \pm$ 是圆极化交流场，则合成的交流磁化强度将具有类似于(6.55)和(6.57)的表示式，但用 $M_0 = Nm_0$ 代替。在 $xy$ 平面上总的交流磁场为 $\mu_0 \mathbf{H} \pm = \mathbf{B} \pm$ 加上由交流磁化所贡献的场。所以，正和负圆极化的总交流场为〔利

用公式  $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$

$$\mathbf{B}^+ = \mu_0 \mathbf{M}^+ + \mathbf{B}_1^+ = \mu_0 (N \mathbf{m}^+ + \mathbf{H}_1^+) = \mu_0 \left( 1 + \frac{\mu_0 \gamma M_0}{\omega_0 - \omega} \right) \mathbf{H}_1^+ \quad (6.58a)$$

$$\mathbf{B}^- = \mu_0 \mathbf{M}^- + \mathbf{B}_1^- = \mu_0 \left( 1 + \frac{\mu_0 \gamma M_0}{\omega_0 + \omega} \right) \mathbf{H}_1^- \quad (6.58b)$$

式中,  $M_0 = M \cos \varphi$ ,  $B_1 = \mu_0 H_1$ , 且由 (6.53) 式和 (6.52a) 式可以看出, 在 (6.58a) 式中,  $\mathbf{H}_1^+ = H_1 (\mathbf{a}_x - j \mathbf{a}_y)$ ; 在 (6.58b) 式中,  $\mathbf{H}_1^-$  等于  $H_1 (\mathbf{a}_x + j \mathbf{a}_y)$ 。由于通常恒定场  $B_0$  大到足以引起饱和, 故  $M$  可以用铁氧体中的饱和磁化强度  $M_s$  代替。

若假定  $B_1 \ll B_0$ , 以致使  $M_0 \approx M = M_s$ , 则可得正负圆极化交流场的有效导磁率为

$$\mu_+ = \mu_0 \left( 1 + \frac{\gamma \mu_0 M_s}{\omega_0 - \omega} \right) \quad (6.59a)$$

$$\mu_- = \mu_0 \left( 1 + \frac{\gamma \mu_0 M_s}{\omega_0 + \omega} \right) \quad (6.59b)$$

沿恒定场  $\mathbf{B}_0$  方向传播的圆极化平面  $TEM$  波的传播常数为

$$\beta_+ = \omega \sqrt{\epsilon \mu_+} \quad (6.60a)$$

$$\beta_- = \omega \sqrt{\epsilon \mu_-} \quad (6.60b)$$

式中,  $\epsilon$  是铁氧体的相对电容率。  $\beta_+$  和  $\beta_-$  的不同意义在后面讨论。后面还要用另一个方法推出由 (6.60) 式所表示的结果。

假定小信号条件  $B_1 \ll B_0$  不满足, 则不能用  $M_s$  代替  $M_0$ 。代替 (6.54) 式和 (6.56) 式的  $\tan \varphi$ , 可以分别地求解  $\sin \varphi$  而得

$$\sin \varphi = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \frac{\gamma B_1}{\sqrt{(\gamma B_1)^2 + (\omega_0 + \omega)^2}} \quad (6.61a)$$

$$\sin \varphi = \frac{\gamma B_1}{\sqrt{(\gamma B_1)^2 + (\omega_0 - \omega)^2}} \quad (6.61b)$$

于是, 磁化强度  $M^+$  和  $M^-$  为

$$M^+ = M_s \sin \varphi = \frac{\gamma \mu_0 M_s H_1}{\sqrt{(\gamma \mu_0 H_1)^2 + (\omega_0 - \omega)^2}} \quad (6.62a)$$

$$M^- = \frac{\gamma \mu_0 M_s H_1}{\sqrt{(\gamma \mu_0 H_1)^2 + (\omega_0 + \omega)^2}} \quad (6.62b)$$

可见，交流磁化强度与交流场的强度 $H_1$ 的关系是非线性的，所以，在大信号条件下，铁氧体的非线性特性将产生基频 $\omega$ 的谐波。因此，铁氧体可以用来做成谐波发生器。\*

显然，对于 $M^-$ ，若 $B_1 \ll B_0$ ，即 $\gamma B_1 \ll \gamma B_0 = \omega_0$ ，则(6.62b)式也近似为

$$M^- = \frac{\gamma \mu_0 M_s H_1}{\omega_0 + \omega}$$

同理，若 $\omega$ 不太靠近谐振频率 $\omega_0$ ，则(6.62a)式变成

$$M^+ = \frac{\gamma \mu_0 M_s H_1}{\omega_0 - \omega}$$

由后两个 $M^+$ 和 $M^-$ 的表示式可直接地导出表示 $\mu_+$ 和 $\mu_-$ 的(6.59)式。在任何实际的铁氧体媒质中，阻尼作用总是存在的，所以， $M^+$ 即使在 $\omega = \omega_0$ 时也将保持有限值，且远比 $M_s$ 小。因而，在小信号条件下，对于实际的铁氧体媒质，可以假定 $M_s \approx M_s$ 。阻尼作用在后面更详细地讨论。

通过直接地求解麦克斯韦方程和磁化强度的运动方程，来研究平面波在无界铁氧体媒质中的传播是有益的。这种分析将说明线性化的一般方法，这个方法适用于波通过像铁氧体那样的媒质时的小信号分析。但是，它不能像上面所作的分析那样，清楚地表明 $\mu_+$ 和 $\mu_-$ 不同的物理原因。即从根本上说， $\mu_+$ 和 $\mu_-$ 的不同是由于进动角 $\varphi$ 在一种情况下必须大于角度 $\theta$ ，而在另一种情况下必须小于 $\theta$ 。因

\* W.P. Ayres, P.H. Vartanian, and J.L. Melchor, *Frequency Doubling in Ferrites*, *J. Appl. Phys.*, Vol. 27, p. 133, 1956; *Microwave Frequency Doubling from 9 kmc to 18 kmc in Ferrites*, *Proc. IRE*, Vol. 45, pp. 643-646, May, 1957.

而，磁偶极矩在 $xy$ 平面上的投影在两种情况下是不同的。

下面研究加恒定磁场 $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0 = B_0 \mathbf{a}_z$ 的无限大铁氧体媒质的情况。设在不加变动磁场时，铁氧体每单位体积中磁化强度为 $M_0$ 。当同时加上变动磁场 $\mu_0 \mathcal{H}$ 时，就会产生磁化强度的时变分量 $\mathcal{M}$ 。每单位体积中总磁化强度的运动方程与单个电子时的运动方程类似，因而得

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{M}_0 + \mathcal{M})}{dt} &= \frac{d\mathcal{M}}{dt} = -\gamma[(\mathbf{M}_0 + \mathcal{M}) \times (\mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathcal{H})] \\ &= -\gamma\mu_0(\mathbf{M}_0 \times \mathbf{H}_0 + \mathbf{M}_0 \times \mathcal{H} + \mathcal{M} \times \mathbf{H}_0 + \mathcal{M} \times \mathcal{H}) \end{aligned} \quad (6.63)$$

假定在小信号条件下，即

$$|\mathcal{M}| \ll |\mathbf{M}_0|, \text{ 和 } |\mathcal{H}| \ll |\mathbf{H}_0|$$

则(6.63)式中的非线性项 $\mathcal{M} \times \mathcal{H}$ 可以被略去。再由于 $\mathbf{M}_0 \times \mathbf{B}_0 = 0$ （因为饱和磁化强度与所加的恒定场是同方向的），故得到此运动方程的线性化方程为

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = -\gamma(\mu_0 \mathbf{M}_0 \times \mathcal{H} + \mathcal{M} \times \mathbf{B}_0) \quad (6.64)$$

设时间关系为 $e^{j\omega t}$ ，并令 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{H}$ 用相量 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{H}$ 来表示。则由(6.64)式得

$j\omega \mathbf{M} + \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B}_0 = j\omega \mathbf{M} + \omega_0 \mathbf{M} \times \mathbf{a}_z = -\gamma\mu_0 \mathbf{M}_0 \times \mathbf{H}$  式中， $\omega_0 = \gamma\mu_0 H_0 = \gamma B_0$ 。用分量形式表示为

$$\begin{aligned} j\omega M_x + \omega_0 M_y &= \gamma M_0 \mu_0 H_y \\ j\omega M_y - \omega_0 M_x &= -\gamma M_0 \mu_0 H_x \\ j\omega M_z &= 0 \end{aligned}$$

求解这些方程得

$$M_x = \frac{\omega_0 \gamma \mu_0 M_0 H_x + j\omega \gamma \mu_0 M_0 H_y}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (6.65a)$$

$$M_y = \frac{\omega_0 \gamma \mu_0 M_0 H_y - j\omega \gamma \mu_0 M_0 H_x}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (6.65b)$$

$$M_z = 0 \quad (6.65c)$$

在麦克斯韦方程的解中，不显含磁化强度是方便的。引入磁化率和导磁率，可以消去磁化强度。在标量的情况下，可利用关系式  $M = x_m H$ ,  $B = \mu_0 (M + H) = \mu_0 (1 + x_m) H = \mu H$  来做到这一点。对于铁氧体，可以利用类似的关系式，但  $x_m$  和  $\mu$  将不是标量。把 (6.65) 式写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & 0 \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \quad (6.66)$$

式中

$$\chi_{xx} = \chi_{yy} = \frac{\omega_0 \gamma \mu_0 M_s}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\chi_{xy} = -\chi_{yx} = \frac{j\omega \gamma \mu_0 M_s}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

在 (6.66) 式中，参数为  $\chi_{xx}$ 、 $\chi_{xy}$ 、 $\chi_{yx}$  和  $\chi_{yy}$  的矩阵，表示铁氧体的磁化率为张量。交流场  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  之间的关系式为

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

或

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \mu_0 \begin{bmatrix} 1 + \chi_{xx} & \chi_{xy} & 0 \\ \chi_{yx} & 1 + \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \quad (6.67)$$

在 (6.67) 式中，表示  $\mathbf{H}$  的和  $\mathbf{B}$  的各分量之间关系的矩阵是铁氧体的导磁率张量。它将用  $\mu$  的黑体字上面加一短划表示，即

$$\bar{\mu} = \mu_0 \begin{bmatrix} 1 + \chi_{xx} & \chi_{xy} & 0 \\ \chi_{yx} & 1 + \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

于是，(6.67) 式就缩写为

$$\mathbf{B} = \bar{\mu} \cdot \mathbf{H} \quad (6.68)$$

在有些文献中，运动方程(6.64)式的负号常常被去掉，这相当于在本书使用的方程式中用 $-\gamma$ 代替 $\gamma$ 。

铁氧体中出现的损耗，可以在运动方程引入阻尼项来从现象上加以解释，这个阻尼项将产生一个转矩使进动角 $\varphi$ 减小。实际中常用此方程的下列修正形式：

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = -\gamma\mu_0(\mathcal{M}_r + \mathcal{M}) \times (\mathbf{H}_0 + \mathcal{H}') + \frac{\alpha}{m} \mathcal{M} \times \frac{d\mathcal{M}}{dt} \quad (6.69)$$

式中， $\alpha$ 是无量纲的阻尼常数。按照小信号分析，得出磁化率矩阵元为\*

$$\chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi' - j\chi'' = \chi \quad (6.70a)$$

$$\chi_{xz} = -\chi_{yz} = j(K' - jK'') = jK \quad (6.70b)$$

式中

$$\chi' = \frac{\omega_0 \omega_m (\omega_0^2 - \omega^2) + \omega_m \omega_0 \omega^2 \alpha^2}{(\omega_0^2 - \omega^2 (1 + \alpha^2))^2 + 4\omega_0^2 \omega^2 \alpha^2}$$

$$\chi'' = \frac{\omega \omega_m \alpha (\omega_0^2 + \omega^2 (1 + \alpha^2))}{(\omega_0^2 - \omega^2 (1 + \alpha^2))^2 + 4\omega_0^2 \omega^2 \alpha^2}$$

$$K' = \frac{\omega \omega_m (\omega_0^2 - \omega^2 (1 + \alpha^2))}{(\omega_0^2 - \omega^2 (1 + \alpha^2))^2 + 4\omega_0^2 \omega^2 \alpha^2}$$

$$K'' = \frac{2\omega^2 \omega_0 \omega_m \alpha}{(\omega_0^2 - \omega^2 (1 + \alpha^2))^2 + 4\omega_0^2 \omega^2 \alpha^2}$$

和

$$\omega_m = \mu_0 \gamma M_s$$

在导出了用来联系 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$ 的导磁率张量以后，余下的任务就只是求下列形式的麦克斯韦方程的解：

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} = -j\omega \bar{\mu} \cdot \mathbf{H} \quad (6.71a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \epsilon \mathbf{E} \quad (6.71b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (6.71c)$$

\* R. F. Sochoo, "Theory and Application of Ferrites," chap. 5, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1960.

沿  $z$  方向 (即沿  $\mathbf{B}_0$  方向) 传播的  $TEM$  波的解是不难求得的。设其电场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\beta z}$$

式中,  $\mathbf{E}_0$  为  $xy$  平面上的恒定矢量。由 (6.71a) 式得

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{E}_0 \times \nabla e^{-i\beta z} = j\beta \mathbf{E}_0 \times \mathbf{a}_z e^{-i\beta z} = -j\omega \bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{H}$$

设  $\mathbf{H}$  的解为  $\mathbf{H}_0 e^{-i\beta z}$ , 其中,  $\mathbf{H}_0$  也是  $xy$  平面上的恒定矢量, 则由 (6.71b) 式得

$$j\beta \mathbf{H}_0 \times \mathbf{a}_z = j\omega \epsilon \mathbf{E}_0$$

若把此式代入方程

$$j\beta \mathbf{E}_0 \times \mathbf{a}_z = -j\omega \bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{H}_0$$

消去  $\mathbf{E}_0$ , 则得

$$j\beta \frac{j\beta}{j\omega \epsilon} (\mathbf{H}_0 \times \mathbf{a}_z) \times \mathbf{a}_z = -j\omega \bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{H}_0$$

将其左边展开得 (注意  $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{H}_0 = 0$ )

$$\beta^2 \mathbf{H}_0 = \omega^2 \epsilon \bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{H}_0 \quad (6.72a)$$

这个方程式可以写成如下矩阵的形式:

$$\begin{bmatrix} \beta^2 - \omega^2 \epsilon \mu_0 (1 + \chi) & -j\omega^2 \epsilon \mu_0 K \\ j\omega^2 \epsilon \mu_0 K & \beta^2 - \omega^2 \epsilon \mu_0 (1 + \chi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{0x} \\ H_{0y} \end{bmatrix} = 0 \quad (6.72b)$$

对于  $\mathbf{H}_0$  的非无效解, 此行列式必须为零。由此可得传播常数  $\beta$  的本征值方程:

$$(\beta^2 - \omega^2 \epsilon \mu_0 (1 + \chi))^2 - \omega^4 \epsilon^2 \mu_0^2 K^2 = 0$$

或

$$\beta^2 = \omega^2 \epsilon \mu_0 (1 + \chi) \pm \omega^2 \epsilon \mu_0 K \quad (6.73)$$

若代入  $\chi$  和  $K$ , 并假定为无耗铁氧体, 即  $\chi'' = K'' = 0$ , 则不难求出  $\beta^2$  的两个解为

$$\beta^2 = \beta_+^2 = \omega^2 \epsilon \mu_+ \quad (6.74a)$$

$$\beta^2 = \beta_-^2 = \omega^2 \epsilon \mu_- \quad (6.74b)$$

式中,  $\mu_+$  和  $\mu_-$  即为 (6.59) 式

由每一个本征值或  $\beta^2$  的解, 便可确定  $H_{0x}$  对  $H_{0y}$  之比。为解  $\beta_+^2$ ,



在 (6.72b) 的一对方程中的第一方程给出,

$$(\beta_+^2 - \omega^2 \epsilon \mu_0 (1 + \chi)) H_{0x} - j \omega^2 \epsilon \mu_0 K H_{0y} = 0$$

或

$$\frac{H_{0x}}{H_{0y}} = j \quad (6.75a)$$

这指的是  $H_0 = H_0 (a_x - j a_y)$ , 即正圆极化波的情况。同理, 由  $\beta_-^2$  的解给出

$$\frac{H_{0x}}{H_{0y}} = -j \quad (6.75b)$$

它表示负圆极化波的情况。由此可见, 铁氧体中沿着恒定场的方向传播的自然模是圆极化  $TEM$  波。若传播方向与  $B_0$  不同, 下面将指出, 同样有两个传播模, 但不再是圆极化的  $TEM$  波。当线极化波沿  $B_0$  传播时, 由于  $\beta_+$  和  $\beta_-$  不相等而使极化平面发生旋转。这是一个非互易现象, 叫做法拉第旋转。下一节讨论这个问题。

## 6.7 法拉第旋转

我们研究沿  $Z$  轴加恒定场  $B_0$  的无限大无耗铁氧体媒质, 设在  $Z=0$  处有一个沿  $x$  轴线极化的平面  $TEM$  波, 沿  $Z$  轴方向传播, 如图 6.25 所示。现在来证明, 此波传播时, 其极化平面将旋转 (法拉第旋转)。这个线极化波可以分解为如下两个左右旋圆极化波之和;

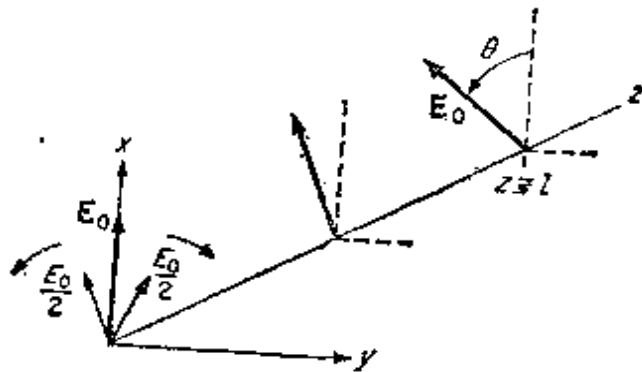


图 6.25 法拉第旋转

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_0 = (\mathbf{a}_x + j\mathbf{a}_y) \frac{E_0}{2} + (\mathbf{a}_x - j\mathbf{a}_y) \frac{E_0}{2} \quad z=0 \quad (6.76)$$

这两部分波以不同的相移常数 $\beta_+$ 和 $\beta_-$ 传播，因而在 $Z=l$ 处变成

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (\mathbf{a}_x + j\mathbf{a}_y) \frac{E_0}{2} e^{-j\beta_- l} + (\mathbf{a}_x - j\mathbf{a}_y) \frac{E_0}{2} e^{-j\beta_+ l} \\ &= \mathbf{a}_x \frac{E_0}{2} (e^{-j\beta_- l} + e^{-j\beta_+ l}) + j\mathbf{a}_y \frac{E_0}{2} (e^{-j\beta_- l} - e^{-j\beta_+ l}) \\ &= \frac{E_0}{2} e^{-j(\beta_- + \beta_+)l/2} \left[ \mathbf{a}_x (e^{-j(\beta_- - \beta_+)l/2} + e^{j(\beta_- - \beta_+)l/2}) \right. \\ &\quad \left. + j\mathbf{a}_y (e^{-j(\beta_- - \beta_+)l/2} - e^{j(\beta_- - \beta_+)l/2}) \right] \\ &= E_0 e^{-j(\beta_- + \beta_+)l/2} \left[ \mathbf{a}_x \cos(\beta_+ - \beta_-) \frac{l}{2} - \mathbf{a}_y \sin(\beta_+ - \beta_-) \frac{l}{2} \right] \end{aligned} \quad (6.77)$$

这个合成波是线极化波，它的相位已延迟了 $(\beta_- + \beta_+)l/2$ 。这个新的极化平面对 $x$ 轴的角度为

$$\theta = \tan^{-1} \frac{E_y}{E_x} = \tan^{-1} \left[ -\tan(\beta_+ - \beta_-) \frac{l}{2} \right] = -(\beta_+ - \beta_-) \frac{l}{2} \quad (6.78)$$

当 $\omega < \omega_s$ ，即在低于铁氧体的谐振频率时， $\beta_+$ 大于 $\beta_-$ ，且由传播方向（图6.25。看进去，极化平面是反时针方向。旋转的。旋转的速率为 $(\beta_+ - \beta_-) / 2$  弧度/米。当频率为10000兆赫时，在铁氧体中每厘米旋转 $100^\circ$ 或大于 $100^\circ$ 是典型的。

若把传播方向反过来，则极化平面继续向同一方向旋转。因而，如果由(6.77)式表示的波反过来传播到 $Z=0$ 平面处，则其极化方向并不恢复到原先的位置，而是与 $x$ 轴成 $2\theta$ 角度。这个结果不难从以下的分析中得出。设组成(6.77)式中极化波的每一个圆极化波由 $Z=l$ 处传播回到 $Z=0$ 处时，它们所增加相位延迟为 $\beta_+ l$ 和 $\beta_- l$ ，则在 $Z=0$ 处的 $\mathbf{E}$ 便成为

$$\mathbf{E} = (\mathbf{a}_x + j\mathbf{a}_y) \frac{E_0}{2} e^{-2\beta_+ z} + (\mathbf{a}_x - j\mathbf{a}_y) \frac{E_0}{2} e^{-2\beta_- z} \quad (6.79)$$

照(6.77)式来推论, 显然, 在 $Z=0$ 处的新的极化方向相对于 $x$ 轴的角度为

$$2\theta = -(\beta_+ - \beta_-)l$$

可见, 法拉第旋转具有非互易作用。

实际的铁氧体媒质具有一定的损耗, 它对传播将产生重大的影响。圆极化波的传播常数 $\gamma_+ = j\beta_+ + \alpha_+$ 和 $\gamma_- = j\beta_- + \alpha_-$ , 具有不相等的衰减常数和不相等的相移常数。当存在损耗时, 若用 $-\gamma^2$ 代替 $\beta^2$ , 则由(6.73)式表示的传播常数为

$$\gamma_+ = j\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon} (1 + \chi' - j\chi'' + K' - jK'')^{\frac{1}{2}} \quad (6.80a)$$

$$\gamma_- = j\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon} (1 + \chi' - j\chi'' - K' + jK'')^{\frac{1}{2}} \quad (6.80b)$$

式中,  $\chi'$ 、 $\chi''$ 、 $K'$ 、 $K''$ 是在(6.70)式后面给出的几个式子。

(6.80)式的解为

$$\beta_{\pm} = \frac{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon}}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \chi' \pm K' + \sqrt{(1 + \chi' \pm K')^2 + (\chi'' \pm K'')^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (6.81a)$$

$$\alpha_{\pm} = \omega^2 \mu_0 \epsilon \frac{\chi'' \pm K''}{2\beta_{\pm}} = \frac{\omega^2 \epsilon \mu'_{\pm}}{2\beta_{\pm}} \quad (6.81b)$$

圆极化波的导磁率为

$$\mu_{\pm} = \mu'_{\pm} - j\mu''_{\pm} = \mu_0 (1 + \chi' - j\chi'' \pm K' \mp jK'') \quad (6.82)$$

由(6.70)式和(6.82)式所给出的 $\mu'_{\pm}$ 、 $\mu''_{\pm}$ 值和传播因子 $\beta_{\pm}$ 及 $\alpha_{\pm}$ 随频率 $\omega_0$ 的变化, 画在图6.26和图6.27中, 一般的铁氧体参数为 $\omega_m = 2\pi \times 5.6 \times 10^9$ ,  $a = 0.05$ , 工作频率为10000兆赫。注意 $\omega_0$ 等于 $2\pi \times 2.8$ 兆赫/奥斯特乘所加的场 $H_0$ ,  $4\pi \times 10^{-3}$ 奥斯特等于场强为1安培/米。所取的 $\omega_m$ 值相当于饱和磁化强度为2000高斯, 或 $\mu_0 M_s$ 等于0.2韦伯/米<sup>2</sup>。图6.27中的曲线表明 $\alpha_-$ 总是非常小的, 而 $\alpha_+$ 在谐振频率 $\omega_0 \approx \omega$ 附近是很大的。当 $\omega_0$ 远大于 $\omega$ 时, 衰减 $\alpha_+$ 变得很小, 但在这个区域中,  $\beta_+$ 和 $\beta_-$ 的差别不大, 所以, 法拉第旋转的

变率应该很小。当 $\omega_0$ 的值较小，即 $H_0$ 较小时，旋转变率会很大，尤其在 $\beta_+$ 通过最小值的区域时，该区域中 $\mu_+'$ 为负值。还要注意当 $\omega_0 > \omega$ 时， $\beta_+ > \beta_-$ ；而当 $\omega_0 < \omega$ 时， $\beta_+ < \beta_-$ 。可见，法拉第旋转的方向在高于和低于谐振频率的两个区域中是不同的。

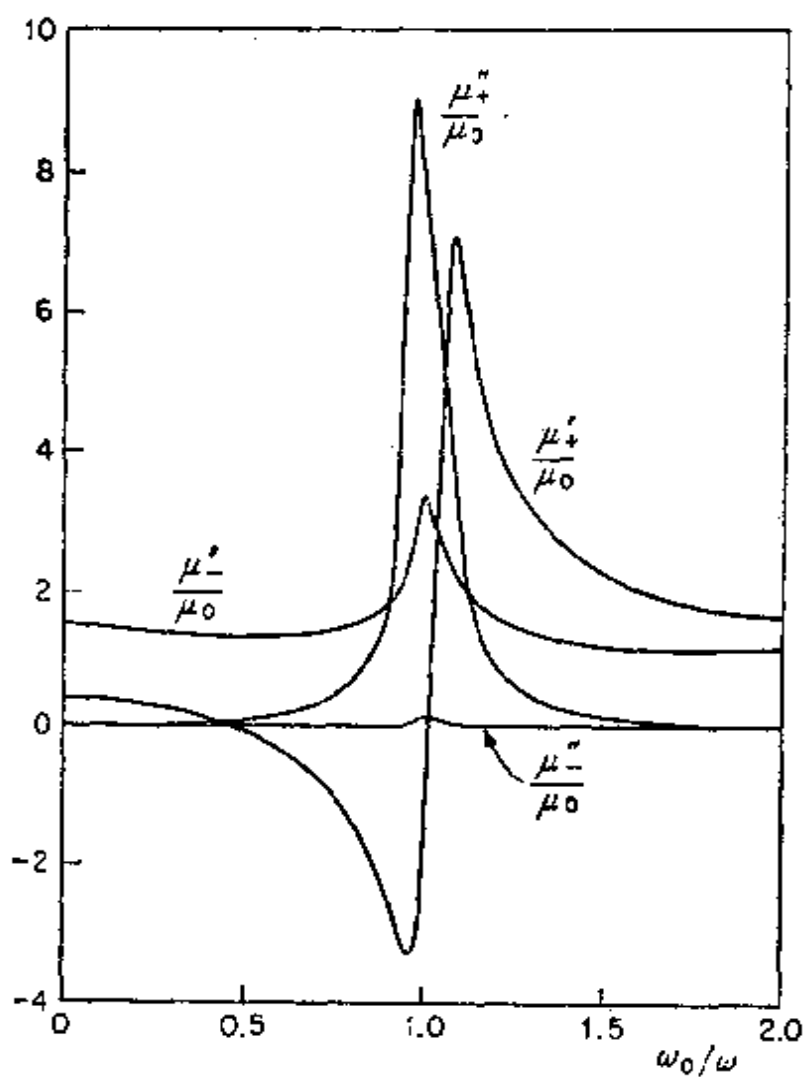


图 6.26 在铁氧体中圆极化波导磁率的实部和虚部随 $\omega/\omega_0$ 的变化曲线  
( $\omega/2\pi = 10$ 千兆赫,  $\omega_m/2\pi = 5.6$ 千兆赫,  $\alpha = 0.05$ )

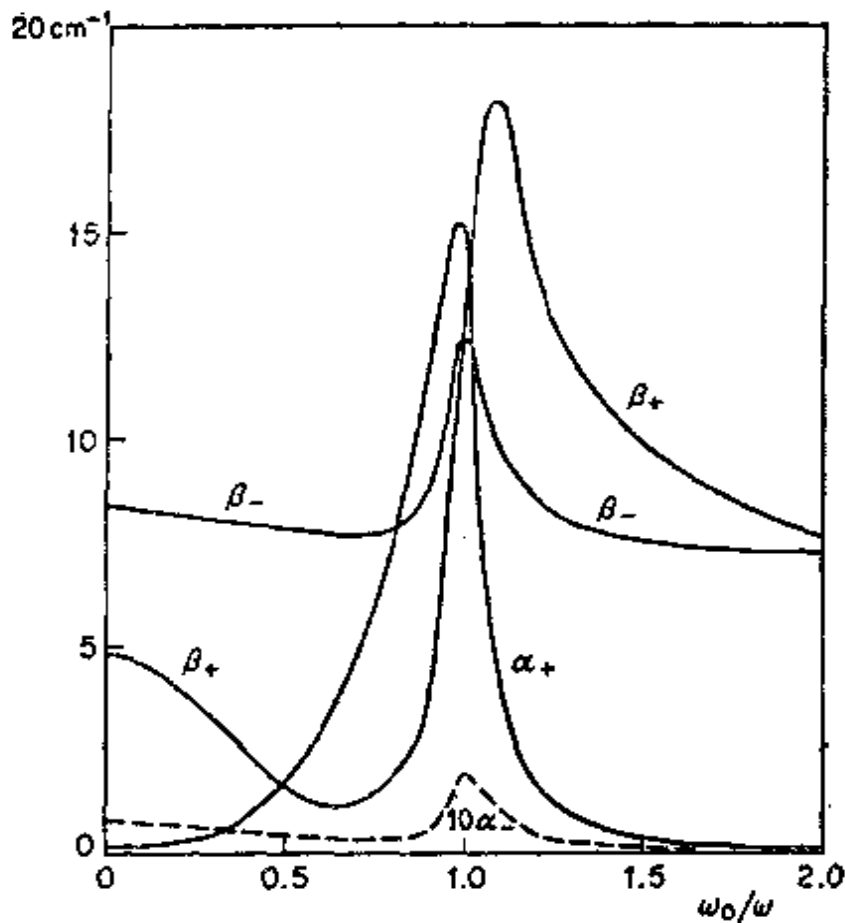


图 6.27 铁氧体中圆极化波的传播常数和衰减常数。其参数与图6.26中相同 ( $\epsilon = 10\epsilon_0$ )。注意因为  $\alpha_-$  很小，故所画的是  $10\alpha_-$ 。

## 6.8 应用法拉第旋转的微波器件

### 回转器

回转器定义为这样的一个二端口器件，即当波由端口1传输到端口2时，与由端口2传输到端口1时相比，有 $180^\circ$ 的相对相移。应用法拉第旋转的非互易特性，可以做成回转器。图6.28表示一个典型的微波回转器。它的组成是：一个扭转了 $90^\circ$ 的矩形波导与一圆波导相连接，而此圆波导另一端又与另一矩形波导相连接。两个矩形波导的

输入端口具有同样的方位。圆波导中放一根铁氧体细圆棒，其两端是渐变的，以减少反射。所加的轴向恒定磁场使在圆波导中的主模  $TE_{11}$  波产生  $90^\circ$  的法拉第旋转。设有一个由左向右传播的波。在通过扭波导段时，极化平面向顺时针方向旋转了  $90^\circ$ 。若此铁氧体产生  $90^\circ$  的附加旋转，则总的旋转角应为  $180^\circ$ ，如图 6.28 所示。当波由右向左传播时，法拉第旋转仍向同样方向转  $90^\circ$ 。但是，在通过扭波导时，又产生的  $90^\circ$  旋转，其方向抵消法拉第旋转。因而，当波

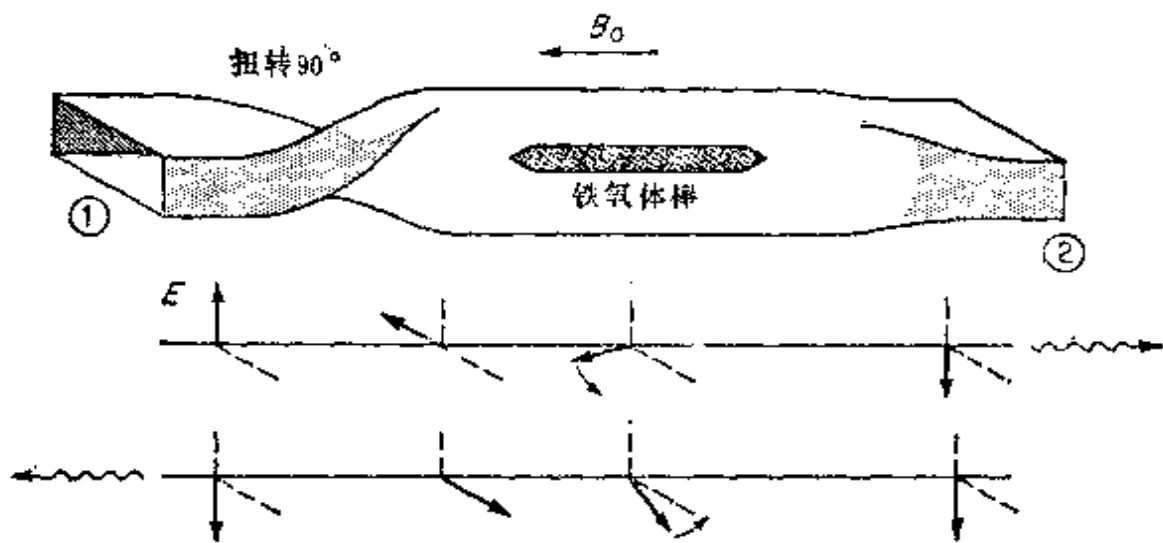


图 6.28 一个微波回转器

由端口 2 传输到端口 1 时，极化平面没有净的旋转。而波由端口 1 传输到端口 2 时有  $180^\circ$  的旋转，因为它使场的极化方向反了，故相当于  $180^\circ$  的相移。显然，此器件正好满足回转器的定义。

若能使输入矩形波导和输出矩形波导方位差  $90^\circ$ ，则可以做成没有  $90^\circ$  扭波导段的回转器。参阅图 6.29，可以看出，若铁氧体产生  $90^\circ$  的旋转，而输出波导对于输入波导又旋转了  $90^\circ$ ，则由输出波导出来的传播波便具有正确的极化。当波由端口 2 向端口 1 传播时，到达端口 1 中的波其极化改变  $180^\circ$ ，如图 6.29 所示。因而，又产生了  $180^\circ$  的相移。

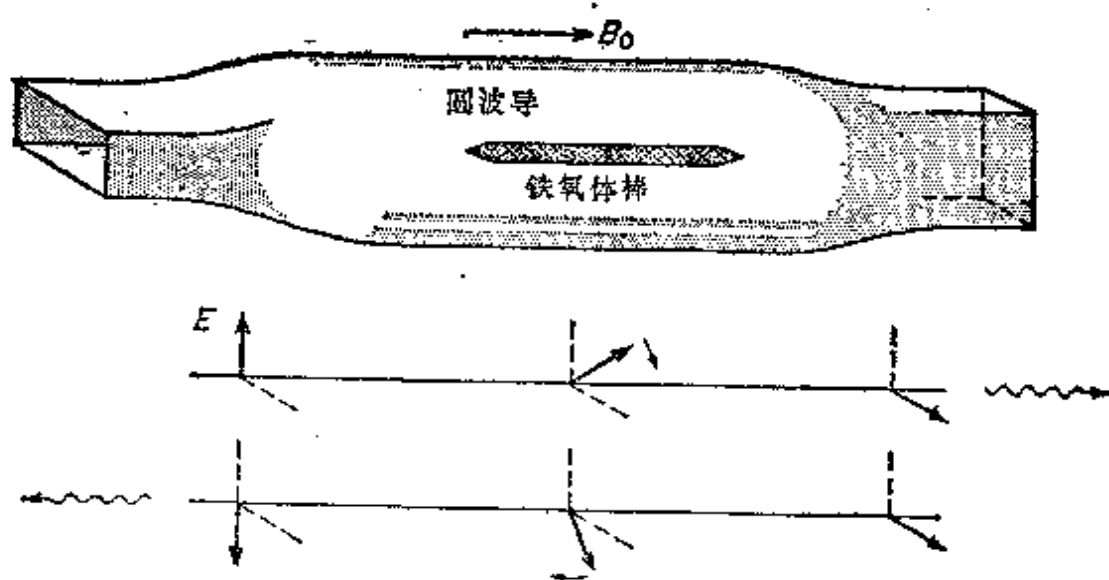


图 6.29 没有驻波导段的回转器

能够精确计算中心放置纵向磁化圆柱的圆波导中的传播波。<sup>\*</sup>但是，这个解需要大量的代数运算，且由所得的传播常数超越方程中算出数值是非常费劲的。按照波在无限大铁氧体媒质中的传播来推论，此解证实了所预期的法拉第旋转，是不容置疑的。

### 隔离器

隔离器（即单向器）是这样一种器件，即波由端口 1 向端口 2 传输时没有衰减，而当反方向传输时则具有很高的衰减。隔离器常常置于微波信号发生器和负载电路之间。能把全部有用功率传送到负载，而由负载反射的功率，不返回到发生器的输出端，是隔离器的一个很大的优点。因而，从发生器看过去，它是一个匹配负载，同时，由负载阻抗变化而引起的功率变化和频率牵引（频率改变）的影响也可避免。

<sup>\*</sup> A.A.Th.M.van Treir, *Guided Electromagnetic Waves in Anisotropic Media*, *Appl.sci.Res.*, Vol.B3, p.305, 1953.  
M.L.Kales, *Modes in Waveguides That Contain Ferrites*, *J.Appl. Phys.*, Vol.24, p604, 1953.

隔离器的结构，除了它应用 $45^\circ$ 扭波导段和 $45^\circ$ 法拉第旋转外，与回转器是相似的。此外，在输入和输出波导中插入薄电阻片，以吸收极化方向与波导宽边平行的电场矢量。如图6.30所示。隔离器的工作原理如下：波由端口1传播到端口2时，其极化先由扭波导

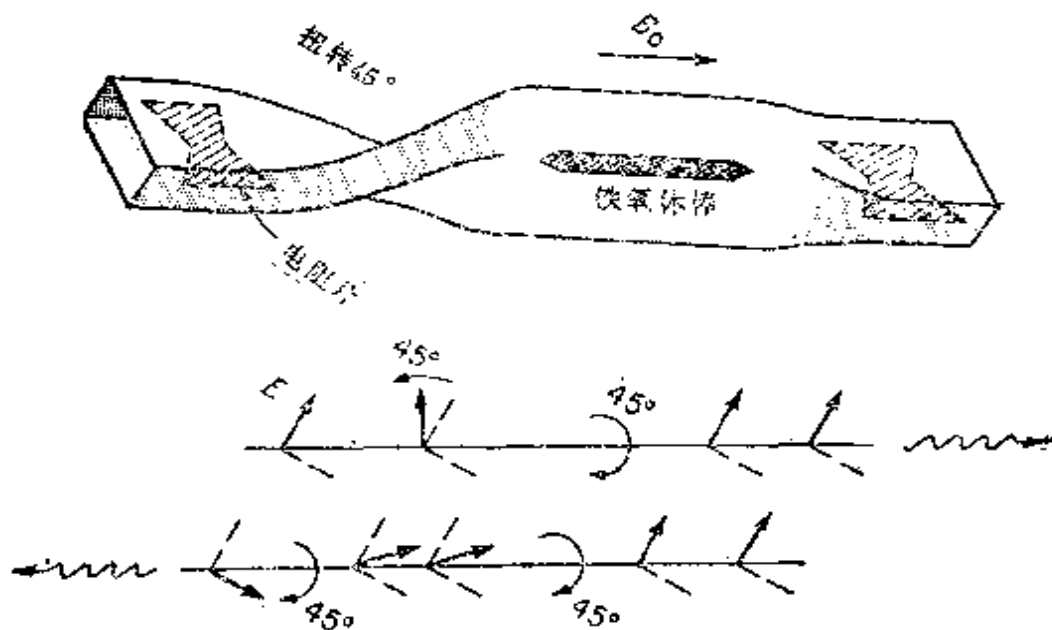


图 6.30 法拉第旋转式隔离器

段反时针方向转 $45^\circ$ ，再由法拉第旋转器顺时针方向转 $45^\circ$ 。这样，在端口2便呈现正确的极化，以便在输出波导中传播。由端口2向端口1传播的波，其极化平面旋转了 $90^\circ$ 。当它进入端口1的波导时，因为其电场平行于电阻片，故被吸收了。当没有电阻片时，此波会由于极化不正确而由端口1反射，而不能在端口1的波导中传播。但是，在隔离器中的多次反射将导致波向两个方向传输，因而，需要在输入和输出波导中都用电阻片，以满足性能要求。隔离器的典型性能指标是正向传输损耗小于1分贝，反向衰减为20到30分贝，工作带宽接近于10%。

### 谐振式隔离器

如果我们研究图6.27中关于在无限大铁氧体媒质中圆极化波的



传播常数曲线，就可以看出，负圆极化波的衰减常数总是很小的，而正圆极化波的衰减常数在谐振点 $\omega_0 \approx \omega$ 附近是非常大的。这个性质可以作为谐振式隔离器的基础，这种隔离器利用负圆极化波向低损耗方向传播，正圆极化波向高损耗方向传播，在后一种情况下，波被很快地吸收或衰减掉。

圆极化状态是矩形波导中的主模 $TE_{10}$ 波在波导内部两个位置上的固有特性。 $TE_{10}$ 波的场为

$$E_y = \sin \frac{\pi x}{a} e^{\pm i\beta z}$$

$$j\omega\mu_0 H_x = \pm j\beta \sin \frac{\pi x}{a} e^{\pm i\beta z}$$

$$j\omega\mu_0 H_z = -\frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi x}{a} e^{\pm i\beta z}$$

因为 $H_x$ 和 $H_z$ 相位相差 $90^\circ$ ，故当 $|H_x| = |H_z|$ 时，或当 $x = x_1$ 时，就出现圆极化，其中

$$\tan \frac{\pi x_1}{a} = \pm \frac{\pi}{\beta a} = \pm \frac{\lambda_g}{2a} \quad (6.83)$$

对于在 $0 < x_1 < a/2$ 范围内的解， $H_x$ 对 $H_z$ 之比为

$$\frac{H_x}{H_z} = \mp j \quad (6.84a)$$

而在 $a/2 < x_1 < a$ 范围内所得到的解为

$$\frac{H_x}{H_z} = \pm j \quad (6.84b)$$

(6.84a)式给出的解，对于 $y$ 轴相当于向 $+z$ 方向传播的负圆极化场和向 $-z$ 方向传播的正圆极化场。若分析由(6.84b)式给出的解，则其极化的方向是相反的。

$TE_{10}$ 波的上述性质可用于谐振式隔离器中，方法是：把一块薄铁氧体片（或两块铁氧体片，如图6.31b所示的）放在矩形波导中圆极化的射频磁场位置上，并在 $y$ 方向加恒定磁场使铁氧体磁

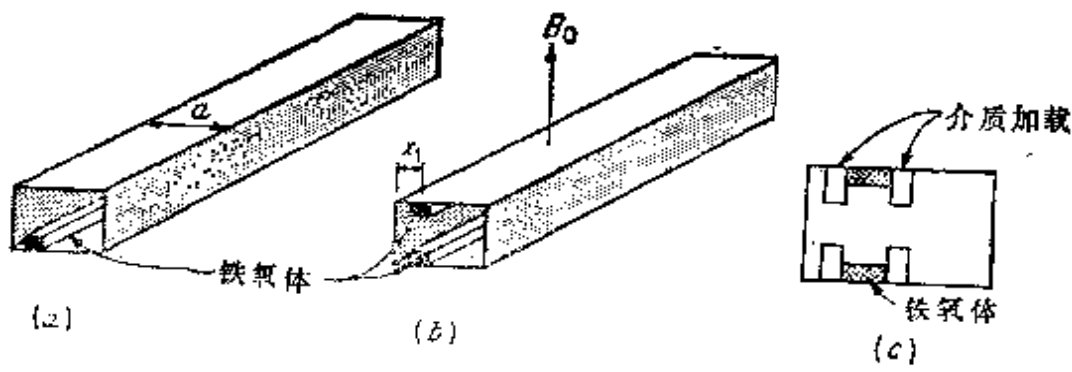


图 6.3: 矩形波导暗极式隔离器

化，如图6.31所示。如同(6.84)式所指出的那样，因为圆极化的转向取决于传播方向，所以，在向一个方向传播时，磁场是负圆极化的，受到的衰减小；而向相反方向传播时，场是正圆极化的，便很快地衰减。通过适当的设计，在 $\lambda = 3$ 厘米时，可使正向衰减保持0.5分贝/吋以下，反向衰减保持在6到10分贝/英寸或者更高。用如图6.31 c所示的介质加载的办法可改善反向——正向衰减比。

## 6.9 环 形 器

环行器是一种多端口器件，它具有这样的特性(图6.32)，即由端口1入射的波只耦合到端口2，由端口2入射的波只耦合到端口3，以此类推。理想的环行器也是一种匹配器件，即除一个端口接匹配负载外，其余各端口的输入阻抗都等于其输入线的特性阻抗，因而相当于接匹配负载。

四端口环行器可以由两个魔T接头或混合接头和一

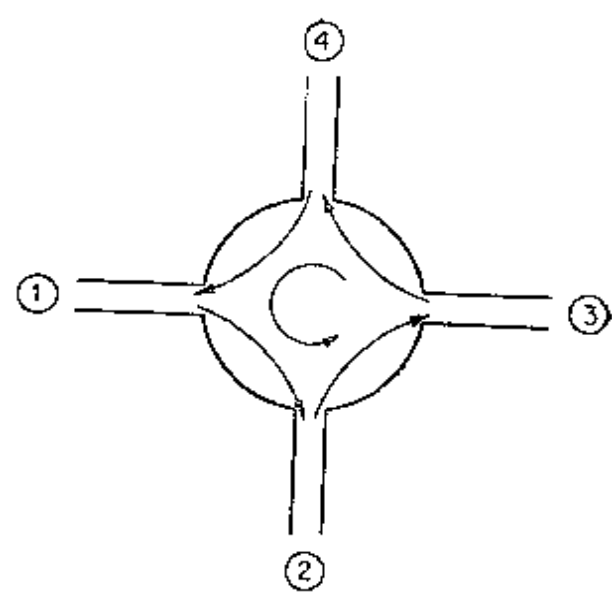


图 6.32 四端口环行器的略图

个回转器组成，如图6.33所示，此回转器对图6.33中由  $a$  到  $b$  方向传播的波产生  $180^\circ$  的附加相移。由  $b$  到  $a$  以及由  $c$  到  $d$  或由  $d$  到  $c$  的电长度都是相等的。

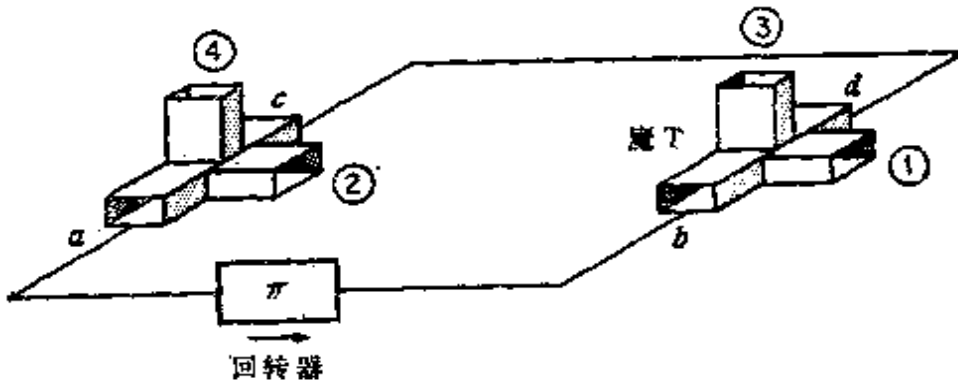


图 6.33 四端口环行器

设有一个波由端口 1 入射。这个波被分成两个等振幅等相位的波，分别在混合接头的两旁臂中传播。这两个波将以相同的相位到达  $a$  和  $c$ ，因而应由端口 2 出来。由端口 2 入射的波也可分成为两个波，一个达到  $d$  时相位为  $\varphi$ ，另一个达到  $b$  时，由于回转器的存在而使其相位为  $\varphi + \pi$ ，这两个部分波依其正确的相位关系组合起来，应由混合接头的端口 3 出来。由端口 3 入射的波，也分成两个等振幅而相位差  $180^\circ$  的波，因而在到达另一个混合接头时，依其正确的相位关系组合起来，应由端口 4 出来。由端口 4 入射的波，将以同样的方式分成两个振幅相等、相位相差  $180^\circ$  的波，但现在回转器将使其相位恢复到同相，所以，组合起来的波由端口 1 出来。可见，图6.33所表示的微波器件具有所需要的环行传输特性。

用侧边孔耦合3分贝定向耦合器和矩形波导非互易相移器，可以组成更紧凑的四端口环行器。这里，首先阐述非互易相移器。它由矩形波导中放一铁氧体薄片所组成，铁氧体片放在  $TE_{10}$  波的交流磁场为圆极化处，如图6.34所示。偏置场  $B_0$  加在  $y$  方向上。因为对向一个方向传播的波来说，交流磁场在  $x_1$  处是右旋圆极化，对向反方向传播的波来说， $x_1$  处是左旋圆极化，即铁氧体片对于向两个传播方向的波的扰动作用是不同的。因而，正向传播时的传播相移

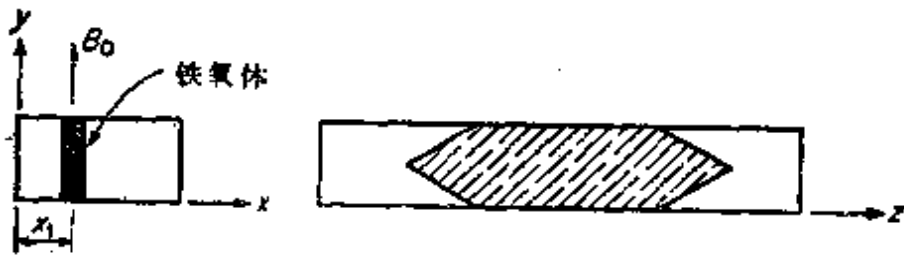


图 6.34 非互易相移器

常数 $\beta_+$ 与反向传播时的传播相移常数 $\beta_-$ 是不同的。通过选取片的长度使其 $(\beta_+ - \beta_-)l = \pi/2$ , 就可以达到使两个传播方向具有 $90^\circ$ 的相移。

图6.35中所表示的是利用两个具有 $90^\circ$ 相移的非互易相移器组成的四端口环行器。用于相移器反向偏置的恒定场, 实际上是用如图6.35所示的永久磁铁。而在波导中插入一介质片加载, 就可提供

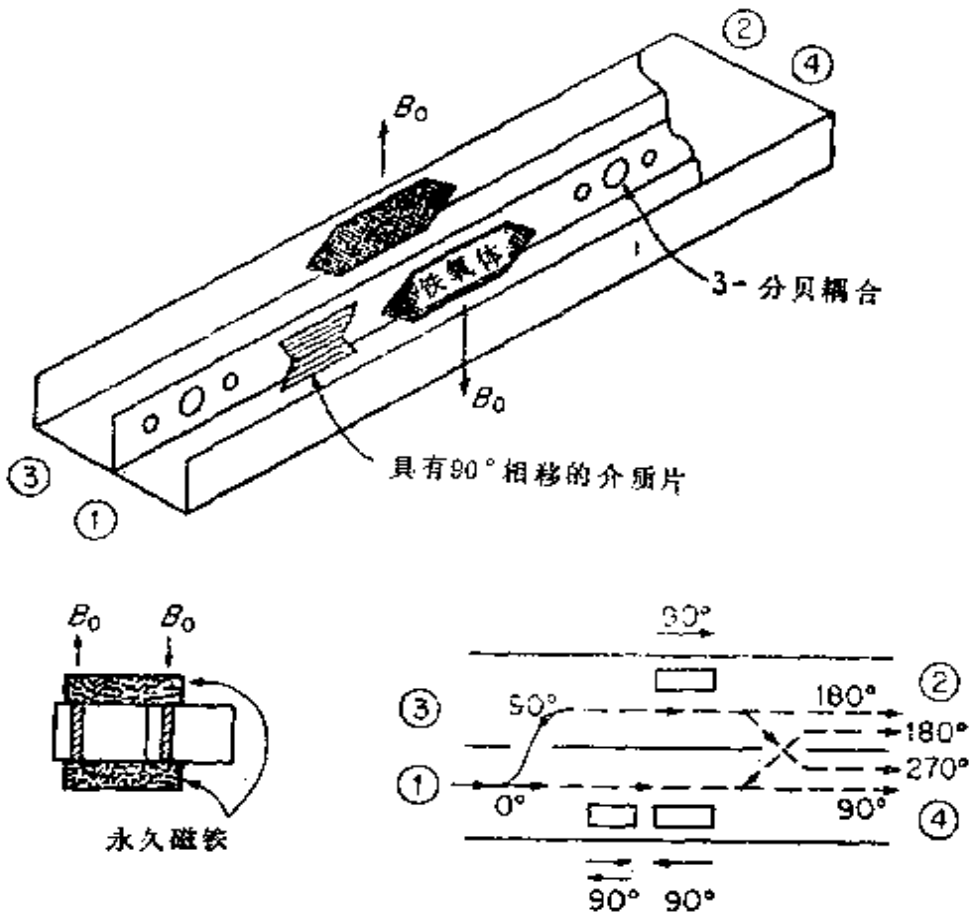


图 6.35 一个精密的四端口环行器

可互易的 $90^\circ$ 附加相移。波导壁上所开的三个耦合孔具有3分贝的耦合。通过这三个孔耦合的波发生 $90^\circ$ 的相位变化,这个相位变化,对于此环行器的工作是重要的。

设端口1中进来一个波。此波通过第一个3分贝耦合器被分成两个波,在上波导中的波,由于孔的传输特性而发生 $90^\circ$ 的相位变化。它到达第二个耦合器时将具有 $180^\circ$ 的相对相移,而下波导中的波,在此处具有 $90^\circ$ 的相对相移。第二个耦合器以如图6.35所示的方式把这两个波分开。可以看出,合成波在端口4处是反相的,而在端口2处是同相的。因此,波由端口1传播到端口2,类似的分析将证明由端口2入射的波将在端口3出来,或者一般地说,波按 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ 的顺序传输。

### 三、端口环行器

卡林已证明任一无耗、匹配、非互易的三端口微波接头都是一个理想的三端口环行器\*。由散射矩阵的特性不难证明这个定理。理想匹配的三端口接头具有如下形式的散射矩阵:

$$(S) = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & 0 & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.85)$$

对非互易接头,散射矩阵不再对称,即 $S_{ij} \neq S_{ji}$ 。但是,若此接头是无耗的,则功率的守恒性仍要求 $(S)$ 矩阵具有单式性。因而,(4.63a)式适合于任何无耗接头,而与此接头是否互易无关。把单式性的条件用到(6.85)式得

$$\begin{aligned} S_{12}S_{12}^* + S_{13}S_{13}^* &= 1 \\ S_{21}S_{21}^* + S_{23}S_{23}^* &= 1 \\ S_{31}S_{31}^* + S_{32}S_{32}^* &= 1 \\ S_{13}S_{23}^* &= S_{12}S_{32}^* = S_{31}S_{31}^* = 0 \end{aligned}$$

\* H.J. Carlin, *Principles of Gyration Networks*, Polytech. Inst. Brooklyn, Microwave Res. Inst. Symp. Ser., Vol. 1, p. 175, 1955.

若假定  $S_{21} \neq 0$ ，则由第四式得  $S_{31} = 0$ 。这样，第三式就要求  $|S_{32}| = 1$ ，于是由第四式得  $S_{12} = 0$ ，由第一式得  $|S_{13}| = 1$ ，再由第四式得  $S_{23} = 0$ 。从而由第二式可以得出  $|S_{21}| = 1$ ，所以

$$\begin{aligned} |S_{21}| &= |S_{32}| = |S_{13}| = 1 \\ S_{12} &= S_{23} = S_{31} = 0 \end{aligned}$$

因此，就出现由端口 1 到端口 2，由端口 2 到端口 3 和端口 3 到端口 1 的理想传输情况。而按任何其他顺序都不能传输。于是任一匹配、无耗、非互易的三端口接头最终的散射矩阵必定为

$$(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & S_{13} \\ S_{21} & 0 & 0 \\ 0 & S_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.86)$$

若适当地选取三条输入线端面的位置，则可以使  $S_{13}$ 、 $S_{21}$  和  $S_{32}$  的相角为零，从而使  $S_{13} = S_{21} = S_{32} = 1$ 。

如果上述分析适用于无耗、理想匹配、互易的三端口接头的话，那么，互易性要求

$$S_{13} = S_{21} = S_{32} = 0$$

因为  $S_{31} = S_{12} = S_{32}$ 。从而使最终的散射矩阵为零。由这个结果得出的结论是，不可能组成一个理想匹配的、无耗的、互易的三端口接头。在互易的情况下，反射系数  $S_{11}$ 、 $S_{22}$  或  $S_{33}$  中必须至少有一个不为零。

三端口环行器的实际结构，一般包括三个完全相同的波导或“带状”传输线组成的对称接头（Y形接头），以及在其中心放置轴向磁化的铁氧体柱或圆盘。图6.36表示波导型和平衡带状线型的三端口环行器。沿轴向所加的恒定场  $B_0$  使铁氧体柱或圆盘磁化，以便使此接头具有所需要的非互易特性。通过在每臂放置适当的调谐元件（因为此环行器包含三重对称，在每臂中它们应完全相同），可以使此接头匹配，即可以使  $S_{11}$ 、 $S_{22}$  和  $S_{33}$  为零。上面的分析证明，若所有的损耗都可以忽略不计，则此接头必须而且必然是一个

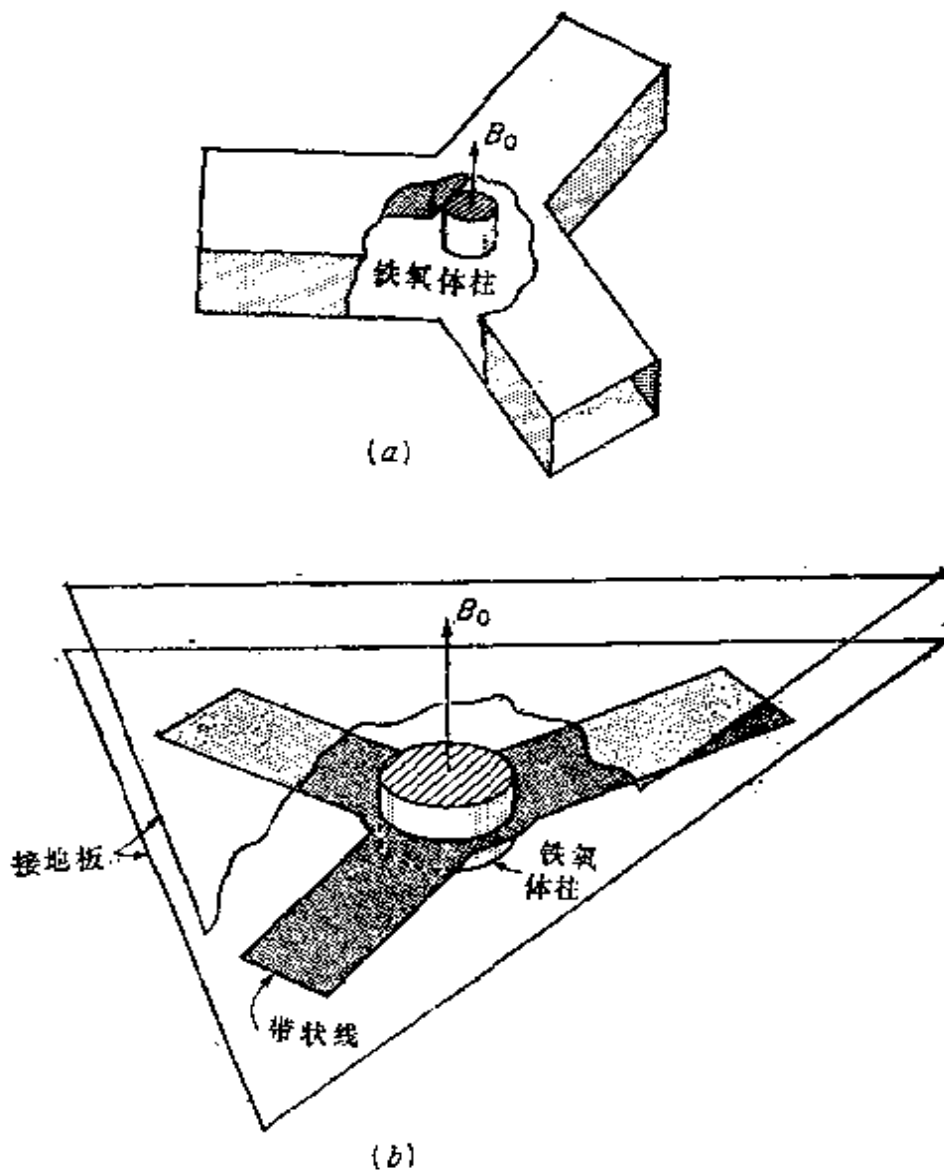


图 6.36 三端口环行器：(a)波导型环行器；(b)带状线型环行器。

理想的环行器。当然，损耗总是存在的，这会使其性能受到影响。能够获得的一般特性为：插入损耗小于 1 分贝，即  $|S_{13}|$ 、 $|S_{21}|$ 、 $|S_{32}|$  大于 0.89；隔离比由 30 到 40 分贝；输入反射系数小于 0.2。30 分贝到 40 分贝的隔离比相当于  $|S_{31}|$ 、 $|S_{12}|$  和  $|S_{23}|$  的值在 0.01 到 0.03 的范围内。

## 6.10 其他铁氧体器件

前几节阐述的利用铁氧体进行工作的器件，只是已制成的大量器件中的一小部分。除了上述以外，还有其他形式的隔离器、互易和非互易的相移器、电子控制（通过改变供给恒定偏置场的电磁铁中的电流）相移器和调制器、电子开关和功率限制器等等。大信号电平下，铁氧体的非线性特性也用于谐波发生器、混频器和参量放大器中。关于这些器件的讨论，以及设计依据、性能数据和有关的原始文献，在拉克斯和巴顿的书中，以及本章末所列的参考文献中都作了介绍。

### 习 题

6.1 试证明在旋转式相移器中，若输出 $\lambda/4$ 波长片、过渡段和矩形波导都旋转角度 $\theta_1$ ，则在传输波中引起的附加相位变化为 $\theta_1$ 。

6.2 对于轴线一致的两波导（ $\theta=0$ ）且具有中心孔的公用耦合孔双波导定向耦合器来说，当 $\lambda_0$ 随 $\alpha$ 而变化时，为什么由（6.25 a）式得不到 $\lambda_0$ 的有用解，而由（6.25 b）式能得到？

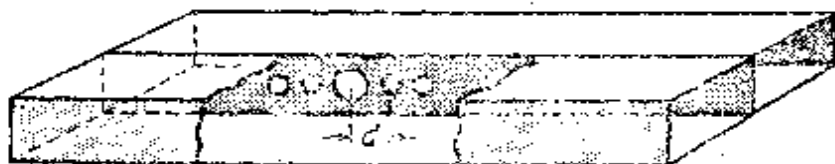
6.3 对图6.14中所表示的这种定向耦合器，导出与（6.25）式孔位置相对应的两种情况下方向性系数的表示式。哪种孔位置情况下方向性系数的频率敏感性最小？

6.4 试设计一个具有中心圆孔的公用耦合孔双波导定向耦合器。其波导尺寸为 $a=0.9$ 英寸， $b=0.4$ 英寸。中心频率为9.8千兆赫。要求耦合系数为20分贝。试求方向性系数保持在40分贝以上时孔的半径和频带。

6.5 本题图中表示由公共侧壁圆孔耦合的两个矩形波导。振幅为1的 $TE_{10}$ 波向另一波导的两个方向辐射振幅为 $-j\frac{4}{3}r_0^2(\pi/a)^2(ab\beta)^{-1}$ 的场。试设计一个二项式类型的五孔定向耦合器。在频率



为10000兆赫时，要求的耦合系数为30分贝。已知波导宽边  $a = 2.4$  厘米，高  $b = 1.2$  厘米。试求使方向性系数大于50分贝时所需要的孔的半径和频带。



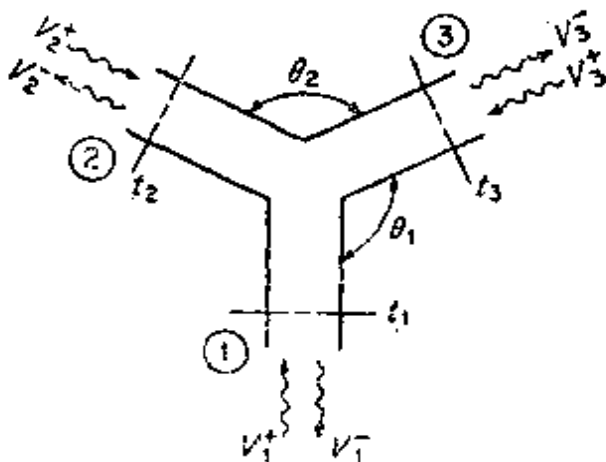
习题 6.5

6.6 若把习题6.5中定向耦合器改为切比雪夫定向耦合器，求孔的半径。要求方向性系数的最小值  $D_{\min} = 50$  分贝时，求对应的频带。它所得到的带宽比习题6.5中的二项式定向耦合器的带宽要宽多少？

6.7 对本书所阐明的三孔切比雪夫定向耦合器作数字分析。取  $f = 10000$  兆赫， $a = 2b = 2.4$  厘米， $x_3 = a/2$ ，求所需孔的半径和工作带宽。孔方向性使频带中心和通带边缘总的方向性增大了多少？

6.8 设有如图所示的一个无耗的和互易的三端口接头。利用散射矩阵的单式性和对称性证明三端口不能同时匹配，即不能使  $S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0$ 。

提示：假定所有的  $S_{nn}$  都为零 ( $n = 1, 2, 3$ )，证明它将导致前后矛盾的方程式。



习题 6.8

6.9 设在习题6.8的Y接头臂3中距端面 $t_3$ 距离为 $d$ 处被短路, 则它使 $V_3^+$ 等于 $-V_3^-e^{-j2\beta d}$ , 也使 $V_3^- = S_{13}V_1^+ + S_{23}V_2^+ + S_{33}V_3^+$ 。其结果是构成一个二端口接头。利用已知的 $V_3^+$ 和 $V_3^-$ 的关系式, 证明新的二端口接头散射矩阵的各元为

$$S'_{11} = S_{11} - \frac{S_{13}^2 e^{-j2\beta d}}{1 + S_{33} e^{-j2\beta d}}$$

$$S'_{12} = S'_{21} = S_{12} - \frac{S_{13} S_{23} e^{-j2\beta d}}{1 + S_{33} e^{-j2\beta d}}$$

$$S'_{22} = S_{22} - \frac{S_{23}^2 e^{-j2\beta d}}{1 + S_{33} e^{-j2\beta d}}$$

证明可以找到使端口1和端口2成为非耦合(即 $S'_{12} = 0$ )时的短路位置 $d$ 。

提示: 端面 $t_1$ 、 $t_2$ 、 $t_3$ 的位置可以选取使 $S_{12}$ 为纯虚数,  $S_{33}$ 为纯实数, 且 $S_{13}S_{23}$ 为纯虚数。由 $S'_{12} = 0$ , 求出 $\tan\beta d$ 的方程, 它总有一个解。

6.10 设有一个对称的Y接头, 即为习题6.8的图中 $\theta_1 = \theta_2$ 的情况。证明可以在对称臂(臂3)上放一个短路器, 使臂1和臂2匹配, 即 $S'_{11} = S'_{22} = 0$ , 式中的 $S'_{11}$ 和 $S'_{22}$ 是习题6.9中所给出的。注意在现在的情况下,  $S_{13} = S_{23}$ ,  $S_{11} = S_{22}$ 。因而在臂1和臂2之间理想传输是可能的。

提示: 由 $S'_{11} = 0$ , 求解 $e^{-j2\beta d}$ 得 $S_{11}e^{j2\beta d} = S_{13}^2 - S_{11}S_{33}$ 。若 $|S_{11}| = |S_{13}^2 - S_{11}S_{33}|$ , 则可能有解。现在取端面使 $S_{11} = S_{22} = a_{11}$ ,  $S_{13} = a_{13}$ , 并都是实数。由行1和行2的共轭数的乘积证明, 若 $S_{12} = a_{12} + jb_{12}$ , 则 $a_{12} = -a_{13}^2/2a_{11}$ 。由第3行和第2行共轭数的乘积证明 $S_{33} = jb_{12} - a_{11} - a_{12}$ 。第1行与其本身的共轭数的乘积为 $a_{12}^2 + b_{12}^2 = 1 - a_{13}^2 - a_{11}^2$ 。用 $a_{12}$ 、 $S_{33}$ 和 $b_{12}$ 这些关系式证明 $|S_{11}| = |S_{13}^2 - S_{11}S_{33}|$ 。

6.11 利用运动方程(6.63)式, 研究铁氧体的二次谐波的产生。假定当交流磁化时,  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 e^{2j\omega t} + \mathbf{M}_2 e^{j\omega t}$ , 并假定 $\mathbf{H}$ 只具有时

间关系为 $e^{i\omega t}$ 的 $x$ 分量, 即交流磁场为 $H_x e^{i\omega t} \mathbf{a}_x$ , 忽略所产生的三次谐波项, 并证明

$2j\omega \mathbf{M}_2 = \gamma\mu_0 H_x \mathbf{a}_x \times \mathbf{M}_1 + \gamma\mu_0 H_0 \mathbf{a}_z \times \mathbf{M}_2$  于是,  $2j\omega M_{2z} = \gamma\mu_0 H_x M_{1y}$ , 对 $M_{1y}$ 取小信号解 $\chi_{yx} H_x$ , 并用无耗铁氧体谐振时 $\chi_{yx}$ 的值去证明

$$M_{2z} = \frac{j\gamma\mu_0 \omega_m H_x^2}{4\omega\omega_0 \alpha}$$

注意在高效率情况下,  $\alpha$  必须很小 (阻尼小), 以致在谐振时进动角将很大。

6.12 根据无耗非互易二端口微波接头散射矩阵的单式性, 证明当 $S_{12}$ 为有限值时,  $S_{21}$ 为零是不可能的。从而证明不能做成无耗的单向传输器件。

6.13 在本题中继续证明图6.35所示的环形器中传输顺序为 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ 。

6.14 证明通过适当选取每一端口的端面位置, 可使 $N$ 端口理想无耗环行器的散射矩阵具有如下的形式:

$$[S] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6.15 试证明在无限大铁氧体媒质中, 沿垂直于 $\mathbf{B}_0$ 方向传播的 $TEM$ 波的两个解, 是具有如下传播常数的线性极化波:

$$\gamma_+ = j\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon} \left[ \frac{(1+\chi)^2 - K^2}{1+\chi} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\gamma_- = j\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon}$$

提示: 设沿 $x$ 方向传播的波, 在一种情况下假定 $\mathbf{H}$ 只有 $y$ 分量, 另一种情况假定 $\mathbf{H}$ 只有 $z$ 分量。

## 参 考 文 献

1. Southworth, G.C.: "Principles and Applications of Waveguide Transmission," D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1950.
2. Reich, H.J., et al.: "Microwave Theory and Techniques," D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1953.
3. Montgomery, C.G., R.H. Dicke, and E.M. Purcell: "Principles of Microwave Circuits," McGraw-Hill Book Company, New York, 1948.
4. Ragan, G.L. (ed): "Microwave Transmission Circuits," McGraw-Hill Book Company, New York, 1948.
5. Marcuvitz, N. (ed): "Waveguide Handbook," McGraw-Hill Book Company, New York, 1951.
6. Harvey, A.F.: "Microwave Engineering," Academic Press Inc., New York, 1963. 这是一本工具书, 它对微波领域作了概括性的综述, 并列出了各国文献的详细目录。

### 微波铁氧体

7. Lax, B., and K.J. Button: "Microwave Ferrites and Ferrimagnetics," McGraw-Hill Book Company, New York, 1962. 本书非常全面地研究了铁氧体的物理性质、电磁波在铁氧体中的传播、调压技术, 并讨论了许多铁氧体器件。
8. Soohoo, R.F.: "Theory and Application of Ferrites," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1960.
9. Clarricoats, P.: "Microwave Ferrites" John & Sons, Inc., New York, 1961.
10. Gurevich, A.G.: "Ferrites at Microwave Frequencies," transl. from the Russian by A. Tybulewicz, Consultants Bureau, New York, 1963.
11. Roberts, J.: "High Frequency Application of Ferrites," D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1960.

# 第7章 电磁谐振器

## 7.1 谐振电路

谐振电路广泛用于振荡电路、调谐放大器、频率滤波电路、测量频率的波长计等等都是极重要的，其频率范围从几赫直到包括光波频率。电谐振电路有许多共同特点，以普通集总参数的 $RLC$ 并联

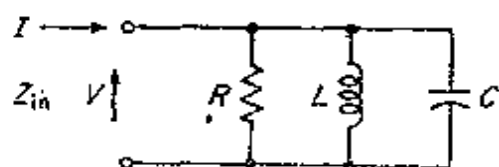


图 7.1 集总参数谐振电路

电路为例，对其中某些特性进行一下评述是值得的。图 7.1 表示一个典型的低频谐振电路。电阻  $R$  通常只是一个等效电阻，表示电感  $L$  和电容  $C$  中的功率损耗，也可能表示

与谐振电路耦合的某外部负载从谐振系统中抽取的功率。

谐振时，输入阻抗为纯实数值等于  $R$ 。这意味着储藏在电场和磁场中的平均能量是相等的。因为根据 (2.60) 式

$$Z_{in} = \frac{P_I + 2j\omega(W_m - W_e)}{\frac{1}{2} I I^*} \quad (7.1)$$

倘若采用适当规定的等效端电流  $I$ ，则这个方程对任何一端口电路都有效。因而，若规定谐振条件为谐振电路的输入阻抗呈现一纯电阻，则谐振总是发生在  $W_m = W_e$  之时。这时，储藏在电容器中的电场能量的时间平均值为

$$W_e = -\frac{1}{4} V V^* C$$

储藏在电感器中的磁场能量的时间平均值为

$$W_m = \frac{1}{4} LI_L I_L^* = \frac{1}{4} L \left| \frac{V}{\omega L} \right|^2 = \frac{1}{4\omega^2 L} VV^*$$

使 $W_m$ 和 $W_e$ 相等，便可求出谐振频率 $\omega_0$ 为

$$\omega_0 = (LC)^{-\frac{1}{2}} \quad (7.2)$$

决定谐振电路频率选择性和一般特性的一个重要参数是品质因数（即 $Q$ 值）。适用于所有谐振系统的 $Q$ 的最普通定义是

$$Q = \frac{\omega (\text{储藏在系统中能量的时间平均值})}{\text{系统中每秒钟的能量损耗}} \quad (7.3)$$

谐振时， $W_m = W_e$ ，以及由于储藏在电容中电能的峰值为 $2W_e$ ，故此时电感中的储能为零，或者反过来。因此，储藏在电路中的平均能量 $W$ 为

$$W = W_m + W_e = 2W_m = 2W_e = \frac{1}{2} CVV^* \quad (7.4)$$

功率损耗为 $\frac{1}{2} GVV^*$ 等于每秒中的能量损耗。所以，对于图7.1的电路来说，由于谐振时 $\omega^2 LC = 1$ ， $G = R^{-1}$ ，故得

$$Q = \frac{\omega C}{G} = \omega RC = \frac{R}{\omega L} \quad (7.5)$$

在谐振点的附近，比如说 $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ ，其输入阻抗可用相当简单的形式表示为

$$\begin{aligned} Z_{in} &= \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right)^{-1} \\ &= \left( \frac{1}{R} + j\omega_0 C + j\Delta\omega C + \frac{j - \Delta\omega/\omega_0}{j\omega_0 L} \right)^{-1} \end{aligned}$$

式中，已经应用了近似式 $1/(\omega_0 + \Delta\omega) \approx (1 - \Delta\omega/\omega_0)/\omega_0$ 。

因为 $j\omega_0 C + 1/j\omega_0 L = 0$ ，故得

$$Z_{in} = \frac{\omega_0^2 RL}{\omega_0^2 L + j2R\Delta\omega} = \frac{R}{1 + j2Q(\Delta\omega/\omega_0)} \quad (7.6)$$

图7.2中画出了 $Z_{in}$ 随 $\Delta\omega/\omega_0$ 变化的曲线，它是典型的谐振曲线。当 $|Z_{in}|$ 下降到其最大值的0.707时，如果 $\omega < \omega_0$ ，其相角为 $45^\circ$ ；而如果 $\omega > \omega_0$ ，则其相角为 $-45^\circ$ 。根据(7.6)式，相应的 $\Delta\omega$ 值可由下式

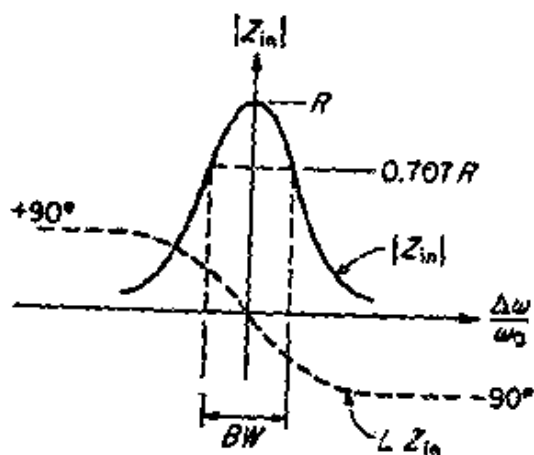


图 7.2 并联谐振电路的  $Z_{in}$

这个关系式提供了  $Q$  的另一种定义，即  $Q$  等于  $|Z_{in}|$  为其最大值的  $0.707$  倍的两点之间的相对带宽的倒数（对串联谐振电路，用  $|Y_{in}|$  的最大值的  $0.707$  倍来定义）。

若图 7.1 中的电阻  $R$  只表示谐振电路的损耗，则由 (7.5) 式表示的  $Q$  称为无载  $Q$ 。若谐振电路与吸收一定数量功率的外部负载耦合，则可以用与  $R$  并联的附加电阻  $R_L$  来表示负载的影响。这时总电阻小了，所以新的  $Q$  也较小。这个  $Q$  称为有载  $Q$ ，用  $Q_L$  表示，即

$$Q_L = \frac{RR_L / (R + R_L)}{\omega L}$$

用  $Q_e$  表示的外部  $Q$ ，定义为谐振电路本身没有损耗而只有外部负载存在时的  $Q$ 。于是

$$Q_e = \frac{R_L}{\omega L}$$

利用这些定义可得

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_e} + \frac{1}{Q} \quad (7.8)$$

与谐振电路相联系的另一个重要参数是阻尼因数  $\delta$ 。这个参数衡量当激励源被移去后，在谐振电路中振荡衰减的速率。对高  $Q$  电路，利用微扰法可以用  $Q$  算出  $\delta$ 。当存在损耗时，储藏于谐振电路中

求得，

$$2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 1$$

或

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{2Q}$$

在两个  $0.707R$  点之间的相对带宽  $BW$  为  $\Delta\omega$  的两倍，因而

$$Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega} = \frac{1}{BW} \quad (7.7)$$

的能量，将以正比于任一时刻平均能量的速率衰减（因为  $P_i \propto VV^*$ ， $W \propto VV^*$ ，故  $P_i \propto W$ ），所以

$$\frac{dW}{dt} = -2\delta W \quad (7.9)$$

或

$$W = W_0 e^{-2\delta t} \quad (7.10)$$

式中， $W_0$  为  $t = 0$  时存有的平均能量。但  $W$  的减少率必须等于功率损耗，所以

$$-\frac{dW}{dt} = 2\delta W = P_i$$

因而，应用(7.3)式得

$$\delta = \frac{P_i}{2W} = \frac{\omega}{2} \frac{P_i}{\omega W} = \frac{\omega}{2Q} \quad (7.11)$$

可见，阻尼因数与  $Q$  成反比。现在可把(7.10)式改写为

$$W = W_0 e^{-\omega t/Q} \quad (7.12)$$

若有外部负载与此电路耦合，则(7.12)式中的  $Q$  必须用  $Q_L$  替换。阻尼因数  $\delta$  也可以衡量当加上激励源以后谐振电路的振荡建立的快慢。

在微波系统中，用传输线段或称为空腔谐振器的金属盒作为各种谐振器，代替集总参数电路。其原因是，在微波频率下集总参数电路由导体损耗和辐射损耗引起的损耗太大。在计算微波空腔谐振器的阻抗时，有时为了方便，假定不存在任何损耗。这样， $Q$  可以独立地计算，同时，在用等效复谐振频率  $\omega_0(1+j/2Q) = \omega_0 + j\delta$  来代替谐振频率  $\omega_0$  后，可以改用以参数  $Q$  表示的阻抗来说明损耗。

(7.6)式可写成

$$Z_{in} = \frac{\omega_0 R/2Q}{j(\omega - \omega_0(1+j/2Q))} \quad (7.13)$$

这表明，当存在损耗时，就相当有一个复谐振频率  $\omega_0(1+j/2Q)$ 。(7.13)式对于小损耗存在时所发生的谐振频率的小变化，忽略不计。



## 7.2 传输线谐振电路

串联谐振：短路线

在高频（通常指100到1000兆赫的频率范围）时，常以短路的或

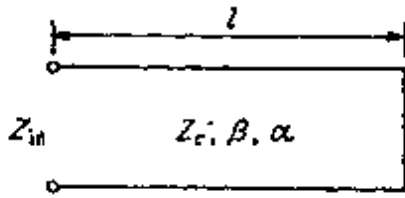


图 7.3 短路传输线谐振器

开路的传输线段代替一般的集总参数LC谐振电路。因此，研究Q和阻抗所能达到的数量级是有意义的。假定使用空气填充的传输线，则只有由线的串联电阻R引起的损耗。实际中常遇到的是介质填充的传

输线，它具有有一些并联电导引起的损耗，其结果是使Q值降低。

设有长为 $l$ ，每单位长度的参数为 $R$ 、 $L$ 、 $C$ 的短路线，如图7.3所示。设在 $f = f_0$ （即 $\omega = \omega_0$ ）时， $l = \lambda_0/2$ ，则由于在 $\omega_0$ 时， $\beta l = \pi$ ，故当 $f$ 接近于 $f_0$ （比如说 $f = f_0 + \Delta f$ ）时， $\beta l = 2\pi fl/c = \pi\omega/\omega_0 = \pi + \pi\Delta\omega/\omega_0$ 。其输入阻抗为

$$\begin{aligned} Z_{in} &= Z_c \tanh(j\beta l + \alpha l) \\ &= Z_c \frac{\tanh \alpha l + j \tan \beta l}{1 + j \tan \beta l \tanh \alpha l} \end{aligned}$$

但由于假定损耗很小，以致 $\alpha l \ll 1$ ，故 $\tanh \alpha l \approx \alpha l$ 。同样，由于 $\Delta\omega/\omega_0$ 很小，故 $\tan \beta l = \tan(\pi + \pi\Delta\omega/\omega_0) = \tan \pi\Delta\omega/\omega_0 \approx \pi\Delta\omega/\omega_0$ 。所以

$$Z_{in} = Z_c \frac{\alpha l + j\pi\Delta\omega/\omega_0}{1 + j\alpha l\pi\Delta\omega/\omega_0} \approx Z_c \left( \alpha l + j\pi \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) \quad (7.14)$$

因为分母中的第二项是非常小的。而

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} R Y_c = (R/2) \sqrt{C/L}, \quad \beta l = \omega_0 \sqrt{LC} l = \pi, \quad \text{所以, } \pi/\omega_0 = l$$

$\sqrt{LC}$ 。  $Z_{in}$  的表示式成为

$$Z_{in} = \sqrt{\frac{L}{C}} \left( \frac{1}{2} R \sqrt{\frac{C}{L}} + j \Delta \omega l \sqrt{LC} \right)$$

$$= \frac{1}{2} R l + j l L \Delta \omega \quad (7.15)$$

把(7.15)式与图7.4所表示的 $R_0, L_0, C_0$ 串联电路比较是有意义的。图7.4电路的输入阻抗为

$$Z_{in} = R_0 + j \omega L_0 \left( 1 - \frac{1}{\omega^2 L_0 C_0} \right)$$

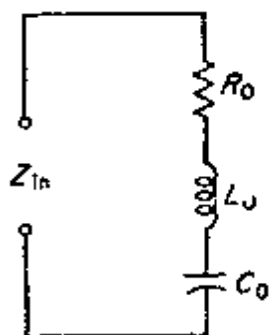
若令 $\omega_0^2 = 1/L_0 C_0$ ，则

$$Z_{in} = R_0 + j \omega L_0 \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2}$$

若 $\omega - \omega_0 = \Delta \omega$ 很小，则 $\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \approx \Delta \omega 2\omega_0$ 。于是

$$Z_{in} = R_0 + j \omega L_0 \frac{2\omega_0 \Delta \omega}{\omega^2} = R_0 + j 2 L_0 \Delta \omega \quad (7.16)$$

把它与(7.15)式相比可以看出，在 $l = \lambda_0/2$ 的谐振频率附近，短路线与电阻为 $R_0 = \frac{1}{2} R l$ 、电感为 $L_0 = \frac{1}{2} L l$ 的串联谐振电路具有相同的性质。要注意 $R l$ 、 $L l$ 为此传输线的总电阻和总电感。大家也许对因子 $\frac{1}{2}$ 的出现会感到奇怪，其实，它的出现是由于在短路线上的电流为半个正弦波，因而等效电路参数 $R_0$ 、 $L_0$ 只是短路线上总的电阻与电感的一半。



短路线的 $Q$ 值可以用图7.4的电路来定义，

图 7.4 串联谐振电路 即

$$Q = \frac{\omega_0 L_0}{R_0} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\beta}{2\alpha} \quad (7.17)$$

或者可以采用(7.3)式的一般定义，我们将根据这个定义利用对高 $Q$ 系统（即低损耗）适用的近似方法来计算短路线的 $Q$ ，以便阐明一种对很多微波器件都非常有用的方法（参看3.2节讨论过的微扰法）。当损耗很小时，在系统中储藏的能量 作为一级近似，与无

耗的情况是相同的。无耗短路线上的电流是一个纯驻波：

$$I = I_0 \cos \beta z e^{j\omega t}$$

式中， $z$  为由短路处沿此线向输入端的距离。长度为  $dz$  的一段短路线中储藏在磁场中的能量为

$$dW_m = \frac{1}{4} I I^* L dz = \frac{1}{4} I_0^2 L \cos^2 \beta z dz$$

磁场中储藏总能量的时间平均值为

$$W_m = \frac{1}{4} I_0^2 L \int_0^{\lambda_0/2} \cos^2 \beta z dz = \frac{\lambda_0}{16} I_0^2 L$$

储藏在电场中的能量，也就是储藏在传输线电容中的能量，在谐振时等于  $W_m$ 。所以，在系统中储藏总能量的时间平均值为

$$W = W_m + W_e = \frac{\lambda_0}{8} L I_0^2$$

作为一级近似，损耗不改变沿线的电流分布，因而，功率损耗为

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \int_0^{\lambda_0/2} R I I^* dz = \frac{R}{2} I_0^2 \int_0^{\lambda_0/2} \cos^2 \beta z dz \\ &= \frac{\lambda_0}{8} R I_0^2 \end{aligned}$$

于是，当  $\omega = \omega_0$  时，

$$Q = \frac{\omega_0 W}{P} = \frac{\omega_0 \lambda_0 L I_0^2 / 8}{R I_0^2 \lambda_0 / 8} = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (7.18)$$

它与前面的结果是一致的。Q 的典型值的范围从几百到 10000。与低频集总参数电路相比，微波谐振器的实际 Q 值是非常高的。必须指出，在上面的分析中已经忽略了短路线的损耗。只要长度  $l$  远大于两导体之间的距离，这样做就不会产生显著的误差。

### 开路线

利用类似于前面所作的分析，不难证明在谐振频率附近，一段

长度为 $\lambda/4$ 奇数倍的开路线，等效于一个串联谐振电路，其等效关系式为（图7.5）

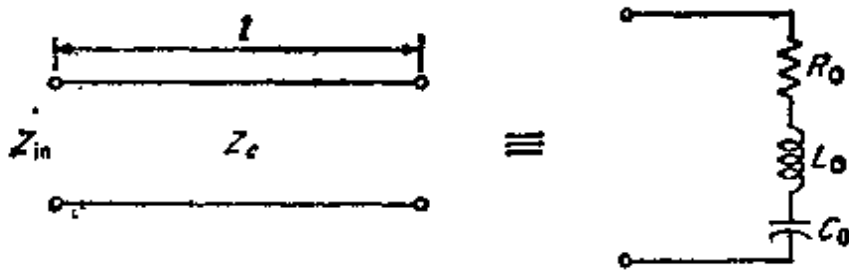


图 7.5 开路传输线谐振器

$$\text{在 } \omega_0 \text{ 时, } l = \frac{\lambda_0}{4} \quad (7.19a)$$

$$Z_{in} \approx \left( \alpha l + j \frac{\Delta \omega}{\omega_0} \frac{\pi}{2} \right) Z_c = -\frac{1}{2} Rl + j \Delta \omega Ll \quad (7.19b)$$

$$R_0 = -\frac{1}{2} Rl \quad (7.19c)$$

$$L_0 = \frac{1}{2} Ll \quad (7.19d)$$

$$\omega_0^2 = (LC)^{-\frac{1}{2}} \quad (7.19e)$$

### 反谐振

当短路线的长度在接近于 $\lambda/4$ 的奇数倍的频率范围时，它可以等效为一个并联谐振电路。长为半波长的整数倍的开路线具有同样的特性。当它们具有并联谐振电路特性时，就称它们为反谐振。

用导纳分析并联谐振最方便。参阅图7.6，在 $\omega = \omega_0$ 时，令 $l$ 等

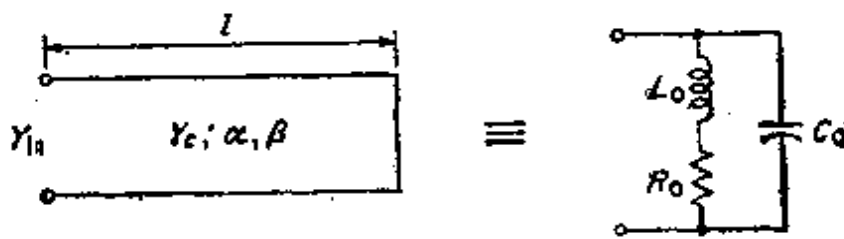


图 7.6 短路反谐振传输线

于 $\lambda_0/4$ 。则在频率为 $\omega$ 时

$$\beta l = \omega \sqrt{LC}l = \omega_0 \sqrt{LC}l + \Delta\omega \sqrt{LC}l$$

且输入导纳为

$$\begin{aligned} Y_{in} &= Y_c \coth(\alpha + j\beta)l = Y_c \frac{1 + j \tan \beta l \tanh \alpha l}{\tanh \alpha l + j \tan \beta l} \\ &\approx Y_c \frac{1 - ja l / (\Delta\omega \sqrt{LC})}{al - j / (\Delta\omega \sqrt{LC})} \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} \tan(\omega_0 \sqrt{LC}l + \Delta\omega \sqrt{LC}l) &= \tan\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\omega \sqrt{LC}l\right) \\ &\approx -(\Delta\omega \sqrt{LC}l)^{-1} \end{aligned}$$

$\tanh \alpha l \approx al$ 。用 $\sqrt{C/L}$ 代替 $Y_c$ 以及用 $Y_c R/2$ 代替 $\alpha$ 之后，进一步近似得到

$$\begin{aligned} Y_{in} &= Y_c \frac{j\Delta\omega \sqrt{LC}l + al}{1 + j\Delta\omega al^2 \sqrt{LC}} \approx Y_c (j\Delta\omega \sqrt{LC}l + al) \\ &= \frac{RC}{2L} l + j\Delta\omega Cl \quad (7.20) \end{aligned}$$

对于图7.6的并联谐振电路 因为假定 $R_0 \ll \omega L_0$ ，故得

$$\begin{aligned} Y_{in} &= \frac{1}{R + j\omega L_0} + j\omega C_0 = \frac{j\omega C_0 (R + j\omega L_0) + 1}{R + j\omega L_0} \\ &\approx \frac{j\omega C_0 R_0 - \omega^2 L_0 C_0 + 1}{j\omega L_0} \end{aligned}$$

若用 $\omega_0^2 L_0 C_0 = 1$ 来定义 $\omega_0$ ，则

$$\begin{aligned} Y_{in} &= \frac{C_0 R_0}{L_0} + \frac{\omega_0^2 L_0 C_0 - \omega^2 L_0 C_0}{j\omega L_0} \\ &= R_0 \frac{C_0}{L_0} - jL_0 C_0 \frac{(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)}{\omega L_0} \approx R_0 \frac{C_0}{L_0} + jC_0 2\Delta\omega \end{aligned} \quad (7.21)$$

将它与(7.20)式比较 就可证明接近于 $\lambda/4$ 的短路线，等效于一个并

联谐振电路，其参数为

$$\frac{C_0 R_0}{L_0} = \frac{RC}{2L} - 1 \quad CL = 2C_0 \quad \frac{R_0}{L_0} = \frac{R}{L}$$

该电路的Q值为

$$Q = \frac{\omega_0 L_0}{R_0} = \frac{\omega L}{R} = \frac{\beta}{2\alpha} \quad (7.22)$$

虽然传输线段在特定谐振频率附近具有与简单的集总参数谐振电路同样的性能，但事实上它们是具有无限多个串联谐振频率和并联谐振频率的更复杂的网络。串联谐振频率近似地出现在当短路线的长度为半波长的整数倍，即  $f_n = nc/2l$  时，而反谐振（并联谐振）频率则出现在短路线的长度为  $\lambda/4$  的奇数倍，即  $f_n = (2n+1)c/4l$  时，式中的  $n$  为整数。因而，精确的等效电路应该由无限多个互相耦合的谐振电路组成。但是，实际上在所需的频率范围内，用简单的单个谐振频率的电路就足以准确地代表传输线谐振器了。

### 7.3 微波空腔谐振器

当频率高于1000兆赫时，传输线谐振器Q值较低，故用金属封闭盒（即空腔谐振器）代替它更好。空腔谐振器可以看作被导电面包围起来，并能在其中激励起电磁场的容器。电磁能量储藏在空腔谐振器的容器中。由导电壁引起功率损耗等效于某一个等效电阻。利用同轴线小探针或环可以在空腔谐振器中激励起电磁场，或者把电磁场耦合到外部电路。此外，空腔谐振器还可以通过在公共壁上的小孔与波导耦合。图7.7表示了这些耦合方式。在研究耦合对空腔谐振器的影响之前，先介绍在矩形和圆柱形空腔谐振器中场的解。

#### 矩形空腔谐振器

图7.8表示一个高为  $b$ 、宽为  $a$  和长为  $d$  的矩形空腔谐振器。它

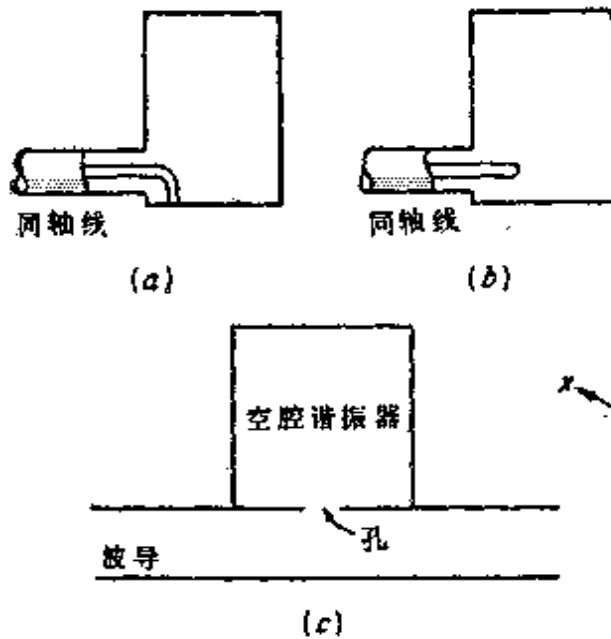


图 7.7 空腔谐振器的耦合方法：  
(a) 环耦合；(b) 探针耦合；  
(c) 孔耦合。

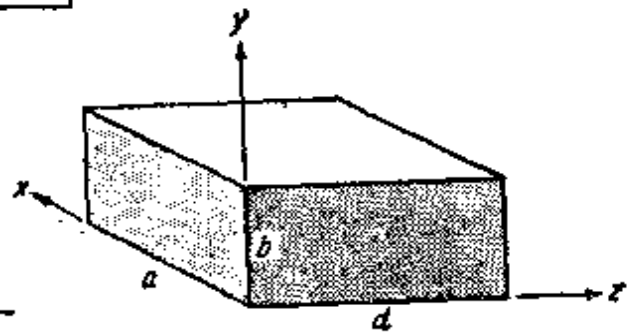


图 7.8 矩形空腔谐振器

可以认为是在终端  $z = d$  处短路的一段矩形波导。若在频率为  $f$

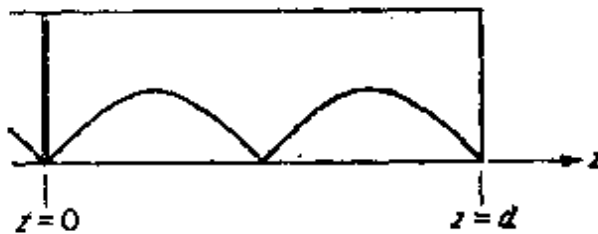


图 7.9 短路波导中的驻波图

时， $d$  等于半波导波长的整数倍，则其合成驻波图使  $z = 0$  处电场的  $x$  和  $y$  分量都为零。因而，也可以在  $z = 0$  处短路，如图 7.9 所示。这种结构就是一个矩形空腔谐振器。对空

腔谐振器的这一描述，也指出了其场的解可以直接地由对应的波导解得到。对于  $TE_{nm}$  或  $TM_{nm}$  模，其传播常数为

$$\beta_{nm}^2 = k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \quad (7.23a)$$

式中， $k_0 = 2\pi f_0/c$ 。为了使空腔谐振器的长度成为半波导波长的整数倍，要求  $\beta_{nm}d = l\pi$ ，式中， $l$  是整数。因而，当  $d$  被给定时， $\beta_{nm}$  为

$$\beta_{nm} = \frac{l\pi}{d}, \quad l = 1, 2, \dots \quad (7.23b)$$

可是，此式只有在 $k_0$ 为某些离散值时才与(7.23a)式一致。即只有在 $k_0 = k_{nml}$ 时，才满足(7.23a)式和(7.23b)式，这里 $k_{nml}$ 为

$$k_{nml} = \left[ \left( \frac{l\pi}{d} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7.24)$$

$k_0$ 的这些特定值规定了空腔谐振器的谐振频率，即

$$f_{nml} = \frac{ck_{nml}}{2\pi} = c \left[ \left( \frac{l}{2d} \right)^2 + \left( \frac{m}{2b} \right)^2 + \left( \frac{n}{2a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7.25)$$

式中， $c$ 为光速。应当指出，对应于不同场分布，存在着三重的无限多个谐振频率。还要注意，由于(7.25)式对 $TE$ 模和 $TM$ 模都适用，故对一个给定的谐振频率，场的解不止一个。此外，对于矩形空腔谐振器来说，并不存在哪个坐标优先的问题，在 $x$ 轴和 $y$ 轴上同样能构成相应的 $TE$ 和 $TM$ 模场的解，而且，它们都具有同样的谐振频率。可是，后面这些模正好是在 $z$ 轴上的 $TE$ 模和 $TM$ 模的线性组合，因而不表示新的解。

为了说明求解矩形空腔谐振器场的方法和计算无载 $Q$ 值，我们具体地研究一下 $TE_{1,0,1}$ 模。若 $b < a < d$ ，则它将是具有最低谐振频率的模，并对应于矩形波导中的 $TE_{1,0}$ 模。模的下标 $nml$ 分别地对应于沿 $x$ 、 $y$ 和 $z$ 轴驻波图的半个正弦变化的数目。利用(3.107)式得 $TE_{1,0}$ 模场的解为

$$H_z = (A^+ e^{-i\beta_{10}z} + A^- e^{i\beta_{10}z}) \cos \frac{\pi x}{a}$$

$$H_x = \frac{j\beta_{1,0}a}{\pi} (A^+ e^{-i\beta_{10}z} - A^- e^{i\beta_{10}z}) \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$E_y = -j \frac{k_0 Z_0 a}{\pi} (A^+ e^{-i\beta_{10}z} + A^- e^{i\beta_{10}z}) \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$H_y = E_x = E_z = 0$$

式中， $A^+$ 和 $A^-$ 分别为向 $+z$ 和向 $-z$ 方向传播模的振幅常数。为使 $E_y$ 在 $z = 0$ 、 $d$ 处为零，必须取 $A^- = -A^+$ ，以便使

$$A^+ e^{-i\beta_{10}z} + A^- e^{i\beta_{10}z} = -2jA^+ \sin \beta_{1,0}Z$$



同时也必须取  $\beta_{10} = \pi/d$ 。于是  $k_0$  的对应值为

$$k_{01} = k_{101} = \left[ \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{d} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 + \beta_{10}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7.26)$$

由此可求出谐振频率。现在可以把场的解表示如下：

$$E_y = \frac{-2A^+ k_{01} Z_0 a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{d} \quad (7.27a)$$

$$H_x = \frac{2jA^+ a}{d} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi z}{d} \quad (7.27b)$$

$$H_z = -2jA^+ \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{d} \quad (7.27c)$$

可见磁场的相位与电场的相位相差  $\pm 90^\circ$ 。在无耗空腔谐振器中情况总是这样。它相当于在无耗  $LC$  电路中电压和电流彼此的相位差  $\pm 90^\circ$ 。

谐振时，储藏在空腔谐振器中的电能和磁能的时间平均值是相等的。储藏的平均电能为

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{\epsilon_0}{4} \int_0^a \int_0^b \int_0^d E_y E_y^* dx dy dz \\ &= \frac{\epsilon_0}{4\pi^2} a^3 b d k_{101}^2 Z_0^2 |A^+|^2 \end{aligned} \quad (7.28)$$

读者不难证明

$$W_m = \frac{\mu_0}{4} \int_0^a \int_0^b \int_0^d (H_x H_x^* + H_z H_z^*) dx dy dz = W_e \quad (7.29)$$

为了求出空腔谐振器的  $Q$  值，必须计算由腔壁的有限电导率引起的损耗。在小损耗的情况下，其表面电流基本上就是由无耗时场解(7.27)式得出的表面电流。于是此表面电流为

$$J_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$$

式中， $\mathbf{n}$  是垂直于表面并指向空腔谐振器内部的单位法线矢量。因而，腔壁上的功率损耗为

$$P_t = \frac{R_m}{2} \int_{\text{腔壁}} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{J}_s^* ds = \frac{R_m}{2} \int_{\text{腔壁}} |\mathbf{H}_{tan}|^2 ds \quad (7.30)$$

式中,  $R_m = 1/\sigma\delta_s$  是电导率为  $\sigma$  的导电壁呈现的表面阻抗的电阻部分, 其中趋肤深度为  $\delta_s = (2/\omega\mu\sigma)^{\frac{1}{2}}$ 。在(7.30)式中,  $\mathbf{H}_{tan}$  是腔壁表面上的切向磁场。把(7.27)式代入(7.30)式可直接算出

$$P_t = |A^-|^2 R_m \frac{2a^3b + 2d^3b + ad^3 + da^3}{d^2} \quad (7.31)$$

若采用(7.3)式的定义, 则得出 Q 值为

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\omega W}{P_t} = \frac{2\omega W_e}{P_t} = \frac{\omega k_{101}^2 Z_0^2 a^3 d^3 b \epsilon_0}{2\pi^2 R_m (2a^3b + 2d^3b + a^3d + d^3a)} \\ &= \frac{(k_{101} ad)^3 b Z_0}{2\pi^2 R_m (2a^3b + 2d^3b + a^3d + d^3a)} \end{aligned} \quad (7.32)$$

已用  $k_{101}$  代替了  $\omega Z_0 \epsilon_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ 。

作为一个典型的例子, 设有一个  $a = b = d = 3$  厘米的铜 ( $\sigma = 5.8 \times 10^7$  姆欧/米) 空腔谐振器。求得谐振频率为 7070 兆赫, 表面电阻  $R_m = 0.022$  欧姆, Q 值等于 12700, 阻尼因数  $\delta = \omega/2Q$  等于  $1.74 \times 10^8$  奈贝/秒, 即振荡约为  $2.5 \times 10^{-4}$  奈贝/周。由于 Q 值高, 在振幅减少到  $e^{-1}$  之前, 能发生 4000 周自由振荡。

若空腔填充电容率为  $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$  的有耗介质, 则储藏在空腔谐振器内电能的时间平均值为

$$W_e = \frac{\epsilon'}{4} \int_V |\mathbf{E}|^2 dV \quad (7.33a)$$

由于有耗介质的有效电导率为  $\omega\epsilon''$ , 因而, 在介质中的功率损耗为

$$P_{12} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^* dV = \frac{\omega\epsilon''}{2} \int_V |\mathbf{E}|^2 dV \quad (7.33b)$$

设  $Q_d$  是当介质有损耗但腔壁是理想导体时的 Q, 则

$$Q_d = \frac{2\omega W_e}{P_{12}} = \frac{\epsilon'}{\epsilon''} \quad (7.34)$$

当腔壁也存在损耗时, 实际 Q 等于  $Q'$ , 且为

$$Q' = \left( \frac{1}{Q_s} + \frac{1}{Q} \right)^{-1} \quad (7.35)$$

式中， $Q$ 是当腔壁存在损耗而 $\epsilon'' = 0$ 时的品质因数。用 $\epsilon'$ 代替 $\epsilon_0$ 后， $Q$ 可由(7.32)式得到。还要指出，介质填充的空腔谐振器的谐振频率为

$$f_{\text{res}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon'}} \frac{c}{2\pi} k_{\text{csm}} \quad (7.36)$$

### 圆柱形空腔谐振器

圆柱形空腔谐振器是一段长为 $d$ 半径为 $a$ 的圆波导，在每一端

有短路板，如图7.10所示。这类空腔由于 $Q$ 值高且能在宽频带内工作，因而在实际中常用来作为测量频率的波长计。在测量未知频率时，为了获得高分辨能力或高精度，频率计是需要高 $Q$ 的。当空腔谐振器与信号源的未知频率调谐时，

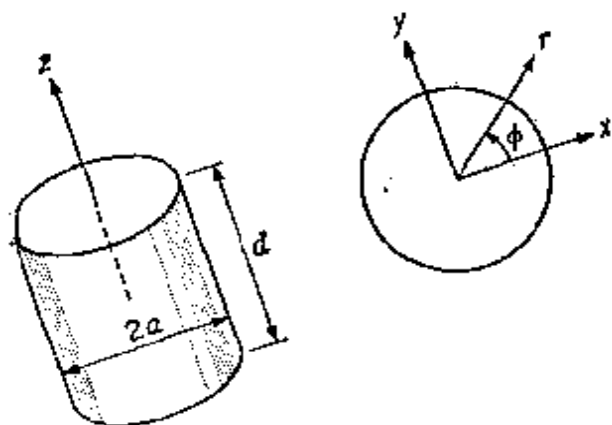


图 7.10 圆柱形空腔谐振器

空腔谐振器从输入线中吸取功率最多。因此，可以利用与输入线耦合的晶体检波器功率的下落来指示谐振。

圆柱形空腔谐振器中的场，可以由对应的波导解求出。与圆波导中的主模 $TE_{11}$ 模相对应的最低谐振模为 $TE_{111}$ 模。下面详细地研究这种模。利用表3.4中所给出的场解并把正反向传播的 $TE_{11}$ 模组合起来，则得

$$H_z = J_1 \left( \frac{P_{11} r}{a} \right) \cos \phi (A^+ e^{-i\beta_{11} z} + A^- e^{i\beta_{11} z}) \quad (7.37a)$$

$$H_r = \frac{-j\beta_{11} a}{P_{11}} J_1' \left( \frac{p_{11} r}{a} \right) \cos \phi (A^+ e^{-i\beta_{11} z} - A^- e^{i\beta_{11} z}) \quad (7.37b)$$

$$H_{\phi} = \frac{j\beta_{11}a^2}{(p'_{11})^2 r} J_1 \left( \frac{p'_{11}r}{a} \right) \sin\varphi (A^+ e^{-j\beta_{11}z} - A^- e^{j\beta_{11}z}) \quad (7.37c)$$

$$E_r = \frac{jk_0 Z_0 a^2}{(p'_{11})^2 r} J_1 \left( \frac{p'_{11}r}{a} \right) \sin\varphi (A^+ e^{-j\beta_{11}z} + A^- e^{j\beta_{11}z}) \quad (7.37d)$$

$$E_{\phi} = \frac{jk_0 Z_0 a}{p'_{11}} J_1' \left( \frac{p'_{11}r}{a} \right) \cos\varphi (A^+ e^{-j\beta_{11}z} + A^- e^{j\beta_{11}z}) \quad (7.37e)$$

$$E_z = 0 \quad (7.37f)$$

式中,  $p'_{11} = 1.841$ 。为了使  $E_r$  和  $E_{\phi}$  在  $z = 0, d$  处为零, 必须取  $A^- = -A^+$ 。这样, 因子  $A^+ e^{-j\beta_{11}z} + A^- e^{j\beta_{11}z}$  变成  $-2jA^+ \sin\beta_{11}z$ 。必须取  $\beta_{11}$  等于  $\pi/d$ , 以便使  $\sin\beta_{11}d$  为零。其谐振频率由下式确定:

$$k_0 = \left[ \beta_{11} + \left( \frac{p'_{11}}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \left( \frac{\pi}{d} \right)^2 + \left( \frac{p'_{11}}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi f_{111}}{c} \quad (7.38)$$

为了求  $TE_{111}$  模的  $Q$  值, 必须计算储藏在此空腔谐振器中能量的时间平均值和腔壁的平均功率损耗。它们的一般表示式为

$$W = 2W_t = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^d (|E_r|^2 + |E_{\phi}|^2) r d\varphi dr dz$$

$$P_t = \frac{R_m}{2} \int_{\text{腔壁}} |H_{t, \text{tan}}|^2 ds$$

把前面得到的场表示式代入, 可以算出这些积分,  $Q$  的最后结果为

$$Q \frac{\delta_s}{\lambda_0} = \frac{\left[ 1 - \left( \frac{n}{p'_{nm}} \right)^2 \right] \left[ (p'_{nm})^2 + \left( \frac{l\pi a}{d} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{2\pi \left[ (p'_{nm})^2 + \frac{2a}{d} \left( \frac{l\pi a}{d} \right)^2 + \left( 1 - \frac{2a}{d} \right) \left( \frac{n\pi a}{p'_{nm}d} \right)^2 \right]} \quad (7.39)$$

式中, 对  $TE_{111}$  模,  $l = n = m = 1$ 。对于  $TE_{nm}$  模, 把适当的  $n, m, l$  和  $p'_{nm}$  的值代入,  $Q$  值也可由(7.39)式求得。要注意, (7.39)

式右边各项都与频率无关。因而，对任一已知的空腔谐振器而言， $Q$ 随 $\lambda_0/\delta_s$ 变化，即按 $f^{-\frac{1}{2}}$ 减少。

对于其他的 $TE_{nm}$ 模和 $TM_{nm}$ 模，要得到其场的表示式，可以作类似于上面的分析。对于 $TE_{nm}$ 模，只需要在(7.37)式中用 $\cos n\varphi$ 和 $\sin n\varphi$ 代替 $\cos\varphi$ 和 $\sin\varphi$ ，用 $J_n$ 代替 $J_1$ ，用 $p'_{nm}$ 代替 $p'_{11}$ ，用 $l\pi/d$ 代替 $\beta_{11}$ 即可。因为 $TE_{011}$ 模的 $Q$ 值是 $TE_{111}$ 模的两倍到三倍，所以用它做波长计是特别好的。 $TE_{011}$ 模的另一优点是其 $H\varphi=0$ ，因而没有轴向电流。这意味着此空腔谐振器的端板可以自由地移动，以调节空腔谐振器的长度 $d$ 达到谐振，而不引入显著的损耗，这是因为没有越过间隙的电流，也就是圆端板和圆柱壁之间的间隙是平行于电流流线的。但是，由于 $TE_{011}$ 模不是主模，所以，必须谨慎地选取耦合方式，以便在此空腔谐振器谐振频率范围内不激励起其他可能的谐振模。

为了求出在已知的 $2a/d$ 值和已知的频率下什么模能谐振，绘制一张振荡模图表便于使用。对任一已知的模，可得

$$f_{nm} = \frac{k_{nm}c}{2\pi} = \left[ \left( \frac{x_{nm}}{a} \right)^2 + \left( \frac{l\pi}{d} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{c}{2\pi}$$

即

$$(2af_{nm})^2 = \left( \frac{cx_{nm}}{\pi} \right)^2 + \left( \frac{cl}{2} \right)^2 \left( \frac{2a}{d} \right)^2 \quad (7.40)$$

式中，对 $TE$ 模， $x_{nm} = p'_{nm}$ ，对于 $TM$ 模， $x_{nm} = p_{nm}$ 。图7.11画出了几种模的 $(2af_{nm})^2$ 对于 $(2a/d)^2$ 的曲线，并组成了一个振荡模图。查此图可看出在什么频率范围和 $2a/d$ 下只能有单个模谐振（在简并情况下，两个模在同样的频率下谐振）。例如，当 $(2a/d)^2$ 在2与3之间，在相当于 $(2af)^2$ 为 $16.3 \times 10^8$ 和 $20.4 \times 10^8$ 之间的频率范围内（在图7.11所划的长方形范围内），只有 $TE_{011}$ 模和 $TM_{111}$ 模能谐振。若不激励 $TM_{111}$ 模，则在这个频率范围内调谐时，不会出现由其他模引起的寄生谐振。

$TM$ 模的 $Q$ 值可由下式求得

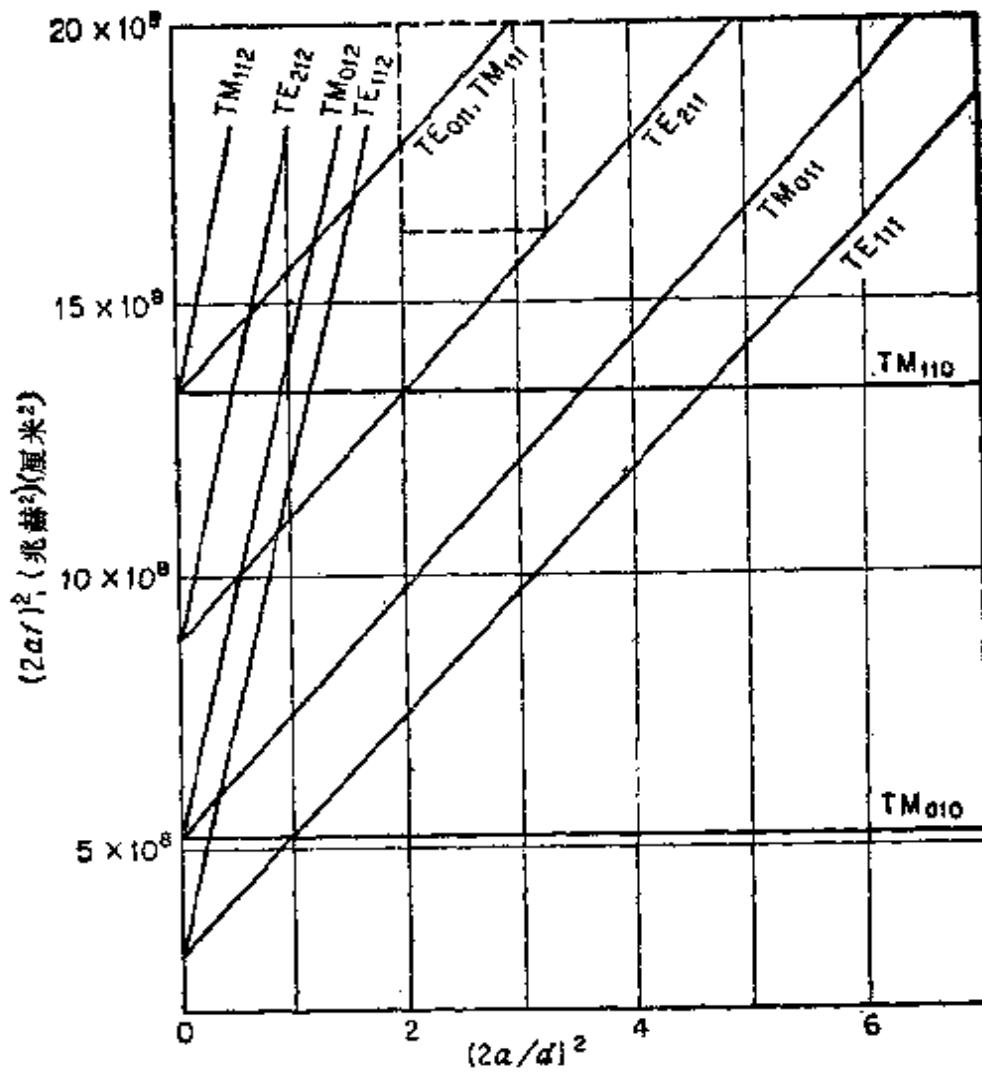


图 7.11 圆柱形空腔谐振器的振荡模图

$$Q \frac{\delta_g}{\lambda_0} = \begin{cases} \frac{[p_{nm}^2 + (l\pi a/d)^2]^{1/2}}{2\pi(1+2a/d)} & l > 0 \\ \frac{p_{nm}}{2\pi(1+a/d)} & l = 0 \end{cases} \quad (7.41)$$

图7.12绘出了几种模的 $Q\delta_g/\lambda_0$ 对 $2a/d$ 的曲线。可以看出， $TE_{011}$ 模的 $Q$ 值比 $TE_{111}$ 模的 $Q$ 值高得多。最佳 $Q$ 值发生在 $d \approx 2a$ 时。当 $\lambda_0 = 3$ 厘米时， $\delta_g/\lambda_0 = 2.2 \times 10^{-5}$ ，从而由图7.12可以看出，典型的 $Q$ 值范围是10000到40000或者更高。在 $\lambda_0 = 10$ 厘米时，对应的 $Q$ 值应为 $\lambda_0 = 3$ 厘米时的 $\sqrt{10/3}$ 倍。

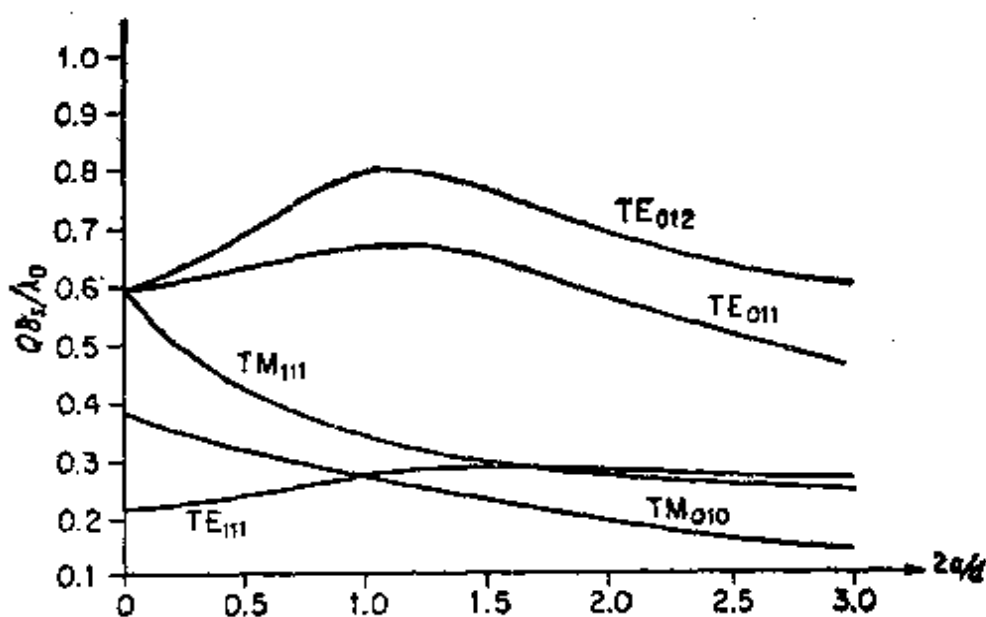


图 7.12 圆柱形谐振腔中各种模的Q值

## 7.4 空腔谐振器的等效电路

这一节研究与传输线和波导相耦合的空腔谐振器的等效电路。由于这个问题一般较复杂，这里不作全面的研究（更详细的讨论参看7.8节），而只研究若干确定的例子，以便说明所得结果的类型。

### 孔耦合空腔谐振器

作为一个孔耦合空腔谐振器的例子，我们来研究矩形波导与矩形空腔谐振器的耦合，耦合装置是开在 $Z=0$ 处横壁上的小圆孔，如图7.13所示。如前所述，在横壁上的小圆孔可以等效为一个并联感性电纳，其归一化值由(5.25)式求得为

$$\overline{B}_L = \frac{3ab}{8\beta r_0^2} \quad (7.42)$$

式中， $a$ 是波导的宽， $b$ 为波导的高， $r_0$ 为孔的半径， $\beta = (k_y^2 - (\pi/a)^2)^{\frac{1}{2}}$ 为 $TE_{1c}$ 模的传播常数。于是，孔耦合空腔谐振器的等效电路，是长为 $d$ 的短路传输线与一个归一化电纳 $\overline{B}_L$ 的并联。

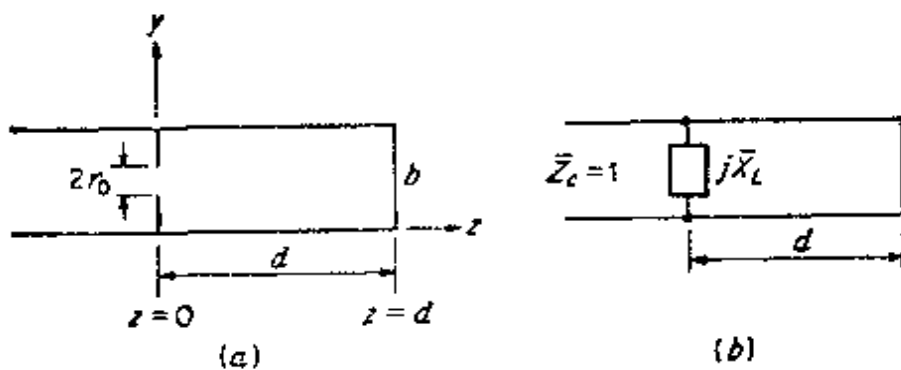


图 7.13 (a) 无耦合矩形空腔谐振器; (b) 等效的传输线电路。

为便于研究这种耦合的空腔谐振器，我们将首先假定它没有损耗。然后对存在小损耗的情况作必要的修正。这种空腔谐振器具有无限多次谐振，并且，其输入阻抗  $Z_{in}$  交替地出现无限多个零点和极点，这是分布参数一端口微波网络的一般性能。如果我们只关心与高  $Z_{in}$  值相对应的谐振（在无耗情况下， $Z_{in}$  为无穷大），则应研究一个极点附近的  $Z_{in}$  的性质。此情况对应于一个并联谐振电路。

输入阻抗  $Z_{in}$  可用  $j\bar{X}_L$  和  $j\tan\beta d$  的并联阻抗来表示，即

$$\bar{Z}_{in} = \frac{-\bar{X}_L \tan\beta d}{j\bar{X}_L + j\tan\beta d} \quad (7.43)$$

式中， $j\bar{X}_L = (-j\bar{B}_L)^{-1}$ 。当(7.43)式分母变为零，即在  $Z_{in}$  的极点处，或当

$$\bar{X}_L = -\tan\beta d = \frac{8r_0^4 \beta d}{3abd} \quad (7.44)$$

时，产生并联谐振。为求解谐振时的  $\beta$  值，用图解法是方便的。画出(7.44)式两边随  $\beta d$  变化的曲线，就可由它们的交点求出  $\beta d$  的解。当  $\beta$  已知时，谐振频率可以由下式求出：

$$\frac{\omega}{2\pi} = f = \frac{c}{2\pi} \left[ \beta^2 + \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7.45)$$

图7.14中表示了这种图解。要注意它有无穷多个解。通常，由于  $\bar{X}_L$  是非常小的，所以，基模的  $\beta d$  值近似等于  $\pi$ 。高次模发生在  $\beta d \approx \beta_n d \approx (n - \frac{1}{2})\pi$ ，这里， $n$  为较大的整数。第一个模的  $\beta$  值用



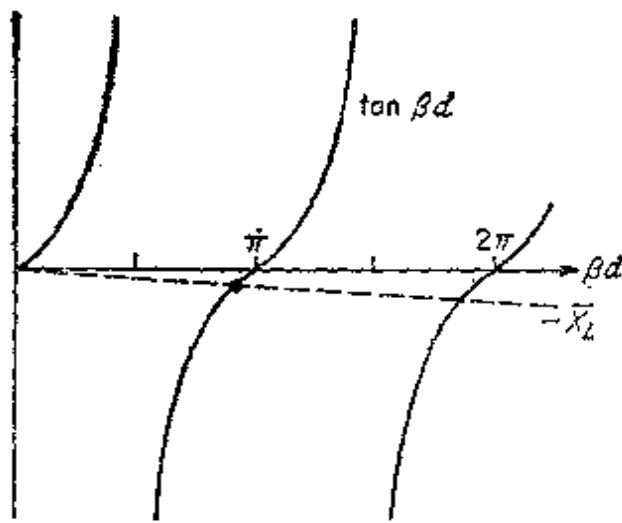


图 7.14 孔耦合空腔谐振器谐振频率的图解

$\beta_1$ 表示, 对应的  $\omega$  值用  $\omega_1$  表示, 在 (7.45) 式中令  $\beta = \beta_1$  即可求出  $\omega_1$ 。

可以找到无限多个等效集总参数网络来表示  $\omega_1$  附近的  $\bar{Z}_{in}$ 。但通常总是采用尽可能简单的网络。这个等效网络必须选取使其输入阻抗  $\bar{Z}$  在  $\omega_1$  时等于  $\bar{Z}_{in}$ 。而且, 对  $\omega_1$  附近的微小变化

$\Delta\omega$ , 这两个阻抗也必须相等。得到这种等效的一般步骤是, 先把两个阻抗函数在  $\omega_1$  附近展开为  $\omega - \omega_1 = \Delta\omega$  的幂级数, 再使这两个级数逐项相等。因为  $\bar{Z}_{in}$  在  $\omega = \omega_1$  处有一个极点, 所以泰勒展开式不能直接地应用于  $\bar{Z}_{in}$ 。但是, 它可以用于  $(\omega - \omega_1) \bar{Z}_{in}$ , 即

$$(\omega - \omega_1) \bar{Z}_{in}(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} (\omega - \omega_1) \bar{Z}_{in}(\omega) + \frac{d}{d\omega} (\omega - \omega_1) \bar{Z}_{in} \Big|_{\omega_1} (\omega - \omega_1) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\omega^2} (\omega - \omega_1) \bar{Z}_{in} \Big|_{\omega_1} (\omega - \omega_1)^2 + \dots$$

现在我们得到

$$\bar{Z}_{in}(\omega) = \frac{\lim_{\omega \rightarrow \omega_1} (\omega - \omega_1) \bar{Z}_{in}(\omega)}{(\omega - \omega_1)} + \frac{d}{d\omega} (\omega - \omega_1) \bar{Z}_{in} \Big|_{\omega_1} + \dots \quad (7.46)$$

用类似方法展开  $\bar{Z}$  得 (注意  $\bar{Z}$  在  $\omega_1$  处也必定有一个极点)

$$\bar{Z}(\omega) = \frac{\lim_{\omega \rightarrow \omega_1} (\omega - \omega_1) \bar{Z}(\omega)}{(\omega - \omega_1)} + \frac{d}{d\omega} (\omega - \omega_1) \bar{Z} \Big|_{\omega_1} + \dots \quad (7.47)$$

这种类型的展开式称为罗朗级数展开式, 其  $(\omega - \omega_1)^{-1}$  项的系数称为在极点  $\omega_1$  处的留数, 为了在所研究的频率范围内以足够的精确

度表示 $\bar{Z}_{in}$ ，这两个级数必须逐项相等，直到要求 $\omega - \omega_1 = \Delta\omega$ 的最高次幂。因为微波空腔谐振器的 $Q$ 值一般相当高，所以，有意义的频率范围 $\Delta\omega/\omega_1$ 近似为 $\bar{Z}_{in}$ 等于其最大值的0.707倍两点之间的频率范围。后者的相对频带等于 $1/Q$ ，因而， $\Delta\omega/\omega_1$ 很小，以致于通常只需要展开式(7.46)的第一项来表示 $\omega_1$ 附近的 $\bar{Z}_{in}$ ，就有足够的精确度。这时，用一个简单的并联 $LC$ 电路，就足以表示 $\omega_1$ 附近的 $\bar{Z}_{in}(\omega)$ 。

为了确定 $L$ 和 $C$ 的值，必须先求出(7.46)式和(7.47)式的第一项。 $LC$ 电路的 $\bar{Z}$ 为

$$\bar{Z} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

现在取 $\omega_1^2 LC = 1$ ，以使在 $\omega_1$ 处得到 $\bar{Z}$ 的一个极点。因而

$$\bar{Z} = \frac{j\omega\omega_1^2 L}{\omega_1^2 - \omega^2}$$

且

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_1} (\omega - \omega_1) \bar{Z} = \frac{-j\omega\omega_1^2 L}{\omega + \omega_1} \Big|_{\omega_1} = \frac{-j\omega_1^2 L}{2}$$

于是，当 $\omega$ 接近 $\omega_1$ 时，就得

$$\bar{Z}(\omega) = \frac{-j\omega_1^2 L}{2(\omega - \omega_1)} \quad (7.48)$$

为了求 $\omega_1$ 附近 $\bar{Z}_{in}$ 的特性，可以使(7.43)式分子中 $\omega$ 等于 $\omega_1$ 。先把分母在 $\beta_1$ 附近展开为 $\beta$ 的泰勒级数，得到

$$\begin{aligned} \bar{X}_L(\beta) + \tan\beta d &\approx \bar{X}_L(\beta_1) + \tan\beta_1 d + \left( \frac{d\bar{X}_L}{d\beta} + \frac{d\tan\beta d}{d\beta} \right) \Big|_{\beta_1} \\ &\quad (\beta - \beta_1) \\ &= \left( \frac{\bar{X}_{L1}}{\beta_1} + d \sec^2 \beta_1 \right) (\beta - \beta_1) \end{aligned}$$

因为 $\bar{X}_L(\beta_1) = \bar{X}_{L1} = -\tan\beta_1 d$ ， $d\bar{X}_L/d\beta = (1/\beta)\bar{X}_L$ 。再在 $\omega_1$ 附近把 $\beta$ 展开为 $\omega$ 的泰勒级数，得

$$\beta \approx \beta_1 + \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_1} (\omega - \omega_1)$$

如果用  $\beta_1$  表示  $\omega_1$  处的  $d\beta/d\omega$ ，则可以把  $\bar{Z}_{in}$  表示为

$$\bar{Z}_{in} = \frac{j\bar{X}_{L1}\tan\beta_1 d}{(\bar{X}_{L1} + \beta_1 d(1 + \tan^2\beta_1 d))(\beta_1/\beta_1)(\omega - \omega_1)}$$

上面已用  $1 + \tan^2\beta_1 d$  代替了  $\sec^2\beta_1 d$ 。现在，用  $-\bar{X}_{L1}$  代替  $\tan\beta_1 d$  得

$$\bar{Z}_{in} = -j \frac{\bar{X}_{L1}^2}{(\bar{X}_{L1} + \beta_1 d(1 + \bar{X}_{L1}^2))(\beta_1/\beta_1)(\omega - \omega_1)}$$

通常， $\bar{X}_{L1} \ll 1$ ，且由于  $\beta_1 d \approx \pi$ ，故可以进一步近似得(后面将证明  $\bar{X}_{L1} \ll 1$ )

$$\bar{Z}_{in} = -j \frac{\bar{X}_{L1}^2}{\beta_1 d(\omega - \omega_1)} \quad (7.49)$$

把它与(7.48)式比较表明，必须取

$$\frac{\omega_1^2 L}{2} = \frac{\bar{X}_{L1}^2}{\beta_1 d}$$

即

$$L = \frac{2\bar{X}_{L1}^2}{\omega_1^2 \beta_1 d} \quad (7.50)$$

由前面给出的  $\omega^2 LC = 1$  的条件可以确定电容  $C$ 。

至此，我们一直忽略了空腔谐振器的损耗。对于一个高  $Q$  腔来说，如在7.1节中所指出的那样，可以考虑简单地用复谐振频率  $\omega_1(1 + j/2Q)$  代替谐振频率  $\omega_1$ 。也就是一个有耗的空腔谐振器的自然响应正比于  $e^{-\delta t + i\omega_1 t}$ ，而不是正比于  $e^{i\omega_1 t}$ ，其中， $\delta = \omega_1/2Q$ 。它相当于复谐振频率为  $\omega_1(1 + j/2Q)$ 。除了由于孔的存在而引起某些局部边缘效应外，空腔谐振器中的场为  $TE_{1,0,1}$  模的场。它的  $Q$  值已在7.3节算出，由(7.32)式表示。于是，有耗情况下的  $\bar{Z}_{in}$  为

$$\bar{Z}_{in} = -j \frac{\bar{X}_{L1}}{\beta_1 d (\omega - \omega_1 - j\omega_1/2Q)} \quad (7.51)$$

在谐振 ( $\omega = \omega_1$ ) 时, 得到一个纯电阻性阻抗  $\bar{R}_{in}$ , 即

$$\bar{R}_{in} = \bar{Z}_{in} = \frac{2 \bar{X}_{L1} Q}{\omega_1 \beta_1 d} \quad (7.52)$$

如果希望此空腔谐振器在谐振时与波导匹配, 则必须取孔的电抗  $\bar{X}_{L1}$  为

$$\bar{X}_{L1} = \left( \frac{\omega_1 \beta_1 d}{2Q} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.53)$$

以便使  $\bar{R}_{in} = 1$ 。这个匹配条件称为临界耦合条件。如果  $\bar{R}_{in}$  大于输入线的特性阻抗 (在归一化的情况下为 1), 则称此空腔谐振器为过耦合; 而如果  $\bar{R}_{in}$  小于输入线的特性阻抗, 则称为欠耦合。设  $\bar{R}_{in}$  是并联谐振的空腔谐振器在谐振时的归一化输入电阻, 则把  $\bar{R}_{in}$  定义为耦合参数  $K$ 。在串联谐振的情况下, 耦合参数等于谐振时的归一化输入电导。

对于 7.3 节所讨论过的  $a = b = d = 3$  厘米的矩形空腔谐振器来说, 已求得  $f_1 = 7070$  兆赫,  $Q = 12700$ 。对于此空腔谐振器,

$$\beta_1 = \frac{\omega_1}{\beta_1 c^2} = 4.7 \times 10^{-11} \text{ 秒/厘米}$$

同时, 由 (7.53) 式得出临界耦合时  $\bar{X}_{L1} = 0.0157$ 。由 (7.42) 式可得出相应的孔的半径  $r_0$  为 0.37 厘米。注意到  $\bar{X}_{L1} \ll 1$ , 就可以知道前面所作的  $\bar{X}_{L1}$  与 1 相比可以忽略的这种近似是正确的。还要注意, 由 (7.53) 式求临界耦合的  $\bar{X}_{L1}$  值时, 一般说来, 必须与由 (7.44) 式求谐振频率  $\omega_1$  一同进行。但是, 对于高  $Q$  空腔来说, (7.53) 式中的  $\omega_1$  可以用对应于  $\beta d = \pi$  的频率来近似, 而其误差可以忽略。上面的计算就是这样进行的。

有损耗的空腔谐振器等效电路必须包括与  $L$  和  $C$  并联的电阻  $\bar{R}_{in}$ , 如图 7.15a 所示。读者不难证明, 当  $\omega$  接近于  $\omega_1$  时, 输入阻抗  $\bar{Z}$  便成为

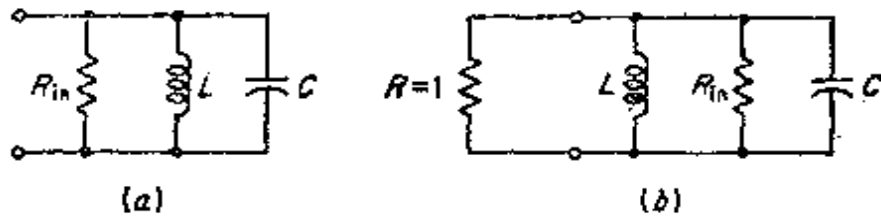


图 7.15 孔耦合空腔谐振器的等效电路

$$\bar{Z} = -j \frac{\omega_1^2 L}{2(\omega - \omega_1 - j\omega_1/2Q)} \quad (7.54)$$

式中,  $Q = \bar{R}_{in}/\omega_1 L$ .

由于此空腔谐振器与输入波导耦合, 相当于空腔谐振器的两端接入了一个负载阻抗, 它等于由孔平面向波源看去的阻抗。若波源与波导是匹配的, 则跨接到此空腔谐振器两端上的归一化电阻为 1, 如图 7.15b 所示, 其外部 Q 值为 (参看 7.1 节)

$$Q_e = \frac{1}{\omega_1 L} \quad (7.55a)$$

有载  $Q_L$  为

$$Q_L = \left( \frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_e} \right)^{-1} = \frac{\bar{R}_{in}}{(1 + \bar{R}_{in})\omega_1 L} \quad (7.55b)$$

有载品质因数和无载品质因数有如下的关系:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q_L} &= \frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_e} = \frac{(1 + \bar{R}_{in})\omega_1 L}{\bar{R}_{in}} = \omega_1 L + \frac{\omega_1 L}{\bar{R}_{in}} = \\ &= \frac{1}{Q} (1 + K) \end{aligned}$$

或

$$Q = (1 + K)Q_L \quad (7.56)$$

通常, 耦合参数  $K$  可定义为

$$K = \frac{Q}{Q_L} \quad (7.57)$$

由此可得并联谐振电路的  $K$  为

$$K = \frac{\bar{R}_{in}}{\omega_1 L} = \frac{\omega_1 L}{1}$$

它与前述的定义一致。同理，对于一个归一化输入电导为 $\bar{G}_{in}$ 的串联谐振电路来说，其无载和有载 $Q$ 为 $Q = \omega_1 L \bar{G}_{in}$ ， $Q_s = \omega_1 L$ ，从而又得到 $K = \bar{G}_{in} = Q/Q_s$ 。耦合参数是空腔谐振器与输入波导或传输线之间耦合程度的量度。

外部 $Q$ 值，即 $Q_s$ ，有时称为辐射 $Q$ 值，其理由是，可以认为空腔谐振器通过耦合孔把功率辐射到输入波导中去。由孔辐射所引起的功率损耗，等于跨接到如图7.15b所示等效电路的谐振器两端的归一化单位电阻上的功率损失。

对于上述的矩形空腔谐振器来说，下一个较高频率上的谐振，是 $\bar{Z}_{in}$ 为最小值时的串联谐振。在无耗的情况下， $\bar{Z}_{in} = 0$ ，且由(7.43)式可以看出，它相当于 $\tan \beta d = 0$ ，即 $\beta d = \pi$ 的情况。在串联谐振时， $\bar{Y}_{in}$ 有一个极点，因而，类似于对 $\bar{Z}_{in}$ 那样的分析适用于 $\bar{Y}_{in}$ 。在 $\omega = \omega_2$ 附近的（ $\omega_2$ 是使 $\beta d = \pi$ 时的 $\omega$ 的值） $\bar{Y}_{in}$ 是不难求得的。即

$$\bar{Y}_{in} = -j \frac{1}{\beta_2 (\omega - \omega_2 - j\omega_2/2Q)}$$

因为在此空腔谐振器中驻波分布表明，在孔所在的平面上横向电场为零，所以，如所予期的那样，在这种情况下，孔不起作用， $\omega_2$ 附近的输入导纳，恰好是长度接近于半个波导波长的短路波导的输入导纳。这种谐振由于它相当于空腔谐振器有非常松的耦合，而没有任何实际意义。

### 环耦合空腔谐振器

图7.16表示利用一个小环与同轴线耦合的空腔谐振器。因为环非常小，故环上各点的电流可以认为是相同的。此空腔谐振器中，具有穿过此环的磁力线的磁场的任一个模将由此环耦合。但是，只有与任一特定频率 $\omega$ 谐振的模才被激励起显著的振幅。在空腔谐振

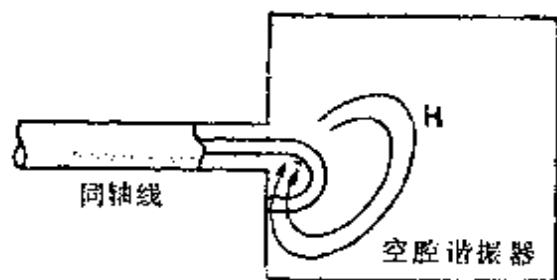


图 7.16 环耦合空腔谐振器

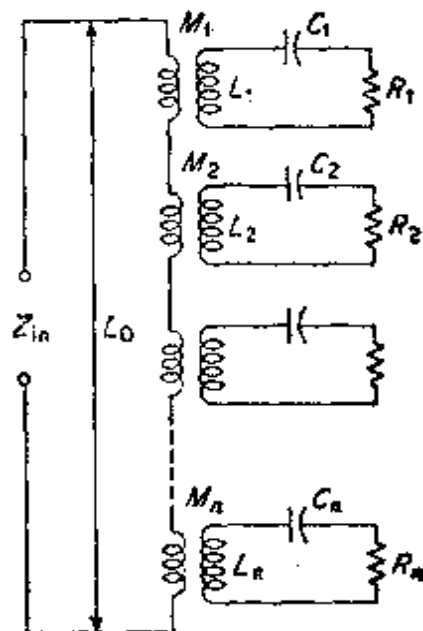


图 7.17 环耦合空腔谐振器的等效电路

器中，由流过此环的电流  $I$  所激励的场，可以由电流  $I$  产生的矢位来求解。由这个矢位，可以求出磁场，从而求出穿过此环的磁通量。当电流为 1 时，令穿过此环的第  $n$  个模的磁通为  $\psi_n$ ，则它等于耦合环与第  $n$  个模之间的互感  $M_n$ 。每一个模呈现为一个与环耦合的串联  $LCR$  电路相等效的阻抗。因而，正确的等效电路就是无限多个  $LCR$  串联电路通过互感与输入同轴线耦合，如图 7.17 所示。于是输入阻抗的形式为

$$Z_{in} = j\omega L_0 + j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^3 M_n^2 C_n}{1 - \omega^2 L_n C_n + j\omega C_n R_n} \quad (7.58)$$

式中， $L_0$  为耦合环的自感。若用  $\omega_n^2 L_n C_n = 1$  来定义谐振频率  $\omega_n$ ，且用  $Q_n = \omega_n L_n / R_n$  来定义第  $n$  个模的无载  $Q$  值，则 (7.58) 式可写作

$$Z_{in} = j\omega L_0 + j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^3 M_n^2}{L_n (\omega_n^2 - \omega^2 + j\omega \omega_n / Q_n)} \quad (7.59)$$

若  $\omega \approx \omega_n$ ，则在 (7.59) 式所有各项中，除了第  $n$  项以外，都是很小的。因而在第  $n$  个谐振点附近，

$$Z_{in} = j\omega L_0 + \frac{j\omega^3 M_1^2}{L_2(\omega_2^2 - \omega^2 + j\omega\omega_2/Q_2)}$$

$$\approx j\omega L_0 - j \frac{\omega_2^3 M_1^2}{2L_2(\omega - \omega_2 - j\omega_2/2Q_2)} \quad (7.60)$$

现在，此等效电路简化为与输入线成互感耦合的单个  $LCR$  串联电路。要激励起一个给定的模，耦合环应放在该模产生最大磁链的位置上。

上述结果表示环耦合空腔谐振器的形式解。为了实际上给定其电路参数，必须求解该环的电流在空腔谐振器中所激励的场的边值问题。同时必须求出空腔谐振器各种模的  $Q$  值。对形状简单的空腔谐振器而言，这些计算可相当精确地作出。但是，把它们放在这里显得太冗长了。

## 7.5 法布里—珀罗谐振器

由圆柱形空腔谐振器各种模的  $Q$  值表示式可以看出，随着频率的上升， $Q$  值按  $f^{-\frac{1}{2}}$  减少。这对于任何封闭的空腔谐振器中的任何一个给定的模来说都是正确的。因而，当波长很短时，比如说在亚毫米波段时，一般类型的空腔谐振器的  $Q$  值就太低，以致于不能成为有效的器件。更困难是当波长比几个毫米更短时，空腔的尺寸太小了。这意味着在微波电子管中，通过空腔谐振器的电子束与空腔谐振器的场相互作用时，其有效作用空间太小，而使振荡不能维持。为了克服在毫米波段低端到亚毫米波段（红外线和光）中的这些困难，光学的法布里—珀罗干涉仪已作为谐振器使用。本节中将简短地讨论这类谐振器的基本特性。更详细的讨论可查阅本章后面所列的参考文献。

理想的法布里—珀罗谐振器的最简单的形式，是由间隔为  $d$  的两块无限大平行板组成的，如图7.18所示。这类谐振器中场的解是  $TEM$  波的驻波。若用  $Z$  表示离左边板的距离，则其解可以表示为



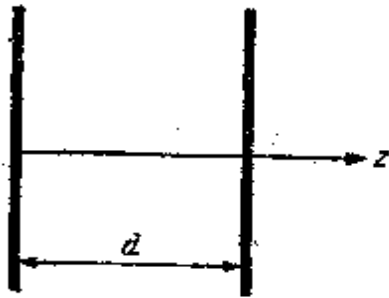


图 7.18 法布里-珀罗谐振器的理想形式

$$E_z = E_0 \sin k_0 Z \quad (7.61)$$

$$H_y = jY_0 E_0 \cos k_0 Z \quad (7.62)$$

式中,  $H_y$  是利用麦克斯韦电场旋度方程由  $E_z$  求得的。为了在  $Z=0$  和  $d$  处使  $E_z$  为零, 必须使

$$k_0 d = l\pi$$

或

$$f = \frac{c}{2\pi} k_0 = \frac{cl}{2d} \quad l=1, 2, 3, \dots \quad (7.63)$$

上式决定了它的谐振频率。

在求出两板中所储藏的能量和功率损耗后, 即可计算此谐振器的  $Q$  值。在长度为  $d$  和沿  $x$  及  $y$  方向的宽和高为 1 的直角棱镜中, 所储藏电能的时间平均值为

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{\epsilon_0}{4} \int_0^d |E_z|^2 dz = \frac{\epsilon_0}{4} |E_0|^2 \int_0^d \sin^2 \frac{l\pi z}{d} dz \\ &= \frac{\epsilon_0 |E_0|^2 d}{8} = W_m \end{aligned} \quad (7.64)$$

通过计算

$$W_m = \frac{\mu_0}{4} \int_0^d |H_y|^2 dz$$

不难证实  $W_m$  等于  $W_e$ 。因为每块板上的电流等于  $H_y$ , 所以, 两板上每单位面积的功率损耗为

$$P_l = R_m |Y_0 E_0|^2 \quad (7.65)$$

因而, 此谐振器第  $l$  次模的  $Q$  值为

$$Q = \frac{\omega W}{P_l} = \frac{2\omega W_e}{P_l} = \frac{\omega \epsilon_0 Z_0^2 d}{4R_m} = \frac{\pi \epsilon_0 cl Z_0^2}{4R_m} = \frac{\pi l Z_0}{4R_m} \quad (7.66)$$

以上已使用了 (7.63) 式并用  $(\mu_0 \epsilon_0)^{-\frac{1}{2}}$  代替了  $c$ 。

由于模指数  $l$  可以很大, 故  $Q$  值也可以很高。此外, 当间隔  $d$  给定时, 只有一种模能够振荡 (如果把具有  $y$  方向电场的另一极化

算作一个独立的模，则事实上有两个模）。在全封闭的空腔谐振器中，若使用振荡在高次模的大空腔谐振器，也可以使其 $Q$ 值很高。但是，由于各高次模的谐振频率之间的间隔很靠近，所以，这种全封闭的空腔谐振器要激励单一的模是困难的。作为一个求 $Q$ 值的例子，我们来研究用间隔为5厘米两铜板组成的法布里—珀罗谐振器。其工作波长 $\lambda_0 = 0.1$ 毫米，于是可得其模指数为

$$i = \frac{2d}{\lambda_0} = 1000$$

表面电阻为  $R_s = (\sigma \delta_s)^{-1} = 0.45$  欧姆。从而由 (7.66) 式得出  $Q = 650000$ ，它确实是一个非常高的 $Q$ 值。

一个实际的法布里—珀罗谐振器必须有两块大小一定的平板，并具有把功率耦合到谐振器的装置。把功率耦合到此谐振器的方法之一，是在其端板上开出小圆洞(孔)的方阵，用带有透镜(它使喇叭口上的光束平行)的喇叭电磁辐射照射这一块板，就可以激励此谐振器。图7.19中画出了这种装置，那里，假定两板都穿有小孔，并用类似的喇叭作为接收天线，由接收喇叭所接收的场应与此谐振器中的场的振幅成正比。下面将证明，只有在某些离散的谐振频率上它的场才是强的。所以，非谐振时，通过此谐振器的透射是可以忽略的。

如图7.20所示的具有小圆孔规则阵列的薄板(厚度远小于 $\lambda_0$ )，

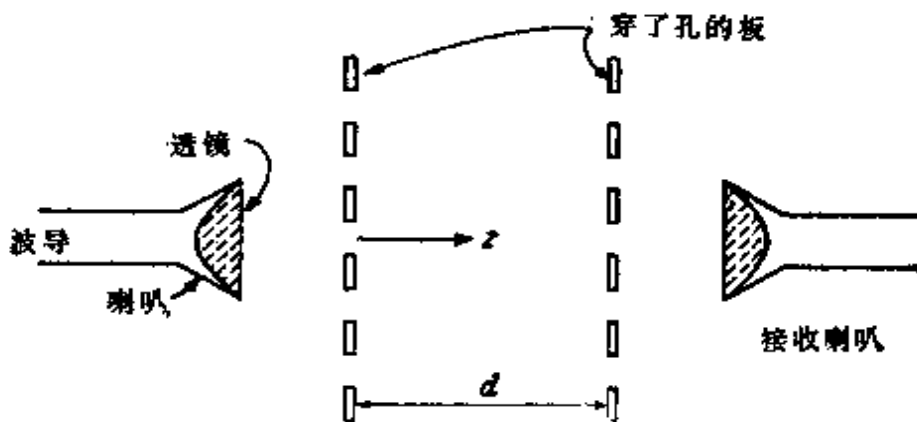


图 7.19 法布里—珀罗谐振器的激励方法

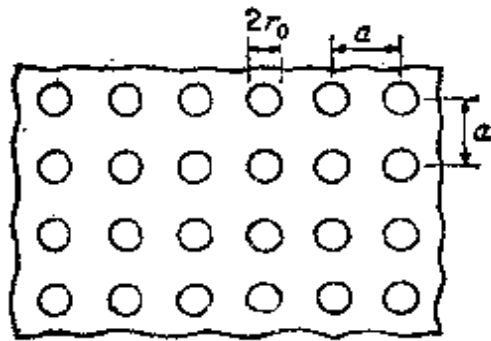


图 7.20 法布里—珀罗谐振器端板上的圆孔阵

对垂直入射的  $TEM$  波来说，可当作归一化并联感性电纳  $-j\overline{B}_L$ 。这个特性类似于在波导横向壁上小孔的特性，故这种谐振器基本上是孔耦合空腔谐振器的一种。其归一化电纳为

$$\overline{B}_L = \frac{3\alpha^2}{4k_0 r_0^3} = \frac{3\alpha^2 Z_0}{4\omega \mu_0 r_0^3} \quad (7.67)$$

当平板为无限大时，其反射系数为

$$\Gamma = \frac{1 - \overline{Y}_{in}}{1 + \overline{Y}_{in}} = \frac{1 - 1 + j\overline{B}_L}{2 - j\overline{B}_L} = \frac{j\overline{B}_L}{2 - j\overline{B}_L} \quad (7.68)$$

由于在  $\overline{Y}_{in}$  中包含了归一化的自由空间本征导纳，所以，此反射系数计入了通过该板辐射的场。当两板的尺寸有限时，经由一块板耦合到此谐振器中的能量，并不全由另一块板所反射。这是由于总是存在着绕射效应，经过两板的每一次反射要产生一些功率损耗。若两板尺寸远大于波长，且喇叭只照射其中心部分，则绕射损耗可保持很小。

分析孔耦合谐振器，使用基于多次反射的近似法是方便的，这是因为用等效反射系数  $\Gamma_e$  来代替反射系数  $\Gamma$ ，就可以简单地把绕射损失考虑到  $\Gamma_e$  中。首先研究没有损耗的情况。设用发射喇叭把在  $Z=0$  处电场振幅为  $E_0$  的平面波耦合到此谐振器中，则此波在达到  $Z=d$  处时的振幅为  $E_0 e^{-jk_0 d}$ 。经反射后回到  $Z=0$  处时，其振幅为  $\Gamma E_0 e^{-2j0k_0 d}$ ，并且，这样来回反射下去，把所有这些多次反射波加

起来，可以得到在谐振器中的总场。参看图7.21，可以得出在任一点  $Z$  处的场为

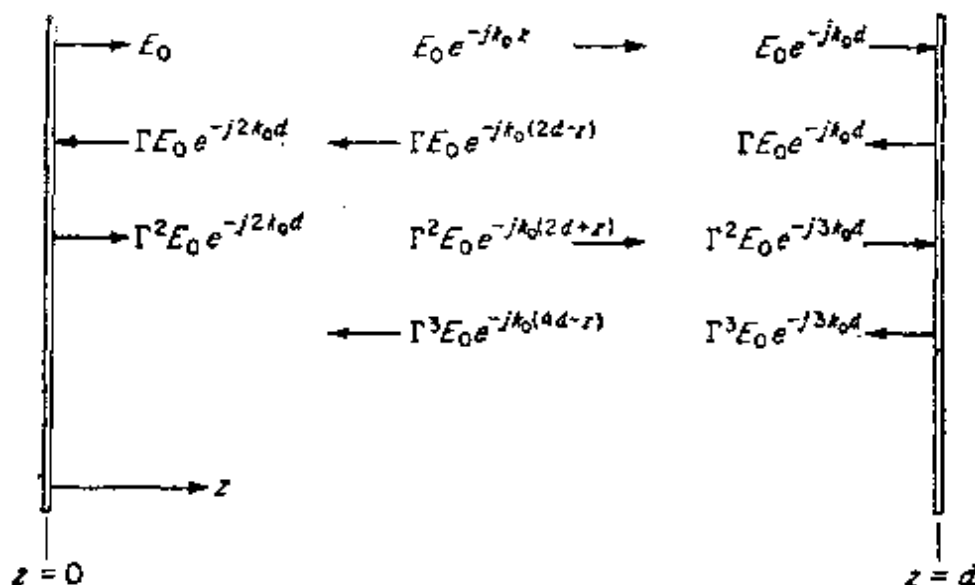


图 7.21 法布里-珀罗谐振器的多次反射

$$\begin{aligned}
 E_x &= E_0 e^{-jk_0 z} + \Gamma E_0 e^{-jk_0(2d-z)} + \Gamma^2 E_0 e^{-jk_0(2d+z)} + \dots \\
 &= E_0 e^{-jk_0 z} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma^{2n} e^{-j2k_0 n d} + \Gamma E_0 e^{-jk_0(2d-z)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma^{2n} e^{-j2k_0 n d} \\
 &= \frac{E_0 (e^{-jk_0 z} + \Gamma e^{-jk_0(2d-z)})}{1 - \Gamma^2 e^{-j2k_0 d}} \quad (7.69)
 \end{aligned}$$

为了获得高的外部  $Q$  值，要使电纳  $\overline{B}_L$  很大。于是， $\Gamma \approx -(1 + 2/j\overline{B}_L)$  且在 (7.69) 式的分子中可以用  $-1$  代替  $\Gamma$ 。这样就得

$$E_x = \frac{2jE_0 e^{-jk_0 z} \sin k_0(d-z)}{1 - \Gamma^2 e^{-j2k_0 d}} \quad (7.70)$$

这个空腔谐振器的最大响应根本上出现于 (7.70) 式的分母具有最小值时，即，当  $k_0$  使

$$D = |1 - \Gamma^2 e^{-j2k_0 d}| = \left| 1 - \left( \frac{j\overline{B}_L}{2 - j\overline{B}_L} \right)^2 e^{-j2k_0 d} \right|$$

为一最小值时。若  $\Gamma$  表示为

$$\Gamma = \rho e^{j\theta}$$

其中

$$\rho = \frac{\overline{B_L}}{(4 + \overline{B_L}^2)^{1/2}} \quad \text{和} \quad \theta = -\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{\overline{B_L}}{2}$$

则显然，当

$$|1 - \rho^2 e^{-j2(k_0 d - \theta)}|$$

是一个最小值时， $D$ 有最小值。只要忽略 $\rho$ 随 $k_0$ 的微小变化，则 $D$ 的最小值便出现在 $2(k_0 d - \theta) = 2(l-1)\pi$ 时。把 $\theta$ 代入，则得

$$2k_0 d = 2(l-1)\pi + 2\theta = 2(l-1)\pi + 2 \tan^{-1} \frac{\overline{B_L}}{2} \quad (7.71)$$

因为 $\overline{B_L}$ 很大， $\theta \approx \pi$ ，所以，谐振频率近似地为

$$k_0 d = l\pi \quad \text{或} \quad l = \frac{lc}{2d}$$

它与谐振器没有耦合时所得的结果一致。

(7.70)式分母的最小值为 $1 - \rho^2$ 。当 $k_0$ 取稍偏离其谐振值的某一值时，其分母的大小将为 $\sqrt{2(1 - \rho^2)}$ 。若 $k_0$ 的偏离为 $\Delta k_0$ ，则参照(7.7)式所表示的，此谐振器的外部 $Q$ 值应为

$$Q_e = \frac{k_c}{2\Delta k_0} \quad (7.72)$$

为了求变化量 $\Delta k_0$ ，在 $D^2$ 的表示式中用 $[(l-1)\pi + (d - \Delta\theta)/\Delta k_0]$ 代替 $k_0 d - \theta$ ，并使它等于 $2(1 - \rho^2)^2$ ，则得

$$\begin{aligned} & \left[ 1 - \rho^2 \cos 2 \left( d - \frac{\Delta\theta}{\Delta k_0} \right) \Delta k_0 \right]^2 + \rho^4 \sin^2 2 \left( d - \frac{\Delta\theta}{\Delta k_0} \right) \Delta k_0 \\ & = 2(1 - \rho^2)^2 = 1 - 2\rho^2 + \rho^4 + 2\rho^2 \left[ 1 - \cos 2 \left( d - \frac{\Delta\theta}{\Delta k_0} \right) \Delta k_0 \right] \end{aligned}$$

当 $\Delta k_0$ 很小时，可以用近似式 $\cos 2(d - \Delta\theta/\Delta k_0)\Delta k_0 \approx 1 - 2(\Delta k_0)^2 (d - \Delta\theta/\Delta k_0)^2$ 。对高 $Q$ 的谐振器来说， $\rho$ 很接近于1，故得

$$\Delta k_0 = \frac{1 - \rho^2}{2\rho(d - \Delta\theta/\Delta k_0)} \approx \frac{1 - \rho^2}{2(d - \Delta\theta/\Delta k_0)}$$

对于 $\Delta\theta/\Delta k_0$ ，应用(7.67)式得

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(\tan^{-1}(\overline{B}_L/2))}{\Delta k_0} &= \frac{4}{\overline{B}_L^2 + 4} \frac{\Delta(\overline{B}_L/2)}{\Delta k_0} \\ &= -\frac{2\overline{B}_L}{(4 + \overline{B}_L^2)k_0} = \frac{-2\rho^2}{k_0\overline{B}_L} \approx \frac{-2}{k_0\overline{B}_L} \end{aligned}$$

因而得到此谐振器的外部Q值为

$$Q_e = \frac{k_0(d + 2/k_0\overline{B}_L)}{1 - \rho^2} \quad (7.73)$$

对于典型的谐振器来说， $k_0d = l\pi$ 比 $2/\overline{B}_L$ 大得多，因而，外部Q值也可用下式作很好的近似：

$$Q_e = \frac{k_0d}{1 - \rho^2} = \frac{l\pi}{1 - \rho^2} \quad (7.74)$$

在两板单位面积上的损耗基本上与不穿孔的板相同，因而此谐振器第1次谐振模的有载Q值为

$$Q_L = \left( \frac{1}{Q_e} + \frac{1}{Q} \right)^{-1} = \frac{\pi l Z_0}{4R_m + Z_0(1 - \rho^2)} \quad (7.75)$$

注意已应用了(7.66)式的Q表示式。因为临界耦合时， $Q_e = Q$ ，所以

$$4R_m = Z_0(1 - \rho^2) = \frac{4Z_0}{4 + \overline{B}_L^2}$$

所需的电纳值为

$$\overline{B}_L = \left( \frac{Z_0 - 4R_m}{R_m} \right)^{\frac{1}{2}} \approx \left( \frac{Z_0}{R_m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.76)$$

外部 $Q_e$ 是由此谐振器的场通过穿孔板向外部区域辐射功率引起的。如果除了通过孔辐射功率之外，还有由围绕板的有限尺寸板的边缘绕射引起的功率损耗，则 $\rho$ 的有效值减小。这会使 $Q_e$ 减少，从而也使有载Q值即 $Q_L$ 减小。

在光波频率上，要求低的绕射损耗，这就对法布里—珀罗谐振器的两板(镜)的平滑性和平行性提出很严格的要求。板必须是平坦

的，且偏离平行不能超过一个波长的小部分。这种公差是很难满足的。幸而，用球面镜或抛物面镜代替平面镜，可以放宽这种公差，因为它们具有把场集中到此谐振器轴附近区域的聚焦作用。

在分析有限平板组成的法布里—珀罗谐振器时，已假定两镜之间的场为  $TEM$  波的驻波。这样的场只有在两个无限大平面镜之间才是可能的。当镜面为有限大时，场的振幅随横向坐标必须有一个变化，以便使它在镜的边缘下降到一个可以忽略的值。对此问题的分析表明，有许多场分布满足这个要求。因而，对具有有限镜面的法布里—珀罗谐振器来说，可能出现许多振荡模。因为横向尺寸相对于波长来说是大的，所以，这些模都近于  $TEM$  波。于是，把它们记作  $TEM_{nm}$  模，其中  $n$  和  $m$  指场的振幅随横向坐标的变化。

迄今为止，所应用的基本分析方法是，首先假定在一个镜面上的场分布为某种一般表示式，然后把此分布看作基本波源，应用惠更斯原理求出投射到第二镜面上的辐射场。为使原来的场分布对应于谐振器的一个模，它必须在第二镜处再现其本身，不同的只是多了一个恒定的复因子，它相应于在镜间经过一次的相移和绕射损耗。所加的这个限制导致一个积分方程。解此方程可得到各种模的场分布、相移以及每一次经过两镜之间时由绕射损耗而引起的振幅减小。在本章末所引用的参考文献中，可以找到对这个分析方法的论述及其典型结果。

## ★7.6 一般的空腔谐振器中场的展开式

研究在一个形状不定的空腔谐振器中，把任意一个电磁场展开为空腔谐振器中模的完全集合的问题，可以对电磁谐振器的一般特性有更深入的理解。为了求出任意源在空腔谐振器中所激励的场，需要这些普遍形式的展开式。在计算与外部传输线或波导耦合的空腔谐振器的输入阻抗（或输入导纳）时，也需要这些展开式。

作为一般性空腔谐振器的理论基础的基本定理是亥姆霍兹定

理\*。此定理表明，在图 7.22 中以闭合面  $S$  为边界的体积  $V$  中，一

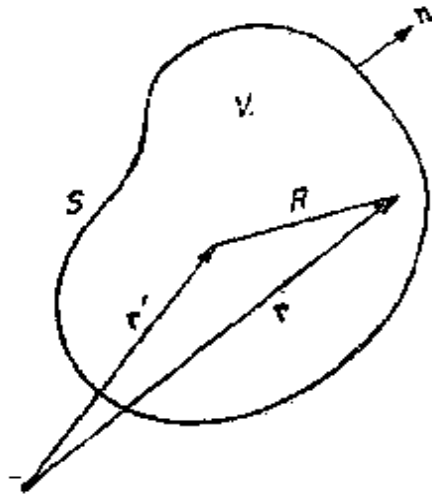


图 7.22 亥姆霍兹定理的图示

般的矢量场  $\mathbf{P}(x, y, z)$  为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(x, y, z) = & \nabla \left[ \int_V \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{4\pi R} dV' + \oint_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}}{4\pi R} ds' \right] \\ & + \nabla \times \left[ \int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{4\pi R} dV' + \oint_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}}{4\pi R} ds' \right] \end{aligned} \quad (7.77)$$

式中  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 。可见， $\mathbf{P}$  的体源为  $-\nabla' \cdot \mathbf{P}$  和  $\nabla' \times \mathbf{P}$ ，而面源为  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$  和  $\mathbf{P} \times \mathbf{n}$ 。若只有在  $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ ， $\mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = 0$  时  $\mathbf{P}$  才能完全地由一个适当的矢位的旋度导出。那末，也只有在  $\mathbf{n} \times \mathbf{P} = 0$ ， $\nabla \times \mathbf{P} = 0$  时， $\mathbf{P}$  才能由一个标位的梯度导出，如 (7.77) 式所示，如果在  $V$  中  $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$  和  $\nabla \times \mathbf{P} = 0$ ，则称  $\mathbf{P}$  为  $V$  中的无源场。在此情况下， $\mathbf{P}$  总是可以根据标位的梯度导出，而在某些情况下，如果  $\mathbf{n} \times \mathbf{P}$  不等于零，则此标位是多值的。后面将弄清这一点。

在确定适当的一组模，在给定的容积  $V$  中，把一个矢量场  $\mathbf{P}$  展

\* Plonsey and R.E. Collin, "Principles and Applications of Electromagnetic fields," Chap.1, McGraw-Hill Book Company, New York, 1961.



开时，需要知道加于这类模式的边界条件，以便得到唯一的一组模。当场的解已经求得时，为了保证此解是唯一的，需要这样一个唯一性条件。由于电磁场满足亥姆霍兹方程，我们就论述这个方程的解的唯一性。

研究  $\nabla^2 \mathbf{A}_n + k_n^2 \mathbf{A}_n = 0$ 。我们要确定的是，使此方程的解对给定的本征值  $k_n$  来说是唯一的时候，而必须加于  $\mathbf{A}_n$  上的边界条件。假定还存在第二个解  $\mathbf{B}_n$  使  $\nabla^2 \mathbf{B}_n + k_n^2 \mathbf{B}_n = 0$ 。则两个解之差  $\mathbf{C}_n = \mathbf{A}_n - \mathbf{B}_n$  也满足  $\nabla^2 \mathbf{C}_n + k_n^2 \mathbf{C}_n = 0$ 。现在要求  $\mathbf{B}_n$  在  $V$  中满足条件  $\nabla \cdot \mathbf{B}_n = \nabla \cdot \mathbf{A}_n$ ，

$\nabla \times \mathbf{B}_n = \nabla \times \mathbf{A}_n$ ，以便使  $\mathbf{A}_n$  和  $\mathbf{B}_n$  具有同样的体积源。于是，在  $V$  中

$$\nabla \cdot \mathbf{C}_n = \nabla \times \mathbf{C}_n = 0$$

考虑到

$$\begin{aligned} k_n^2 \int_V |\mathbf{C}_n|^2 dV &= - \int_V \mathbf{C}_n \cdot \nabla^2 \mathbf{C}_n dV \\ &= \int_V (\mathbf{C}_n \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{C}_n - \mathbf{C}_n \cdot \nabla \nabla \cdot \mathbf{C}_n) dV \end{aligned}$$

再利用关系式

$$\nabla \cdot (\mathbf{C}_n \times \nabla \times \mathbf{C}_n) = |\nabla \times \mathbf{C}_n|^2 - \mathbf{C}_n \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{C}_n$$

和

$$\nabla \cdot (\mathbf{C}_n \nabla \cdot \mathbf{C}_n) = |\nabla \cdot \mathbf{C}_n|^2 + \mathbf{C}_n \cdot \nabla \nabla \cdot \mathbf{C}_n$$

则得到

$$\begin{aligned} k_n^2 \int_V |\mathbf{C}_n|^2 dV &= \int_V |\nabla \times \mathbf{C}_n|^2 dV + \int_V |\nabla \cdot \mathbf{C}_n|^2 dV \\ &\quad - \oint_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{C}_n \nabla \cdot \mathbf{C}_n + \mathbf{C}_n \times \nabla \times \mathbf{C}_n) ds \end{aligned} \quad (7.78)$$

要使右边的体积分为零，和使  $\int_V |\mathbf{C}_n|^2 dV = 0$ （它意味着  $\mathbf{C}_n = 0$ ），必须使这两个面积分为零。这可以通过使  $\mathbf{A}_n$  和  $\mathbf{B}_n$  满足下列边界条件来达到：

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_n = \mathbf{n} \times \mathbf{A}_n = 0 \quad \text{在 } S \text{ 面上} \quad (7.79a)$$

或

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_e = \mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{A}_e = 0 \quad \text{在 } S \text{ 面上} \quad (7.79b)$$

$\mathbf{B}_e$  也有同样的边界条件。它们分别是将要使用的电型模和磁型模的边界条件。另一种可能是  $S$  面上  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_e = \mathbf{n} \times \mathbf{A}_e = 0$ ，或在  $S$  面上  $\nabla \cdot \mathbf{A}_e = \mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{A}_e = 0$ 。加上这些边界条件，就得到了唯一的解。应当指出，这两个边界条件必须规定为矢量函数。

### 短路型空腔谐振器场的展开式

短路型就是与理想的（理想导电壁）、完全闭合的空腔谐振器内场的解相当的那些类型。这些类型空腔谐振器的电场  $\mathbf{E}_e$  要满足的边界条件是，在  $S$  面上， $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_e = 0$ ；磁场  $\mathbf{H}_e$  要满足的边界条件是，在  $S$  面上， $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_e = 0$ 。此外，如同 (7.78) 式和 (7.79) 式所指出的那样，还必须在  $S$  面上添加附加的边界条件  $\nabla \cdot \mathbf{E}_e = 0$  和  $\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{H}_e = 0$ ，以便得到唯一的解。

有时为了方便，把一个空腔谐振器看作由两部分组成，即理想导电的曲面部分和理想开路的部分。在这种情况下，在理想开路部分的边界上， $\mathbf{E}_e$  和  $\mathbf{H}_e$  的边界条件要互相交换。实际上，当加在整个面上的边界条件不相同，求解空腔谐振器的问题是困难的。为此，只限于分析短路型的应用，因为这种通用类型的空腔谐振器是不难求解的。

我们要研究的空腔谐振器，有如图 7.23 所示的三种基本类型。

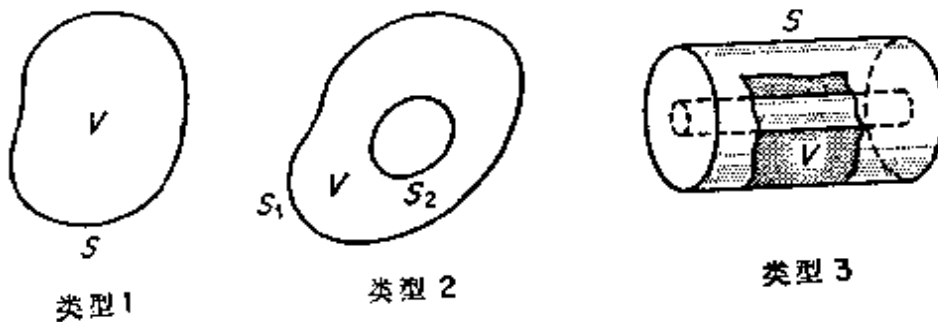


图 7.23 空腔谐振器的基本类型

类型 1 是具有单曲面的单连体积，而类型 2 是具有多重（双重）曲面的单连体积。最后，类型 3 是具有单曲面的多连体积。环形线和短路同轴线就是最后一种类型的例子。下面将看到，由于零频率模的存在，研究这些基本类型的空腔谐振器是重要的。

### 电场展开式

一般说来，由于  $\nabla \times \mathbf{E}$  和  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  不都为零，所以我们需要两组模：具有零散度和非零旋度的无散组；具有零旋度但为非零散度的无旋组。无散模定义为

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E}_n + k_n^2 \mathbf{E}_n &= 0 && \text{在 } V \text{ 中} \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}_n &= 0 && \text{在 } S \text{ 面上} \\ \nabla \cdot \mathbf{E}_n &= 0 && \text{在 } V \text{ 中和 } S \text{ 面上} \end{aligned} \right\} \quad (7.80)$$

而无旋模用  $l_n \mathbf{F}_n = \nabla \phi_n$  来定义，式中

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi_n + l_n^2 \phi_n &= 0 && \text{在 } V \text{ 中} \\ \phi_n &= \text{常数, 在 } S \text{ 面上} && \text{即 } \mathbf{n} \times \nabla \phi = 0 \text{ 在 } S \text{ 面上} \\ \nabla \times \mathbf{F}_n &= 0 && \text{在 } V \text{ 中} \end{aligned} \right\} \quad (7.81)$$

式中， $k_n$ 、 $l_n$  为此问题的本征值。除了  $n=0$  的模以外（它的  $l_0=0$ ），取此常数为零。由  $\mathbf{F}_n$  的上述定义可得

$$\begin{aligned} \int_V \phi_n^2 dV &= -\frac{1}{l_n^2} \int_V \phi_n \nabla^2 \phi_n dV = -\frac{1}{l_n^2} \int_V (\nabla \cdot \phi_n \nabla \phi_n - \nabla \phi_n \cdot \nabla \phi_n) dV \\ &= \int_V \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{F}_n dV - \frac{1}{l_n^2} \oint_S \phi_n \frac{\partial \phi_n}{\partial n} ds = \int_V \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{F}_n dV \end{aligned}$$

必须注意，若在  $S$  面上  $\phi_n$  或  $2\phi_n/2n$  被指定，则标量函数  $\phi_n$  是唯一确定的。因而，加于  $\mathbf{F}_n$  上的只有一个边界条件。若使这些模归一化，则

$$\int_V \phi_n^2 dV = \int_V \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{F}_n dV = \int_V \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{E}_n dV = 1 \quad (7.82)$$

当  $n=0$  时，假定本征值  $l_0$ 、 $k_0$  为零本征值。对应的本征函数  $\mathbf{E}_0$ 、 $\mathbf{F}_0$  为零频率模。我们将证明，由于  $\mathbf{E}_0$  必须与  $\mathbf{F}_0$  相同，所以，只要保

留  $F_0$  就行了。根据假设  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ，故  $\nabla^2 \mathbf{E}_0 = 0 = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E}_0 - \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_0$ ，即  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_0 = 0$ 。于是

$$\begin{aligned} - \int_V \mathbf{E}_0 \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_0 dV &= 0 \\ &= \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}_0 \times \nabla \times \mathbf{E}_0 - \nabla \times \mathbf{E}_0 \cdot \nabla \times \mathbf{E}_0) dV \end{aligned}$$

再由于  $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 = 0$ ，故得  $\int_V |\nabla \times \mathbf{E}_0|^2 dV = \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_0 \times \nabla \times \mathbf{E}_0 dS = 0$ 。于是必得  $\nabla \times \mathbf{E}_0 = 0$ ，它意味着  $\mathbf{E}_0 = \nabla f$ 。其中的  $f$  是一个标量函数，它在  $S$  面上是一个常数。因为这后一关系式对  $F_0$  也成立，所以，只要保留  $F_0$ ， $\mathbf{E}_0$  可以去掉。现将零频率模  $F_0$  定义为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_0 &= \nabla \phi_0 \\ \nabla \times \mathbf{F}_0 &= 0 \\ \mathbf{n} \times \mathbf{F}_0 &= 0 \quad \text{在 } S \text{ 面上} \\ \phi_0 &= \text{常数} \quad \text{在 } S \text{ 面上} \\ \nabla^2 \phi_0 &= 0 \quad \text{因为 } l_0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.83)$$

对于类型 1 和类型 3 的空腔谐振器来说， $\phi_0$  不存在除常数以外的解。所以， $F_0$  模只存在于类型 2 的空腔谐振器中，其中， $\phi_0$  在  $S_1$  和  $S_2$  上有不同的常数值。这个模正好是可以存在于不同电位的两导体之间的静态电场。

### 正交性

非简并的  $\mathbf{E}_n$  和  $\mathbf{F}_n$  模其本身及彼此间都是正交的。我们研究下式

$$\begin{aligned} \int_V (\mathbf{E}_m \cdot \nabla^2 \mathbf{E}_n - \mathbf{E}_n \cdot \nabla^2 \mathbf{E}_m) dV &= (k_m^2 - k_n^2) \int_V \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{E}_m dV \\ &= \int_V (\mathbf{E}_n \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_m - \mathbf{E}_m \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_n) dV \\ &= \int_V (\nabla \times \mathbf{E}_n \cdot \nabla \times \mathbf{E}_m - \nabla \times \mathbf{E}_m \cdot \nabla \times \mathbf{E}_n \\ &\quad - \nabla \cdot (\mathbf{E}_n \times \nabla \times \mathbf{E}_m - \mathbf{E}_m \times \nabla \times \mathbf{E}_n)) dV \end{aligned}$$

$$= \oint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_m \cdot \nabla \times \mathbf{E}_n - \mathbf{n} \times \mathbf{E}_n \cdot \nabla \times \mathbf{E}_m) ds = 0$$

可见, 若  $k_m^2 \neq k_n^2$ , 则

$$\int_V \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{E}_m dV = \delta_{nm} \quad (7.84)$$

式中, 若  $n \neq m$ , 则  $\delta_{nm} = 0$ ; 若  $n = m$ , 则  $\delta_{nm} = 1$ .

我们首先证明  $F_n$  模所有  $\Phi_n$  是正交的。先研究

$$\begin{aligned} \int_V (\Phi_n \nabla^2 \Phi_m - \Phi_m \nabla^2 \Phi_n) dV &= (l_n^2 - l_m^2) \int_V \Phi_n \Phi_m dV \\ &= \oint \left( \Phi_n \frac{\partial \Phi_m}{\partial n} - \Phi_m \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} \right) ds = 0 \end{aligned}$$

所以

$$\int_V \Phi_n \Phi_m dV = 0, \quad \text{当 } l_n^2 \neq l_m^2 \text{ 时}$$

再研究

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \Phi_n \nabla \Phi_m dV &= \oint_S \Phi_n \frac{\partial \Phi_m}{\partial n} ds = 0 = \int_V (\nabla \Phi_n \cdot \nabla \Phi_m + \Phi_n \nabla^2 \Phi_m) dV \\ &= l_n l_m \int_V \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{F}_m dV - l_m^2 \int_V \Phi_n \Phi_m dV \end{aligned}$$

因为后一积分为零, 故当  $n$  和  $m$  两者都不为零时, 得

$$\int_V \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{F}_m dV = \int_V \Phi_n \Phi_m dV = \delta_{nm} \quad (7.85)$$

若  $m = 0$ ,  $n \neq 0$ , 则正交性的证明仍然成立。但是, 对于  $F_0$  模的归一化应取为

$$\int_V \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{F}_0 dV = \int_V |\nabla \Phi_0|^2 dV = 1 \quad (7.86)$$

为了证明  $\mathbf{E}_n$  和  $\mathbf{F}_m$  模是正交的, 我们来研究

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F}_m \times \nabla \times \mathbf{E}_n &= (\nabla \times \mathbf{F}_m) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_n) - \mathbf{F}_m \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_n \\ &= -k_n^2 \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{E}_n \end{aligned}$$

推导时已利用了  $\nabla \times \mathbf{F}_n = 0$  和  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_n = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E}_n - \nabla^2 \mathbf{E}_n = k_n^2 \mathbf{E}_n$ 。现在可得

$$\begin{aligned} k_n^2 \int_V \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{E}_n dV &= - \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}_n \times \nabla \times \mathbf{E}_n ds \\ &= - \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{F}_n \cdot \nabla \times \mathbf{E}_n ds = 0 \end{aligned} \quad (7.87)$$

当  $n=m=0$  时,  $\mathbf{F}_0$  和  $\mathbf{E}_0$  模不是正交的, 而实际上是恒等的。因为  $\mathbf{F}_m$  与  $\mathbf{E}_n$  是正交的, 所以, 要展开任意的电场, 需要有两组 (一般说包括  $\mathbf{F}_0$ ) 模。

### 磁场展开式

为了展开任意的磁场 (考虑到在一部分表面上存在着  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} \neq 0$  的可能性), 我们应确立类似于用来展开电场的两组模。无散模定义为

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{H}_n + k_n^2 \mathbf{H}_n &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H}_n &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_n &= 0 \quad \text{在 } S \text{ 面上} \\ \mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{H}_n &= 0 \quad \text{在 } S \text{ 面上} \end{aligned} \right\} \quad (7.88)$$

无旋模定义为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}_n \mathbf{G}_n &= \nabla \psi_n \\ \nabla^2 \psi_n + p_n^2 \psi_n &= 0 \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial n} &= 0 \quad \text{在 } S \text{ 面上} \\ \nabla \times \mathbf{G}_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.89)$$

当  $p_n=0$  时, 得 (假定这发生在  $n=0$  时)  $\nabla \times \mathbf{G}_0 = 0$ ,  $\nabla^2 \psi_0 = \nabla \cdot \mathbf{G}_0 = 0$ ,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_0 = 0$ 。于是亥姆霍兹定理表明  $\mathbf{G}_0$  可以由一个矢位的旋度 (比如说  $\mathbf{G}_0 = \nabla \times \mathbf{A}_0$ ) 得到, 其中,  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_0 = 0$ 。因为  $\mathbf{G}_0$  也已假定为  $\mathbf{G}_0 = \nabla \psi_0$ , 所以,  $\psi_0$  必定是多值的。对应于静态磁场的函数  $\mathbf{G}_0$  只能存在于类型 3 的空腔谐振器中。例如, 在短路同轴线中,

$$\mathbf{H} = \frac{I \mathbf{a}_z}{2\pi r} = \nabla \cdot \frac{I\theta}{2\pi} = \frac{\mathbf{a}_z}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{I\theta}{2\pi} = \frac{I \mathbf{a}_z}{2\pi r} = -\nabla \times \frac{I \mathbf{a}_z}{2\pi} \ln r$$

要注意标位  $I\theta/2\pi$  是多值的。若  $n=0$  时,  $k_n=0$ , 则由 (7.88) 式得  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}_0 = 0$ , 利用前面讨论  $\mathbf{F}_0$  和  $\mathbf{E}_0$  时用过的一个类似于  $\mathbf{H}_0 \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{H}_0$  的体积分, 可以证明  $\nabla \times \mathbf{H}_0 = 0$ 。所以,  $\mathbf{H}_0$  与  $\mathbf{G}_0$  具有同样的特性, 即在  $S$  面上  $\nabla \times \mathbf{H}_0 = \nabla \cdot \mathbf{H}_0 = 0$ ,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_0 = 0$ 。因而我们将不保留  $\mathbf{H}_0$  模, 而只保留  $\mathbf{G}_0$  模作为零频率模。

### 正交性

我们按照下列关系式取归一化:

$$\int_V \mathbf{H}_n \cdot \mathbf{H}_m dV = \int_V \mathbf{G}_n \cdot \mathbf{G}_m dV = \int_V \psi_n \psi_m dV = 1 \quad (7.90a)$$

$$\int_V \mathbf{G}_0 \cdot \mathbf{G}_0 dV = \int_V |\nabla \psi_0|^2 dV = 1 \quad (7.90b)$$

用类似于电型模所使用的方法, 可以得出如下的正交性, 即

当  $n \neq m$  时,

$$\int_V \mathbf{H}_n \cdot \mathbf{H}_m dV = \int_V \mathbf{H}_n \cdot \mathbf{G}_m dV = \int_V \mathbf{G}_n \cdot \mathbf{G}_m dV = \int_V \psi_n \psi_m dV = 0 \quad (7.91)$$

当  $n = m$  时, 也可得

$$\int_V \mathbf{H}_n \cdot \mathbf{G}_n dV = 0 \quad (7.92)$$

### $\mathbf{E}_n$ 模和 $\mathbf{H}_n$ 模之间的关系

$\mathbf{E}_n$  和  $\mathbf{H}_n$  模的本征值, 由于它们事实上是相等的, 故可以都表示为  $k_n$ 。而且, 我们能够证明

$$\nabla \times \mathbf{E}_n = k_n \mathbf{H}_n \quad \nabla \times \mathbf{H}_n = k_n \mathbf{E}_n \quad (7.93)$$

对第一个关系式取旋度, 并利用第二个关系式得

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_n = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E}_n - \nabla^2 \mathbf{E}_n = k_n \nabla \times \mathbf{H}_n = k_n^2 \mathbf{E}_n = -\nabla^2 \mathbf{E}_n$$

同理可得,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}_n = -\nabla^2 \mathbf{H}_n = k_n^2 \nabla \times \mathbf{E}_n = k_n^2 \mathbf{H}_n$$

因而(7.93)式与解 $\mathbf{E}_n$ 、 $\mathbf{H}_n$ 的亥姆霍兹方程是一致的,而且, $\mathbf{E}_n$ 的边界条件是:在 $S$ 面上, $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_n = 0$ 。这意味着 $S$ 面上 $\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{H}_n = 0$ ,它就是曾经加在函数 $\mathbf{H}_n$ 上的边界条件。同理可得到在 $S$ 面上 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_n = 0$ ,它意味着在 $S$ 面上 $\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{E}_n = 0$ 。于是

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{E}_n = \mathbf{n} \cdot \left[ \left( \nabla - \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n} \right) \times (\mathbf{E}_n - \mathbf{n} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_n) \right. \\ \left. + \left( \nabla - \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n} \right) \times \mathbf{n} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_n + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n} \times \mathbf{E}_n \right] = \mathbf{n} \cdot \nabla_t \times \mathbf{E}_{tn} = 0 \end{aligned}$$

因为 $\nabla_t \times \mathbf{E}_{tn}$ 项只取 $\mathbf{n}$ 方向,这里的 $t$ 表示与 $S$ 面相切的分量。因为在 $S$ 面上 $\mathbf{E}_{tn} = 0$ ,故 $\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{E}_n = 0$ ,与边界条件 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_n = 0$ 一致。所以,(7.93)式是 $\mathbf{E}_n$ 和 $\mathbf{H}_n$ 模之间唯一可能有的关系式。体积分 $\nabla \cdot \mathbf{E}_n \times \nabla \times \mathbf{E}_n = -\mathbf{E}_n \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_n + |\nabla \times \mathbf{E}_n|^2 = -k_n^2 (|\mathbf{E}_n|^2 - |\mathbf{H}_n|^2)$ 证明 $\mathbf{H}_n$ 的归一化与 $\mathbf{E}_n$ 的归一化也是一致的。现在可以明白, $\mathbf{E}_n$ 、 $\mathbf{F}_n$ 和 $\mathbf{H}_n$ 、 $\mathbf{G}_n$ 模分别具有使它们能够表示电场和磁场的特性。一个任意场的展开式应为无限多个这些模之和。

## ★7.7 无源空腔谐振器中的振荡

我们来研究具有理想导电壁和没有电流及电荷的类型1的空腔谐振器。要求确定可能的振荡模。令此空腔谐振器中的场用无限级数的形式来表示:

$$\mathbf{E} = \sum_n e_n(t) \mathbf{E}_n + \sum_n f_n(t) \mathbf{F}_n \quad (7.94a)$$

$$\mathbf{H} = \sum_n h_n(t) \mathbf{H}_n + \sum_n g_n(t) \mathbf{G}_n \quad (7.94b)$$

式中, $e_n$ 、 $f_n$ 、 $h_n$ 和 $g_n$ 为振幅因子,它们都是时间的函数。因为在 $S$ 面上 $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0$ ,且其模函数满足类似的边界条件,同时,此级数是一致收敛且可以逐项微分的,所以由麦克斯韦旋度方程



得

$$\nabla \times \mathbf{E} = \sum_n \mathbf{e}_n \nabla \times \mathbf{E}_n = \sum_n \mathbf{e}_n k_n \mathbf{H}_n = -\mu \sum_n \frac{\partial h_n}{\partial t} \mathbf{H}_n - \mu \sum_n \frac{\partial g_n}{\partial t} \mathbf{G}_n$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sum_n h_n \nabla \times \mathbf{H}_n = \sum_n h_n k_n \mathbf{E}_n = \epsilon \sum_n \frac{\partial e_n}{\partial t} \mathbf{E}_n + \epsilon \sum_n \frac{\partial f_n}{\partial t} \mathbf{F}_n$$

若第一个方程依次用  $\mathbf{H}_n$  和  $\mathbf{G}_n$  去标乘，并在空腔谐振器体积内积分，则根据 (7.91) 式的正交性得

$$e_n k_n = -\mu \frac{\partial h_n}{\partial t} \quad (7.95a)$$

$$\frac{\partial g_n}{\partial t} = 0 \quad (7.95b)$$

同理，当第二个方程依次标乘  $\mathbf{E}_n$  和  $\mathbf{F}_n$  本身，并在空腔谐振器体积内积分得

$$h_n k_n = \epsilon \frac{\partial e_n}{\partial t} \quad (7.96a)$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} = 0 \quad (7.96b)$$

由 (7.95 a) 式和 (7.96 a) 式得

$$\frac{\partial^2 e_n}{\partial t^2} + \frac{k_n^2}{\mu \epsilon} e_n = 0 \quad \frac{\partial^2 h_n}{\partial t^2} + \frac{k_n^2}{\mu \epsilon} h_n = 0$$

$e_n$  的解为

$$e_n = e^{j\omega_n t} \quad (7.97a)$$

由 (7.96 a) 式得  $h_n$  的解为

$$h_n = \frac{j k_n}{\omega_n \mu} e_n = j \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} e_n = j \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} e^{j\omega_n t} \quad (7.97b)$$

式中， $\omega_n = k_n (\mu \epsilon)^{-\frac{1}{2}}$  为第  $n$  次模的谐振频率。

在没有体源的情况下，当  $n \neq 0$  时， $\mathbf{F}_n$  和  $\mathbf{G}_n$  不存在，但是，零频率模  $\mathbf{F}_0$  和  $\mathbf{G}_0$  可以分别地在类型 2 和类型 3 的空腔中存在。这些模与  $\mathbf{E}_n$ 、 $\mathbf{H}_n$  模无关。在空腔谐振器中的第  $n$  次自由振荡为

$$\mathbf{E} = e_n \mathbf{E}_n = \mathbf{E}_n e^{j\omega_n t} \quad (7.98a)$$

$$\mathbf{H} = j \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{H}_n e^{j\omega_n t} \quad (7.98b)$$

倘若把 $\epsilon$ 和 $\mu$ 看作复数，那末，即使空腔谐振器内的材料具有损耗时，这些结果也是正确的。在这种情况下， $\omega_n$ 为复数，其虚部代表该模的阻尼。

### 腔壁有损耗的空腔谐振器

设有一个腔壁电导率为有限值的空腔谐振器，则在其腔壁上

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = Z_s \mathbf{n} \times \mathbf{J}_s = Z_s \mathbf{H}_s \quad (7.99)$$

式中， $\mathbf{H}_s$ 是切向磁场， $\mathbf{n}$ 为外法线方向的单位矢量。其表面阻抗 $Z_s = (1 + j)/\sigma\delta_s$ 。设把其场展开如下：

$$\mathbf{E} e^{j\omega t} = \sum_n e_n \mathbf{E}_n e^{j\omega t} + \sum_n f_n \mathbf{F}_n e^{j\omega t} \quad (7.100a)$$

$$\mathbf{H} e^{j\omega t} = \sum_n h_n \mathbf{H}_n e^{j\omega t} + \sum_n g_n \mathbf{G}_n e^{j\omega t} \quad (7.100b)$$

式中， $e_n$ 、 $f_n$ 、 $h_n$ 和 $g_n$ 为与时间无关的振幅常数。因为已假定时间变化为 $e^{j\omega t}$ ，所以，可以用表面阻抗 $Z_s$ 的概念来说明腔壁的有限电导率。

在此情况下，在 $S$ 面上 $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$ 和 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}$ 不为零，而由于用以展开 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的模满足在 $S$ 面上的边界条件 $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_n = \mathbf{n} \times \mathbf{F}_n = 0$ 和 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_n = 0$ ，故 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的级数展开式在边界面 $S$ 上将不是一致收敛的。因此，(7.100a)式的旋度不能逐项地计算。为了克服这个困难，我们利用散度定理（实质上是分部积分）得到

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H}_n dV &= \int_V (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_n dV - \int_V \nabla \times \mathbf{H}_n \cdot \mathbf{E} dV \\ &= \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}_n dS \end{aligned}$$

用 $k_n \mathbf{E}_n$ 代替 $\nabla \times \mathbf{H}_n$ ，用 $-j\omega\mu \mathbf{H}$ 代替 $\nabla \times \mathbf{E}$ ，并利用展开式(7.100)和本征函数的正交性，得到

$$-j\omega\mu h_n - k_n e_n = \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}_n dS = Z_n \oint_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_n dS \quad (7.101a)$$

注意由于  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_n = 0$ ，故  $\mathbf{H}_n \cdot \mathbf{H} = \mathbf{H}_n \cdot \mathbf{H}_n$ 。同理可得

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \mathbf{E}_n \times \mathbf{H} dV &= \int_V (\nabla \times \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{H} - \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}_n) dV \\ &= \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{H} dS = 0 \end{aligned}$$

用  $k_n \mathbf{H}_n$  代替  $\nabla \times \mathbf{E}_n$ ，用  $j\omega\epsilon \mathbf{E}$  代替  $\nabla \times \mathbf{H}$ ，并利用展开式 (7.100) 得

$$j\omega\epsilon e_n = k_n h_n \quad (7.101b)$$

这个结果与对 (7.100 b) 式逐项取旋度所得到的结果是相同的。但是，由于 (7.100 a) 式不是一致收敛的，所以对它逐项取旋度不能得到 (7.101 a) 式。

由 (7.101) 式的两个关系式，可以得到不同的  $e_n$  和  $h_n$  的表示式。 $h_n$  为

$$h_n = \frac{j\omega\epsilon}{k^2 - k_n^2} Z_n \oint_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_n dS \quad (7.102)$$

式中， $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$

现在假定此场基本上是第  $n$  次模的场，并且不是简并的，即没有其他模与它有同样的本征值  $k_n$ 。则  $\mathbf{H} \approx h_n \mathbf{H}_n$ ，且由于  $\mathbf{H}_n$  为实数，其面积分便成为

$$h_n Z_n \oint_S \mathbf{H}_n \cdot \mathbf{H}_n dS = h_n Z_n \oint_S |\mathbf{H}_n|^2 dS$$

第  $n$  次模在腔壁上的功率损耗为

$$P_l = \frac{R_n}{2} \oint_S |\mathbf{H}_n|^2 dS$$

而所储藏的平均磁能为

$$W_m = \frac{\mu}{4} \int_V |\mathbf{H}_n|^2 dV = \frac{\mu}{4}$$

第  $n$  次模的  $Q$  值为

$$Q_n = \frac{2\omega W_m}{P_i}$$

于是

$$\oint_S |H_n|^2 dS = \frac{2P_i}{R_m} = \frac{4\omega W_m}{Q_n R_m} = \frac{\mu\omega}{Q_n R_m} \quad (7.103)$$

对于 (7.102) 式, 现在可得

$$h_n = \frac{j\omega\epsilon(1+j)R_m}{k^2 - k_n^2} = \frac{\mu\omega h_n}{Q_n R_m}$$

这一关系式只有在

$$-\frac{k^2(1-j)}{k^2 - k_n^2} \frac{1}{Q_n} = 1$$

或

$$k = \frac{k_n}{(1 + 1/Q_n - j/Q_n)^{1/2}} \approx k_n \left( 1 - \frac{1}{2Q_n} + \frac{j}{2Q_n} \right) \quad (7.104)$$

时才能成立。由此可见, 腔壁有损耗的空腔谐振器的谐振频率与没有损耗时的谐振频率  $\omega_n$  差一个因子  $1 - 1/2Q_n$ 。此外, 还引入了一个阻尼常数  $\delta = \omega_n/2Q_n$ 。用  $\omega$  和  $\delta$  表示的 (7.104) 式为

$$j\omega - \delta = j\omega_n \left( 1 - \frac{1}{2Q_n} \right) - \frac{1}{2Q_n} \quad (7.105)$$

### 简并模

即使在  $p_n = k_m$  时,  $G_n$  模和  $H_m$  模的体积正交性仍保持, 考察证明中所用的方法将表明这一点。但是, 若  $k_n = k_m$ , 就证明不了  $H_n$  和  $H_m$  模的体积正交性。在这种情况下

$$\int_V H_n \cdot H_m dV$$

可能为零, 也可能不为零。若此积分不为零, 则此两个模是互相耦合的, 因为储藏在两个模中的平均磁能将包含由上述积分引起的非

零的相互作用项。

除了两个简并模之间的体耦合外，也可能有由有限电导率的腔壁损耗引起的耦合。以下研究这种面耦合的特性。

若 $H_n$ 和 $H_m$ 两个模是简并的，则 $k_n = k_m$ 。此外，若

$$\oint_S H_n \cdot H_m dS \neq 0 \quad (7.106)$$

则与此两类模相联系的功率损耗将包含由上述积分引起的交互作用项。在这种情况下，这两类模就被认为是通过腔壁的有限表面阻抗耦合在一起的。因为一种模的存在会自动地耦合出另一种模，故很难做到正好只存在这些模中的一种。但是，对大多数实际的空腔谐振器来说，这样的耦合是不存在的。然而，仍必须记住耦合模的可能性，因为若它存在的话，则在计算储能、功率损耗和 $Q$ 值时，必须包括两个模。这里的情况很像出现波导简并模的情形（参看3.10节）。

在 $k_n$ 和 $k_m$ 不相等的情况下，可以证明矩形和圆柱形空腔谐振器的这个面积分为零。虽然没有作普遍性的证明，但是，可以预料，这是非简并模的一般特性。

若以旧简并模的线性组合作为新模，就可以使耦合的简并模的问题变成非耦合的简并模的问题。设 $H_n$ 和 $H_m$ 为耦合的简并模，则取新的模为

$$H'_n = C_1 H_n + C_2 H_m \quad (7.107a)$$

$$H'_m = d_1 H_n + d_2 H_m \quad (7.107b)$$

其中所取 $c_i$ 和 $d_i$ 使

$$\oint_S H'_n \cdot H'_m dS = 0 \quad (7.108a)$$

$$\int_V H'_n \cdot H'_m dV = 0 \quad (7.108b)$$

$$\int_V |H'_n|^2 dV = \int_V |H_n|^2 dV = 1 \quad (7.108c)$$

这两个新的模是非耦合的，且能在有损耗的空腔谐振器中彼此独立地存在。对于这两个新的非耦合的模来说，因为已经使其功率表示

式中的交叉耦合项等于零，同样，已经使其所储磁能的表示式中交叉耦合项等于零。所以，可以独立地计算每个模的Q值。若简并模在两种以上，则可以用类似的方法找出一组新的非耦合归一化模。因此，在一般性讨论中，我们可以假定已选取的所有简并模都是非耦合的。

## ★7.8 空腔谐振器的激励

这一节研究应用空腔谐振器中场的模式展开式来求磁偶极子和电偶极子所激励的场，这两个偶极子分别表示电流环或探针。此外，也可以用等效的电和磁偶极子描述一个小孔。因而，这里要阐明理论，对于处理空腔谐振器与外波导或同轴传输线的三种常用耦合方式来说，是有足够普遍性的。

设空腔谐振器包含无限小的电和磁偶极子：

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 e^{j\omega t} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (7.109a)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 e^{j\omega t} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

其所在点的位置由矢量 $\mathbf{r}_0$ 来规定。

三维 $\delta$ 函数 $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ 代表位于 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ 点上的偶极子，当 $\mathbf{r}_0$ 点包含在体积 $V$ 中时，这个 $\delta$ 函数以这样的方式来定义（参看2.11节），即对于在 $\mathbf{r}_0$ 处连续的任意矢量 $\mathbf{A}$ ，有

$$\int_V \mathbf{A}(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)$$

仿照物质极化所遵守的方程

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \text{ 和 } \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

来推论，可见，麦克斯韦方程应成为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} = -j\omega \mu_0 \mathbf{H} - j\omega \mu_0 \mathbf{M}_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (7.110a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} = j\omega \epsilon_0 \mathbf{E} + j\omega \mathbf{P}_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (7.110b)$$

式中的时间因子 $e^{j\omega t}$ 已被舍去。

这样，利用场的一般展开式(7.100)可得

$$\mathbf{E} = \sum_n e_n \mathbf{E}_n + \sum_n f_n \mathbf{F}_n \quad (7.111a)$$

$$\mathbf{H} = \sum_n h_n \mathbf{H}_n + \sum_n g_n \mathbf{G}_n \quad (7.111b)$$

为了求出展开系数  $e_n$ 、 $h_n$ ，可按照推导 (7.101) 式的方法。但要注意用 (7.110) 式的右边代替  $\nabla \times \mathbf{E}$  和  $\nabla \times \mathbf{H}$ 。于是

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_n dV - \int_V \nabla \times \mathbf{H}_n \cdot \mathbf{E} dV &= Z_n \oint_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_n dS \\ &= \int_V \left[ -j\omega\mu_0 \mathbf{H} - j\omega\mu_0 \mathbf{M}_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \right] \cdot \mathbf{H}_n dV - k_n \int_V \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{E} dV \\ &= -j\omega\mu_0 h_n - k_n e_n - j\omega\mu_0 \mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{H}_n(\mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (7.112a)$$

同理

$$k_n h_n = j\omega\epsilon_0 e_n + j\omega \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{E}_n(\mathbf{r}_0) \quad (7.112b)$$

为了得到  $g_n$  的方程式，计及

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{G}_n dV &= \int_V (\mathbf{G}_n \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{G}_n) dV \\ &= \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{G}_n dS = Z_n \oint_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{G}_n dS \end{aligned}$$

再利用 (7.110a) 式、展开式 (7.111b) 以及  $\mathbf{H}_n$  和  $\mathbf{G}_n$  的正交性，得

$$j\omega\mu_0 g_n + j\omega\mu_0 \mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{G}_n(\mathbf{r}_0) = -Z_n \oint_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{G}_n dS \quad (7.113)$$

因为  $\nabla \times \mathbf{G}_n$  为零，

依同样的方式，利用关系式

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \mathbf{F}_n \times \mathbf{H} dV &= \int_V (\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{F}_n - \mathbf{F}_n \cdot \nabla \times \mathbf{H}) dV \\ &= - \int_V \mathbf{F}_n \cdot \nabla \times \mathbf{H} dV = \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{H} dV = 0 \end{aligned}$$

和 (7.110b) 式及 (7.111a) 式得到

$$j\omega\epsilon_0 f_n = -j\omega \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{F}_n(\mathbf{r}_0) \quad (7.114)$$

现在我们得到如下的展开系数  $e_n$ 、 $h_n$ 、 $f_n$  和  $g_n$  的方程式：

$$j\omega\epsilon_0 e_n = k_n h_n - j\omega \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{E}_n(\mathbf{r}_0) \quad (7.115a)$$

$$h_n = \frac{-1}{k_0^2 - k_n^2} (j\omega k_n \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{E}_n + k_0 \mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{H}_n - j\omega\epsilon_0 Z_n \oint_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_n dS) \quad (7.115b)$$

$$j\omega\epsilon_0 f_n = -j\omega \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{F}_n \quad (7.115c)$$

$$j\omega\mu_0 g_n = -j\omega\mu_0 \mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{G}_n - Z_n \oint_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{G}_n dS \quad (7.115d)$$

式中,  $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$ 。为了消去  $e_n$  和得到 (7.115b) 式, 已使用了 (7.115a) 式。

在处理空腔谐振器的许多实际问题时, 上述方程可以简化。通常,  $\omega$  是非常接近于特定的谐振频率  $\omega_n$  的。由 (7.115b) 式可见, 当  $m \neq n$  时, 系数  $h_m$  都将比  $h_n$  小。因而, 当  $m \neq n$  时, 系数  $e_m$  也都比  $e_n$  小。场主要地由  $\mathbf{H}_n$  模和  $\mathbf{E}_n$  模来描述。对 (7.115a) 式中的面积分, 可以用  $h_n \mathbf{H}_n$  来近似  $\mathbf{H}$  (它表示对无耗解有微扰), 而不引起显著的误差。此外, 在  $g_n$  的方程中, 作为一级近似, 可以忽略其面积分项。如果已经取  $\mathbf{H}_n$  模为非耦合的, 则可以利用前面导出的关系式:

$$\oint_S \mathbf{H}_n \cdot \mathbf{H}_n dS = \frac{2P_t}{R_n} = \frac{\omega\mu_0}{Q_n R_n}$$

这样就可以把 (7.115) 式改为下列简化方程式:

$$\left[ k_0 \left( 1 + \frac{1-j}{Q_n} \right) - k_n^2 \right] h_n = -j\omega k_n \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{E}_n - k_0 \mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{H}_n$$

或

$$h_n = \frac{j\omega k_n \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{E}_n + k_0 \mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{H}_n}{k_n^2 - k_0^2 \left( 1 + \frac{1-j}{Q_n} \right)} \quad (7.116a)$$

$$e_n = - \frac{j\omega\mu_0 (k_n \mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{H}_n + j\omega \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{E}_n)}{k_n^2 - k_0^2 \left( 1 + \frac{1-j}{Q_n} \right)} \quad (7.116b)$$

$$e_0 f_n = - \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{F}_n \quad (7.116c)$$

$$g_n = - \mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{G}_n \quad (7.116d)$$



(7.116 a) 式和 (7.116 b) 式可以适用于所有的  $h_n$  和  $e_n$ 。因为我们已经假定  $\omega$  等于或近似等于  $\omega_n$ ，所以当  $m \neq n$  时，其分母可以用  $k_0^2 - k_m^2$  来代替。由于  $Q_n$  很大，故当  $m = n$  时，我们可以把分母分解因子而得

$$\left[ k_n - k_0 \left( 1 + \frac{1-j}{Q_n} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left[ k_n + k_0 \left( 1 + \frac{1-j}{Q_n} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ \approx -2k_n \left[ k_0 - k_n \left( 1 - \frac{1-j}{2Q_n} \right) \right]$$

一般说来，我们首先关心的是谐振模  $E_n$ 、 $H_n$  的激励强度。它的激励系数由 (7.116 a) 式和 (7.116 b) 式给出。系数  $f_n$  和  $g_n$  描述在偶极子（场源）周围存在的局部场。此场的形态为准静态场。体分布电流在空腔谐振器中所激励起的场，可以用上面所述的同样方法来求解。作为一个例子，设用体分布电流  $J(r_0)e^{j\omega t}$  激励的空腔谐振器。电流的微分元可以看作其矩为  $J/j\omega$  的电偶极子  $P$ 。则位于  $r_0$  点的电流元  $J(r_0)\delta(r-r_0)$  产生的第  $n$  次模的振幅为 (7.116) 式除以  $j\omega$ 。当此电流随第  $n$  次谐振模的频率  $\omega_n$  变化时，只有这个模会激励起很大的振幅。由体分布电流激励起的第  $n$  次模电场的振幅可用迭加方法（即把每一个电流元所贡献的加起来）求出。因而得

$$e_n = -j\omega\mu_0 \frac{\int_V J(r_0) \cdot E_n(r_0) dV_0}{k_n^2 - k_0^2 \left( 1 + \frac{1-j}{Q_n} \right)} \quad (7.117)$$

式中的积分是在有电流分布的体积上进行的。振幅常数  $h_n$  有类似的表示式。

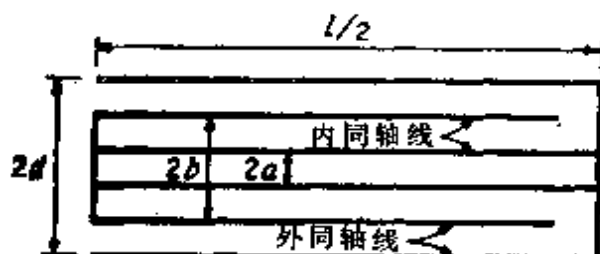
由体分布电流在空腔谐振器中所激励起的场，也可以用矢位函数解出。作为矢位函数的一个特定应用，将在第 9 章中涉及到速调管时介绍，这里不研究这个方法了。

## 习 题

7.1 试证明半波长短路同轴线所储藏的电能和磁能的时间平均值是相等的。利用由(3.26)式所给出的场的表示式。

7.2 试证明对于摺迭的同轴线，当  $b = \sqrt{ad}$  时，可使内同轴线和外同轴线的特性阻抗相等。这种同轴线是用于高频振荡器中的同轴线的通用形式，其有效长度  $l$  约为其实际长度的两倍。当频率为300兆赫时，为使  $l = \lambda_0/4$ ，

$l/2$  须为何值？若  $2d = 5$  厘米， $2a = 2$  厘米，为使特性阻抗相等， $2b$  须等于多少？求出谐振时铜同轴线 ( $\sigma = 5.8 \times 10^7$  姆欧/米) 的  $Q$  值和输入阻抗。当  $d$  固定时，使  $Q$  为最大值时的  $a$  和  $b$  的最佳值是多少？



习题 7.2

7.3 试证明开路传输线在谐振频率附近，具有与串联谐振电路那样的特性，在该频率下此开路线的长度为  $\lambda/4$ ，并求出谐振时输入阻抗的表示式。

7.4 有一条铜制的短路双线传输线。其导体直径为 1 厘米，两线间隔为 3 厘米，长度为 40 厘米。求谐振时的并联谐振频率， $Q$  值和输入电阻。

7.5 试求尺寸为  $a = b = c = 10$  厘米的铜制矩形空腔谐振器工作于  $TE_{101}$  模时的谐振频率和  $Q$  值。

7.6 半径  $a = 2$  厘米长为 6 厘米的圆柱形空腔谐振器，用电容率  $\epsilon = (2.5 - j0.0001) \epsilon_0$  的介质填充。此空腔谐振器是铜制的。试求工作于  $TE_{111}$  模时的谐振频率和  $Q$  值。注意在谐振频率的表示式中，必须用

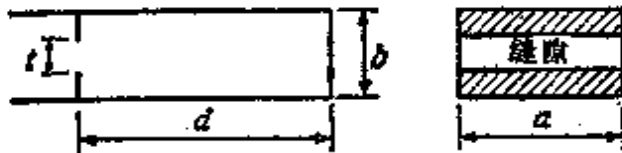
$$c \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon'}}$$

代替自由空间中的光速  $c$ 。

★7.7 利用 (4.25) 式和 (4.26) 式的结果去证明一个空腔谐振器的  $Q$  值为

$$Q = \frac{\omega}{2R} \frac{\partial X}{\partial \omega} = \frac{\omega}{2G} \frac{\partial B}{\partial \omega}$$

式中,  $Z_{in} = R + jX$  和  $Y_{in} = G + jB$  是其等效电路端口上的输入阻抗和输入导纳。试证明这些  $Q$  值公式给出了通常的串联  $RLC$  电路和并联  $RC L$  电路的结果。



习题 7.8

7.8 一个尺寸为  $a$ 、 $b$ 、 $d$  的矩形空腔谐振器, 通过电容性隙缝与矩形波导耦合。此波导的宽为  $a$ , 高为  $b$ 。求决定第一个并联谐振频率的方程式。并求出临界耦合时所需的隙缝电纳。当  $a = 2b = 2.5$  厘米,  $d = 2.5$  厘米, 且为铜制的空腔谐振器时, 计算谐振频率、 $Q$  值和临界耦合时要开的隙缝宽度  $t$  (可利用求隙缝电纳的公式  $\overline{B}_c = (2\beta b/\pi) \ln \csc(\pi t/2b)$  值)。其有载  $Q$  值为何值?

7.9 对于在习题 7.8 中给定尺寸的矩形波导中的电容性膜片, 求代表电纳函数  $\overline{B}_c = (2\beta b/\pi) \ln \csc(\pi t/2b)$  的等效电路, 使在频率  $\omega_1$  附近准确到  $\Delta\omega = \omega - \omega_1$  的项。

提示: 在  $\omega_1$  附近把  $\beta$  展开为泰勒级数, 并选用串联  $LC$  等效电路。

7.10 设计一个谐振在 10000 兆赫长为  $d$ 、高为  $b = 1.2$  厘米、宽为  $a = 2.5$  厘米的矩形空腔谐振器。此空腔谐振器与尺寸为  $a \times b$  的矩形波导作临界耦合。确定此空腔谐振器的长度  $d$  及中心圆孔的半径。若此空腔谐振器为铜制的, 试求无载  $Q$  值和有载  $Q$  值。

7.11 对于本书中所讨论过的孔耦合矩形空腔谐振器, 令其在

谐振时入射功率为100毫瓦。此空腔谐振器为临界耦合。试计算入射电场的峰值和此空腔谐振器场的峰值。空腔谐振器场的峰值振幅与Q值的关系如何？（空腔谐振器的尺寸见习题7.10）

7.12 设有一个法布里—珀罗谐振器，其两板上所穿的小圆孔排成方阵。孔的间隔为4毫米。工作波长为8毫米时，此谐振器工作于第50次谐振模（即 $k_0 d \approx 50\pi$ ）。试求临界耦合时所需要的孔径及空载和有载Q值。两板由 $\sigma = 5.8 \times 10^7$ 姆欧/米的铜制成的。

7.13 设习题7.12的法布里—珀罗谐振器有一块板没有开孔。试导出谐振频率、外部Q值和有载Q值的表示式。

7.14 设有一个与腔壁S上所开孔的表面 $S_0$ 相切的外加电场 $E_0$ 去激励一个空腔谐振器。利用关系式 $\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{G}_n dV$ 去证明具有理想导电壁的空腔谐振器的振幅 $g_n$ 为

$$-j\omega\mu_0 g_n = \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{G}_n dS = \int_{S_0} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{G}_n dS$$

利用一般展开式(7.100b)。由式 $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ 令 $\mathbf{H} \cdot \nabla \psi_n = \nabla \cdot \mathbf{H} \psi_n$ 并用散度定理证明 $g_n$ 的另一表示式为

$$-j\omega\mu_0 g_n = -j\omega\mu_0 \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{G}_n dV = \frac{-j\omega\mu_0}{p_n} \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} \psi_n dS$$

后一个关系式证明，当S面上 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}$ 不为零时，被激励起 $\mathbf{G}_n$ 模。

★7.15 证明习题7.14中 $g_n$ 的两个表示式是恒等的。

提示：考虑到

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{E} \psi_n = \psi_n \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \times \nabla \psi_n = -j\omega\mu_0 \psi_n \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{n} \times \mathbf{E} \cdot \nabla \psi_n$$

并应用斯托克斯定理证明

$$\oint_S \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{E} \psi_n dS = 0$$

★7.16 试求尺寸为 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 的矩形空腔谐振器的本征函数 $E_n$ 、 $H_n$ 、 $F_n$ 和 $G_n$ 。

★7.17 试求由体分布电流 $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ 所激励的空腔谐振器中类似于(7.111a)式和(7.115)式的电磁场的模式展开式。

## 参 考 文 献

1. Montgomery, C. G., R. H. Dicke, and E. M. Purcell.  
"Principles of Microwave Circuits." McGraw-Hill Book company.  
New York, 1948.
2. Ragan, G. L. (ed.), "Microwave Transmission Circuits."  
McGraw-Hill Book Company, New York, 1948.
3. Slater, J. C., "Microwave Electronics," D. Van Nostrand  
company, Inc., Princeton, N. J., 1950.
4. Goubau, G., "Electromagnetic Waveguide and Cavities," chap.  
2, pergamon press, New York, 1961.
5. Kurokawa, K., *The Expansions of Electromagnetic Fields in  
Cavities, IRE Trans., Vol. MTT-6, PP 178-187, April, 1958.*
6. Van Bladel, J., "Electromagnetic Fields," chap. 10, McGraw-  
Hill Book company, New York, 1964.  
法布里—珀罗谐振器
7. Culshaw, W., *High Resolution Millimeter Wave Fabry-perot  
Interferometer, IRE Trans., Vol. MTT-8, PP182-189, March, 1960.*
8. Culshaw, W., *Resonators for millimeter and Submillimeter  
Wavelengths IRE Trans., Vol. MTT-9, PP. 135-144, March, 1961.*
9. FOX, A. G., and T. Li, *Resonant Modes in a Maser Interfer-  
ometer, Bell system Tech. J., Vol. 40, PP. 453-488, March, 1961.*
10. Boyd, G. D., and J. P. Gordon, *Confocal Multimode Resonator  
for Millimeter through optical Wavelength Masers, Bell system Tech.  
J., Vol. 40, PP. 489-508, March, 1961.*
11. Culshaw, W., *Further Considerations on Fabry-Perot Type  
Resonators, IRE Trans., Vol. MTT-10, PP. 331-339, September,  
1962.*

## 第 8 章 周期性结构和滤波器

用完全相同的障碍物（例如像膜片那样的电抗元件）以周期性的间隔加载的波导和传输线，称为周期性结构，人们关心这类波导结构是由于所有周期性结构都具有两个共同特性，即（1）通带—阻带特性；（2）维持其相速远小于光速的波。通带—阻带特性就是：当波沿此结构传播时，存在着没有衰减的频带（除附带的导体损耗而外），这些频带又被截止而不能传播的频带所分隔。前者称为通带，后者称为阻带。这种通带—阻带特性对于频率滤波是有一定意义的。

许多周期性结构具有保持相速远小于光速的能力，这对行波管电路是很重要的。在行波管中，只有在相速等于电子束速度时，才能使电子束和电磁场之间有效地相互作用。因为电子束的速度往往不大于10%到20%的光速，所以，需要使电磁波显著地慢下来。适合于行波管使用的周期性结构在本章讨论，行波管的工作原理在第9章中介绍。

本章的最后部分将介绍滤波器的理论。在本书中全面论述滤波器的理论和设计，显得过于冗长。但是，书中将包含足够的材料，以提供必要的基础，使大家在阅读技术文献时不致发生困难。

### 8.1 电容性加载的传输线电路分析

为了介绍周期性结构的若干基本概念、分析方法和典型特性，我们将研究一个电容性加载传输线的简单例子。对一段平滑的传输线（比如同轴线）来说，其相速为

$$v_p = (LC)^{-\frac{1}{2}} = (\mu_0 \kappa \epsilon_0)^{-\frac{1}{2}} \quad (8.1)$$

式中， $\kappa$ 是导体周围介质的相对电容率。在平滑传输线中，只有用

增加 $\kappa$ 的办法，才能显著地减少相速。这个方法有一个很大的缺点，即为了避免高次模的传播，也必须减少横截面的尺寸，因为若改变线的结构使每单位长度的 $C$ 增加，则由于 $LC = \mu_0 \epsilon$ ，每单位长度的串联电感 $L$ 必然自动地减少，因而相速不能随着每单位长度的并联电容 $C$ 增加而减少。但是，如果取消传输线是平滑的这一限制，则可使传输线每单位长度有效的并联电容增加时，其串联电感不作相应的减少。也就是说，可以按周期性间隔加集总并联电容，而不影响 $L$ 的值。如果所加的集总电容之间的间隔比波长小得多，则可以预料此传输线在电的方面是平滑的，其相速为

$$v_p = \left[ \left( C + \frac{C_0}{d} \right) L \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (8.2)$$

式中， $C_0/d$ 是每单位长度所加的集总电容量（每一间隔 $d$ 加一个电容器 $C_0$ ），以下的分析将证明这个结论。

使同轴传输线得到电容性加载方法之一，是如图8.1那样按有规则的间隔加薄圆膜片。此膜片可以加工成为整个中心导体的一部

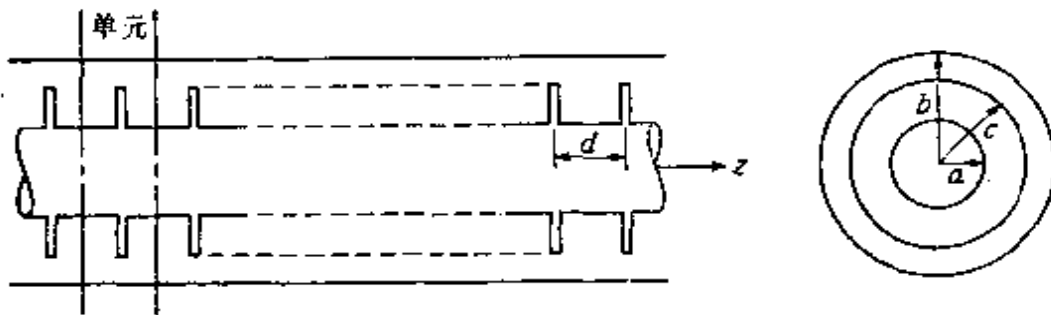


图 8.1 利用薄圆膜片电容性加载的同轴线

分。膜片附近的边缘电场增加了局部的电能储藏，因而，从电路的观点看，可以认为是一个并联电容。此局部场可以用入射的、反射的和传输的主模 $TEM$ 波与无限多个高次模的迭加来表示。若圆柱间距 $b-a$ 远小于波长，则在沿此膜片任一方向约为 $b-a$ 的距离内，高次模凋落，并衰减到可以忽略的数值。此膜片并联电纳的近似表示

式为\*

$$\overline{B} = \frac{B}{Y_c} = \frac{8(b-c)^2}{\lambda_0 c} \frac{\ln(b/a)}{(\ln(b/c))^2} \ln \operatorname{csc} \left( \frac{\pi}{2} \frac{b-c}{b-a} \right) \quad (8.3)$$

式中,  $Y_c = [60 \ln(b/a)]^{-1}$  是空气填充同轴线的特性导纳. 这个  $\overline{B}$  的表示式在  $b-a \leq 0.1\lambda_0$  时是精确的. 在低的频率范围内,  $\overline{B}$  具有与  $\omega$  成正比的频率关系. 在较高的频率下, 虽然此薄膜片仍然可用并联电纳表示, 但它将具有更复杂的频率关系.

对周期性结构作电路(或网络)分析, 首先要求此结构的一个基本段(或基本单元)的等效网络. 随之求出沿着无限多个基本单元级联组成的网络传播的电压波和电流波. 对于图 8.1 的结构来说, 其基本单元的等效网络是每一边带有长为  $d/2$  的传输线的归一化并联电纳  $\overline{B}$ , 如图 8.2a 所示. 图 8.2b 表示在此无限长的级联连接中的第  $n$  段输入端和输出端的电压—电流关系.

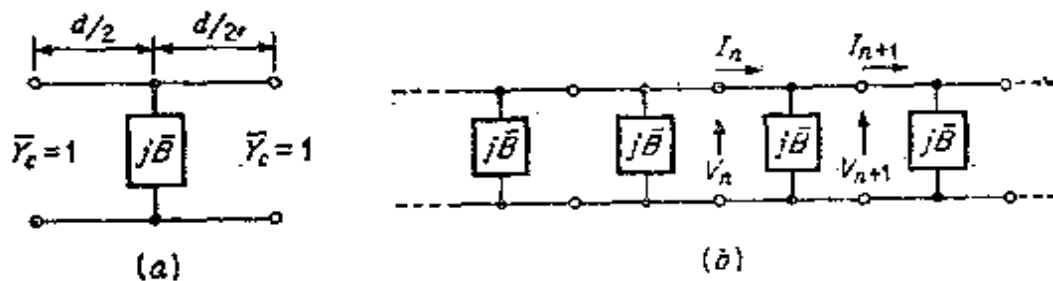


图 8.2 (a) 加载同轴线基本单元的等效电路; (b) 基本单元网络的级联

利用 4.9 节中所讨论过的  $\mathcal{ABCD}$  传输矩阵, 不难求得输入变量  $V_n, I_n$  和输出变量  $V_{n+1}, I_{n+1}$  之间的关系.  $V_n$  和  $I_n$  为总电压和总电流的振幅, 即在端面上入射的和反射的  $TEM$  波之和. 此基本单元电路可以分为三个电路的级联, 即长为  $d/2$  (电长度为  $\theta/2 = k_0 d/2$ ) 的一段传输线, 接着是一个并联电纳  $\overline{B}$ , 随后又是一段长为  $d/2$  的传输线. 其中每个网络的  $\mathcal{ABCD}$  矩阵分别为 (习题 4.18)

\* N. Marcuvitz (ed), "Waveguide Handbook," p. 229, McGraw-Hill Book Company, New York, 1951.



$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & j \sin \frac{\theta}{2} \\ j \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\bar{B} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & j \sin \frac{\theta}{2} \\ j \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

此单元的传输矩阵可以根据电路链的法则得到〔参看(4.75)式〕。即由上述三个矩阵相乘得到。因而得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & j \sin \frac{\theta}{2} \\ j \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\bar{B} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & j \sin \frac{\theta}{2} \\ j \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta - \frac{\bar{B}}{2} \sin \theta & j \left( \frac{\bar{B}}{2} \cos \theta + \sin \theta - \frac{\bar{B}}{2} \right) \\ j \left( \frac{\bar{B}}{2} \cos \theta + \sin \theta + \frac{\bar{B}}{2} \right) & \cos \theta - \frac{\bar{B}}{2} \sin \theta \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.4)$$

要注意：对于对称网络（即对称单元）来说， $a = \mathcal{D}$ 总是正确的。

如果此周期性结构能维持波的传播，则除了由于一定的传播时间引起的相位延迟外，必须使第 $(n+1)$ 端面上的电压和电流等于第 $n$ 端面上的电压和电流。于是假定

$$V_{n+1} = e^{-\gamma d} V_n \quad (8.5a)$$

$$I_{n+1} = e^{-\gamma d} I_n \quad (8.5b)$$

式中， $\gamma = j\beta + \alpha$  是此周期性结构的传播常数。现在用单元的传输矩阵来表示，则得

$$\begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} = e^{\gamma d} \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix}$$

或

$$\left( \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e^{\gamma d} & 0 \\ 0 & e^{\gamma d} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} = 0 \quad (8.6)$$

这个方程就是 $\gamma$ 的矩阵本征值方程。只有当其系数的行列式为零时，才存在 $V_{n+1}$ 、 $I_{n+1}$ 的非无效解。所以

$$\begin{vmatrix} \mathcal{A} - e^{\gamma d} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} - e^{\gamma d} \end{vmatrix} = \mathcal{A}\mathcal{D} - \mathcal{B}\mathcal{C} + e^{\gamma d} \\ - e^{\gamma d}(\mathcal{A} + \mathcal{D}) = 0 \quad (8.7)$$

对互易网络来说 传输矩阵的行列式 $\mathcal{A}\mathcal{D} - \mathcal{B}\mathcal{C}$ 等于1 (参看4.9节)，故得

$$\cosh \gamma d = \frac{\mathcal{A} + \mathcal{D}}{2} \quad (8.8)$$

对电容性加载的同轴线，由(8.8)式和(8.4)式可得

$$\cosh \gamma d = \cos \theta - \frac{\bar{B}}{2} \sin \theta \quad (8.9)$$

当 $|\cos \theta - (\bar{B}/2) \sin \theta| < 1$ 时，必得 $\gamma = j\beta$ 和 $\alpha = 0$ ，即

$$\cos \beta d = \cos \theta - \frac{\bar{B}}{2} \sin \theta \quad (8.10a)$$

当(8.9)式的右边大于1时， $\gamma = \alpha$ 、 $\beta = 0$ ，所以

$$\cosh \alpha d = \cos \theta - \frac{\bar{B}}{2} \sin \theta > 1 \quad (8.10b)$$

最后，当(8.9)式的右边小于-1时，必得 $\gamma d = j\pi + \alpha$ ，所以

$$\begin{aligned} \cosh \gamma d &= \cosh(j\pi + \alpha d) = -\cosh \alpha d \\ &= \cos \theta - \frac{\bar{B}}{2} \sin \theta < -1 \end{aligned} \quad (8.10c)$$

可见，存在着被衰减频段所分隔的无衰减传播频段。应当指出，由于 $-\gamma$ 也是一个解，波可能向两个方向传播。

在8.6节中将对通带—阻带特性作详细的研究。目前，把注意力集中到 $\beta$ 的低频极限值上，当 $d \ll \lambda_0$ 时， $\theta = k_0 d$ 很小，所以 $\beta d$ 也将很小。在(8.10a)式中，用 $1 - \theta^2/2$ 代替 $\cos \theta$ ，并用 $\theta$ 代替 $\sin \theta$ ，则得

$$\begin{aligned}\cos \beta d &\approx 1 - \frac{\beta^2 d^2}{2} \\ &= 1 - \frac{k_0^2 d^2}{2} - \frac{\bar{B} k_0 d}{2}\end{aligned}$$

利用关系式  $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 = \omega^2 LC$  和  $\bar{B} = R/Y_c = \omega C_0 (L/C)^{\frac{1}{2}}$  (其中  $\omega C_0 = B$ )，可得

$$\beta^2 = \omega^2 LC + \frac{\omega^2 LC_0}{d}$$

从而得

$$\beta = \omega \sqrt{L \left( C + \frac{C_0}{d} \right)} \quad (8.11)$$

由此可见，在 $d \ll \lambda_0$ 的低频率下，此加载线与每单位长度带有一个并联电容 $C + C_0/d$ 的电平滑线具有同样的性能。随着 $\beta$ 的增加，使相速按因子 $k_0/\beta$ 减少。

周期性结构的另一重要参数，是在参考端面（即在单元的输入端）上表示电压波和电流波的归一化特性阻抗 $\bar{Z}_B$ 。由(8.6)式可以得到 $\bar{Z}_B$ 的表示式，它可以写作

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} - e^{\gamma d})V_{n+1} &= -\mathcal{B}I_{n+1} \\ -\mathcal{C}V_{n+1} &= (\mathcal{D} - e^{\gamma d})I_{n+1}\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}\frac{Z_B}{Z_c} = \bar{Z}_B &= \frac{V_{n+1}}{I_{n+1}} = \frac{-\mathcal{B}}{\mathcal{A} - e^{\gamma d}} \\ &= -\frac{\mathcal{D} - e^{\gamma d}}{\mathcal{C}}\end{aligned} \quad (8.12)$$

由(8.7)式，用  $\mathcal{A} + \mathcal{D} \pm ((\mathcal{A} + \mathcal{D})^2 - 4)^{\frac{1}{2}}$  代替  $2e^{\gamma d}$ ，则得

$$\bar{Z}_{B^{\pm}} = \frac{2\mathcal{B}}{\mathcal{D} - \mathcal{A} \pm \sqrt{(\mathcal{A} + \mathcal{D})^2 - 4}} \quad (8.13a)$$

式中的正负号分别指沿  $+Z$  和  $-Z$  方向传播。按照惯例,  $V_+$  和  $I_+$  的正方向为图8.2中所表示的那样, 而与传播的方向无关。对于对称网络,  $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ , 且由于  $\mathcal{A}\mathcal{D} - \mathcal{B}\mathcal{C} = 1$ , 故得  $\mathcal{A}^2 - 1 = \mathcal{B}\mathcal{C}$ 。在此情况下, (8.13a)式化为

$$\bar{Z}_{B^{\pm}} = \frac{2\mathcal{B}}{\pm \sqrt{4\mathcal{A}^2 - 4}} = \pm \sqrt{\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{C}}} \quad (8.13b)$$

(8.8)式表明, 由于  $|\mathcal{A} + \mathcal{D}| < 2$ , 故通常对无耗结构在通常内  $\bar{Z}_{B^-} = -(\bar{Z}_{B^+})^*$ 。

若用一个参数为  $\bar{Z}_{11}$ 、 $\bar{Z}_{12}$  和  $\bar{Z}_{22}$  的  $T$  形网络来表示此基本单元, 则利用4.9节给出的参数  $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}$  和阻抗参数之间的关系, 还能证明

$$\cosh \gamma d = \frac{\bar{Z}_{11} + \bar{Z}_{22}}{2\bar{Z}_{12}} \quad (8.14)$$

$$\bar{Z}_B = \frac{\bar{Z}_{11} - \bar{Z}_{22}}{2} \pm \bar{Z}_{12} \sinh \gamma d \quad (8.15)$$

仿照通过固体中的周期性晶体点阵传播的量子力学电子波来推论, 沿周期性结构传播的波常常称为布洛赫波。因此, 把布洛赫波的特性阻抗表示为  $\bar{Z}_B$ 。从现在开始, 第  $n$  个端面上的布洛赫波的电压和电流将用  $V_{B_n^{\pm}}$ 、 $I_{B_n^{\pm}}$  表示, 而不用量  $V_+$ 、 $I_+$  表示。“+”和“-”号分别指沿  $+Z$  和  $-Z$  方向传播的布洛赫波。我们还将采用这样的惯例——即布洛赫波电流流动的正方向总是向  $+Z$  方向。于是,  $I_{B^+} = \bar{Y}_{B^+} V_{B^+}$ ,  $I_{B^-} = \bar{Y}_{B^-} V_{B^-}$ , 但是, 对于如  $\mathcal{A} = \mathcal{D}$  那样的对称结构, 则有  $\bar{Y}_{B^-} = -\bar{Y}_{B^+} = -(\bar{Z}_{B^+})^{-1}$ 。

若利用(8.13)式, 则对于加载的同轴线, 可得

$$\bar{Z}_B = \sqrt{\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{C}}} = \sqrt{\frac{2 \sin \theta + \bar{B} \cos \theta - \bar{B}}{2 \sin \theta + \bar{B} \cos \theta + \bar{B}}} \quad (8.16)$$

处于低频极限时, 可以用

$$\theta = k_0 d = \omega d \sqrt{LC}$$

代替  $\sin\theta$ ，且可用 1 代替  $\cos\theta$ ，于是得

$$\begin{aligned}\bar{Z}_B &= \sqrt{\frac{2\theta}{2\theta + 2\bar{B}}} \\ &= \sqrt{\frac{C}{C + C_0/d}}\end{aligned}$$

所以

$$Z_B = \bar{Z}_B Z_C = \sqrt{\frac{L}{C + C_0/d}} \quad (8.17)$$

我们又一次看到了，处于低频极限时，此加载同轴线在电方面上是平滑的结果，并且，按每单位长度并联电容的有效增加，以预期的方式修正了特性阻抗的表示式。

周期性结构的特性阻抗，因为它取决于对基本单元端面的选取，故它不是单值的量。若端面沿  $-Z$  方向移动距离  $l$ ，则新的特性阻抗便成为

$$\bar{Z}'_B = \frac{Z_B + j \tan k_0 l}{1 + j Z_B \tan k_0 l} \quad (8.18)$$

## 8.2 周期性结构波的分析

用每个单元中存在的正向和反向传播波来分析周期性结构，与用网络方法来分析是同样方便的。所谓波的方法，就是利用 4.9 节中所讨论过的波振幅传输矩阵 ( $A$ )。

参阅图 8.3，设第  $n$  个和第  $(n+1)$  个端面上的正向传播波和反向传播波的振幅为  $C_n^+$ 、 $C_n^-$ 、 $C_{n+1}^+$  和  $C_{n+1}^-$ ，则  $C_{n+1}^+$ 、 $C_{n+1}^-$  与  $C_n^+$ 、 $C_n^-$  的关系可用波振幅传输矩阵表示如下：

$$\begin{bmatrix} C_n^+ \\ C_n^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{n+1}^+ \\ C_{n+1}^- \end{bmatrix} \quad (8.19)$$

布洛赫波的解要求  $C_{n+1}^+ = e^{-\gamma d} C_n^+$  和  $C_{n+1}^- = e^{-\gamma d} C_n^-$ 。所以，(8.19) 式

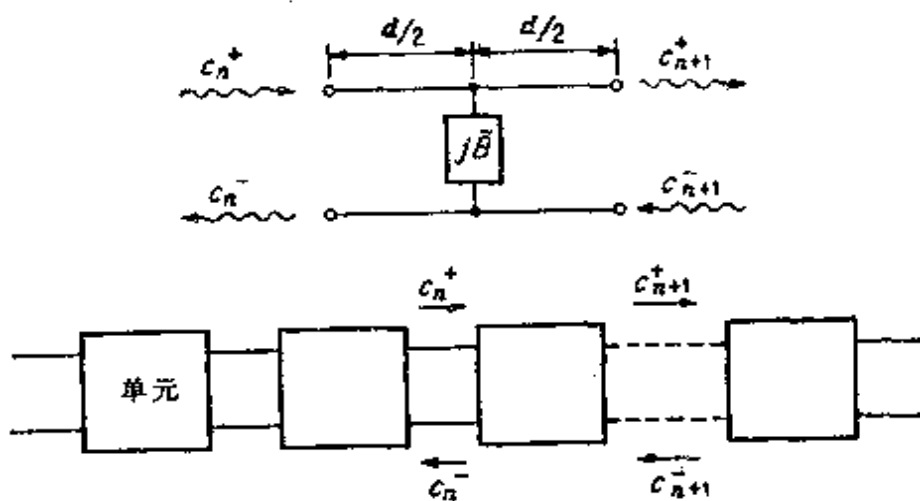


图 8.3 周期性结构中波的传播

便成为

$$\begin{bmatrix} A_{11} - e^{\gamma d} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - e^{\gamma d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{n+1}^+ \\ C_{n+1}^- \end{bmatrix} = 0 \quad (8.20)$$

只有在此方程的系数行列式为零时，才能得到  $C_{n+1}^+$ 、 $C_{n+1}^-$  的非无效解。因为当利用归一化波振幅时传输矩阵的行列式等于 1，即  $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$ ，所以， $\gamma$  的本征方程为

$$\begin{aligned} A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} + e^{\gamma d} \\ - e^{\gamma d}(A_{11} + A_{22}) = 0 \end{aligned}$$

或

$$\cosh \gamma d = \frac{A_{11} + A_{22}}{2} \quad (8.21)$$

在周期性结构中能够传播的布洛赫波，是由正常的传输线或波导中存在于不连续处之间的正向传播波和反向传播波所组成的。当  $\gamma$  已由(8.21)式确定时， $C_n^-$  与  $C_n^+$  之比也就固定了。这个比值称为特性反射系数  $\Gamma_B$ 。于是，在第零个端面上布洛赫波的横向电场振幅为

$$V_{B0} = C_0^+ + C_0^- = C_0^+(1 + \Gamma_B)$$

而在第  $n$  个端面上横向电场振幅为

$$\begin{aligned} V_{B_n} &= C_n^+ + C_n^- = C_n^+(1 + \Gamma_B) \\ &= C_0^+(1 + \Gamma_B)e^{-\gamma_n d} \end{aligned} \quad (8.22a)$$

在第  $n$  个端面上布洛赫波的横向磁场振幅为

$$I_{B_n} = C_n^+(1 - \Gamma_B)e^{-\gamma_n d} \quad (8.22b)$$

利用(8.21)式，在(8.20)式的一对方程中消去  $e^{-\gamma d}$ ，可以求出特性反射系数  $\Gamma_B$ 。通常，利用关系式  $\bar{Z}_B = (1 + \Gamma_B)/(1 - \Gamma_B)$ ，以  $\bar{Z}_B$  来表示  $\Gamma_B$  更为方便，于是得

$$\Gamma_{B^\pm} = \frac{\bar{Z}_{B^\pm} - 1}{\bar{Z}_{B^\pm} + 1} \quad (8.23)$$

式中，“+”和“-”号分别指沿  $+Z$  和  $-Z$  方向传播的布洛赫波。

现在把上述波的代表式用于前面讨论过的电容性加载传输线中。当单元如图8.3那样的选取时，此单元中的三段波振幅传输矩阵为

$$\begin{bmatrix} e^{jk_0 d/2} & 0 \\ 0 & e^{-jk_0 d/2} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \frac{2+j\bar{B}}{2} & j\frac{\bar{B}}{2} \\ -j\frac{\bar{B}}{2} & \frac{4+\bar{B}^2}{2(2+j\bar{B})} \end{bmatrix}$$

另一个矩阵与第一个相同。把这三个矩阵相乘，可以得到此单元的  $(A)$  矩阵，即

$$(A) = \begin{bmatrix} e^{j\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-j\theta/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2+j\bar{B}}{2} & j\frac{\bar{B}}{2} \\ -j\frac{\bar{B}}{2} & \frac{4+\bar{B}^2}{2(2+j\bar{B})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{j\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-j\theta/2} \end{bmatrix}$$

式中， $\theta = k_0 d$ 。相乘后得

$$(A) = \begin{bmatrix} \frac{2+j\bar{B}}{2} e^{j\theta} & j\frac{\bar{B}}{2} \\ -j\frac{\bar{B}}{2} & \frac{4+\bar{B}^2}{2(2+j\bar{B})} e^{-j\theta} \end{bmatrix} \quad (8.24)$$

利用(8.21)式可得

$$\begin{aligned} \cosh \gamma d &= \frac{(4+\bar{B}^2) e^{-j\theta} + (2+j\bar{B})^2 e^{j\theta}}{4(2+j\bar{B})} \\ &= \cos \theta - \frac{\bar{B}}{2} \sin \theta \end{aligned}$$

它与前面得到的(8.9)式相同。

### 8.3 由不对称二端口网络 组成的周期性结构

电容性加载的同轴传输线可以看作是由端面取在每个膜片中间的对称段所组成的。端面取在其他位置时，此单元就不对称了，因而它的等效T形网络也就是不对称的。由本身就不对称的单元所组成的其他类型周期性结构，没有一个端面位置能把它们变为对称的周期性结构。图8.4中是几个不对称周期性结构的例子。

不对称结构的布洛赫波的特性阻抗由(8.15)式给出，我们把它写成

$$\bar{Z}_{B^+} = \xi + \bar{Z} \quad (8.25a)$$

$$\bar{Z}_{B^-} = \xi - \bar{Z} \quad (8.25b)$$

式中

$$\xi = \frac{\bar{Z}_{11} - \bar{Z}_{22}}{2} \quad (8.26a)$$

$$\bar{Z} = \pm \bar{Z}_{12} \sinh \gamma d = \pm j \bar{Z}_{12} \sin \beta d \quad (8.26b)$$

其符号的选取是使 $\bar{Z}$ 具有一个正的实数部分。在传播频带内，其相



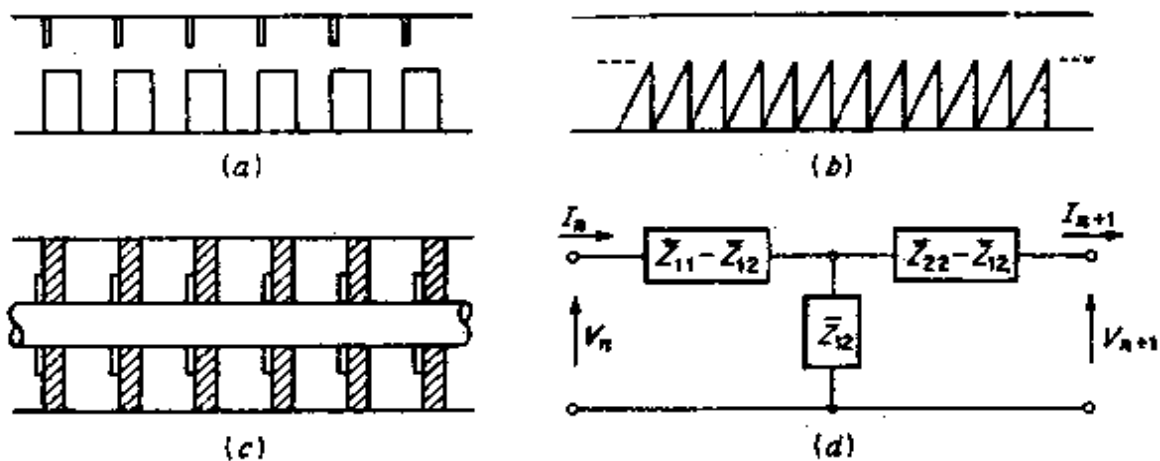


图 8.4 由不对称单元组成的周期性结构。(a)、(b)用不对称薄膜加载的矩形波导；(c)用膜片和介质圈加载的同轴线；(d)一个单元的等效T形网络。

移常数 $\beta$ 为

$$\cos \beta d = \frac{\bar{Z}_{11} + \bar{Z}_{22}}{2\bar{Z}_{12}} \quad (8.26c)$$

单元的实际长度为 $d$ ，量 $\bar{Z}_B^\pm$ 和 $\beta d$ 常常称为T形网络的累接参数。单元不对称的结果，使其 $\bar{Z}_B^+$ 与 $\bar{Z}_B^-$ 不相同。

设在第零个端面上的布洛赫波的电压为 $V_{B0}^\pm$ ，其中，记号“+”或“-”分别地指布洛赫波沿 $+Z$ 和 $-Z$ 方向传播。对应的布洛赫波电流为 $I_{B0}^\pm = V_{B0}^\pm / \bar{Z}_B^\pm$ 。在第 $n$ 个端面上的布洛赫波的电压和电流为

$$V_{Bn}^\pm = V_{B0}^\pm e^{\mp \gamma n d} \quad (8.27a)$$

$$I_{Bn}^\pm = \frac{V_{B0}^\pm}{\bar{Z}_B^\pm} e^{\mp \gamma n d} \quad (8.27b)$$

应该记住，取电流流动的正方向作为 $+Z$ 方向，而与布洛赫波的传播方向无关。

如果只是限于确定端面上的电压和电流，则此周期性结构具有类似于任何均匀传输线或波导的特性。因此，可以应用传输线理论，来研究周期性结构端接一个任意负载阻抗时的影响，和设计周期性结构的匹配段，等等。下面两节讨论这些应用。

## 8.4 端接负载的周期性结构

图8.5表示在第 $N$ 个端面上接一负载阻抗 $\bar{Z}_L$ 的周期性结构。在第 $n$ 个端面上的总电压和总电流应为入射的和反射的布洛赫波的迭加，于是

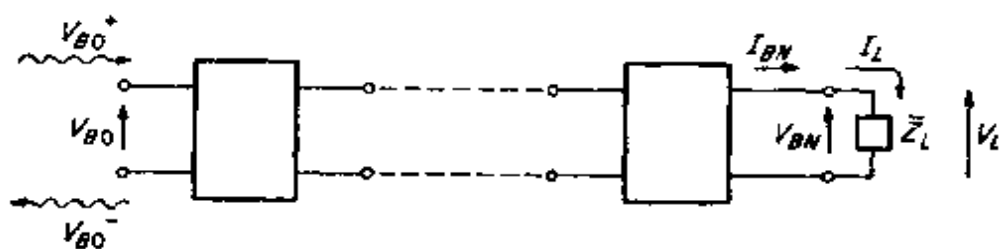


图 8.5 端接负载 $Z_L$ 的周期性结构

$$V_{B_n} = V_{B_0^+} e^{-j\beta_n d} + V_{B_0^-} e^{+j\beta_n d} \quad (8.28a)$$

$$\begin{aligned} I_{B_n} &= I_{B_0^+} e^{-j\beta_n d} + I_{B_0^-} e^{+j\beta_n d} \\ &= V_{B_0^+} \bar{Y}_B e^{-j\beta_n d} + V_{B_0^-} \bar{Y}_B e^{+j\beta_n d} \end{aligned} \quad (8.28b)$$

式中， $\bar{Y}_B = \bar{Z}_B^{-1}$ 。在第 $N$ 个端面上必得

$$V_L = V_{B_N} = \bar{Z}_L I_{B_N} = \bar{Z}_L I_L$$

所以

$$V_{B_N^+} + V_{B_N^-} = \bar{Z}_L (\bar{Y}_B V_{B_N^+} + \bar{Y}_B V_{B_N^-}) \quad (8.29)$$

由(8.29)式可得，负载对布洛赫波的反射系数 $\Gamma_L$ 为

$$\begin{aligned} \Gamma_L &= \frac{V_{B_N^-}}{V_{B_N^+}} = -\frac{\bar{Z}_L \bar{Y}_B - 1}{\bar{Z}_L \bar{Y}_B + 1} \\ &= -\frac{\bar{Z}_B^- \bar{Z}_L - \bar{Z}_B^+}{\bar{Z}_B^+ \bar{Z}_L + \bar{Z}_B^-} \\ &= \frac{\bar{Z} - \zeta}{\bar{Z} + \zeta} \frac{\bar{Z}_L - \bar{Z} - \zeta}{\bar{Z}_L + \bar{Z} - \zeta} \end{aligned} \quad (8.30)$$

对于对称结构来说， $\zeta = 0$ ， $\Gamma_L$ 的表示式就简化为通常的形式。

在第 $n$ 个端面上布洛赫波的反射系数为

$$\begin{aligned}\Gamma_n &= \frac{V_{B_n^-}}{V_{B_n^+}} = \frac{V_{B_N^-} e^{-i(N-n)\beta d}}{V_{B_N^+} e^{i(N-n)\beta d}} \\ &= \Gamma_L e^{-i2(N-n)\beta d}\end{aligned}\quad (8.31)$$

在第  $n$  个端面上的输入阻抗为

$$\begin{aligned}\bar{Z}_n &= \frac{V_{B_n^+} + V_{B_n^-}}{I_{B_n^+} + I_{B_n^-}} = \frac{V_{B_n^+}(1 + \Gamma_n)}{V_{B_n^+} \bar{Y}_{B^+} + V_{B_n^-} \bar{Y}_{B^-}} \\ &= \frac{1 + \Gamma_n}{\bar{Y}_{B^+} + \Gamma_n \bar{Y}_{B^-}} = \frac{\bar{Z}_{B^+} \bar{Z}_{B^-} (1 + \Gamma_n)}{\bar{Z}_{B^-} + \bar{Z}_{B^+} \Gamma_n}\end{aligned}\quad (8.32)$$

由(8.32)式, 还可以得到另外两个表示式:

$$\bar{Z}_n - \zeta = \bar{Z} \frac{\bar{Z}_{B^-} - \bar{Z}_{B^+} \Gamma_n}{\bar{Z}_{B^-} + \bar{Z}_{B^+} \Gamma_n}\quad (8.33a)$$

$$\Gamma_n = -\frac{\bar{Z}_{B^-}}{\bar{Z}_{B^+}} \frac{(\bar{Z}_n - \zeta) - \bar{Z}}{(\bar{Z}_n - \zeta) + \bar{Z}}\quad (8.33b)$$

若用以  $\Gamma_L$  表示  $\Gamma_n$  的(8.31)式, 以及用以  $\bar{Z}_L$  表示  $\Gamma_L$  的(8.30)式, 则得(8.33a)式为

$$\bar{Z}_n - \zeta = \bar{Z} \frac{\bar{Z}_L - \zeta + j\bar{Z} \tan(N-n)\beta d}{\bar{Z} + j(\bar{Z}_L - \zeta) \tan(N-n)\beta d}\quad (8.34)$$

这个方程给出了沿周期性结构的阻抗变换。当单元为不对称而使  $\zeta \neq 0$  时, 它与一般传输线的公式稍有不同。

对沿  $+Z$  方向传播的布洛赫波, 要避免反射波, 必须在周期性结构的终端接负载  $\bar{Z}_L = \bar{Z}_{B^+} = \zeta + \bar{Z}$ 。同理, 对沿  $-Z$  方向传播的布洛赫波来说, 其终端匹配负载为  $-\bar{Z}_{B^-} = \bar{Z} - \zeta$ 。这两个布洛赫波的特性阻抗是该单元的  $T$  形网络的累接阻抗。当如图 8.6 中那样选取电压和电流时, 不难证明接到 2 端的阻抗  $\bar{Z}_{B^-}$  在 1 端转换为其本身。同理, 接在 1 端的阻抗  $\bar{Z}_{B^+}$  在 2 端转换为其本身。因此, 把  $\bar{Z}_{B^\pm}$  称为累接(重复)阻抗。当  $T$  形网络为无耗时, 在传播频带内  $\zeta$  是纯虚数, 而  $\bar{Z}$  是纯实数。注意到在通带中  $\bar{Z}$  是实数且是正的, 以便与我们所取的电流正方向一致, 就可避免(8.1

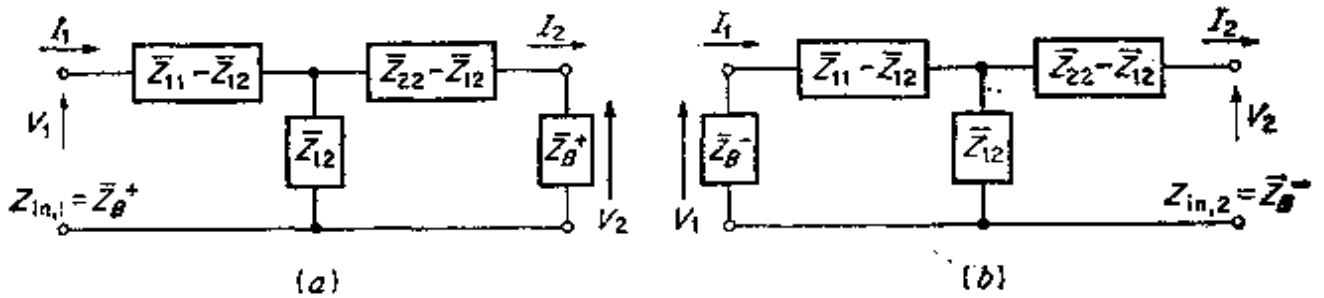


图 8.6 T形网络的联接阻抗特性

5)式或(8.26b)式中 $\bar{Z}$ 符号的混淆。因为传输功率必须为正的实数，所以

$$\begin{aligned}
 P &= \operatorname{Re} \frac{1}{2} V_B (I_B^+)^* = \operatorname{Re} \frac{1}{2} |I_B^+|^2 \bar{Z}_B^+ \\
 &= \frac{1}{2} |I_B^+|^2 \bar{Z} > 0
 \end{aligned} \tag{8.35}$$

可以使用的另一个准则是要求 $\bar{Z}_B^+$ 的电抗部分对 $\omega$ 的导数为正(参看4.3节)。在通带中布洛赫波也存在无功功率，它为

$$P_{\text{无功}} = \frac{1}{2} |I_B^+|^2 \zeta \tag{8.36}$$

沿 $-z$ 方向传播的布洛赫波的复功率，依我们所取的电流正方向应为 $-\frac{1}{2} V_B (I_B^-)^*$ 。

## 8.5 周期性结构的匹配

设一段周期性结构与一段平滑的传输线或波导相连接，为了避免入射功率的反射，必须使用某些匹配装置，使周期性结构与输入波导匹配。经常遇到的一种情况是，除了周期性的加载以外，周期性结构与输入波导的匹配装置是一样的。由不加载波导到加载波导过渡的一种匹配方法，是用渐变的中间段。匹配渐变线段除了其周期性的加载大约在一个波长的距离上逐渐地减少到零外，其他与加载波导类似。图8.7 a表示一个矩形波导与用膜片周期性加载的一

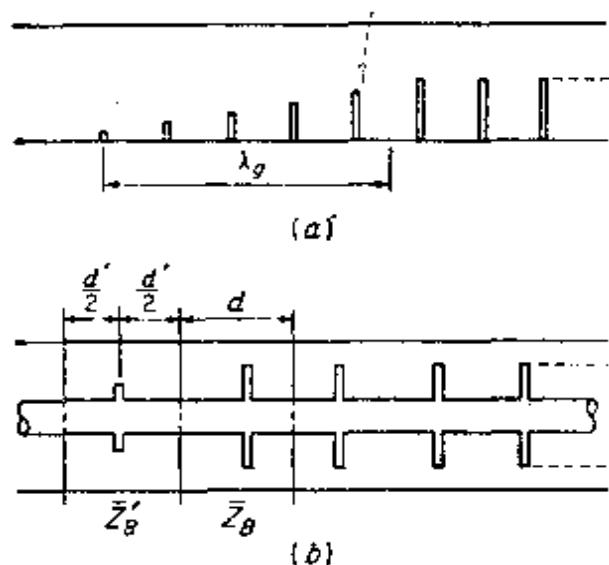


图 8.7 (a) 膜片加载的矩形波导的渐变匹配段; (b) 匹配电容性加载同轴线的  $\lambda/4$  变换器。

个类似波导相连接时的渐变过渡。

第 5 章中所讨论过的任一匹配网络, 也可以用来匹配周期性加载波导和不加载波导。例如, 在周期性结构第一个端面前的某一距离  $d'/2$  处, 把周期性结构的特性导纳  $\overline{Y}_B$  变换为导纳  $1 - j\overline{B}'$ , 这样, 在这一点上放一并联电纳  $j\overline{B}'$ , 就可作为一个匹配过渡段。用并联电纳来进行匹配可以看作是  $\lambda/4$  变换器匹配技术的一种应用。由并联电纳  $j\overline{B}'$  和 在它 两侧长为  $d'/2$  的传输线 (或波导) 组成的单元 (如图 8.7b 中所示), 可以认为是传输相移常数为  $\beta'$  和归一化特性阻抗为  $\overline{Z}_B'$  的无限长周期性结构的一部分。若取参数  $\overline{B}'$  和  $d'$  使  $\beta' d' = \pi/2$ ,  $\overline{Z}_B' = \overline{Z}_B^{-1}$ , 则在匹配段的输入端, 由 (8.34) 式得

$$\overline{Z}_{in} = \frac{(\overline{Z}_B')^2}{\overline{Z}_B} = 1 \quad (8.37)$$

注意: 由于匹配段是对称的, 故  $\overline{Z}_B' = \overline{Z}'$ ,  $\zeta' = 0$ 。为了使 (8.37) 式的  $\overline{Z}_B'$  具有一个实数解, 要求  $\overline{Z}_B$  为实数。当这些条件被满足时, 可以看出匹配段基本上具有  $\lambda/4$  变换器那样的作用。对于对称结构来说,  $\overline{B}'$  和  $d'$  所需要的值, 可以由 (8.8) 式和 (8.13b) 式求得。

所以，当  $\cos \beta' d' = \cos(\pi/2) = 0$  时，得到

$$\mathcal{A}' = \mathcal{D}' = 0 \quad (8.38a)$$

$$(\overline{Z}'_s)^2 = \frac{\mathcal{B}'}{\mathcal{C}'} = \overline{Z}_B \quad (8.38b)$$

对于电容性加载的传输线，把 (8.4) 式和 (8.16) 式用于匹配段，就得

$$2\cot k_0 d' = \overline{B}' \quad (8.39a)$$

$$(\overline{Z}'_B)^2 = \frac{2\sin k_0 d' + \overline{B}' \cos k_0 d' - \overline{B}'}{2\sin k_0 d' + \overline{B}' \cos k_0 d' + \overline{B}'} = \tan^2 \frac{k_0 d'}{2} = \overline{Z}_B \quad (8.39b)$$

(8.39b) 式中利用了 (8.39a) 式而消去了  $\overline{B}'$ 。上述结果与第 5 章中导出的结果，即 (5.8) 式和 (5.9) 式是等价的。

由于单个并联电纳一般不能提供宽频带匹配，所以要在宽频带内得到匹配，必须使用更复杂的匹配网络。周期性结构特性阻抗  $\overline{Z}_B$  是频率的函数这一事实，使宽频带匹配复杂化。根据  $\overline{Z}_B$  的一般特性来设计宽频带匹配网络的一般方法是不存在的。必须对每一个周期性结构进行研究，以便在设计时结合考虑  $\overline{Z}_B$  中的频率变化。因此，匹配问题不进一步讨论了。

## 8.6 $k_0$ — $\beta$ 图

现在我们来详细地研究前几节讨论过的电容性加载同轴传输线的通带—阻带特性。周期性结构中传播常数  $\beta$  的本征值方程所包含的物理意义，通常画在  $k_0$ — $\beta$  (或  $\omega$ — $\beta$ ) 平面上。由  $\beta$ — $k_0$  曲线可立即看出能传播的频带和不能在其中传播的阻带。所得到的图称为  $k_0$ — $\beta$  图或布里渊图\*。

对于电容性加载的同轴线，(8.9) 式已给出

\* 布里渊用这种图说明了周期性结晶媒质中的能带结构，故以它的名字命名

$$\cos\beta d = \cos k_0 d - \frac{\bar{B}}{2} \sin k_0 d = \cos k_0 d - K k_0 d \sin k_0 d \quad (8.40)$$

式中,  $\bar{B}/2 = \omega C_0/2Y_c$  已表示为  $K k_0 d$ 。  $K=1$  (即  $\bar{B}=2k_0 d$ ) 时的  $k_0 d - \beta d$  曲线画在图 8.8 中。在  $0 < k_0 d < 0.416\pi$  之间存在着一个低频通带。这个通带的后面是一个阻带, 接着又是交替的通带和阻带。当  $k_0 d$  变成很大时, 因为  $\bar{B}$  随  $k_0$  而增加, 故加载增加。其结果是减少了以频率来表示的通带宽度。

当 (8.40) 式右边的数值超过 1 时, 得到频带的两端。在  $0 < k_0 d < \pi$  时, 出现第一个通带的低端, 和

$$\cos k_0 d - K k_0 d \sin k_0 d = -1$$

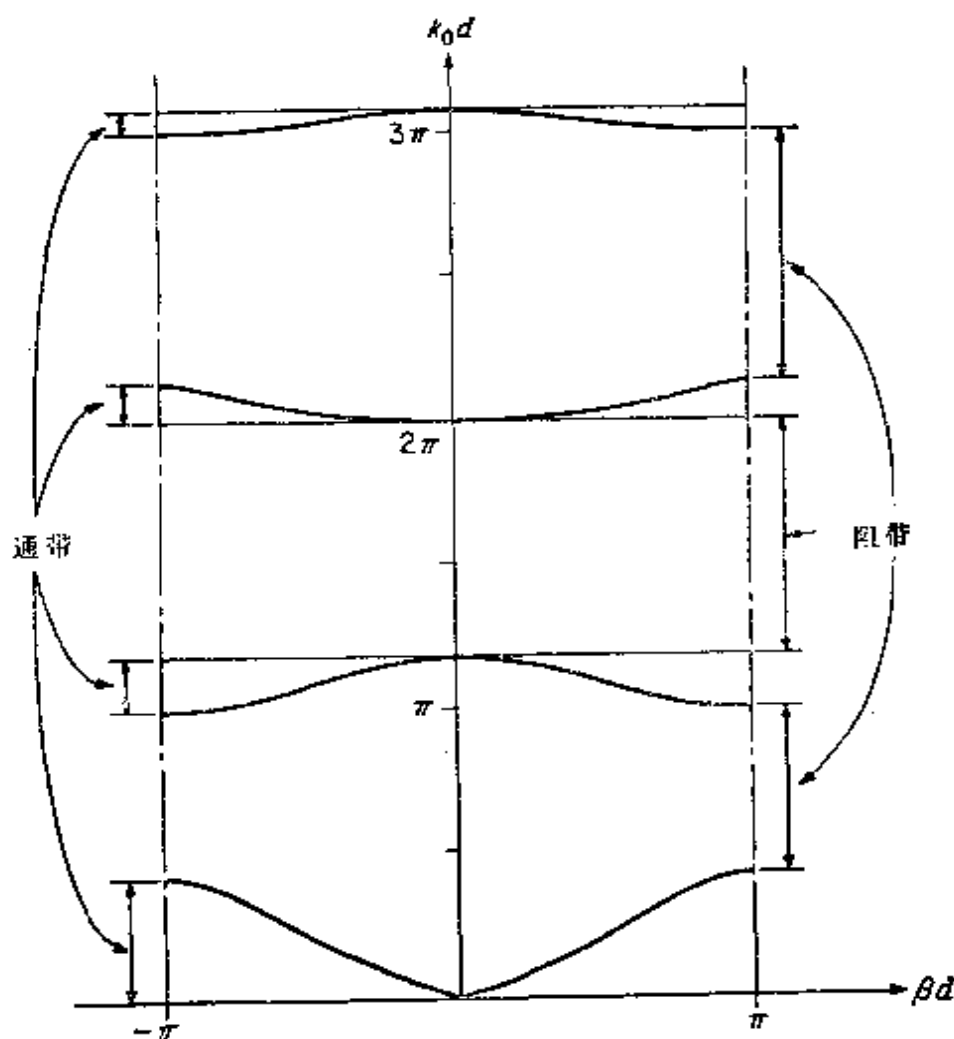


图 8.8 电容性加载同轴线的  $k_0 - \beta$  图 ( $\bar{B} = 2k_0 d$ )

求解此方程的 $k_0 d$ 可得

$$\cot \frac{k_0 d}{2} = K k_0 d \quad (8.41a)$$

$$\cos \frac{k_0 d}{2} = 0 \quad (8.41b)$$

$\beta d$ 相应的主值为 $\pi$ ，同时由(8.41)式得到的 $k_0 d$ 值对这个 $\beta d$ 的值标出了所有频带的边界。频带的两端 $\beta d = 0$ 是使(8.40)式等于1而得到的。在此情况下，可得

$$\tan \frac{k_0 d}{2} = -K k_0 d \quad (8.42a)$$

$$\sin \frac{k_0 d}{2} = 0 \quad (8.42b)$$

通带的一端总是出现在两个不连续间隔等于不加载波导半个波长之时，在现在的情况下，就是当 $k_0 d$ 为 $\pi$ 的倍数时。当两个不连续性之间的间隔等于半个波长时，就可以把它们集总在一起，从而相当于在传输线的一个点上用一个无限大电纳（或电抗）加载。显然，在这个频率上，沿周期性结构的功率传输必须减少到零。

在图8.8中只画出了 $\beta d$ 的主值。此外， $\beta d + 2n\pi$ （其中 $n$ 是任意整数）也都是解。另外的这些解都是布洛赫波展开的空间谐波的传播常数。空间谐波在8.8节中讨论。

其它类型的周期性结构的 $k_0 - \beta$ 图所呈现的特性与图8.8中所呈现的特性类似。例如，若用并联电感性加载代替电容性加载，则通带和阻带的相对位置互相交换。由于并联电感在零频率上将此线短路，所以，在零频率区域应是阻带。



## 8.7 群速和能流

周期性结构中布洛赫波的相速为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{k_0}{\beta} c = \frac{k_0 d}{\beta d} c \quad (8.43)$$

参阅图8.9. 可以看出,  $k_0 d / \beta d$  是  $k_0 d - \beta d$  图上由原点到  $P$  点的直线

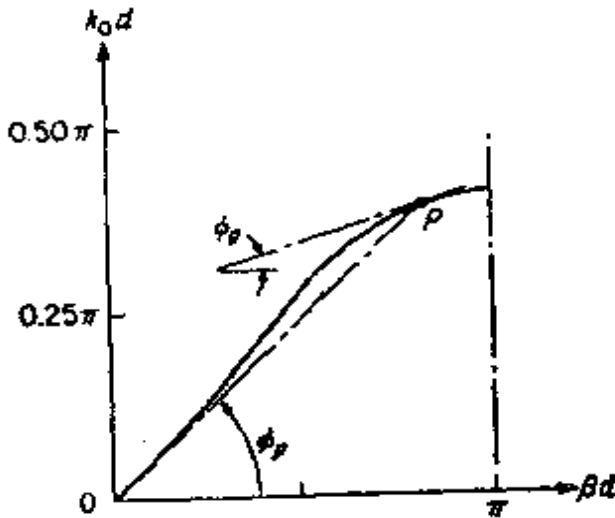


图 8.9 电容性加载传输线的第一个通带的放大图形 ( $\bar{B} = 2k_0 d$ )。

斜率。因为  $\beta$  是频率  $\omega$  的函数, 所以, 周期性结构有频散现象。根据 3.11 节的讨论, 群速为

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = c \frac{d(k_0 d)}{d(\beta d)} \quad (8.44)$$

可见, 它与相速是不同的。再参阅图8.9, 可以看出, 群速等于  $k_0 - \beta$  曲线的切线斜率与光速  $c$  相乘。于是得

$$v_g = c \tan \varphi_g, \quad v_p = c \tan \varphi_p$$

式中,  $\varphi_p$  和  $\varphi_g$  为图8.9中所表示的角度。

对于电容性加载的同轴线来说, 用  $\beta$  的本征值方程(即(8.10)式)便可得

$$v_g = c \frac{dk_0}{d\beta} = c \frac{d\theta}{d(\beta d)} = \frac{\sin \beta d}{\left( \frac{\bar{B}}{2k_0 d} + 1 \right) \sin k_0 d + \frac{\bar{B}}{2} \cos k_0 d} \quad (8.45)$$

(8.45) 式表明, 当  $\beta d = 0$  或  $\pi$  时, 群速变为零 ( $k_0$  也等于零的情况除外)。因而, 当接近通带的边缘时, 群速趋于零。

群速也就是由足够窄的频带组成的信号的速度, 在整个频带中要使  $\beta$  能够近似为  $\omega$  的线性函数。通过一个单元的信号延迟  $\tau$  为

$$\tau = \frac{d}{v_g} \quad (8.46)$$

在3.11节中已经指出，波导作为色散媒质时传播波的能量速度等于群速，这个结论对一个无耗的周期性结构来说，也将被证明是适用的。

我们研究图8.10中无耗的周期性结构的一个单元。所取的面包括输入和输出端面  $S_1$  和  $S_2$ ，加上包围此结构的圆柱面  $S_c$ 。若此周期性结构被一个理想导电的波导包围，则  $S_c$  与波导壁重合。若此周期性结构是一个敞开结构，则表面  $S_c$  为具有

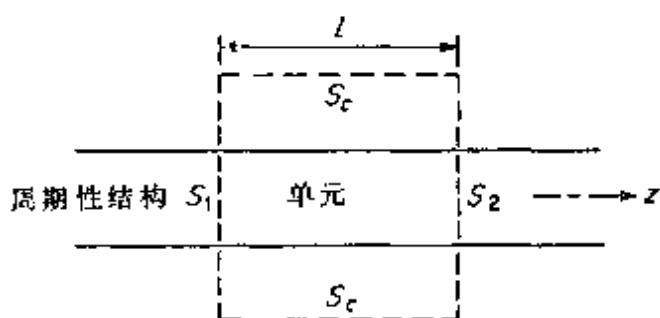


图 8.10 周期性结构的一个单元

无限大半径的圆柱面。在这两种情况下， $S_c$  面上的  $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$  都等于零，所以，通过此面的坡印廷矢量为零。为普遍起见，令该单元包含有频散材料（即材料的参数  $\mu$  和  $\epsilon$  是  $\omega$  的函数）的区域。

在4.3节中导出福斯特电抗定理时已经证明（参看（4.24a）式）

$$\begin{aligned} & \oint_S \left( \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \omega} + \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial \omega} \times \mathbf{H} \right) \cdot d\mathbf{S} \\ &= -j \int_V \left( \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* \frac{\partial \omega \mu}{\partial \omega} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \frac{\partial \omega \epsilon}{\partial \omega} \right) dV \\ &= -4j(W_m + W_e) \end{aligned} \quad (8.47a)$$

因为后一积分等于被  $S$  所包围的体积中储藏能量的时间平均值的四倍。由于在  $S_c$  面上坡印廷矢量为零，且  $d\mathbf{S}$  指向内部，故得

$$\begin{aligned} & \int_{S_1} \left( \mathbf{E}_1 \times \frac{\partial \mathbf{H}_1^*}{\partial \omega} + \frac{\partial \mathbf{E}_1^*}{\partial \omega} \times \mathbf{H}_1 \right) \cdot \mathbf{a}_z dS \\ & - \int_{S_2} \left( \mathbf{E}_2 \times \frac{\partial \mathbf{H}_2^*}{\partial \omega} + \frac{\partial \mathbf{E}_2^*}{\partial \omega} \times \mathbf{H}_2 \right) \cdot \mathbf{a}_z dS \end{aligned}$$

$$= -4j(W_m + W_e) \quad (8.47b)$$

式中,  $\mathbf{E}_1$ 、 $\mathbf{H}_1$ 是端面 1 上的场,  $\mathbf{E}_2$ 、 $\mathbf{H}_2$ 是端面 2 上的场。对于布洛赫波,  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 e^{-j\beta l}$ , 式中,  $\beta l$ 为通过长为  $l$  的单元时的相移。于是可得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 \times \frac{\partial \mathbf{H}_2^*}{\partial \omega} + \frac{\partial \mathbf{E}_2^*}{\partial \omega} \times \mathbf{H}_2 &= \mathbf{E}_1 \times \frac{\partial \mathbf{H}_1^*}{\partial \omega} + j l \frac{d\beta}{d\omega} \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1^* \\ &+ \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial \omega} \times \mathbf{H}_1 + j l \frac{d\beta}{d\omega} \mathbf{E}_1^* \times \mathbf{H}_1 \end{aligned}$$

因而, 由 (8.47b) 式得 (注意:  $S_2$  面上积分的计算与  $S_1$  面上积分的计算相同)

$$-2j l \frac{d\beta}{d\omega} R_z \int_{S_1} \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1^* \cdot \mathbf{a}_z dS = 4j l \frac{d\beta}{d\omega} P = -4j(W_m + W_e)$$

式中,  $P = \frac{1}{2} R_z \int_{S_1} \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1^* \cdot \mathbf{a}_z dS$  为通过一个端面所传送的功率。现在我们得到

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{P}{(W_m + W_e)/l} \quad (8.48)$$

而单元中能量密度  $(W_m + W_e)/l$  乘以能流的速度就等于功率  $P$ , 所以群速就是能流的速度。

## 8.8 福罗奎定理和空间谐波

已经指出, 在无限长周期性结构中布洛赫波的场, 除一个传播因子  $e^{-j\beta d}$  外, 在每一个端面上重复出现, 这里的  $d$  是一个单元的长度。由于在单元中端面位置的选取是任意的, 故可以看出, 若不考虑由一个单元到下一个单元的传播因子  $e^{-j\beta d}$ , 则在一个单元中任一点的场恰好与任一个其他单元中相似点的场有相同的值。因此, 若在  $0 \leq z \leq d$  之间单元中的场为  $\mathbf{E}(x, y, z)$ 、 $\mathbf{H}(x, y, z)$ , 则位于  $d \leq z \leq 2d$  区域内的单元中的场必为

$$e^{-\gamma d}\mathbf{E}(x, y, z-d), e^{-\gamma d}\mathbf{H}(x, y, z)$$

所以，可以用下列形式的解来表示周期性结构的场：

$$\mathbf{E}(x, y, z) = e^{-\gamma z}\mathbf{E}_p(x, y, z) \quad (8.49a)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = e^{-\gamma z}\mathbf{H}_p(x, y, z) \quad (8.49b)$$

式中， $\mathbf{E}_p$ 和 $\mathbf{H}_p$ 是以 $d$ 为周期的 $z$ 的周期函数，例如

$$\mathbf{E}_p(x, y, z+nd) = \mathbf{E}_p(x, y, z) \quad (8.49c)$$

用(8.49)式的形式表示周期性结构中的场的可能性常常称为福罗奎定理\*。由(8.49a)式可以看出， $z_1+d$ 处的电场与 $z_1$ 处的电场有如下的关系：

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z_1+d) &= e^{-\gamma(z_1+d)}\mathbf{E}_p(x, y, z_1+d) \\ &= e^{-\gamma(z_1+d)}\mathbf{E}_p(x, y, z_1) \\ &= e^{-\gamma d}\mathbf{E}(x, y, z_1) \end{aligned}$$

它确实具有准确的布洛赫波的重复特性。

可以把任一个比如像 $\mathbf{E}_p(x, y, z)$ 那样的周期函数，展开为付立叶无穷级数，即

$$\mathbf{E}_p(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{pn}(x, y) e^{-j2n\pi z/d} \quad (8.50)$$

式中， $\mathbf{E}_{pn}$ 为 $x$ 和 $y$ 的矢量函数。将(8.50)式两边乘 $e^{j2m\pi z/d}$ ，并在一个单元（即由 $z=0$ 到 $z=d$ ）上进行积分，可得

$$\mathbf{E}_{pm}(x, y) = \frac{1}{d} \int_0^d \mathbf{E}_p(x, y, z) e^{j2m\pi z/d} dz \quad (8.51)$$

因此此指数函数构成一个正交完备集，即

$$\int_0^d e^{-j2n\pi z/d} e^{j2m\pi z/d} dz = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ d & m = n \end{cases}$$

现在可以把一个周期性结构中的场表示为

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{pn}(x, y) e^{-j\beta z - j2n\pi z}$$

\*事实上，福罗奎所做的工作是研究周期性系数的微分方程。周期性边界条件是它的推广。

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{zn}(x, y) e^{-i\beta_n z} \quad (8.52)$$

式中,  $r = j\beta$ ,  $\beta_n = \beta + 2n\pi/d$ 。这个展开式中的每一项称为空间谐波(哈特里谐波), 它的传播相移常数为  $\beta_n$ 。每当整数  $n$  足够负时, 某些  $\beta_n$  将是负值。第  $n$  次空间谐波对应的相速为

$$v_{pn} = \frac{\omega}{\beta_n} = \frac{\omega}{\beta + 2n\pi/d} \quad (8.53)$$

同时, 当  $\beta_n$  为负值时, 它将为负值。第  $n$  次空间谐波的群速为

$$v_{gn} = \frac{d\omega}{d\beta_n} = \left( \frac{d\beta_n}{d\omega} \right)^{-1} = \left( \frac{d\beta}{d\omega} \right)^{-1} = v_g \quad (8.54)$$

此式对所有空间谐波都适用。根据上述关系可以看出, 某些空间谐波(接近于一半)具有相反方向的相速和群速。这个性质用于返波行波管振荡器中。术语返波(即反向波)常指相速和群速具有相反方向的波。当然, 其电压波和电流波也能够展开为空间谐波的无穷集(习题8.10)。

虽然布洛赫波能展开为空间谐波的无穷集, 但是, 所有这些空间谐波必须同时出现, 以便使其总场满足所有的边界条件。除了基波解以外, 周期性结构的  $\beta$  本征值方程总是还有  $\beta_n = \beta + 2n\pi/d$  解。这些可能的解显然都是空间谐波的传播常数。因此, 一个完整的  $k_0 d - \beta d$  图应把  $k_0 d$  作为  $\beta d$  的周期函数, 即  $\beta d$  曲线在  $-\pi \leq \beta d \leq \pi$  范围以外应周期性地延续下去。在由原点到曲线上任一点的连线的斜率乘上  $c$  后仍得相速, 此曲线的切线的斜率乘上  $c$  以后仍得群速。

## 8.9 行波管的周期性结构

行波管需要能保持电磁波相速等于电子束速度的周期性结构。因为电子束的速度通常远小于光速, 故所需要的周期性结构通常称为慢波结构。行波管中常用的慢波结构是螺旋线。下面两节讨论螺旋线, 这一节只限于讨论适用于行波管的某些其他类型的周期性慢

波结构。

在线性磁控管中常用的周期性慢波结构是如图8.11所示的翼形结构。它基本上由带有厚齿的皱摺平面组成。为了说明所应用的一般方法，应用福罗奎定理来分析这种结构是有好处的。为了简单起见，将忽略在  $x = \pm a/2$  处的边缘效应，也就是将把此结构作为无限宽的结构来处理。若  $a$  比间隔  $b$  大很多，而它又比  $\lambda_0$  小很多，则边缘效应不会使理想结构的特性产生显著的变化。因为在磁控管中

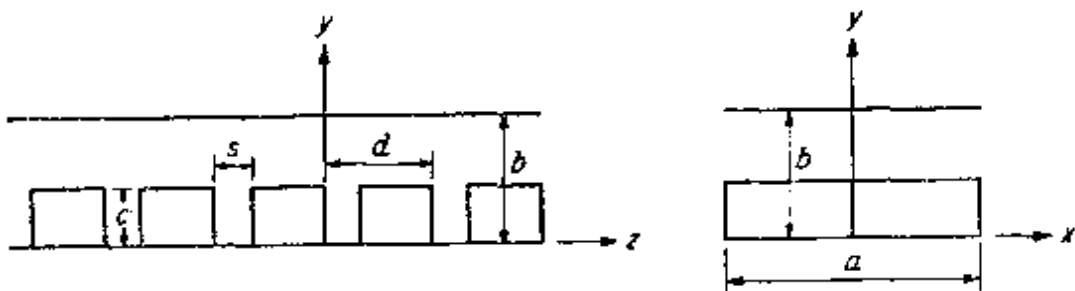


图 8.11 翼形（或皱摺平面形）周期性结构

应用时需要一个强的轴向电场，所以要研究产生  $TM$  模（即  $E$  模）的可能性。

对于不随  $x$  变化的  $TM$  模来说，其场分量可以用单个磁场分量  $H_x$  来表示。即有

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{a}_x \times \nabla H_x = j\omega\epsilon_0 \mathbf{E}$$

所以

$$\mathbf{E}_y = -j \frac{Z_0}{k_0} \frac{\partial H_x}{\partial z} \quad (8.55a)$$

$$\mathbf{E}_z = j \frac{Z_0}{k_0} \frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (8.55b)$$

场  $H_x$  是方程

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) H_x = 0 \quad (8.56)$$

的一个解。按照福罗奎定理，场  $H_x$  可以用  $e^{-i\beta z} \psi(y, z)$  的形式表示，其中  $\psi(y, z)$  随工作周期性的变化，它的周期是  $d$ 。所以假定

$$H_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(y) e^{-i\beta_n z}$$

式中,  $\beta_n = \beta + 2n\pi/d$ ,  $f_n(y)$  是待求的  $y$  的函数。把此级数代入 (8.56) 式, 就可以看出  $f_n(y)$  是

$$\frac{d^2 f_n(y)}{dy^2} - (\beta_n^2 - k_0^2) f_n(y) = 0 \quad (8.57)$$

的一个解。在皱摺的上面, 即在  $c \leq y \leq b$  区域中, 必须这样选取  $f_n$ , 即使  $E_x$  在理想导电壁  $y=b$  处为零。所以, 要求在  $y=b$  处  $df_n/dy=0$ 。由于 (8.57) 式的解为  $\sinh h_n y$  和  $\cosh h_n y$ , 式中,  $h_n = (\beta_n^2 - k_0^2)^{1/2}$ , 故取

$$f_n(y) = a_n \cosh h_n (b - y)$$

式中,  $a_n$  是一个常数。在  $y=b$  处, 这个函数具有零导数。应用 (8.55b) 式, 可得到皱摺上面区域的场为

$$H_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cosh h_n (b - y) e^{-i\beta_n z} \quad (8.58a)$$

$$E_x = -j \frac{Z_0}{k_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h_n \sinh h_n (b - y) e^{-i\beta_n z} \quad (8.58b)$$

下一步必须求出每一皱摺或开槽处  $H_x$  的适当展开式。设  $H_1(y, z)$  是  $0 \leq y \leq c$  处和由  $z=0$  到  $z=s$  的槽中的场, 则按照福罗奎定理, 在  $z=nd$  处起的第  $n$  个槽中的场应为  $e^{-i\beta_n d} H_1(y, z - nd)$ 。因此, 只需要集中研究一个槽就行了。我们必须求出这样的  $H_x$ , 使它使  $z=0$  和  $s$  处的  $E_x=0$ , 并使  $y=0$  处  $E_x$  为零。由于在  $z=0$  处和  $s$  处的  $d(\cos(m\pi z/s))/dz$  为零, 故一个合适的展开式是

$$H_x = \sum_{m=0}^{\infty} g_m(y) \cos \frac{m\pi z}{S}$$

如果把此展开式代入 (8.56) 式, 则得

$$\frac{d^2 g_m(y)}{dy^2} - \left[ \left( \frac{m\pi}{S} \right)^2 - k_0^2 \right] g_m(y) = 0$$

通常,  $s \ll \lambda_0$ , 所以, 当  $m \neq 0$  时,  $m\pi/s > k_0$ 。于是, 在  $y=0$  处具有零导数的适当解为

$$g_m(y) = b_m \cosh l_m y$$

式中,  $l_m = [(m\pi/s)^2 - k_0^2]^{1/2}$ ,  $b_m$  是一个常数。当  $m=0$  时, 此解为  $g_0(y) = b_0 \cos k_0 y$ , 这部分解对应于槽中  $TEM$  波的驻波。此模的  $E_y = 0$ 。于是可以把第一个槽中的场写为

$$H_x = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cosh l_m y \cos \frac{m\pi z}{S} \quad (8.59a)$$

$$E_z = j \frac{Z_0}{k_0} \sum_{m=0}^{\infty} b_m l_m \sinh l_m y \cos \frac{m\pi z}{S} \quad (8.59b)$$

最后一个分析步骤是根据加在两区域分界面  $y=c$  处的边界条件, 来求出展开系数  $a_n$  和  $b_n$ 。要求切向电场和磁场在通过间隙  $y=c$ ,  $0 \leq z \leq s$  处时是连续的。此外, 还要求在齿的上面(亦即在  $y=c$  处), 在  $s \leq z \leq d$  处, 或一般地说  $nd + s \leq z \leq (n+1)d$  处的切向电场为零。利用 (8.58) 式和 (8.59) 式, 可以看出边界条件要求

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-j\beta_n z} \cosh h_n (b-c) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cosh l_m c \cos \frac{m\pi z}{S} \quad 0 \leq z \leq s \quad (8.60a)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h_n e^{-j\beta_n z} \sinh h_n (b-c) = \begin{cases} - \sum_{m=0}^{\infty} b_m l_m \sinh l_m c \cos \frac{m\pi z}{S} & 0 \leq z \leq s \\ 0 & s \leq z \leq d \end{cases} \quad (8.60b)$$

若用  $e^{j\beta_n z}$  乘 (8.60b) 式, 则得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h_n \sinh h_n (b-c) e^{-j2n\pi z/d}$$



$$= \begin{cases} - \sum_{m=0}^{\infty} b_m e^{j\beta z} l_m \sinh l_m c \cos \frac{m\pi z}{s} & 0 \leq z \leq s \\ 0 & s \leq z \leq d \end{cases} \quad (8.60c)$$

只有在级数是正交的整个区间内用此级数表示的函数被指定时，此付立叶级数的系数才能唯一地确定。函数  $e^{-j2^r z/d}$  在 0 到  $d$  的区域内是正交的，于是，由于 (8.60c) 式的左边在一个周期内对所有  $z$  值来说都是确定的，故由 (8.60c) 式可以得出用  $b_m$  表示的  $a_n$  的唯一的表示式。应当指出，它对于只在  $0 \leq z \leq s$  区域内成立的 (8.60a) 式是不适用的。若用  $e^{j2^r z/d}$  乘 (8.60c) 式的两边，并在 0 到  $d$  区域内积分，则由于当  $n \neq r$  时， $\int_0^d e^{(-j2^r \pi z/d)(n-r)} dz = 0$ ，当  $n=r$  时，此积分等于  $d$  ( $r$  是一个整数)，而得

$$\begin{aligned} d a_r h_r \sinh h_r (b-c) &= - \sum_{m=0}^{\infty} b_m l_m \sinh l_m c \int_0^s e^{j(\beta + 2r\pi/d)z} \cos \frac{m\pi z}{s} dz \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m l_m \sinh l_m c \frac{j(\beta + 2r\pi/d) [(-1)^m e^{j\beta s} - 1]}{(\beta + 2r\pi/d)^2 - (m\pi/s)^2} \end{aligned} \quad (8.61)$$

(8.61) 式表示方程的无穷集，即每一个  $r$  值表示一个方程。

虽然 (8.60a) 式不是  $a_n$  的唯一的方程，但它可用  $a_n$  唯一地规定  $b_m$ 。因为已经用  $b_m$  表示了  $a_n$ ，所以，可以认为它们是已知的。用  $\cos(r\pi z/s)$  乘 (8.60a) 式，并由 0 到  $s$  进行积分得

$$\begin{aligned} \frac{s}{\epsilon_r} b_r \cosh l_r c &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cosh h_n (b-c) \int_0^s e^{-j\beta z} \cos \frac{r\pi z}{s} dz \\ &= -j \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cosh h_n (b-c) \frac{\left(\beta + \frac{2n\pi}{d}\right) \left[1 - (-1)^r e^{-j(\beta + 2n\pi/d)s}\right]}{(\beta + 2n\pi/d)^2 - (r\pi/s)^2} \end{aligned} \quad (8.62)$$

式中，当  $r=0$  时，诺埃曼因子  $\epsilon_r=1$ ；当  $r>0$  时，它等于 2。因为  $r=0, 1, 2, \dots, \infty$ ，故 (8.62) 式也是方程的一个无穷集。

(8.61) 式和 (8.62) 式组成了含有  $a_n$  和  $b_m$  的两个线性方程系统。

若把由(8.61)式得出的 $a_n$ 的解代入(8.62)式,则得到一个 $b_m$ 的齐次方程组。为了得到非无效解,这个齐次方程组的行列式必须为零。使此行列式等于零就得到 $\beta$ 的本征值方程。但是,由于此方程组有无穷元,所以事实上不可能有精确解。因而,我们只求精确的本征值方程的一级近似。

如槽的间隔 $s$ 远比 $\lambda_0$ 小,则只用 $TEM$ 波的驻波场去近似槽内的场看来是合理的。所以,除了 $b_0$ 以外,可取所有的 $b_m$ 为零。若把(8.61)式中所有的常数总括在一起,并用 $n$ 代替 $r$ ,则此方程为以下的形式:

$$a_n = \sum_{m=0}^{\infty} b_m R_{nm} \quad n=0, \pm 1, \dots \quad (8.63a)$$

同理,(8.62)式中的常数为以下形式的方程:

$$b_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n T_{nm} \quad m=0, 1, 2, \dots \quad (8.63b)$$

用(8.63a)式代替 $a_n$ 得

$$b_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} b_r R_{rn} T_{nm}, \quad m=0, 1, 2, \dots \quad (8.64)$$

当使这个齐次方程的无穷集的行列式等于零时,就得到 $\beta$ 的精确的本征值方程。当取所有的 $b_m$ (除了 $b_0$ 以外)等于零时,可以以

$$b_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_0 R_{0n} T_{n0}$$

或

$$1 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{0n} T_{n0} = 0 \quad (8.65)$$

作为本征值方程的一级近似。这里, $R_{0n}$ 是在方程(8.61)中解出 $a_n$ 并用 $n$ 代替 $r$ 后再除以 $b_0$ 的所有常数,同样, $T_{n0}$ 是(8.62)式中联系 $b_0$ 与 $a_n$ 的常数。把 $R_{0n}$ 和 $T_{n0}$ 的值代入(8.65)式,就得到

$$\frac{1}{k_0 d \tan k_0 c} = \frac{s}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\sin(\beta_n s/2)}{\beta_n s/2} \right]^2 \frac{1}{h_n d \tanh h_n (b-c)} \quad (8.66)$$

由于慢波的 $\beta$ 远大于 $k_0$ ，故在这个方程中 $k_0$ 可以用 $\beta_0$ 来代替，而其误差可以忽略。在此情况下，(8.66)式的右边与 $k_0$ 无关。通过计算(8.66)式的右边求出 $\beta$ 的取值范围后，就可以通过解(8.66)式而得出相应的 $k_0$ 值。数字运算工作是简单的，但冗长而单调。赫脱尔的文章给出了典型的结果\*。

由简单的传输线方法分析，也可以相当精确地得到描述 $\beta$ 与 $k_0$ 关系的色散曲线。皱摺上面的区域基本上是平行面传输线（带状线），其每单位宽度的特性阻抗为 $Z_1 = Z_0(b-c)$ 。各个槽是以 $d$ 为周期与主传输线串联的短路传输线枝节。此枝节对主线呈现的电抗为

$$jX = jZ_0 s \tan k_0 c$$

因此此结构的等效电路为如图8.12所示的形式。这个周期性电路可

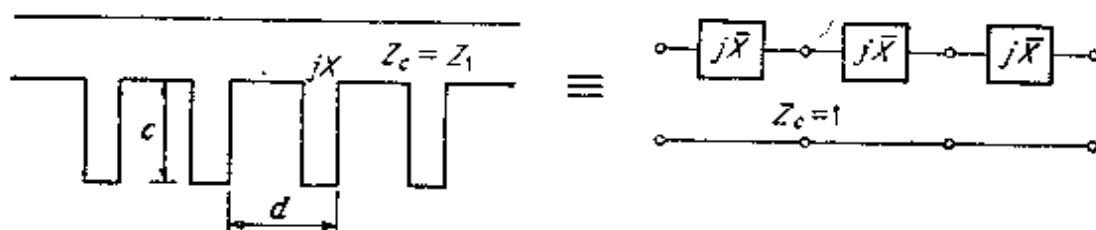


图 8.12 图8.11的翼形结构的简化等效电路

以用与电容性加载传输线同样的方法进行分析。不难求得 $\beta$ 的本征值方程为

$$\begin{aligned} \cos \beta d &= \cos k_0 d - \frac{X}{2Z_1} \sin k_0 d \\ &= \cos k_0 d - \frac{S}{2(b-c)} \tan k_0 c \sin k_0 d \end{aligned} \quad (8.67)$$

只要 $s \ll d$ ，且 $s$ 远小于 $\lambda_0$ ，则此方程是十分精确的。

对于使 $0 < k_0 c < \pi/2$ 的频率，加载为电感性；对于 $\pi/2 < k_0 c <$

\* R. G. E. Hutter, "Beam and Wave Electronics in Microwave Tubes," Sec. 7. 4, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1960.

$\pi$  的频率，加载为电容性。在  $s = 2(b - c)$  和  $d = 0.83c$  情况下的典型色散曲线表示在图 8.13 中。在这些尺寸下，其相速大约只减少到  $1/3$ 。若使  $s(b - c)$  更大，从而使短截线的归一化特性阻抗增加，则可以使相速减少更多的倍数。为了比较起见，把  $d = 2s$  时由 (8.66) 式得到的曲线（虚线）也画上，以证明 (8.67) 式的精确程度。第一个临界点近似地发生在此枝节谐振，即  $k_0 c = \pi/2$  之时。因为对较小的  $k_0$  值来说， $\beta d$  等于  $\pi$ ，所以，增加  $c$  也将减少第一个通带的相速。

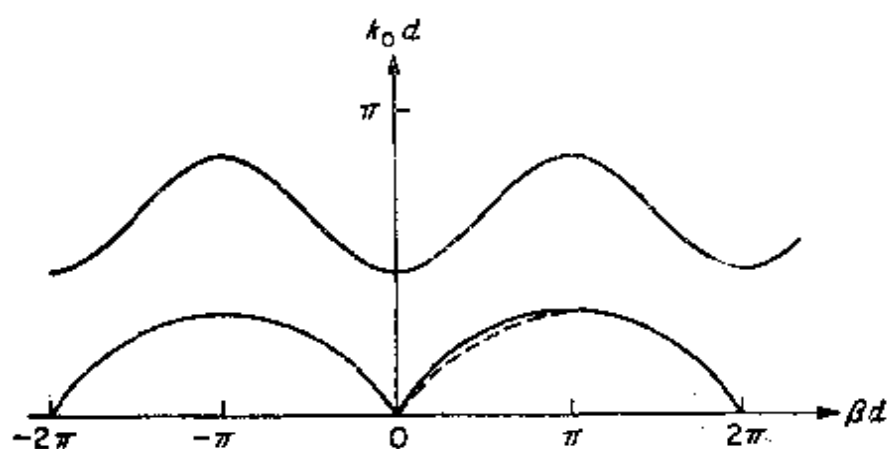


图 8.13 短截线加载传输线的  $k_0 d - \beta d$  图

前面的分析对不能用简单的传输线电路来表示的周期性结构是典型的。其基本步骤归纳如下：

1. 求周期性结构的每一个区域适当的场展开式。这包括解亥姆霍兹方程和应用福罗奎定理。
2. 把适当的边界条件用于不同区域的所有分界面上。下面将表明，普遍说来，为了满足边界条件， $E$  模和  $H$  模可能都需要。
3. 用付立叶分析把边界条件转换成振幅常数的代数方程。
4. 这个代数方程系可以写成齐次方程组的形式。使其行列式等于零，可得出  $\beta$  的本征值方程。因为这些方程组通常为无穷元，所以必须对所选取的非零振幅常数的数目作某些假定，令高次振幅常数为零，可以得到近似的本征值方程。

## 毫米波行波管的周期性结构

在毫米波波长下，螺旋线的直径太小，使它不能成为有效的慢波结构。于是，就选用各种形式的梯形条状线、交叉条状线和曲折条状线。图8.14中画出了这些结构。哈维在一篇论文中介绍了这些结构及其典型的 $k_0-\beta$ 图，还提供了分析这些结构的原始参考文献\*。

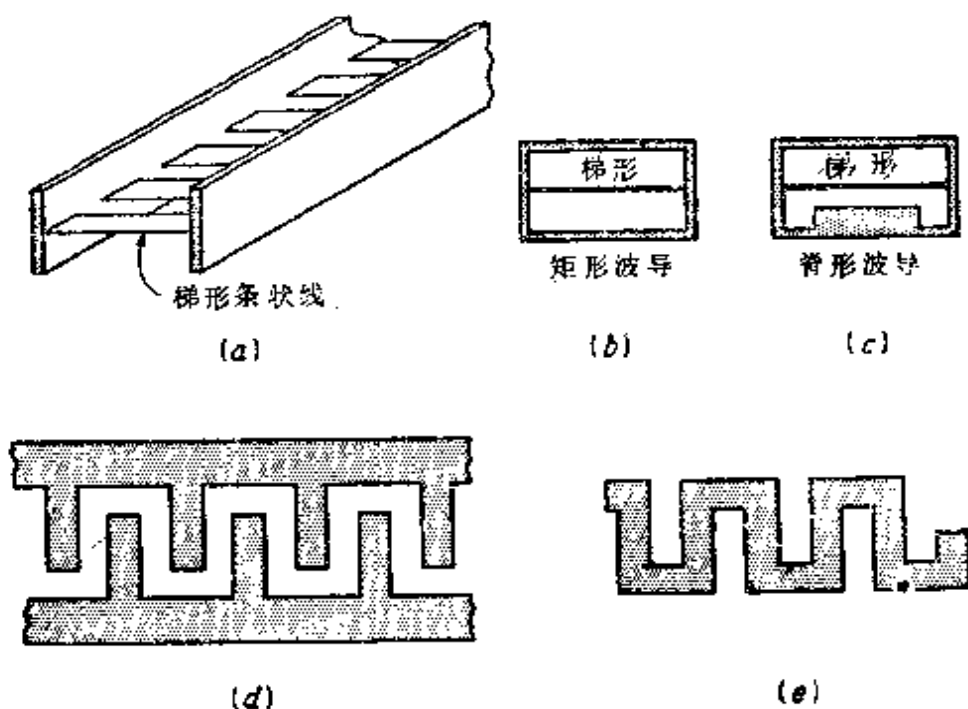


图 8.14 (a—c) 梯形条状线；(d) 交叉条状线；(e) 曲折条状线

图8.14 d 和 e 所示的两种结构是互补的或对偶的。把交叉条状线的开放区域与导电区域相互交换就可以得到曲折条状线。对这类互补结构来说，可以证明其场解也是对偶的，因而，两种结构具有完全相同的 $k_0-\beta$ 色散曲线。下面详细讨论其对偶特性。

设交叉条状线位于图8.15中的 $xy$ 平面上。我们来研究一个横向( $x$ 和 $y$ 分量)电场为 $E_x$ 的传播模， $E_x$ 是 $z$ 的偶函数，即在此结

\* A.F. Harvey, *Periodic and Guiding Structures at Microwave Frequencies*, IRE Trans., vol. MTT-8, pp. 30-61, January, 1960.

构的上下两边电场相同。因为  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ，故得  $\partial E_z / \partial z = -\nabla_{xy} \cdot \mathbf{E}_t$ ，因而  $\partial E_z / \partial z$  是  $z$  的偶函数，而  $E_z$  必须为  $z$  的奇函数。根据旋度方程  $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}$ ，不难得出  $H_z$  必须为  $z$  的奇函数， $H_t$  必须为  $z$  的偶函数的结论。其场结构表示在图 8.15a 中。在导电表面上场  $\mathbf{E}_t$  应

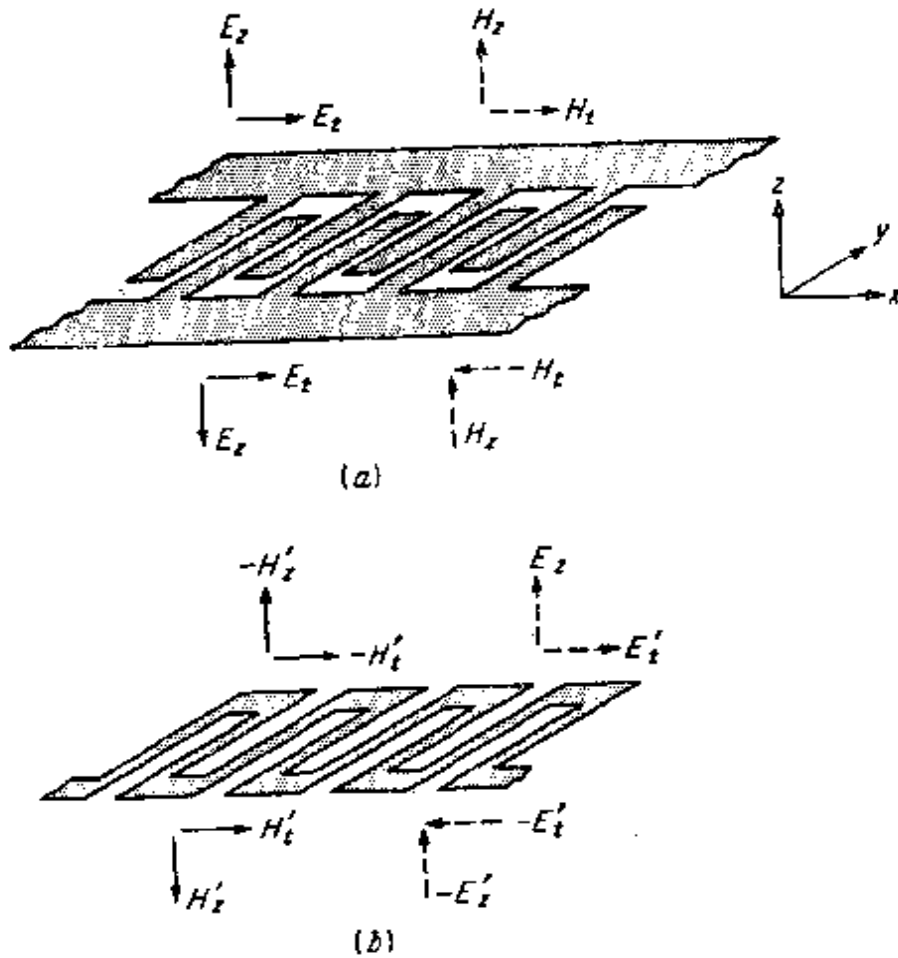


图 8.15 交叉条状线与曲折条状线的对偶特性的说明

为零，同时由于  $H_z$  是  $z$  的奇函数，故  $H_z$  在  $xy$  平面上的开口部分必须为零。在导体表面上，因为越过导体时  $|H_z|$  总的变化必须等于总电流密度，所以  $|H_z|$  应等于此线中总电流密度的一半。

如果  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  满足麦克斯韦方程，那末，对偶场  $\mathbf{E}'$ 、 $\mathbf{H}'$  为

$$\mathbf{E}' = \pm Z_0 \mathbf{H} \quad \mathbf{H}' = \mp Y_0 \mathbf{E}$$

也满足麦克斯韦方程：

$$\nabla \times \mathbf{E}' = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}' \quad \nabla \times \mathbf{H}' = j\omega\epsilon_0 \mathbf{E}'$$

是不难证明的。倘若取曲折条状线上面部分的对偶解为

$$\mathbf{E}' = Z_c \mathbf{H} \quad \mathbf{H}' = -Y_0 \mathbf{E} \quad (8.68a)$$

下面部分的对偶解为

$$\mathbf{E}' = -Z_c \mathbf{H} \quad \mathbf{H}' = Y_0 \mathbf{E} \quad (8.68b)$$

那末，它的对偶场就是此曲折条状线问题的一个解。在两个区域中带一撇的场都满足麦克斯韦方程。因为交叉条状线的开口区域中 $\mathbf{H}_t$ 为零。所以，在曲折条状线的导电区域 $\mathbf{E}'_t$ 应为零。同理，因为在交叉条状线的导电表面上 $\mathbf{E}_t$ 为零，故在曲折条状线的开口区域上的 $\mathbf{H}'_t$ 为零。所有的边界条件都已满足，求解就完成了。从而可以得出两种结构必定有同样的 $k_0 - \beta$ 色散特性的结论。但是，必须指出，只有在两种结构严格地互补，也就是把两种结构重叠在一起后必须在 $xy$ 平面上成为单个导电片时，才能应用对偶性。所以必须把交叉条状线的两边扩展到 $y = \pm \infty$ 处，且此线必须无限长。但是，实际上场被限制在靠近切口处，所以两边的扩展不必超出齿状区域很多，场的扰动就可以忽略了。上面所应用的对偶原理常常称为巴俾涅原理。

## 8.10 薄套螺旋线

薄套螺旋线是条状螺旋线的近似模型。图8.16 a 所示的条状螺旋线由绕在一个螺线结构上的一条薄带（或薄条）所组成。用 $p$ 表示其螺距，用 $\psi$ 表示其螺距角。若使匝间距离和带的宽度接近于零，则总的结构在电特性上便是平滑的。在边界面 $r = a$ 处，电场的边界条件可以用下面的条件来近似，即，沿此薄条方向（电流方向）的电导率为无穷大，而沿垂直于此薄条的方向的电导率为零。应用这些边界条件，使求解由此螺旋线引导的电磁场变得相当容易。这种各向异性的条状螺旋线的导电圆柱模型称为薄套螺旋线，如图8.16 b 所示。下面导出的场的解将证明薄套螺旋线保持相速为

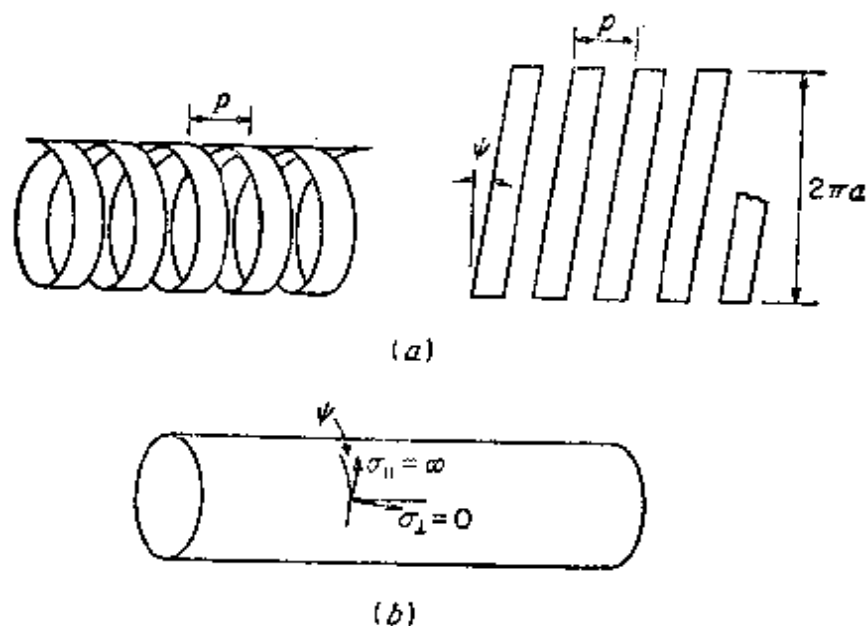


图 8.16 (a) 条状螺旋线, (b) 薄套螺旋线。

$v_z = c \sin \psi$  的慢波。可以认为波是以速度  $c$  沿螺旋形导体传播, 因而它沿  $z$  轴方向以相速  $c \sin \psi$  前进。此薄套螺旋线模型在较低频率下是有效的, 其中的  $p$  须远小于  $\lambda_0$ 。在较高频率下, 必须用更现实的模型。同时, 这时显然会出现空间谐波, 如 8.11 节将要指出的那样。

这种螺旋线的场的解由  $E$  模和  $H$  模两者所组成, 这是因为它们是通过在  $r = a$  处的边界条件耦合在一起的。由于沿薄条的方向的电导率为无限大, 故沿此方向的切向电场必须为零。于是

$$E_{\varphi_1} \cos \psi + E_{z_1} \sin \psi = E_{\varphi_2} \cos \psi + E_{z_2} \sin \psi = 0 \quad (8.69a)$$

式中, 下标 1 和 2 指  $r \leq a$  和  $r \geq a$  两个区域的场分量。因为在垂直于薄条的方向上电导率为零, 所以, 在圆柱表面  $r = a$  处和垂直于薄条方向上电场分量必须连续。从而得

$$E_{z_1} \cos \psi - E_{\varphi_1} \sin \psi = E_{z_2} \cos \psi - E_{\varphi_2} \sin \psi \quad (8.69b)$$

与此条相切的  $H$  分量, 由于垂直于此条没有电流流动也必须连续, 所以第三个边界条件为

$$H_{z_1} \sin \psi + H_{\varphi_1} \cos \psi = H_{z_2} \sin \psi + H_{\varphi_2} \cos \psi \quad (8.69c)$$

在  $r \leq a$  两个区域中, 可以得到由轴向场分量  $E_z$  和  $H_z$  表示的



$E$ 模和 $H$ 模的展开式，如3.1和3.7节所指出的那样。轴向场  $E_z = e_z(r, \varphi)e^{-i\beta z}$ ， $H_z = h_z(r, \varphi)e^{-i\beta z}$  是

$$\nabla_r^2 e_z + (k_0^2 - \beta^2)e_z = 0$$

的解。由于我们希望得到  $\beta^2 > k_0^2$  的慢波解，故此解包括具有虚宗量的贝塞尔函数，即包括  $J_n(r\sqrt{k_0^2 - \beta^2})$  和  $Y_n(r\sqrt{k_0^2 - \beta^2})$ 。为了便于应用，改用变形的贝塞尔函数  $I_n(r\sqrt{\beta^2 - k_0^2})$ 、 $K_n(r\sqrt{\beta^2 - k_0^2})$ ，来代替这两个具有虚宗量的贝塞尔函数。函数  $I_n$  和  $K_n$  与函数  $J_n$  和  $Y_n$  有如下的关系：

$$I_n(x) = j^{-n} J_n(jx) \quad (8.70a)$$

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} j^{n+1} (J_n(jx) + jY_n(jx)) \quad (8.70b)$$

当  $x$  值很小时， $K_n$  以对数的形式趋近于无穷大，所以，在  $r < a$  区域只用  $I_n$  函数。当  $r$  值较大时，它们的渐近形式

$$I_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x \quad (8.71a)$$

$$K_n(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \quad (8.71b)$$

是有效的。因为我们要求  $r$  较大时的衰减场，所以，仅在  $r > a$  的区域应用函数  $K_n$ 。现在可以写出这两个区域中  $e_z$  和  $h_z$  的合适的展开式为

$$e_z = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-in\varphi} I_n(hr) & r \leq a \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{-in\varphi} K_n(hr) & r \geq a \end{cases}$$

$$h_z = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\varphi} I_n(hr) & r \leq a \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{-in\varphi} K_n(hr) & r \geq a \end{cases}$$

式中,  $h = (\beta^2 - k_0^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $a_0$ 、 $b_0$ 、 $c_0$ 和 $d_0$ 为未知的振幅常数。

对于薄套螺旋线模型来说, 可能求出一个场的解, 它对于每个整数  $n$  都满足边界条件(8.69)式。我们主要关心  $n = 0$  的解, 因为它具有圆对称性。若利用(3.12)式、(3.13)式和(3.17)式, 并且用关系式:

$$\frac{dI_0(hr)}{d(hr)} = I_1(hr) \quad \frac{dK_0(hr)}{d(hr)} = -K_1(hr)$$

则对  $n = 0$  模来说, 可以把两个区域中的场表示如下:

当  $r < a$  时,

$$\left. \begin{aligned} E_z &= a_0 I_0(hr) e^{-i\beta z}, \quad E_r = \frac{j\beta}{h} a_0 I_1(hr) e^{-i\beta z} \\ E_\phi &= -\frac{j\omega\mu_0}{h} C_0 I_1(hr) e^{-i\beta z} \\ H_z &= C_0 I_0(hr) e^{-i\beta z}, \quad H_r = -\frac{j\beta}{h} C_0 I_1(hr) e^{-i\beta z} \\ H_\phi &= \frac{j\omega\epsilon_0}{h} a_0 I_1(hr) e^{-i\beta z} \end{aligned} \right\} \quad (8.72a)$$

当  $r > a$  时

$$\left. \begin{aligned} E_z &= b_0 K_0(hr) e^{-i\beta z}, \quad E_r = -\frac{j\beta}{h} b_0 K_1(hr) e^{-i\beta z} \\ E_\phi &= \frac{j\omega\mu_0}{h} d_0 K_1(hr) e^{-i\beta z} \\ H_z &= d_0 K_0(hr) e^{-i\beta z}, \quad H_r = -\frac{j\beta}{h} d_0 K_1(hr) e^{-i\beta z} \\ H_\phi &= -\frac{j\omega\epsilon_0}{h} b_0 K_1(hr) e^{-i\beta z} \end{aligned} \right\} \quad (8.72b)$$

若将上述场的表示式代入边界条件(8.69)式, 则得到常数  $a_0$ 、 $b_0$ 、 $c_0$ 和 $d_0$ 的四个齐次方程式, 只有在行列式为零时, 才有非无效解。使其行列式为零, 就得到  $\beta$  的本征值方程, 它是

$$\frac{K_1(ha)I_1(ha)}{K_0(ha)I_0(ha)} = \frac{(ha)^2 \tan^2 \psi}{(k_0 a)^2} \quad (8.73)$$

当 $ha$ 大于10时, 比值 $K_1 I_1 / K_0 I_0$ 很快地趋近于1。在这个区域内, 由(8.73)式得出 $h = k_0 \cot \psi$ , 由此可得

$$\beta = (k_0^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} = k_0 \csc \psi \quad (8.74)$$

其所求得的相速为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{k_0}{\beta} c = c \sin \psi \quad (8.75)$$

即相速降低的因子是 $\sin \psi$ 。图8.17是 $v_p/c$ 随 $k_0 a$ 变化的曲线, 它是在 $\psi = 10^\circ$ 时由(8.73)式得出的解。当 $k_0 a$ 大于0.25时, 其相速很接近于(8.75)式算出的结果。在 $v_p = c \sin \psi$ 对应的频率范围内, 其群速也等于 $c \sin \psi$ , 因而没有频率色散现象。

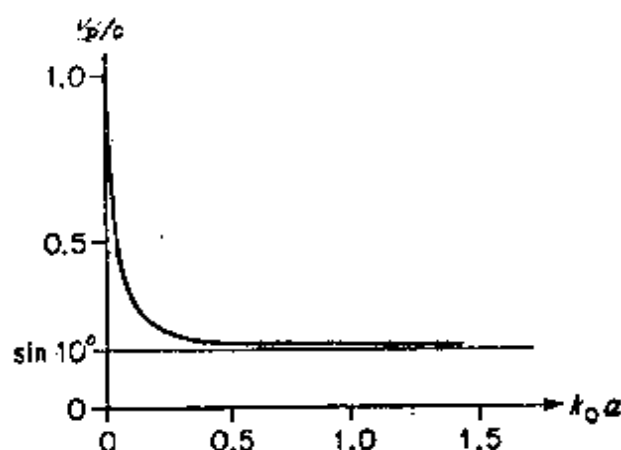


图 8.17 薄套螺旋线(螺距角 $\psi = 10^\circ$ )的相速减缩因数

## 8.11 螺旋线的几个一般特性

由绕在螺旋结构上的金属薄条所组成的条状螺旋线如图8.16 a所示。螺旋线也可以用环形线构成。描述螺旋线的参数为螺距 $p$ (或匝与匝之间的间隔)、直径 $2a$ 和螺距角 $\psi$ , 这些参数表示在图8.16 a中, 图中显示了条状螺旋线的展开图。

螺旋线是这样一种周期性结构, 即它沿轴平移一个距离, 旋转

一个任意角度  $\theta$ ，以及沿轴向平移  $p\theta/2\pi$  都是周期性的。换言之，一条无限长的螺旋线，沿  $z$  轴方向平移距离  $p$ ，或者旋转角度  $\theta$ ，再沿  $z$  移动距离  $p\theta/2\pi$  后，将与其本身重合。

螺旋线的上述周期性或对称性，对于电磁场解的性质加上了一定的限制。若  $E_1(r, \varphi, z)$ （这里的  $r$  和  $\varphi$  为圆柱坐标）是电场的—个解，则  $E_1(r, \varphi + \theta, z + p\theta/2\pi)$  乘传播因子  $e^{-i\beta(p\theta/2\pi)}$  是它的又一个解，这是因为点  $(r, \varphi + \theta, z + p\theta/2\pi)$  与点  $(r, \varphi, z)$  是难以区分的。解  $E_1(r, \varphi, z)$  对  $\varphi$  必须是周期性的，并且，除传播因子  $e^{-i\beta z}$  以外，对  $z$  也必须是周期性的（以  $p$  为周期）。所以， $E_1$  可以展开为双重付立叶级数：

$$E_1(r, \varphi, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{1,mn}(r) e^{-im\varphi - i2n\pi z/p} e^{-i\beta z} \quad (8.76)$$

式中， $E_{1,mn}$  是  $r$  的矢量函数，相当于付立叶级数中通常的振幅常数。上面指出的平移和旋转之间的关系要求：当用  $\varphi + \theta$ 、 $z + p\theta/2\pi$  代替  $\varphi$ 、 $z$  时， $e^{i\beta z} E_1(r, \varphi, z)$  不变化。因而，在(8.76)式中，要求

$$\begin{aligned} e^{-im(\varphi + \theta) - i2n\pi(z + p\theta/2\pi)/p} &= e^{-im(\varphi + \theta) - i\beta z - i2n\pi z/p} \\ &= e^{-im\varphi - i\beta z - i2n\pi z/p} \end{aligned}$$

只有当  $m = -n$  时，这个条件才满足。所以，对一个螺旋线来说，其电场的双重付立叶级数展开式，可化为单个级数的形式

$$E_1(r, \varphi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{1,n}(r) e^{-in(2\pi z/p - \varphi)} e^{-i\beta z} \quad (8.77)$$

通过在  $r < a$  和  $r > a$  两个区域内把场展开为圆柱坐标下的  $E$  模和  $H$  模的无穷级数，就可以求解螺旋线。在  $r = a$  处的边界条件将使  $E$  模和  $H$  模耦合在一起，使纯  $E$  模或  $H$  模不能独立存在。(8.77) 式中第  $n$  项在  $r > a$  区域的径向关系，应与宗量为

$$h_n r = \left[ \left( \beta + \frac{2n\pi}{p} \right)^2 - k_0^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

的  $n$  阶变形贝塞尔函数  $K_n(h_n r)$  一致。当  $r$  较大时，函数  $K_n$  渐近于

$(\pi/2h_n r)^{\frac{1}{2}} e^{-h_n r}$ ，所以，只要 $h_n$ 是实数，即所有的 $(\beta + 2n\pi/p)^2$ 大于 $k_0^2$ ，场就按指数衰减。当场按指数衰减时，它相当于由螺旋线引导的表面波模。

在给定的频率下，可能的解只是一定的 $\beta$ 的离散值 $\beta_n$ 。每一个 $\beta_n$ 值对应于一个特定的传播模，其场用付立叶级数的形式表示为

$$E_n(r, \varphi, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_{m,n}(r) e^{-i^n(2\pi z/p - \varphi) - i\beta_n z} \quad (8.78)$$

这个展开式中的每一项称为一个空间谐波，它的传播相移常数为 $\beta_n + 2n\pi/p$ 。在图8.18中的 $k_0 p - \beta p$ 图上， $k_0 = \pm\beta$ 线以上的区域是一个禁区，因为它相当于 $h_0 = (\beta^2 - k_0^2)^{\frac{1}{2}}$ 是虚数的情形，并且 $n=0$ 的空间谐波沿径向不衰减。由于我们还要求 $|\beta + 2n\pi/p|$ 大于 $k_0$ ，故所有相应于表面波模的可能 $\beta$ 值进一步被限制在图8.18中无阴影的三角形区域内。这些区域的边界是以直线

$$k_0 = \pm \left( \beta \pm \frac{2n\pi}{p} \right)$$

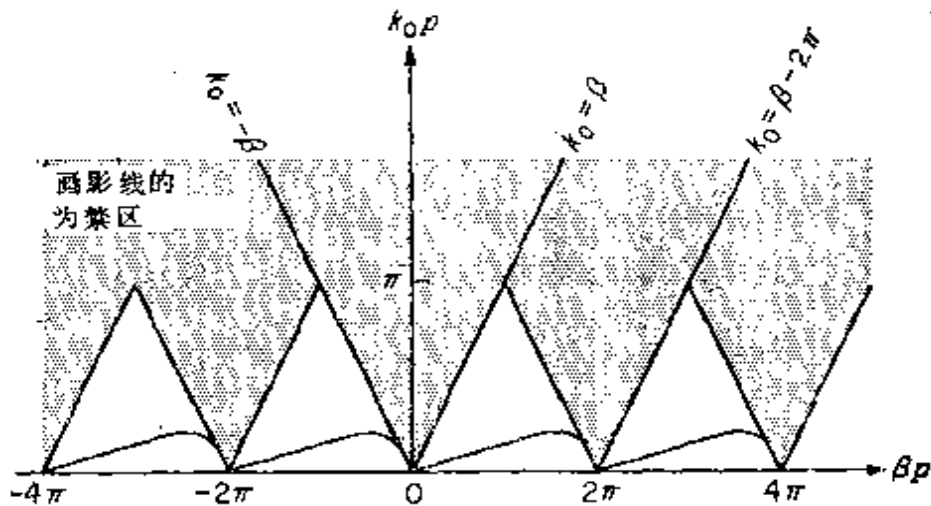


图 8.18 螺旋线 $k_0 - \beta$ 图中容许区和禁区的图示

来区分的，式中， $n$ 是一个整数。在禁区中的传播常数原来是复数，而不是纯实数，这是它区别于通常的截止模的一个特点。

若假定电流只沿着薄条的方向且在薄条的宽度上是均匀的，就可以得到条状螺旋线的一级近似解，且其传播因子为 $e^{-i\beta z}$ 。在这个

基础上得到的  $\psi = 10^\circ$  的典型  $k_c - \beta$  曲线表示在图 8.18 中。要得到进一步的结果，可以查阅森赛普的论文或沃特金斯的书\*。

## 8.12 微波滤波器引论

理想的滤波网络是这样的一种网络，它对一定通带范围内的所有频率能完全地传输，而在阻带范围内则衰减为无穷大。这样的理想特性是不可能得到的，而滤波器设计的目标是：在可能允许的范围内近似地达到理想的要求。在所有的频率范围都使用滤波器，它对所要求的通带频率范围内的信号，提供尽可能理想的传输，而尽可能抑制所要求频段以外的信号和噪声。滤波器分为三种主要类型，即（1）低通滤波器，它使零与某一上限频率  $\omega_c$  之间的信号通过，而衰减高于截止值  $\omega_c$  的所有频率；（2）高通滤波器，它使下限频率  $\omega_c$  以上的所有频率通过，而抑制  $\omega_c$  以下的所有频率；（3）带通滤波器，它使  $\omega_1$  到  $\omega_2$  的范围内的频率通过，而抑制这个范围以外的频率。与带通滤波器互相补充的是带阻滤波器，它衰减  $\omega_1$  到  $\omega_2$  范围内的频率，这种滤波器在某些应用中也是重要的。

在低频时，滤波器的“组成元件”是理想的电感器和电容器。这些元件具有很简单的频率特性，而且已经有了利用它们来设计滤波器的很普遍而完整的综合方法。这使人们有可能对各种各样规定了频率特性的滤波器直接地进行综合。在微波频率下，必须用分布参数元件来设计滤波器。它比低频时要复杂得多，也不存在完整的理论或综合方法。微波电路元件复杂的频率特性，使人们实际上不可能有一个普遍而完整的综合方法。但是，尽管在微波频下增加了这些复杂性，还是研究出了设计微波滤波器的若干有效方法。因为

---

\* Sensiper, *Electromagnetic Wave Propagation on Helical Structures*, Proc. IRE, Vol. 43, pp. 149-161, February, 1955.  
D. A. Watkins, "Topics in Electromagnetic Theory," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1958.

在限定的频率范围内许多微波元件基本上具有与理想的感性或容性电抗相似的频率特性，故窄带滤波器的设计特别简便。在此情况下，低频的原型滤波器可以作为一个模型使用。在所需的频率范围内，用具有类似频率特性的适当的微波电路元件取代所有的电感和电容，就可以做成微波滤波器。因此，为了设计微波滤波器，已经在直接地应用低频滤波器综合方法上作了许多努力。

常用的低频滤波器综合的方法基本上有两种。它们是镜象参数法（及其变形，如像常 $k$ 式滤波器和 $M$ 导出式滤波器）和插入损耗法。镜象参数法能设计出具有所需的通带和阻带特性的滤波器，但不能详细说明通带和阻带的精确频率特性。插入损耗法由完全地确定实际上可能实现的频率特性开始，而综合出一个适当的滤波网络。镜象参数法因常常需要用很多的试探法，才能获得所希望的总频率特性，而使其应用受到影响。因此，插入损耗法是更可取的，也是下几节中要详细研究的方法。镜象参数法只作简短的概述，以便指出它与前面讨论过的周期性网络特性的关系。

频率变换和元件归一化的应用，大大减轻了在设计滤波器综合中所化的劳动。它们使工作在任意频段和任意电阻性负载终端器之间的高通滤波器和带通滤波器，能够由基本的低通滤波器设计中得出。当然，在所有的实际网络元件中存在的损耗，将改变任何滤波器的特性。把有耗元件的影响归入综合方法中，会使综合理论复杂得多，所以通常不这样做。在微波频率下，损耗能保持在相当低的水平上，以致使大多数根据无耗元件所做的滤波器的设计能满意地工作。

下面几节的目的在于介绍低频滤波器综合、频率变换、归一化滤波器设计的主要方面，以及这些方法在微波滤波器设计中的应用。同时也讨论若干典型的微波滤波器。对微波滤波器设计各方面的问题都作广泛讨论，超出了本书的范围。但是，可以在所选取的参考文献中找到更详细的阐述。

### 8.13 滤波器设计中的镜象参数法

用镜象参数法设计滤波器与周期性结构的设计具有许多共同的特点。前几节已经指出，无耗二端口网络的级联特性与传输线类似。非对称网络有两个特性阻抗： $\bar{Z}_{s, \pm} = \bar{Z} + \zeta$ ，且每一段有一个传播因子 $e^{\pm rd}$ 。这种形式的周期性结构有通带和阻带特性，因而它是一个带通滤波器。但是，为防止反射，合适的终端负载应是 $\bar{Z}_s$ ，而当 $\zeta \neq 0$ 时， $\bar{Z}_s$ 应是一个复数。通常，滤波器必须接在两个电阻性终端负载之间。在这种情况下，除非 $\zeta$ 都为零，即除非都用对称网络或在输入端和输出端都用匹配段，否则，滤波器就不可能得到匹配的输入端和输出端。因此，滤波器设计中的镜象参数法是在与已经讨论过的周期性结构略有不同的基础之上来研究的。

我们研究参数为 $\mathcal{A}$ 、 $\mathcal{B}$ 、 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 的单个二端口网络。设输出端接负载 $Z_{i2}$ ，输入端接 $Z_{i1}$ ，如图8.19所示。当 $Z_{i1}$ 和 $Z_{i2}$ 为特定值（称为镜象阻抗）时，在端口1处的输入阻抗就等于 $Z_{i1}$ ，在端口2处的输入阻抗就等于 $Z_{i2}$ 。于是，这些阻抗对二端口网络来说是匹配终

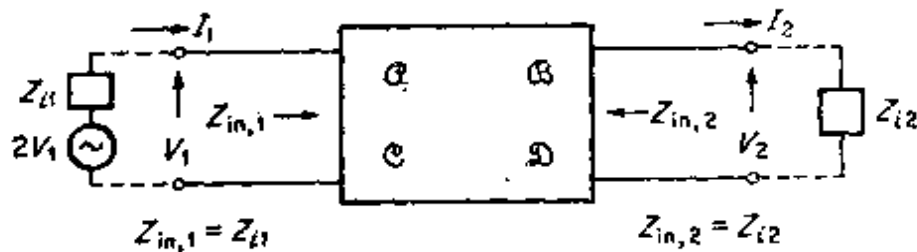


图 8.19 二端口网络的镜象参数

端。若它们是实数，则当波源的内阻抗等于其镜象阻抗时，就得到最大的功率传输。二端口网络所遵守的方程为

$$V_1 = \mathcal{A}V_2 + \mathcal{B}I_2 \quad I_1 = \mathcal{C}V_2 + \mathcal{D}I_2$$

所以

$$\frac{V_1}{I_1} = Z_{in,1} = \frac{\mathcal{A}V_2 + \mathcal{B}I_2}{\mathcal{C}V_2 + \mathcal{D}I_2} = \frac{\mathcal{A}Z_{i2} + \mathcal{B}}{\mathcal{C}Z_{i2} + \mathcal{D}} \quad (8.79)$$



若解出用  $V_1$  和  $I_1$  表示  $V_2$  和  $I_2$ , 则得

$$V_2 = \mathcal{D}V_1 - \mathcal{B}I_1, \quad I_2 = -\mathcal{C}V_1 + \mathcal{A}I_1$$

于是可得

$$-\frac{V_2}{I_2} = Z_{in,2} = -\frac{\mathcal{D}V_1 - \mathcal{B}I_1}{-\mathcal{C}V_1 + \mathcal{A}I_1} = \frac{\mathcal{D}Z_{i1} + \mathcal{B}}{\mathcal{C}Z_{i1} + \mathcal{A}} \quad (8.80)$$

由必要条件  $Z_{i1} = Z_{in,1}$  和  $Z_{i2} = Z_{in,2}$  可得

$$Z_{i1}(\mathcal{C}Z_{i2} + \mathcal{D}) = \mathcal{A}Z_{i2} + \mathcal{B} \quad Z_{i2}(\mathcal{C}Z_{i1} + \mathcal{A}) = \mathcal{D}Z_{i1} + \mathcal{B}$$

联立求解这两个方程得到

$$Z_{i1} = \sqrt{\frac{\mathcal{A}\mathcal{B}}{\mathcal{C}\mathcal{D}}} \quad (8.81a)$$

$$Z_{i2} = \sqrt{\frac{\mathcal{D}\mathcal{B}}{\mathcal{A}\mathcal{C}}} \quad (8.81b)$$

还可得  $Z_{i2} = (\mathcal{D}/\mathcal{A})Z_{i1}$ .

若把具有内阻抗  $Z_{i1}$  的波源接在端口 1 上, 并把负载  $Z_{i2}$  接在端口 2 的输出端, 则由下列关系式不难求出电压和电流的转换比:

$$V_2 = \mathcal{D}V_1 - \mathcal{B}I_1 = \left( \mathcal{D} - \frac{\mathcal{B}}{Z_{i1}} \right) V_1$$

$$I_2 = -\mathcal{C}V_1 + \mathcal{A}I_1 = (-\mathcal{C}Z_{i1} + \mathcal{A})I_1$$

式中,  $V_1$  是加在端口 1 的网络端上的电压 (波源的电压为  $2V_1$ ),

于是可得

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{A}}} (\sqrt{\mathcal{A}\mathcal{D}} - \sqrt{\mathcal{B}\mathcal{C}}) \quad (8.82a)$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{D}}} (\sqrt{\mathcal{A}\mathcal{D}} - \sqrt{\mathcal{B}\mathcal{C}}) \quad (8.82b)$$

用类似方法可求出由端口 2 到端口 1 的转换比 (或由 (8.82) 式求出) 为

$$\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{D}}} (\sqrt{\mathcal{A}\mathcal{D}} + \sqrt{\mathcal{B}\mathcal{C}}) \quad (8.83a)$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \sqrt{\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{A}}} (\sqrt{\mathcal{A}\mathcal{D}} + \sqrt{\mathcal{B}\mathcal{C}}) \quad (8.83b)$$

镜像传播因子 $e^{-\gamma}$ 的定义为

$$e^{-\gamma} = \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{D}} - \sqrt{\mathcal{B}\mathcal{C}} \quad (8.84a)$$

由此可得出

$$e^{\gamma} = \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{D}} + \sqrt{\mathcal{B}\mathcal{C}} \quad (8.84b)$$

和

$$\cosh \gamma = \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{D}} \quad (8.84c)$$

$$\sinh \gamma = \sqrt{\mathcal{B}\mathcal{C}} \quad (8.84d)$$

因子 $(\sqrt{\mathcal{A}\mathcal{D}})^2$ 可看作是阻抗变换比，并且可以把它认为是一个理想变压器的匝数比 $\sqrt{\mathcal{A}\mathcal{D}}$ 。

对一个无耗网络来说， $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{D}$ 是实数， $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 是虚数。在滤波器的通带内， $\gamma$ 是纯虚数，且等于 $j\beta$ ，由(8.84c)式可看出，这发生在 $|\mathcal{A}\mathcal{D}| < 1$ 的时候。并且，如同下面的研究中将证明的那样，在通带内镜像阻抗是纯实数，而在阻带内，它们是纯虚数。在通带内 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 必须同号，以使 $\mathcal{B}\mathcal{C} = j|\mathcal{B}|j|\mathcal{C}| = -|\mathcal{B}\mathcal{C}|$ ，从而使(8.84d)式中的 $\sinh \gamma$ 变为纯虚数，即 $\gamma = j\beta$ 。因此，(8.81)式中根号里的量应是实数，且是正的，因为要得到 $\cosh \gamma$ 为实数解， $\mathcal{A}\mathcal{D}$ 必须是正的。因而，在通带中的镜像阻抗是实数。

如果把 $N$ 个二端口网络级联起来，它们的传播常数为 $\gamma_n$ ， $n = 1, 2, \dots, N$ 。阻抗变换比为

$$T_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{D}_1}{\mathcal{A}_1}}, T_2, \dots, T_n, \dots, T_N$$

且其输出段接一个与其输出镜像阻抗相等的阻抗。倘若任一段的输出镜像阻抗等于其相邻段的输入镜像阻抗，则总的电压转换比为

$$\begin{aligned} \frac{V_N}{V_1} &= \frac{V_N}{V_N} \dots \frac{V_2}{V_2} = T_1 T_2 \dots T_N e^{-\gamma_1 - \gamma_2 \dots - \gamma_N} \\ &= \prod_{n=1}^N T_n e^{-\gamma} \end{aligned} \quad (8.85)$$

由于这个滤波网络端接的负载阻抗 $Z_L$ 等于输出段的镜像阻抗，同时输入端的波源的内阻抗为 $Z_{i1}$ ，所以，总的网络是匹配的，从而

得到最大功率传输。若这个滤波器工作在  $Z_{iN}$  和  $Z_{i1}$  的阻抗水平之间，则它提供整个阻抗比的变化量为

$$\frac{Z_{iN}}{Z_{i1}} = \frac{Z_{iN}}{Z_{iN-1}} \cdots \frac{Z_{i2}}{Z_{i1}} = \prod_{n=1}^N T_n^2 \quad (8.86)$$

若使用对称的二端口网络，则  $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ ， $Z_{i1} = Z_{i2}$ ，且两者都等于布洛赫波特性阻抗  $Z_B^+$ 。对于对称网络来说，不会有阻抗水平的变换或改变。由  $N$  个端接与镜象阻抗相等的负载阻抗的对称段所组成的滤波器，它的通带和阻带特性与无限长周期性结构有非常相似的特性。

用镜象参数法设计滤波器时，为了提供所需要的通带和阻带特性，二端口网络参数选为  $\mathcal{A}$ 、 $\mathcal{B}$ 、 $\mathcal{C}$ 、 $\mathcal{D}$ 。此外，镜象参数需按通带中心处的端接阻抗来选取。现在可以看出这种滤波器的缺点了，因为镜象阻抗是频率的函数，故一般不能在所需的整个通带内保持等于端接阻抗。结果在通带中传输时引起某些损耗（由失配引起的损耗），且不能在滤波器做出来之前预知或确定其大小。此外，除了增加滤波器的节数外，没有控制通带边频外衰减随频率增大的速率的可用方法。尽管如此，然而，在这个方法的基础上已经设计出了许多有用的微波滤波器\*。

## 8.14 用插入损耗法设计滤波器

在5.11节中把功率损耗比定义为有效（或入射）功率除以传送到负载的实际功率，即

$$P_{LR} = \frac{1}{1 - \Gamma\Gamma^*} = \frac{1}{1 - \rho^2} \quad (8.87)$$

\* S. B. Cohn, Chaps. 26 and 27 in *Radio Research Laboratory Staff, "Very High Frequency Techniques" Vol. 2, McGraw-Hill Book Company, New York, 1947.*

低频时镜象参数法的讨论，参看：E. A. Guillemin, "Communication Networks," Vol. 2, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1935.

式中， $\Gamma$ 是端接电阻性负载阻抗 $Z_L = R_L$ 时的无耗网络的输入反射系数。当端接的电阻性负载阻抗等于输入端波源的内阻抗时，以分贝表示的插入损耗为

$$L = 10 \log P_{LR} \quad (8.88)$$

一般地说，插入损耗定义为：直接地和波源连接时送到负载上的功率与插入滤波器后送到负载上的功率之比。

设计滤波器的插入损耗法是：先指定功率损耗比 $P_{LR}$ 或指定作为 $\omega$ 的函数的反射系数大小 $|\Gamma| = \rho$ ，然后综合出得到所要求的功率损耗比的网络。可见，这个方法基本上与5.9和5.10节中 $\lambda/4$ 变换器的综合方法相同。毫无疑问，多节 $\lambda/4$ 变换器可以认为是一个特殊类型的带通滤波器。但是，必须注意，不能完全任意地选取 $\omega$ 的函数 $\Gamma(\omega)$ ，因为它不一定能找到一个对应的实际网络。加在 $\Gamma$ 上的这个限制称为可实现性条件，下面讨论其中的一些条件。

对于无源网络，反射功率显然不能超过入射功率，所以对 $\Gamma(\omega)$ 的一个限制是

$$|\Gamma(\omega)| \leq 1 \quad (8.89)$$

若网络的归一化输入阻抗为

$$\bar{Z}(\omega) = \bar{R}(\omega) + j\bar{X}(\omega)$$

则得

$$\Gamma(\omega) = \frac{\bar{Z}_{in} - 1}{\bar{Z}_{in} + 1} = \frac{\bar{R}(\omega) - 1 + j\bar{X}(\omega)}{\bar{R}(\omega) + 1 + j\bar{X}(\omega)}$$

如4.4节所指出的， $\bar{R}$ 是 $\omega$ 的偶函数， $\bar{X}$ 是 $\omega$ 的奇函数。所以

$$\Gamma(-\omega) = \frac{\bar{R}(\omega) - 1 - j\bar{X}(\omega)}{\bar{R}(\omega) + 1 - j\bar{X}(\omega)} = \Gamma^*(\omega)$$

于是得

$$\begin{aligned} |\Gamma(\omega)|^2 &= \rho^2(\omega) = \Gamma\Gamma^* \\ &= \Gamma(\omega)\Gamma(-\omega) \end{aligned} \quad (8.90)$$

由这个关系式可以看出， $\rho^2(\omega) = \rho^2(-\omega)$ 是 $\omega$ 的偶函数，因而必定只包含 $\omega$ 的偶次幂。这样，任一个低频阻抗函数（由电阻、电容

和电感组成的网络的阻抗)可以表示为两个 $\omega$ 的多项式之比。因而, $\Gamma$ 也可以表示为两个多项式之比。结果可以把 $\rho^2(\omega)$ 表示为以下的形式:

$$\begin{aligned}\rho^2(\omega) &= \frac{M(\omega^2)}{M(\omega^2) + N(\omega^2)} \\ &= \frac{(\bar{R}-1)^2 + \bar{X}^2}{(\bar{R}+1)^2 + \bar{X}^2}\end{aligned}\quad (8.91)$$

式中, $M$ 和 $N$ 是实的和非负的 $\omega^2$ 的多项式。现在可以把功率损耗比表示为

$$\begin{aligned}P_{LR} &= 1 + \frac{M(\omega^2)}{N(\omega^2)} \\ &= 1 + \frac{[\bar{R}(\omega)-1]^2 + [\bar{X}(\omega)]^2}{4\bar{R}(\omega)}\end{aligned}\quad (8.92)$$

(8.92)式的最后结果表明,由于 $N(\omega^2)$ 等于 $4\bar{R}(\omega)$ ,故它必须是 $\omega$ 的偶次多项式。因而,可写为 $N(\omega^2) = Q^2(\omega)$ ,它显然是一个 $\omega$ 的偶次多项式。若用偶次多项式 $P(\omega^2)$ 代替 $M(\omega^2)$ ,则得

$$P_{LR} = 1 + \frac{P(\omega^2)}{Q^2(\omega)}\quad (8.93)$$

到现在为止,对 $P_{LR}$ 所规定的条件,是为了使网络可能实际上实现的必要条件。可以证明,能用(8.93)式表示的功率损耗比条件又是网络可实现的充分条件\*。随后几节我们研究多项式 $P$ 和 $Q$ 的合适形式,以及得到相应功率损耗比所要求的网络类型。

## 8.15 功率损耗比的规定

实际上可以有无限多种不同形式的功率损耗比,并用实际的网络来实现。但是,可以预计,其中的许多网络是非常复杂的,因而

\* G.L.Ragan(ed.), "Microwave Transmission Circuits," sec.9.13, McGraw-Hill Book Company, New York, 1948.

事实上很少采用。在微波滤波器设计中，已经发现的最有用的功率损耗比，是在通带中得到最平坦响应和等波纹（即切比雪夫）响应。这些通带响应曲线相当于第5章中所讨论过的二项式和切比雪夫多节变换器的通带响应曲线。下面只阐述在低通情况下的最平坦滤波器（通常称为巴特沃斯滤波器）和切比雪夫滤波器。下一节将指出如何通过适当的频率变换（或映象）可以从低通滤波特性得到高通和带通滤波特性。

### 最平坦滤波器特性

取多项式  $Q$  等于 1 和取  $P(\omega^2)$  等于  $k^2(\omega/\omega_c)^{2N}$ ，就得到最平坦低通滤波器的功率损耗比，即

$$P_{LR} = 1 + k^2 \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2N} \quad (8.94)$$

其通带是  $\omega = 0$  到截止值  $\omega_c$  的区域。在通带中  $P_{LR}$  的最大值为  $1 + k^2$ ，因此， $k^2$  称为通带容限。当  $\omega > \omega_c$  时，功率损耗比以依赖于幂数  $2N$  的变化率无限地增加，因而，它又与所用滤波器的节数有关。当  $N = 2$  时，一个典型的滤波器特性曲线如图 8.20 所示。

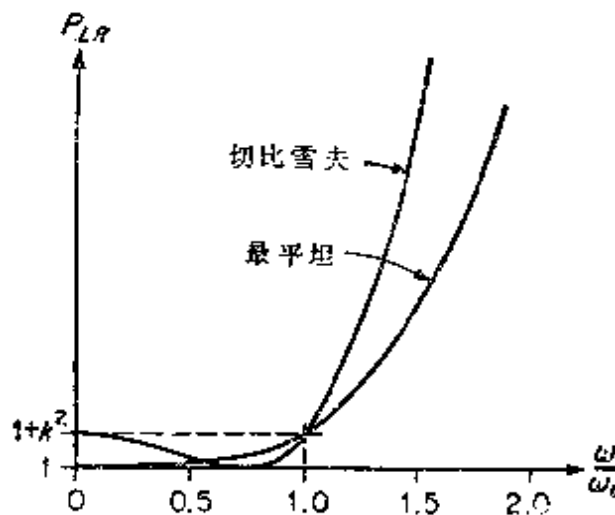


图 8.20  $N = 2$  时，最平坦滤波器和切比雪夫滤波器的低通滤波响应

## 切比雪夫滤波器

等波纹（即切比雪夫）滤波器的功率损耗比选为

$$P_{LR} = 1 + k^2 T_N^2 \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) \quad (8.95)$$

式中， $T_N(\omega/\omega_c)$ 是5.10节所讨论过的 $N$ 次切比雪夫多项式，即为

$$T_N \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) = \cos \left( n \cos^{-1} \frac{\omega}{\omega_c} \right)$$

可见，当 $|\omega/\omega_c| \leq 1$ 时， $T_N(\omega/\omega_c)$ 在 $\pm 1$ 之间摆动；当 $\omega/\omega_c$ 大于1时，它单调地增加。功率损耗比在通带内将在1和 $1+k^2$ 之间摆动。在截止频率时，将等于 $k^2$ ；在 $\omega > \omega_c$ 时，将单调地增加。 $N=2$ 时的一个典型响应曲线表示在图8.20中。与最平坦响应曲线相比，切比雪夫响应曲线的一个突出的特点是在过了截止点以后其上升速率很大。这意味着切比雪夫滤波器有分隔通带和阻带的一个很尖锐的截止区。通常这是一个所需要的特性。

当 $\omega/\omega_c$ 较大时，切比雪夫滤波器的功率损耗比近似为

$$P_{LR} \approx \frac{k^2}{4} \left( \frac{2\omega}{\omega_c} \right)^{2N} \quad (8.96)$$

与最平坦响应曲线比较，它增大为最平坦响应的 $2^{2N-2}$ 倍。事实上，没有一个通带容限为 $k^2$ 的多项式 $P(\omega^2)$ 能比(8.96)式给出的 $P_{LR}$ 具有更高的增加速率。反之，当高于截止频率时的功率损耗比的增加速率给定时，由切比雪夫多项式得到的通带容限最小。在这个意义上，切比雪夫滤波响应可认为是一种最佳的设计。其证明方法与5.11节中用来证明切比雪夫 $\lambda/4$ 变换器的最佳特性的方法相似。

当功率损耗比等于 $1+k^2$ 时，输入端反射系数的大小为

$$\rho = \frac{k}{(1+k^2)^{\frac{1}{2}}}$$

输入电压驻波比为

$$s = \frac{1 + \rho}{1 - \rho} = \frac{(1+k^2)^{\frac{1}{2}} + k}{(1+k^2)^{\frac{1}{2}} - k}$$

若取  $P$  为 1,  $Q$  等于  $k^2 T_N^2(\omega/\omega_c)$ , 则得到具有切比雪夫衰减特性 (即阻带) 的高通滤波器。也可以取  $P$  和  $Q$  使在通带和阻带中都具有切比雪夫特性。但是, 要用微波电路元件以满意的方式来实现它, 通常需要非常复杂的网络

## 8.16 几个低通滤波器的设计

上一节讨论过的最平坦和切比雪夫低通滤波器的功率损耗比, 可以用图 8.21 中所示的电容器和电感器组成的梯形网络的形式来实现。取其负载阻抗等于 1 欧姆, 波源阻抗为  $R$ 。图 8.21b 是图 8.21a 的对偶电路。可以把两个电路设计为具有同样的功率损耗比。当通带为最平坦或切比雪夫响应时, 若元件为奇数, 则梯形网络是对称的。而在最平坦滤波器的情形, 当  $N$  是偶数时, 梯形网络也是对称

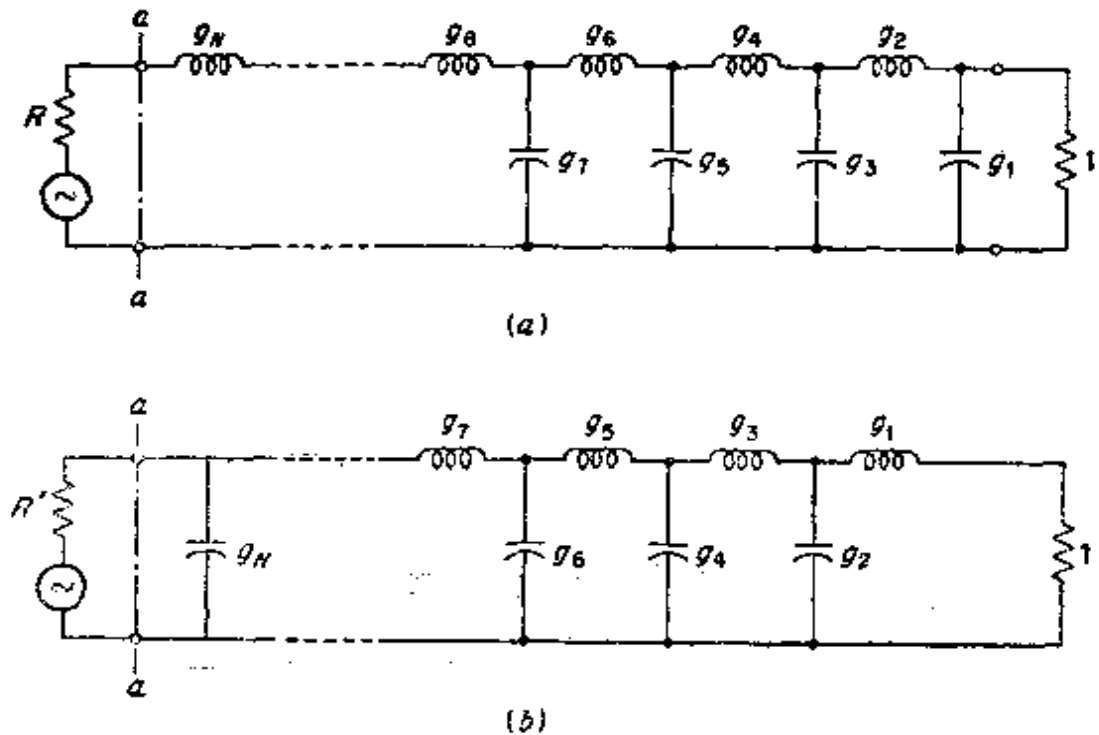


图 8.21 低通梯形原型滤波网络



的。元件的值用 $g_i$ 表示，并且，两个电路都可用 $g_i$ 表示。但是，在图8.21b的网络中所需的波源阻抗 $R'$ 等于 $1/R$ 。当 $N$ 为奇数时， $R$ 和 $R'$ 都等于1。

若令 $Z_{in}$ 为图8.21a的 $aa$ 平面上的输入阻抗，则其反射系数为

$$\Gamma = \frac{Z_{in} - R}{Z_{in} + R}$$

用 $Z_{in}$ 和 $R$ 表示的功率损耗比不难算出为

$$P_{LR} = 1 + \frac{|Z_{in} - R|^2}{2R(Z_{in} + Z_{in}^*)} \quad (8.97)$$

当 $\omega = 0$ 时，所有的电容器的阻抗为无穷大，而所有的电感器的阻抗为零，所以 $Z_{in} = 1$ 。对于 $N$ 为奇数的最平坦滤波器或切比雪夫滤波器，在 $\omega = 0$ 时，功率损耗比必须为1。这要求取波源的阻抗等于1。对于 $N$ 为偶数的切比雪夫滤波器，当 $\omega = 0$ 时， $P_{LR} = 1 + k^2$ ，所以

$$1 + k^2 = 1 + \frac{(1 - R)^2}{4R}$$

或

$$R = 2k^2 + 1 - \sqrt{4k^2(1 + k^2)} = \frac{1}{R'} \quad (8.98)$$

通过求解 $Z_{in}$ 和使(8.97)式所给出的功率损耗比与 $N$ 小于3或4时所要求的功率损耗比相等，就可以很容易得到梯形网络中元件 $g_i$ 所需要的值。作为一个例子，我们研究图8.21a中电路在 $N = 2$ 时的情况。不难求出

$$Z_{in} = j\omega L + \frac{1}{1 + j\omega C}$$

式中， $C = g_1$ ， $L = g_2$ 。利用(8.97)式得

$$P_{LR} = 1 + \frac{(1 - R)^2 + \omega^2(L^2 + C^2 R^2 - 2LC)}{4R + \omega^4 L^2 C^2}$$

为了在 $\omega = 0$ 时使 $P_{LR}$ 等于1，以及为了得到最平坦响应，必须取 $R = 1$ 和 $L^2 + C^2 - 2LC = 0$ ，若对于通带容限为 $k^2$ 的情况下规定截止发生在 $\omega = 1$ 时，则还可得到

$$1 + k^2 = 1 + \frac{L^2 C^2}{4}$$

即 $LC = 2k$ 。从而可得 $L = C = (2k)^{\frac{1}{2}}$ ，为了得到切比雪夫响应，使 $P_{LR}$ 等于

$$1 + k^2 T_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = 1 + k^2 \left[ 2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 - 1 \right]^2$$

便可求出 $L$ 和 $C$ 。

当 $N$ 很大时，上述过程做起来很繁。人们已经作出代替这种直接代入法的一般图解法\*，此外，元件数值表（即 $g_k$ 的值）也由许多人算出来了\*\*。

对于功率损耗比为

$$P_{LR} = 1 + \omega^{2N} \quad (8.99)$$

的最平坦网络，其元件值为

$$R = 1 \quad (8.100a)$$

$$g_k = 2 \sin \frac{2k-1}{2N} \pi$$

$$k = 1, 2, \dots, N \quad (8.100b)$$

式中， $g_k$ 是以亨利为单位的电感值，或者是以法拉为单位的电容值。

对于 $\omega_c = 1$ 的切比雪夫低通滤波器，其元件值为

\* V. Belevitch, *Chebyshev Filters and Amplifier Networks*, *Wireless Eng.*, Vol. 29, pp. 106—107, April, 1952.

\*\* L. Weinberg, *Network Design by Use of Modern Synthesis Techniques and Tables*, *Proc. Natl. Electron. Conf.*, Vol. 12, 1956.  
S. Cohn, *Direct Coupled Resonator Filters*, *Proc. IRE*, Vol. 45, pp. 137—196, February, 1957. 也可看 “*The Microwave Engineers' Handbook*,” *Horizon House, Inc.*, 1963—1964.

$$R = \begin{cases} 1 & N \text{ 为奇数时} & (8.101a) \\ 2k^2 + 1 - 2k\sqrt{1+k^2} & N \text{ 为偶数时} & (8.101b) \end{cases}$$

$$g_k = \frac{1a_{k-1}a_k}{b_{k-1}g_{k-1}} \quad (8.101c)$$

式中

$$a_k = \sin \frac{2k-1}{2N} \pi$$

$$b_k = \sinh^2 \frac{\beta}{2N} + \sin^2 \frac{k\pi}{N}$$

$$\beta = \ln \frac{\sqrt{1+k^2} - 1}{\sqrt{1+k^2} + 1}$$

对于切比雪夫滤波器，表8.1和8.2给出了  $N \leq 5$ 、 $\omega_c = 1$  和通带容限  $k^2 = 0.0233$ （在通带内波纹为0.1分贝）时的  $g_k$  的数值，在所引用的参考文献中给出了范围更大的表。

表 8.1 最平坦滤波器的  $g_k$  值

$k$	$N$			
	2	3	4	5
1	1.414	1.00	0.7654	0.6180
2	1.414	2.00	1.848	1.618
3		1.00	1.848	2.000
4			0.7654	1.618
5				0.6180

表 8.2 切比雪夫滤波器的  $g_k$  值 ( $k^2 = 0.0233$ )

$k$	$N$			
	2	3	4	5
1	0.8130	1.0315	1.1088	1.1468
2	0.6220	1.1474	1.3061	1.3712
3		1.0315	1.7703	1.9750
4			0.8180	1.3712
5				1.1468

## 8.17 频率变换

在 $\omega_c = 1$ 时截止且端接 1 欧姆负载阻抗的低通滤波器，可以作为设计端接任意电阻性负载的高通和带通滤波器的基础。因此，把它称为原型滤波器。在这一节中，为了方便，用 $\omega'$ 来表示低通原型滤波器的频率变量。于是最平坦和切比雪夫响应的功率损耗比可表示为如下的形式：

$$P_{LR} = 1 + P(\omega'^2) \quad (8.102)$$

如要使端接负载 $R_L$ 不等于 1 欧姆，则可用 $R_L$ 乘所有其他的电抗和波源电阻来得到所需要的滤波器。也就是说，可以把原型滤波器的电抗看作相对于 $R_L$ 作归一化。新的电感和电容值为

$$L_k' = R_L L_k \quad (8.103a)$$

$$C_k' = \frac{C_k}{R_L} \quad (8.103b)$$

$$R' = R_L R \quad (8.103c)$$

这里， $R'$ 表示 $R$ 的新值，而不是图 8.21b 对偶电路中的波源电阻。下面讨论频率变换时，假定取 1 欧姆为端接负载，因为滤波器阻抗水平的改变可在设计过程的最后步骤中作出。

若按照下式

$$\omega' = f(\omega)$$

用新变量来代替频率变量 $\omega'$ ，则功率损耗比便成为

$$P_{LR} = 1 + P(\omega'^2) = 1 + P(f^2(\omega)) \quad (8.104)$$

作为 $\omega'$ 或 $f$ 的函数，此功率损耗比是低通原型滤波器的，而作为 $\omega$ 的函数，它随所取 $f(\omega)$ 的不同而具有不同的特性。以下研究几个频率变换（或映象）问题。

### 频率扩展

若使截止频率由 1 变为另一值 $\omega_c$ ，则取

$$f(\omega) = \frac{\omega}{\omega_c}$$

于是,

$$P_{LR} = 1 + P\left(-\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right) \quad (8.105)$$

截止发生在宗量 $\omega/\omega_c$ 等于1或 $\omega = \omega_c$ 时。当 $\omega'$ 变为 $\omega/\omega_c$ 时,为了得到(8.105)式的功率损耗比,在原型滤波器中的串联电抗和并联电纳必须用新的电抗和电纳代替:

$$jX_k' = j\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)L_k \quad jB_k' = j\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)C_k$$

由这两个式子可见, $L_k$ 和 $C_k$ 新的值必须为

$$L_k' = \frac{L_k}{\omega_c} \quad (8.106a)$$

$$C_k' = \frac{C_k}{\omega_c} \quad (8.106b)$$

图8.22a和b中,对于用 $\omega'$ 和 $\omega$ 表示的功率损耗比作了比较。

### 由低通到高通的变换

取 $f(\omega)$ 等于 $-\omega_c/\omega$ ,就得到高通滤波器的功率损耗比

$$P_{LR} = 1 + P\left(-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) \quad (8.107)$$

这种频率变换是把 $\omega' = 0$ 的点变换为 $\omega = \pm\infty$ 的点,把 $\omega' = \pm 1$ 的点变换为 $\omega = \mp\omega_c$ 的点,以及把 $\omega' = \pm\infty$ 的点变换为 $\omega = 0$ 的点。其结果是交换了通带和阻带区域,如图8.22a和c所示。为了得到(8.107)式的功率损耗比,新的滤波器中的串联电抗和并联电纳必须按下式选取:

$$jX_k' = -j \cdot \frac{\omega_c}{\omega} L_k \quad jB_k' = -j \frac{\omega_c}{\omega} C_k$$

由此两式可以看出,所有的电感 $L_k$ 必须用电容 $C_k'$ 来代替,所有的

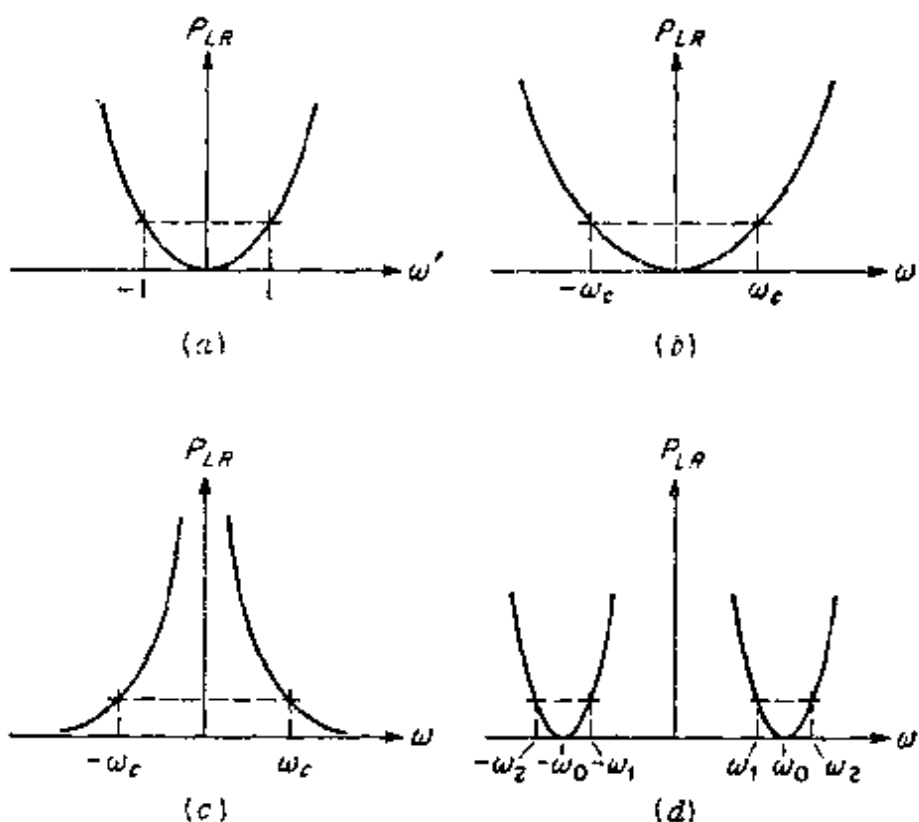


图 8.22 (a) 低通原型滤波响应, (b) 频率扩展, (c) 由低通到高通的变换, (d) 由低通到带通的变换。

电容  $C_k$  必须用  $L_k'$  来代替, 即

$$C_k' = \frac{1}{\omega L_k} \quad (8.108a)$$

$$L_k' = \frac{1}{\omega C_k} \quad (8.108b)$$

### 由低通到带通的变换

为了得到带通滤波器, 我们使变量按下式变换:

$$\omega' = f(\omega) = -\frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad (8.109)$$

可以将此方程对  $\omega$  求解得出

$$\omega = \omega' \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \frac{\omega_1}{\omega_2} \pm \sqrt{\omega'^2 \left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right)^2 + \omega_0^2}$$

若又取  $\omega_0^2 = \omega_1 \omega_2$ , 则得

$$\omega = \omega' \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\omega'^2 (\omega_2 - \omega_1)^2 + 4\omega_1 \omega_2} \quad (8.110)$$

可见,  $\omega' = 0$  点变换为  $\omega = \pm \omega_0$  点,  $\omega' = \pm 1$  点变换为  $\pm (\omega_2 - \omega_1) / 2 \pm (\omega_2 + \omega_1) / 2 = \pm \omega_2$  和  $\pm \omega_1$  四个点。于是, 在  $\pm 1$  之间的原型滤波器通带变换为由  $\omega_1$  扩展到  $\omega_2$ , 和由  $-\omega_1$  扩展到  $-\omega_2$  的通带, 它代表以  $\pm \omega_0$  ( $\omega_0$  等于  $\omega_1$  和  $\omega_2$  的几何平均值) 为频带中心的带通

滤波器, 如图 8.22d 所示。

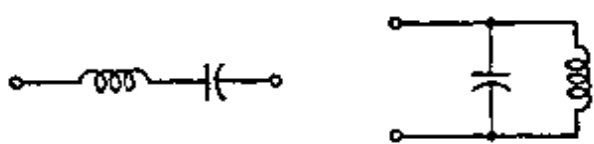


图 8.23 串联和并联调谐电路

研究  $L$  和  $C$  的串联和并联电路的频率特性, 可以导出所需要的滤波元件, 如图 8.23 所

示。对于串联电路为

$$\begin{aligned} jX' &= j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \\ &= j\sqrt{\frac{L}{C}} \left( \omega \sqrt{LC} - \frac{1}{\omega \sqrt{LC}} \right) \end{aligned}$$

对于并联电路为

$$\begin{aligned} jB &= j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \\ &= j\sqrt{\frac{C}{L}} \left( \omega \sqrt{LC} - \frac{1}{\omega \sqrt{LC}} \right) \end{aligned}$$

若使  $\sqrt{LC}$  等于  $\omega_0^{-1}$ , 则得

$$\begin{aligned} jX' &= j\sqrt{\frac{L}{C}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \\ jB' &= j\sqrt{\frac{C}{L}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \end{aligned}$$

若用如下的串联和并联调谐电路的电抗和电纳:

$$jX_s' = j\sqrt{\frac{L_s'}{C_s'}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= jL_k \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \\
 jB_k' &= j\sqrt{\frac{C_k'}{L_k'}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \\
 &= jC_k \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)
 \end{aligned}$$

代替原型滤波器中的电抗  $jX_k = j\omega L_k$  和电纳  $jB_k = j\omega C_k$ ，就可以得到所需要的频率变换。对于串联电路，需取

$$L_k' C_k' = \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \quad (8.111a)$$

$$\sqrt{\frac{L_k'}{C_k'}} = \omega_0 L_k' = \frac{\omega_0 L_k}{\omega_2 - \omega_1}$$

即

$$L_k' = \frac{L_k}{\omega_2 - \omega_1} \quad (8.111b)$$

对于并联电路，需取

$$L_k' C_k' = \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \quad (8.112a)$$

$$\sqrt{\frac{C_k'}{L_k'}} = \omega_0 C_k' = \frac{\omega_0 C_k}{\omega_2 - \omega_1}$$

即

$$C_k' = \frac{C_k}{\omega_2 - \omega_1} \quad (8.112b)$$

图8.24表示出整个滤波器网络。

### 周期性带通变换

频率变换的一般概念亦可应用于其他方面。但都需要用另外的电抗和电纳函数（它们是用  $\omega$  的新函数  $f(\omega)$  代替了  $\omega'$  的函数的）来代替原型滤波器中电抗  $j\omega' L_k$  和电纳  $j\omega' C_k$ 。我们再来研究一个例



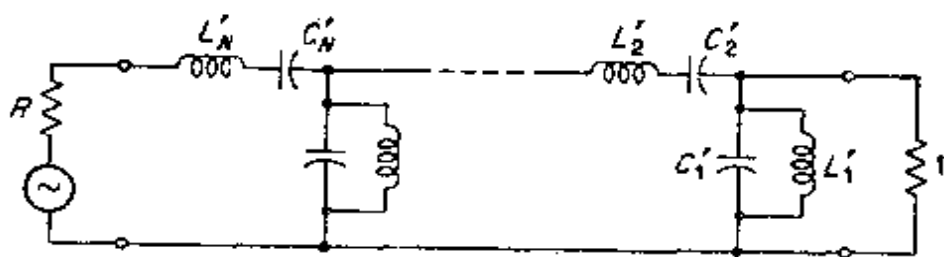


图 8.24 一个带通滤波网络

子；用长为  $l$ 、特性阻抗为  $Z_k$  的短路传输线短截线代替所有的  $L_k$ ，以及用长为  $l$  特性导纳为  $Y_k$  的开路线短截线代替所有的  $C_k$  的结果。新的电抗和电纳函数为

$$jX'_k = jZ_k \tan\left(\frac{\omega}{c} l\right) = jZ_k \tan \theta = jg_k \tan \theta$$

$$jB'_k = jY_k \tan \theta = jg_k \tan \theta$$

这个滤波器表示在图8.25中，且其功率损耗比为

$$P_{LR} = 1 + P(\tan^2 \theta) \quad (8.113)$$

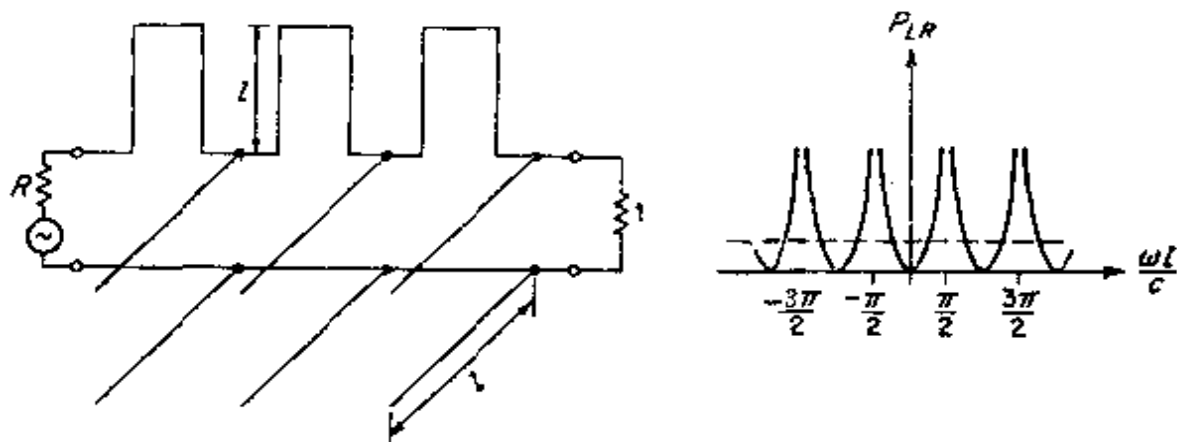


图 8.25 由低通原型滤波器通过频率变换得到的传输线滤波器及其响应

频率变换  $\omega' = \tan(\omega l/c) = \tan \theta$  把整个  $\omega'$  轴周期性地变换成  $\theta$  域中长度为  $\pi$  的间隔，或  $\omega$  域中长度为  $\pi c/l$  的间隔。这个滤波器在这样的低频下是令人满意的，即这时短截线接于主线处的接头效应可以忽略，并且能够保持两短截线之间的间隔比波长小得多\*。

\*如果滤波器由相应长度的传输线和电阻所组成，则出现的频率变量还是  $\tan(\omega l/c)$ 。在此情况下，允许应用通常的低频网络综合方法，对  $\omega' = \tan(\omega l/c)$  作频率变换。参看本章末所列参考文献 7、9 和 15。

由低通原型滤波器通过频率变换所导出的滤波器中，会交替地出现串联和并联谐振电路，在微波频率下，这是一种不希望有的特性，因为用微波元件难以组成这类滤波器。但是，有可能把具有串联调谐元件的滤波器变为只包含级联连接的并联调谐电路的等效滤波器，或者把这种电路变为只包含串联调谐电路的等效滤波器。下一节将讨论利用阻抗倒量变换器和导纳倒量变换器或者 $\lambda/4$ 变换器可以得到所希望的变换。

## 8.18 阻抗倒量变换器

阻抗倒量变换器是一个理想的四分之一波长变换器。一个接到倒量变换器的负载阻抗，从输入端看，其阻抗已倒换成为 $\lambda/4$ 线的特性阻抗的平方和负载阻抗的倒数相乘。阻抗倒量变换器可以用来把图8.24中所示的这类带通滤波网络倒换成只包含串联调谐电路的网络。

我们研究一个按照8.17节所介绍的方法根据低通原型滤波器设计的带通滤波器。假定其阻抗水平已被调整到使终端负载阻抗为 $R_L$ ，而不是1欧姆。用 $R_0$ 表示波源的阻抗，这里的 $R_0 = RR_L$ ，且当 $N$ 为奇数时 $R_0$ 等于 $R_L$ 。对于最平坦滤波器，当 $N$ 为偶数时， $R_0$ 也等于 $R_L$ 。这个网络的参数用 $L_k'$ 和 $C_k'$ 表示。图8.26 a 表示这个网络。图8.26 b 表示利用阻抗倒量变换器所得到的等效网络。在元件 $C_{0k}$ 、 $L_{0k}$ 和 $C_{0k+1}$ 、 $L_{0k+1}$ 之间的倒量变换器的特性阻抗为 $K_{k+1, k}$ 。所有的电容和电感的选取使得

$$L_k' C_k' = L_{0k} C_{0k} = \omega_0^{-2} \quad (8.114)$$

但是，为了使设计适应各种情况，我们允许整个网络的阻抗水平任意地变化。于是，可以任意地选取所有的参数 $R_{0k}$ 、 $R_{0k}$ 和 $L_{0k}$ ，其中， $k = 1, 2, \dots, N$ ，因而各个倒量变换器的特性阻抗就被确定，如下面分析所示。

对图8.26 a 的网络直接计算表明， $aa$ 平面向 $R_L$ 看进去的输入

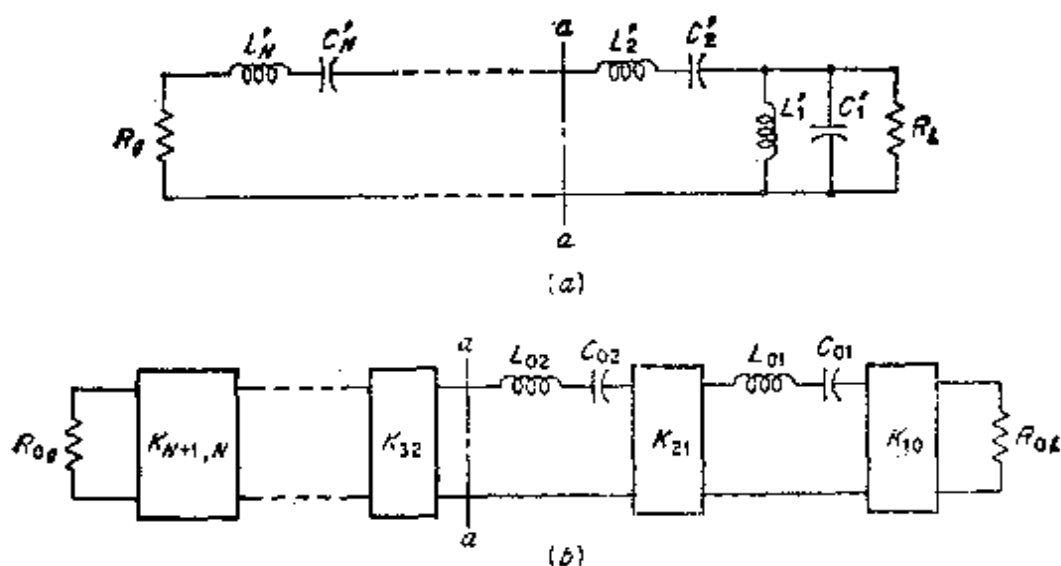


图 8.26 (a)带通滤波器网络; (b)利用阻抗倒量变换器得到的等效网络。

阻抗为

$$\begin{aligned}
 Z_{in} &= j\omega L'_2 + \frac{1}{j\omega C'_2} + \frac{j\omega L'_1}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + j\omega L'_1/R_L} \\
 &= \sqrt{\frac{L'_2}{C'_2}} \left[ j \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\frac{C'_2}{L'_2}} \frac{j\omega L'_1}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + j\omega L'_1/R_L} \right] \quad (8.115)
 \end{aligned}$$

对于图8.26 b 的电路, 第一个倒量变换器输入端的输入阻抗为  $K_{10}^2/R_{0L}$ 。把它与阻抗  $j\omega L_{01} + 1/j\omega C_{01}$  相加后, 通过  $K_{21}^2$  倒换, 再与阻抗  $j\omega L_{02} + 1/j\omega C_{02}$  串联, 就可得出  $aa$  平面上的输入阻抗为

$$\begin{aligned}
 Z_{a,a} &= \sqrt{\frac{L_{02}}{C_{02}}} \left[ j \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\frac{C_{02}}{L_{02}}} \frac{j\omega K_{21}^2 C_{01}}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + j\omega C_{01} K_{10}^2/R_{0L}} \right] \quad (8.116)
 \end{aligned}$$

把 (8.116) 式和 (8.115) 式进行比较可以看出, 若使它们在方括号内的量相同, 则除了用常数  $\sqrt{L_{02}/C_{02}}$  代替  $\sqrt{L'_2/C'_2}$  (它们表

示阻抗水平的变化)外,它们是 $\omega$ 的同一种函数。于是,可令

$$\frac{K_{10}^2 C_{01}}{R_{0L}} = \frac{L_1}{R}$$

或

$$K_{10} = \sqrt{\frac{L_1' R_{0L}}{C_{01}' R_L}} = \sqrt{\frac{L_{01} R_{01}}{C_1' R_L}} \quad (8.117)$$

式中的第二个等式是由于 $L_1'/C_{01}' = L_{01}/C_1'$  (因为 $L_1' C_1' = L_{01}$ ,  $C_{01}' = \omega_0^{-2}$ )而得到的。同理,可令

$$\sqrt{\frac{C_{02}}{L_{02}}} K_{21}^2 C_{01} = \sqrt{\frac{C_2'}{L_1'}} L_1'$$

由此可得

$$K_{21} = \sqrt{\frac{L_{02} L_{01}}{C_1' L_1'}} \quad (8.118)$$

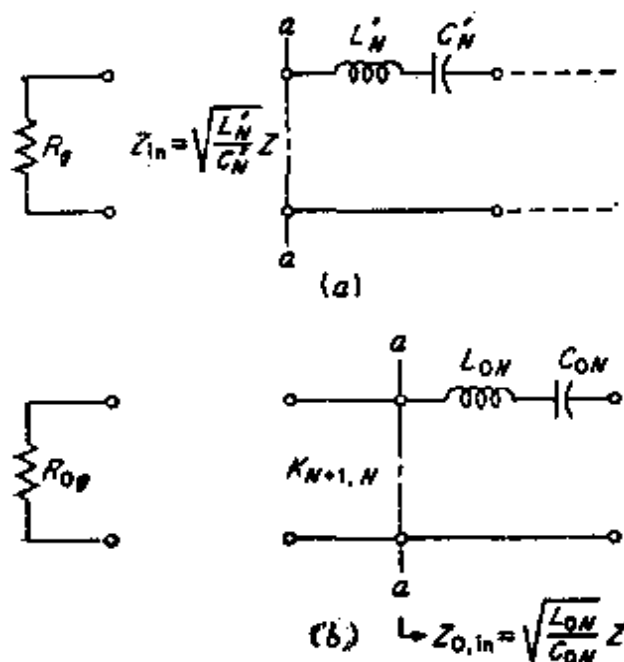
根据上面所取的 $K_{10}$ 和 $K_{21}$ 可知,除了阻抗水平变化以外,两个网络具有同样的输入阻抗函数。对图8.26 a 的网络,  $aa$ 平面上的输入阻抗应该用 $\sqrt{L_2'/C_2'} Z$ 表示,而对图8.26 b 中的网络,它应等于 $\sqrt{L_{02}/C_{02}} Z$ 。若重复前面的分析去求第四个和第五个单元之间连接处的输入阻抗,则得到类似的结果。只要用 $L_3'$ 、 $C_3'$ 代替 $L_1'$ 、 $C_1'$ 。用 $L_4'$ 、 $C_4'$ 代替 $L_2'$ 、 $C_2'$ 等等,并用 $\sqrt{L_2'/C_2'} Z$ 代替 $R_L$ 和用 $\sqrt{L_{02}/C_{02}} Z$ 代替 $R_{0L}$ ,就不难得到所求的阻抗。使 $K_{10}$ 和 $K_{21}$ 表示式作上述改变,也可以得出使这两个网络之间保持电方面等效所需要的 $K_{32}$ 和 $K_{43}$ 的值。所以,由(8.117)式得

$$K_{32} = \sqrt{\frac{L_{03}}{C_3'} \left( \frac{L_{02}}{C_{02}} \frac{C_2'}{L_1'} \right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{L_{02} L_{03}}{L_2' C_3'}} \quad (8.119)$$

$$K_{43} = \sqrt{\frac{L_{03} L_{04}}{C_3' L_4'}} \quad (8.120)$$

用归纳法,或者重复上述步骤,可一般地( $k \leq N$ )求得

$$K_{k,k-1} = \begin{cases} \sqrt{\frac{L_{0k}L_{0k-1}}{L'_k C'_{k-1}}} & k \text{ 为偶数时} & (8.121a) \\ \sqrt{\frac{L_{0k}L_{0k-1}}{C'_k L'_{k-1}}} & k \text{ 为奇数时} & (8.121b) \end{cases}$$



对最后一个倒量变换器，首先研究  $N$  为偶数的情况。图 8.26 a 的滤波器中最后一个单元是串联支路。参照图 8.27，并按照 (8.115) 式和 (8.116) 式来推论，可知  $aa$  平面上的输入阻抗分别为

$$Z_{in} = \sqrt{\frac{L'_N}{C'_N}} Z$$

$$Z_{0,in} = \sqrt{\frac{L_{0N}}{C_{0N}}} Z$$

式中的  $Z$  对两个网络都是相同的。图 8.27 a 的网络端接阻抗

图 8.27  $N$  为偶数时滤波器的最后一节

$R_g$  是合适的。对图 8.27 b 的网络，如果不用阻抗倒量变换器，合适的终端阻抗应是  $R_g$  乘两个网络中阻抗水平之比，即

$$R'_{0g} = \frac{R_g \sqrt{L_{0N}/C_{0N}}}{\sqrt{L'_N/C'_N}} = R_g \sqrt{\frac{L_{0N}C'_N}{L'_N C_{0N}}}$$

但是，如果添加一个阻抗倒量变换器，就可以选取任意的端接阻抗  $R_{0g}$ ，只要倒量变换器所取的特性阻抗  $K_{N+1,N}$  能使  $R_{0g}$  在图 8.27 b 的  $aa$  平面上呈现负载阻抗  $R_{0g}'$  就行。所以，要求  $K_{N+1,N} = \sqrt{R_{0g} R_{0g}'}$ 。注意到

$$\frac{L_{0N}C'_N}{L'_N C_{0N}} = \frac{L_{0N}^2}{L_N'^2}$$

并利用前述的  $R_{0g}'$  表示式，可得

$$K_{N+1,N} = \sqrt{\frac{R_{0g} R_{\Sigma} L_{0N}}{L'_N}} \quad N \text{ 为偶数时} \quad (8.122)$$

当  $N$  为奇数时，原型滤波器中的最后一节为并联支路。在这种情况下，我们得到图 8.28 所表示的情况。在  $aa$  平面上的输入阻抗分别为

$$\begin{aligned} Z_{i_s} &= \left( j\omega C'_N + \frac{1}{j\omega L'_N} + \sqrt{\frac{C'_{N-1}}{L'_{N-1}}} \frac{1}{Z} \right)^{-1} \\ &= \sqrt{\frac{L'_N}{C'_N}} \left[ j \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) + \frac{1}{Z} \sqrt{\frac{L'_N C'_{N-1}}{C'_N L'_{N-1}}} \right]^{-1} \\ Z_{0,i_s} &= K_{N+1,N}^2 \left( j\omega L_{0N} + \frac{1}{j\omega C_{0N}} + \frac{K_{N,N-1}^2}{Z} \sqrt{\frac{C_{0N-1}}{L_{0N-1}}} \right)^{-1} \\ &= K_{N+1,N} \sqrt{\frac{C_{0N}}{L_{0N}}} \left[ j \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{K_{N,N-1}^2}{Z} \sqrt{\frac{C_{0N} C_{0N-1}}{L_{0N} L_{0N-1}}} \right]^{-1} \end{aligned}$$

因为两个网络的  $Z$  是相同的，所以，由选取  $K_{N,N-1}$  的方法（见 (8.121b)）看来， $Z_{0,i_s}$  和  $Z_{i_s}$  式中的方括号内的量是相同的。于

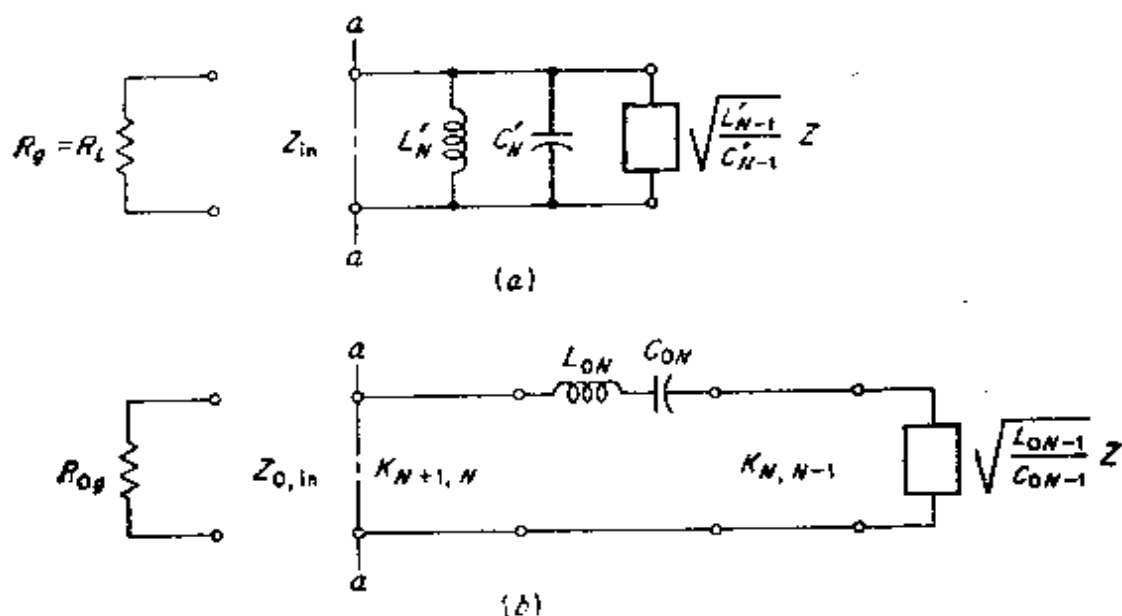


图 8.28  $N$  为奇数时滤波器的最后一节

是，两个网络的相对阻抗水平为 $\sqrt{L'_N/C'_N}$ 和 $K^2_{N+1,N}\sqrt{C_{0N}/L_{0N}}$ 。两个端接阻抗 $R_g=R_L$ 和 $R_{0g}$ 必须正比于各自的阻抗水平，所以

$$\frac{R_{0g}}{R_L} = K^2_{N+1,N} \sqrt{\frac{C_{0N}C'_N}{L_{0N}L'_N}}$$

从而得

$$K_{N+1,N} = \sqrt{\frac{R_{0g}L_{0N}}{R_L C'_N}} \quad N \text{ 为奇数时} \quad (8.123)$$

倒量变换器所需的特性阻抗至此已全部确定了。

用导纳倒量变换器也可以把图8.26 a 的网络变换成只含有并联调谐电路的等效网络。图8.29画出了这个等效电路。同样，也必须

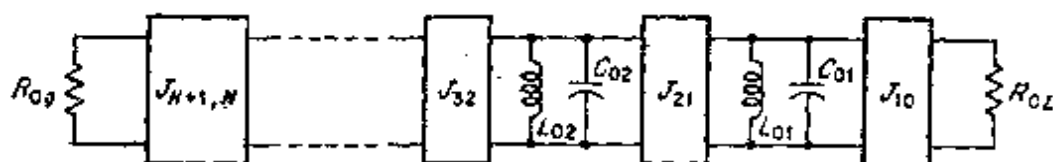


图 8.29 利用导纳倒量变换器得到的等效滤波器网络

有 $L_{0k}C_{0k} = \omega_0^{-2}$ ，而且，如果此倒量变换器的特性导纳 $J_{k,k-1}$ 满足下列关系：

$$J_{10} = \sqrt{\frac{C_{01}}{C'_1 R_{0L} R_L}} \quad (8.124a)$$

$$J_{k,k-1} = \sqrt{\frac{C_{0k}C_{0k-1}}{C'_k L'_{k-1}}} \quad k \text{ 为奇数时} \quad (8.124b)$$

$$J_{k,k-1} = \sqrt{\frac{C_{0k}C_{0k-1}}{L'_k C'_{k-1}}} \quad k \text{ 为偶数时} \quad (8.124c)$$

$$J_{N+1,N} = \sqrt{\frac{C_{0N}}{C'_N R_g R_{0g}}} \quad N \text{ 为奇数时} \quad (8.124d)$$

$$J_{N+1,N} = \sqrt{\frac{C_{0N}R_g}{L'_N R_{0g}}} \quad N \text{ 为偶数时} \quad (8.124e)$$

则所有的 $L_{0k}$ 和电阻性端接负载 $R_{0L}$ 和 $R_g$ 可以任意选取。注意：当 $N$ 为奇数时，在原型电路中同样有 $R_g=R_L$ 。这些表示式的推导，与

阻抗倒量变换器所采用的推导一样。

前面分析中所使用的阻抗和导纳倒量变换器，已假定是与频率无关的、电长度为 $\pi/2$ （不随频率变化）的理想 $\lambda/4$ 变换器。当然，这样的理想倒量变换器是不存在的。但是，其理论能够应用于实际中。对于频带很窄的带通滤波器（比如说带宽为百分之一或二）来说， $\lambda/4$ 传输线或波导与电长度为 $\pi/2$ 的理想倒量变换器没有显著的差异。在理想倒量变换器基础上设计的滤波器，其响应应非常接近于理论上的响应。对于频带较宽的带通滤波器来说， $\lambda/4$ 变换器与理想变换器的差别，可用下面的方式结合到设计中去考虑，即把变换器分成一个理想变换器和附加于其两侧的两段短传输线，以表示相移大于或小于理想的 $90^\circ$ 相移。例如，一个波长为 $\lambda_0$ 时长为 $0.3\lambda_0$ 的变换器，可当作一个长为 $0.25\lambda_0$ 的变换器在其两侧附加长为 $0.025\lambda_0$ 的两段传输线。传输线的多余长度可以并入到倒量变换器两侧谐振电路中，使之成为其中的一部分。

图8.30表示起阻抗倒量变换器或导纳倒量变换器作用的集总参数电路以及它们的等效特性阻抗或导纳。

这些电路包含了负元件，并且都是频率的函数。但是，可以把负元件并入相邻谐振电路的元件中，以便在总的网络中消去它们。因此，滤波器可由若干调谐电路组成，各调谐电路间通过单个电抗元件耦合，如图8.31所示。下面几节讨论这些方法在微波滤波器设计中的应用。

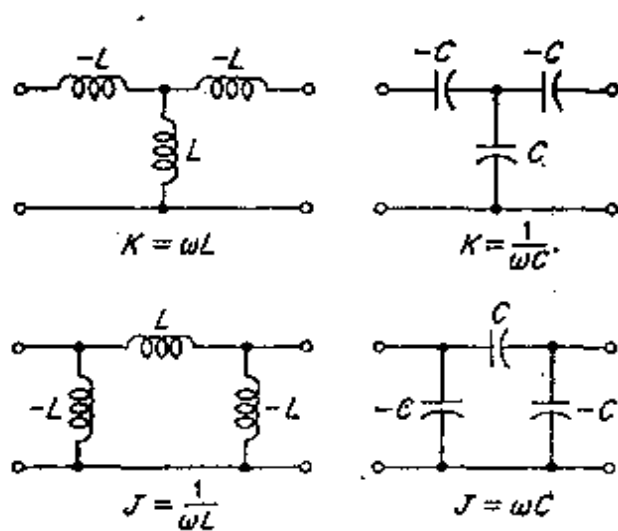


图 8.30 集总元件倒量变换器



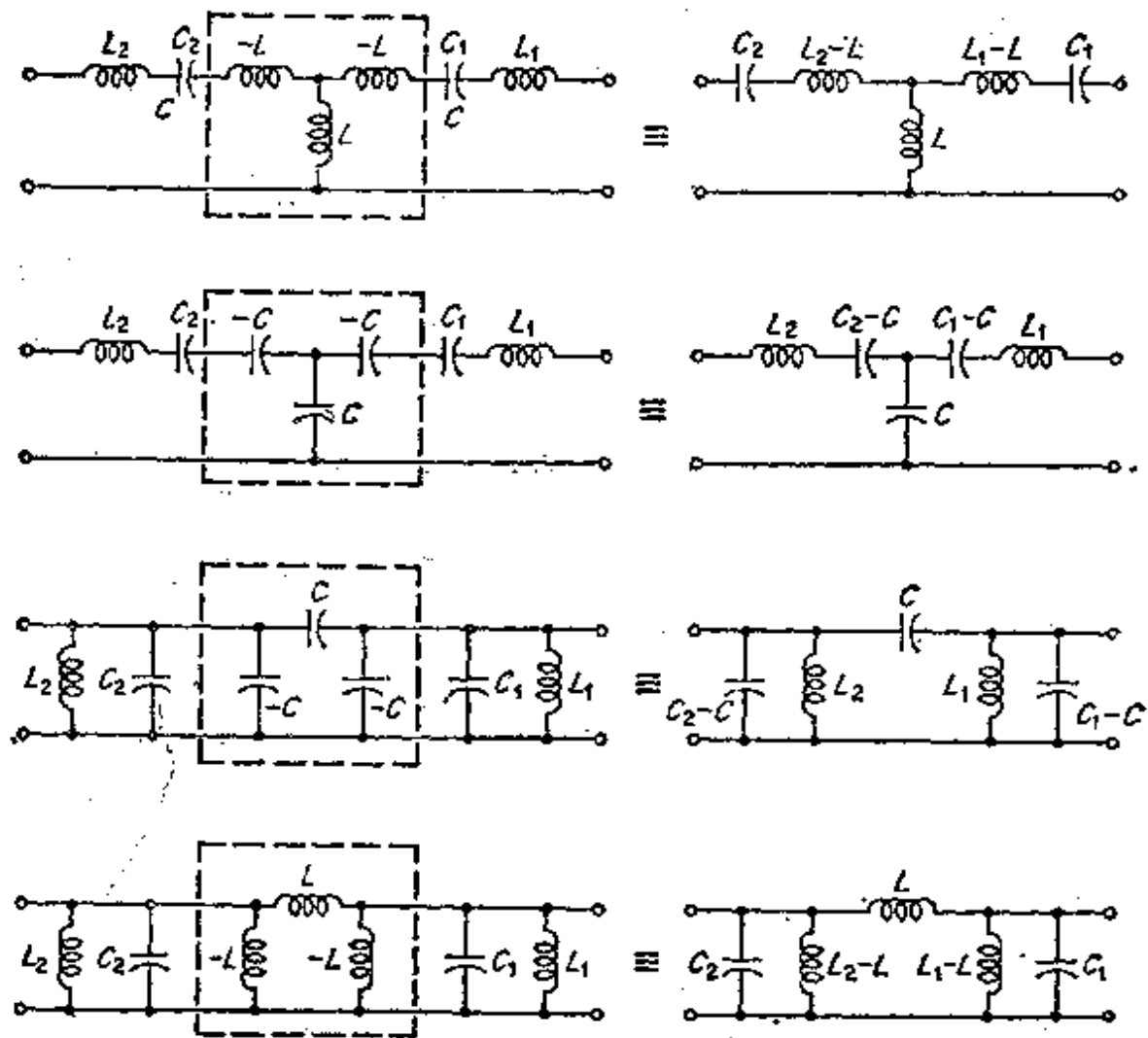


图 8.31 利用集总元件倒置变换器得到的电抗耦合的谐振器型电路

## 8.19 传输线滤波器

前面的设计公式最初用来设计 $\lambda/4$ 耦合短路并联短截线滤波器。图8.32中表示的是一个这种类型的三节滤波器。我们来研究一个窄带滤波器（相对带宽为百分之二），这样，可以在整个通带内把短截线之间的 $\lambda/4$ 传输线段当作一个具有 $90^\circ$ 相移的理想变换器。若在频率为 $\omega_0$ 时短截线的长度为 $\lambda/4$ ，则在 $\omega_0$ 附近短截线的归一化输入导纳为（参看（7.20）式）

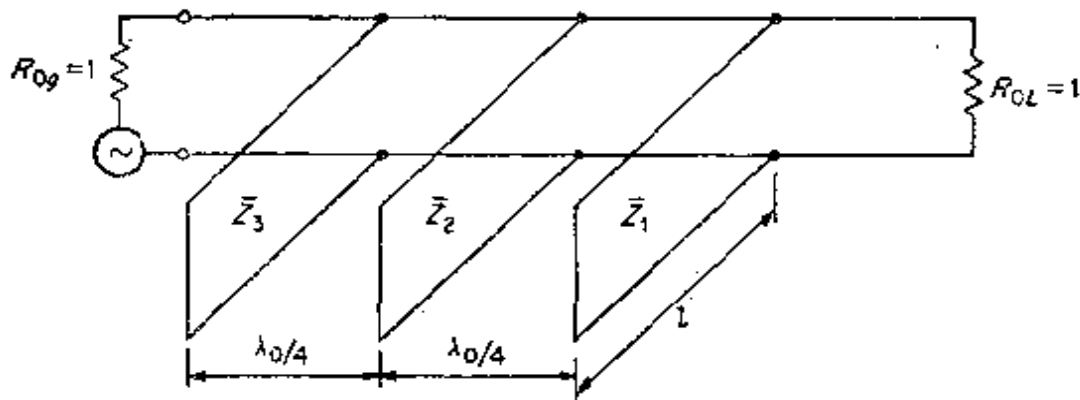


图 8.32 利用  $\lambda/4$  耦合短截线滤波器

$$\bar{Y}_{in} = j\bar{Y}(\omega - \omega_0) \frac{l}{c} = j\bar{Y} \frac{\pi}{2} \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \quad (8.125)$$

式中， $l$  是短截线的长度， $\bar{Y}$  是短截线的归一化特性导纳， $\omega_0 l/c = \pi/2$ 。并联调谐电路的输入导纳为

$$\begin{aligned} Y_{in} &= j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = j\sqrt{\frac{C}{L}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \\ &\approx j2\sqrt{\frac{C}{L}} \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = j2C(\omega - \omega_0) \end{aligned} \quad (8.126)$$

因此，此短路短截线在使其长度为  $\lambda/4$  长的频率附近表现为一个具有  $\sqrt{C/L} = \bar{Y} \pi/4$  的并联调谐电路。这些并联短截线可以当作图 8.29 中滤波器网络中的并联谐振电路。

我们规定此滤波器的两个端接阻抗是相等的，并都等于主线的特性阻抗。当对端接阻抗归一化时，短截线的特性阻抗用  $Z_1$ 、 $Z_2$  等表示。此时，整个滤波器的阻抗水平保持恒定，且  $J_{n,n-1}$  必然都等于 1。

我们对这个三元件滤波器规定如下的技术条件：

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 1000 \text{ 兆赫} \quad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 1020 \text{ 兆赫}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\sqrt{\omega_1 \omega_2}}{2\pi} = 1009.95 \text{ 兆赫} \quad k^2 = 0.0233$$

具有切比雪夫响应的归一化低通原型滤波器的元件值，由表8.2给出为  $g_1 = 1.0315 = g_3, g_2 = 1.1474$ 。图8.24的带通原型滤波器所需要的元件值由(8.111)式和(8.112)式得出，且为

$$C'_1 = \frac{g_1}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{1.0315}{2\pi(2 \times 10^7)} = C'_3 = 5.1575 \times 10^{-8} \times (2\pi)^{-1}$$

$$L'_2 = \frac{g_2}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{1.1474}{2\pi(2 \times 10^7)} = 5.737 \times 10^{-8} \times (2\pi)^{-1}$$

此外，对所有的  $k$  值，要求  $L'_k C'_k = \omega_0^{-2}$ 。为求出图8.29的滤波器网络中所需要的元件值，可利用(8.124)式。当  $R_{0L} = R_L = 1$  时，由(8.124a)式，为了使  $J_{10} = 1$  而得  $C_{01} = C'_1$ 。由于  $J_{21}$  必须等于1，故由(8.124c)式得  $C_{02} C_{01} = L'_2 C'_1$  或  $C_{02} = L'_2$ 。同理，由于  $J_{32} = 1$ ，由(8.124b)式可得  $C_{03} C_{02} = C'_3 L'_2$ ，或  $C_{03} = C'_3$ 。这里也同样要求  $C_{0k} L_{0k} = \omega_0^{-2}$ 。由这些关系式可算出比值

$$\left( \frac{C_{0k}}{L_{0k}} \right)^{\frac{1}{2}} = \omega_0 C_{0k}$$

并求得

$$\omega_0 C_{01} = \omega_0 C'_1 = 5.1575 \times 10^{-8} \frac{\omega_0}{2\pi} = \omega_0 C_{03}$$

$$\omega_0 C_{02} = \omega_0 L'_2 = 5.737 \times 10^{-8} \frac{\omega_0}{2\pi}$$

由(8.125)式和(8.126)式，可得出短截线的归一化导纳为

$$\bar{Y}_k = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{C_{0k}}{L_{0k}}} = \frac{4\omega_0}{\pi} C_{0k} = \frac{2c}{l} C_{0k} \quad (8.127)$$

所以

$$\bar{Y}_1 = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{C_{01}}{L_{01}}} = \frac{4}{\pi} \omega_0 C_{01} = \frac{4}{\pi} \frac{\omega_0 g_1}{\omega_2 - \omega_1} = \bar{Y}_3 = 66.5$$

$$\bar{Y}_2 = \frac{4}{\pi} \frac{\omega_0 g_2}{\omega_2 - \omega_1} = 73.6$$

由于所需要的归一化特性导纳很大，故在实际上要得到它们可能是困难的。若短截线用介质加载，则导纳增加到 $\epsilon^{\frac{1}{2}}$ 倍，其中， $\epsilon$ 是相对电容率。利用介质填充，将使短截线的两导体间可有较大的距离。此外，可以做成长度为 $3\lambda_0/4$ 的短截线，它使(8.125)式中的 $\bar{Y}_k$ 增大到三倍，即为 $j\bar{Y} \frac{3\pi}{2} \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$ 。这将使所需要的短截线导纳减小到1/3。当 $\bar{Y}_k$ 所需的值已知时，就可以确定短截线的尺寸，从而完成滤波器的机械设计。

当带宽大于5%时，上述方法由于忽略了 $\lambda/4$ 导纳倒量变换器对频率的依赖关系而使它很不精确。因为并联短截线的频率特性可以在远大于5%的频带上用并联LC电路的频率特性来近似，所以，主要的校正是针对 $\lambda/4$ 耦合段的偏离 $90^\circ$ 相移。在马撒的论文中，讨论了把 $\lambda/4$ 段的频率敏感性结合起来考虑的一个方法，供有关的读者参考\*。

## 8.20 $\lambda/4$ 耦合空腔滤波器

除了短截线用空腔谐振器代替外， $\lambda/4$ 线耦合空腔滤波器与上一节所讨论过的传输线滤波器相似。这种滤波器实际上是在波导中放一些膜片来实现的。为了了解窄带情况下的设计依据，首先必须研究在间隔距离为 $l_k$ 处用两个相同膜片加载的一段波导的等效电路，如图8.33所示。

对一段波导来说，重要的频率变量不是 $\omega$ ，而是 $(\beta/k_0)\omega = \beta c$ ，因为波导膜片具有很近似于按 $\beta$ 或 $\beta^{-1}$ 变化的电纳，而且一段波导的电长度正比于 $\beta$ 。因此，归一化频率变量 $\omega/\omega_0 = \lambda_0/\lambda$ 被 $\lambda_{g0}/\lambda_g = \beta/\beta_0$ 所代替，式中的 $\lambda_{g0}$ 是 $\omega = \omega_0$ 时的波导波长， $\lambda_g$ 是任意 $\omega$ 时的波导波长。所以，在所有的设计公式中，须用 $\beta c$ 代替 $\omega$ ，其中的 $c$ 是光速。

\* G.L. Matthaei, *Design of Wide-band and Narrow-band Band-pass Filters on the Insertion Loss Basis*, IRE Trans., Vol. MTT-8, pp. 580-593, November, 1960.

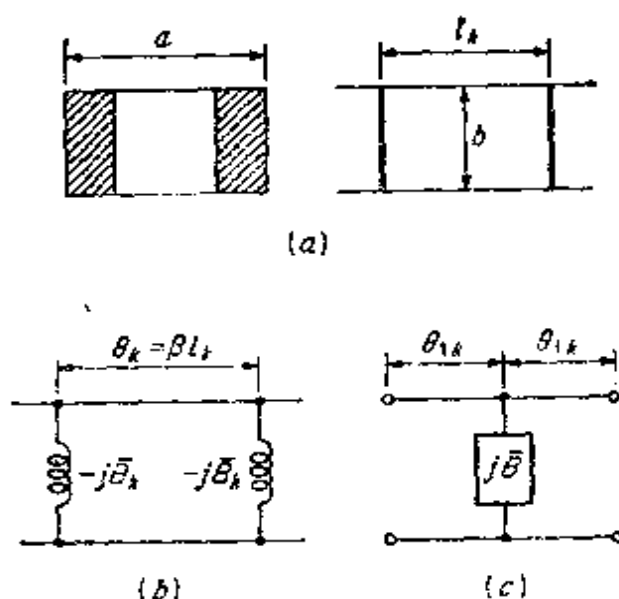


图 8.33 (a) 用两个感性膜片加载的矩形波导构成的空腔谐振器; (b) 精确等效电路; (c) 近似等效电路。

被两个恒等而归一化电纳为  $-j\bar{B}_k$  的感性膜片加载的波导，其精确的等效电路如图 8.33b 所示。按照上一节提出的方法设计滤波器时，必须用一个近似的并联电路来代替精确的等效电路。芒福德已经证明，图 8.33c 中所示形式的等效电路在  $\omega_0$  附近的窄带频内，与精确的等效电路具有同样的频率特性\*。这里只介绍芒福德所得到的结果，而不予推导。其推导是简捷的，可以在芒福德的论文中找到。并联电纳  $\bar{B}$  可表示为如下的形式：

$$\bar{B} = \sqrt{\frac{C}{L}} \left( \frac{\beta}{\beta_0} - \frac{\beta_0}{\beta} \right) \approx 2\sqrt{\frac{C}{L}} \frac{\Delta\beta}{\beta_0}$$

式中， $\Delta\beta = \beta - \beta_0$  是很小的。当把这种类型的谐振电路接到传输线上时，在它的每一侧都被归一化值为 1 的并联电导所加载。由于  $\beta_0 c = (LC)^{-\frac{1}{2}}$ ，这个电路的有载 Q 值为

$$Q_k = -\frac{1}{2} (\beta_0 c) C = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (8.128)$$

\* W.W. Mumford, *Maximally Flat Filters in Waveguide*, Bell System Tech. J., Vol. 27, pp. 684-714, October, 1948.

因而可以用有载  $Q$  值表示  $\bar{B}$ ，即为

$$\bar{B} = 4Q_k \frac{\Delta\beta}{\beta_0} \quad (8.129)$$

由于窄带(高  $Q$ )滤波器的  $\bar{B}_k$  远比 1 大，故芒福德所得到的  $Q_k$  值为

$$Q_k = \frac{\tan^{-1}(2/\bar{B}_k)}{2 \sin^{-1} \frac{2}{(\bar{B}_k^4 + 4\bar{B}_k^2)^{\frac{1}{2}}}}$$

$$\approx \frac{(\bar{B}_k^4 + 4\bar{B}_k^2)^{\frac{1}{2}}}{4} \tan^{-1} \frac{2}{\bar{B}_k} \quad (8.130)$$

为了在  $\omega = \omega_0$  时经过这个空腔能得到理想的传输，所需要的膜片间隔  $l_k$  为

$$\tan \beta_0 l_k = - \frac{2}{\bar{B}_k} \quad (8.131)$$

图 8.33c 的电路中电长度为  $\theta_{1k}$  的两段线，在频率为  $\omega_0$  时取为

$$\rho_{01k} + 2\theta_{1k} = \theta_k + 2\theta_{1k} = \pi \quad (8.132)$$

在单个空腔的等效电路中线的附加长度被并入成为滤波器中  $\lambda/4$  波长耦合线的一部分。

$N$  为奇数时最平坦和切比雪夫滤波器的设计是简捷的。若利用图 8.29 的原型电路，则只需要使

$$Q_k = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_{ck}}{L_{ck}}} \quad (8.133)$$

并取  $C_{ck}, L_{ck}$  使  $C_{ck}L_{ck} = (\beta_0 c)^{-2}$ ，以及  $J_{k,k-1}$  都等于 1 就行了。其方法与 8.19 节讨论过的处理传输线滤波器的方法相同。在空腔谐振器  $k$  和  $k+1$  之间的这一段波导的电长度等于  $\pi/2$ 。因为它把附近的空腔谐振器的  $\theta_{1k+1}$  和  $\theta_{1k}$  包括在内，所以，在利用了 (8.132) 式后，空腔谐振器  $k$  和  $k+1$  之间的  $\lambda/4$  耦合线的实际长度应为

$$l_{k,k+1} = \frac{1}{\beta_0} \left( \frac{\pi}{2} - \theta_{1k} - \theta_{1k+1} \right)$$

$$= \frac{\lambda_{g0}}{2\pi} \left( \frac{\theta_k + \theta_{k+1}}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{l_k + l_{k+1}}{2} - \frac{\lambda_{g0}}{4} \quad (8.134)$$

图8.34是这个滤波器的略图。为确定 $\bar{B}_k$ 值所需要的膜片尺寸的公式已在5.5节中给出了。用 $\beta/\beta_0$ 代替 $\omega/\omega_0$ 后，便可得到此滤波器的功率损耗比。切比雪夫滤波器的功率损耗比为(参看(8.104)式和(8.109)式)

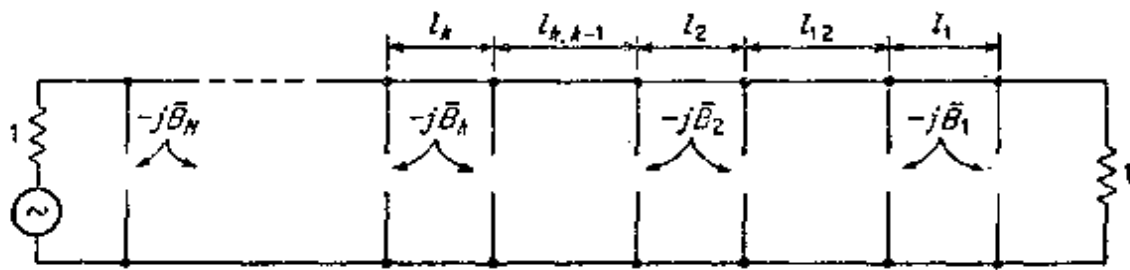


图 8.34  $1/4$ 耦合的波导型空腔滤波器

$$P_{LR} = 1 + k^2 T_N^2 \left[ \frac{\beta_0}{\beta_2 - \beta_1} \left( \frac{\beta}{\beta_0} - \frac{\beta_0}{\beta} \right) \right] \quad (8.135)$$

式中， $\beta_2$ 和 $\beta_1$ 是通带两端的 $\beta$ 值。若 $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 已确定，则

$$\beta_0 = \sqrt{\beta_1 \beta_2} \quad (8.136)$$

还必须指出，对波导滤波器来说，在设计公式(8.111)和(8.112)中的 $\omega_0$ 、 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 必须用 $\beta_0 c$ 、 $\beta_1 c$ 和 $\beta_2 c$ 来代替，即用 $\beta$ 代替 $k_0 = \omega/c$ ，其中， $c$ 为光速。为了说明这个方法，我们来计算图8.34所示的滤波器中的第一个空腔谐振器所需要的电纳 $-j\bar{B}_1$ 。

假定需要一个有五个元件的滤波器。其响应是切比雪夫型的，通带容限为 $k^2 = 0.0233$ 。要采用的波导宽度 $a = 0.9$ 吋。通带范围从 $f_1 = 10000$ 兆赫到 $f_2 = 10400$ 兆赫。对应的 $k_0 = \omega/c$ 值为2.1和2.18径/厘米。于是， $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 的值为

$$\beta_1 = \left[ 2.1^2 - \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = (4.4 - 1.89)^{\frac{1}{2}} = 1.59$$

$$\beta_2 = \{(2.18)^2 - 1.89\}^{\frac{1}{2}} = 1.7$$

频带的中心在 $\beta_0 = (\beta_1 \beta_2)^{\frac{1}{2}} = 1.64$ 处，它对应的频率为 $f_0 = 10200$

兆赫。由表8.2得 $g_1 = 1.1468$ 。利用(8.112b)式得

$$C_1' = \frac{\beta_0}{\beta_2 - \beta_1} \frac{C_1}{\beta_0 c} = \frac{\beta_0}{\beta_2 - \beta_1} \frac{g_1}{\beta_0 c}$$

因为 $J_{10}$ 等于1和 $R_L = R_{0L} = 1$ ，故由(8.124a)式得 $C_{01} = C_1'$ 。利用(8.133)式得

$$Q_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_{01}}{L_{01}}} = \frac{1}{2} (\beta_0 c) C_{01} = \frac{\beta_0}{\beta_2 - \beta_1} \frac{g_1}{2}$$

对于第 $k$ 个谐振器，应得

$$Q_k = \frac{\beta_0}{\beta_2 - \beta_1} \frac{g_k}{2} \quad (8.137)$$

我们求得 $Q_1$ 为8.56，由这个结果利用(8.130)式可以求出 $\bar{B}_1$ 。当 $\bar{B}_1$ 很大时，可用 $2/\bar{B}_1$ 代替 $\tan(2/\bar{B}_1)$ ，于是得

$$\bar{B}_1 = 2(Q_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \quad (8.138)$$

从而得出 $\bar{B}_1 = 17$ 。现在可以确定所需要的膜片尺寸了。同时也可由(8.131)式确定此空腔的长度。对滤波器电路中的每一个空腔谐振器必须重复上述步骤。

## 8.21 直接耦合空腔滤波器

直接耦合空腔滤波器的优点是比对应的 $\lambda/4$ 耦合空腔滤波器有更紧凑的实际结构。科恩已提出了带宽直到20%仍是准确的直接耦合空腔滤波器的设计方法\*。科恩设计方法的根据是采用以图8.26中的网络作为原型。这里将介绍其设计公式，而不予具体推导。

图8.33a和b中所示的波导型空腔谐振器及其等效电路，也可以用如图8.35所示的每一端都并联电感性电纳的T型网络来代表。两个并联电纳 $\bar{B} = -\omega t(\theta_1/2)$ 与 $\bar{B}_k$ 相比是可以忽略的，这是因为

\* S.B.Cohn, *Direct Coupled Resonator Filters*, Proc. IRE, Vol. 45, pp.187-196, February, 1957.



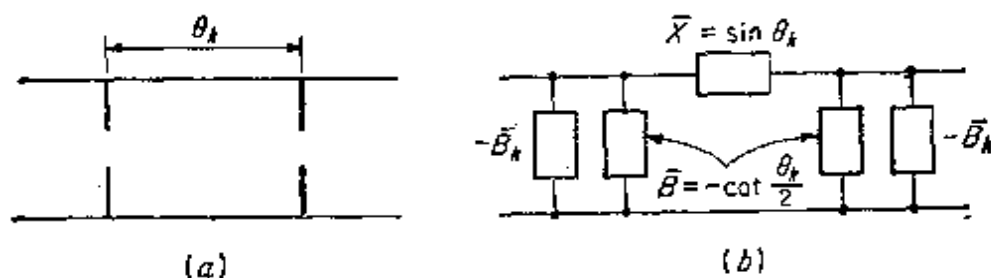


图 8.35 波导型空腔谐振器及其等效电路

$\bar{B}_k$  很大, 而  $\theta_k$  接近于  $\pi$ , 使  $\bar{B}$  远小于 1。于是串联臂  $\bar{X}$  被用来作为其原型滤波器中的串联谐振电路。

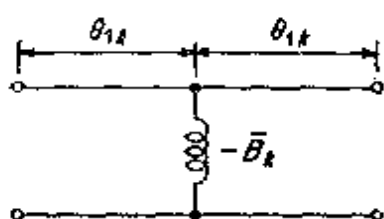


图 8.36 阻抗倒量变换器

科恩用并联感性电抗加两个短的波导段 (等效传输线) 组成了阻抗倒量变换器, 如图 8.36 所示。对于这个电路, 如果

$$\theta_{1k} = -\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2}{\bar{B}_k} \quad (8.139a)$$

$$\bar{B}_k = \frac{1-K^2}{K} \quad (8.139b)$$

则可得到阻抗倒量变换特性, 式中  $K$  是这个  $\lambda/4$  阻抗倒量变换器的特性阻抗。根据在频率为  $\omega_0$  时所求出的  $\theta_{1k}$  和  $\bar{B}_k$ , 可以看出, 在 20% 的频带内, 此倒量变换器与其理想特性无显著差别。

在  $\omega = \omega_0$  附近, 这时,  $\theta_k = \pi$ , 其串联电抗  $\bar{X}$  的特性为

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \sin \theta_k = \sin(\theta_k - \pi + \pi) \\ &\approx -(\theta_k - \pi) = -(\beta - \beta_0)l \\ &= \frac{\beta_0 - \beta}{\beta_0} \pi \approx -\frac{\pi}{2} \left( \frac{\beta}{\beta_0} - \frac{\beta_0}{\beta} \right) \end{aligned}$$

式中,  $\beta_0 l = \pi$ 。如果  $\omega/\omega_0$  用新的频率变量  $\beta/\beta_0$  代替, 则它的频率特性与  $X = \sqrt{L/C} (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega) \approx 2\sqrt{L/C} (\omega - \omega_0)/\omega_0$  的串联谐振电路频率特性是相似的 (符号不同, 但它是不重要的)。

当此阻抗倒量变换器的传输线总长度被并入成为空腔谐振器长度的一部分时, 第  $k$  个空腔谐振器的实际长度便为

$$l_k = \frac{\lambda_{g0}}{2} + \frac{\lambda_{g0}}{2\pi} (\theta_{1k} + \theta_{1k+1}) \quad (8.140)$$

在图8.26的原型电路中，必须取 $\sqrt{L_{0k}/C_{0k}}$ 等于 $\pi/2$ ，以便与这里所用的这类串联谐振电路相当。此外，我们取

$$C_{0k}L_{0k} = (\beta_0 c)^{-2} \quad (8.141)$$

于是，由(8.117)、(8.121)、(8.122)和(8.123)式给出的阻抗倒量变换器的参数，用 $C_k'$ 和 $L_k'$ 表示后便成为已知的， $C_k'$ 和 $L_k'$ 与低通原型中的 $g_k$ 有关。由已知的 $Z_{k+1,k}$ 的值，可以求得并联电纳 $\bar{B}_k$ 。图8.37中表示了这种滤波器的略图。综上所述，可得设计公式为

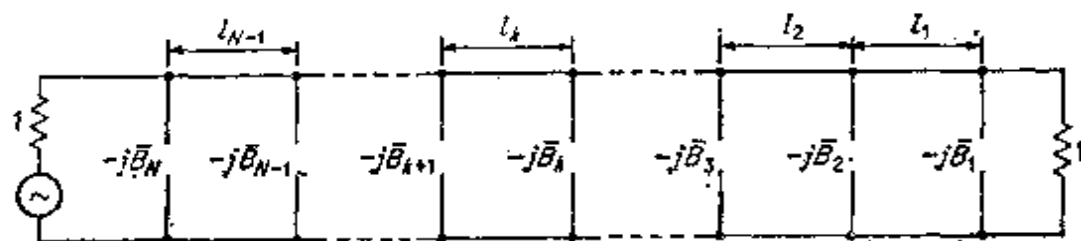


图 8.37 直接耦合波导型空腔滤波器

$$\bar{B}_1 = \frac{1 - w/g_1}{\sqrt{w/g_1}} \quad (8.142a)$$

$$\bar{B}_2 = \frac{1}{w} \left( 1 - \frac{W^2}{g_1 g_2} \right) \sqrt{g_1 g_2} \quad (8.142b)$$

$$\bar{B}_k = \frac{1}{w} \left( 1 - \frac{W^2}{g_k g_{k-1}} \right) \sqrt{g_k g_{k-1}} \quad (8.142c)$$

$$\bar{B}_N = \frac{1 - wR/g_N}{\sqrt{wR/g_N}}, \quad N \text{ 为奇数时, } R=1 \quad (8.142d)$$

式中， $W = \frac{\pi}{2} \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_0}$ ， $g_k$ 是由低通原型滤波器得到的元件值。要注意：当 $N$ 为奇数时， $R=1$ 。在最平坦滤波器的情况下， $N$ 为偶数时， $R$ 也等于1。否则， $R$ 由(8.101b)式得出。在 $\beta = \beta_0$ 时第 $k$ 个空腔谐振器的长度为

$$l_k = \frac{\lambda_{g0}}{2} - \frac{\lambda_{g0}}{4\pi} \left( \tan^{-1} \frac{2}{\overline{B}_{k+1}} + \tan^{-1} \frac{2}{\overline{B}_k} \right) \quad (8.143)$$

用  $\frac{\beta_0}{\beta_2 - \beta_1} \left( \frac{\beta}{\beta_0} - \frac{\beta_1}{\beta} \right)$  代替低通原型滤波器特性中的  $\omega'$  后，便可得到功率损耗比\*。还要注意  $\beta_0^2 = \beta_1 \beta_2$ 。

虽然我们没有讨论若干个其他重要问题，比如相移特性，关于信号迟延和失真问题，以及损耗对滤波特性的影响问题，但是，关于滤波器的讨论就此结束。对于这些问题，应该查阅本章后面列出的参考文献。

## 习 题

8.1 试求以下网络的  $ABCD$  矩阵：(a) 并联电纳  $j\overline{B}$ ，(b) 串联电抗  $j\overline{X}$ ，(c) 并联电抗  $j\overline{X}_1$  后面接一串联电抗  $j\overline{X}_2$ 。

8.2 推导(8.14)式和(8.15)式。

8.3 设有一个终端接负载  $Z$  的  $T$  形网络。试求输入阻抗  $Z_{in}$ ，并证明  $Z$  变为  $Z_{in}$  (即  $Z_{in} = Z$ ) 的条件，从而导出此周期性结构的特性阻抗  $Z_B^\pm$ 。

8.4 试证明在依照间隔  $d$  加载串联电抗  $j\overline{X}$  的传输线上，布洛赫波的传播常数本征值方程为  $\cosh rd = \cos k_0 d - (\overline{X}/2) \sin k_0 d$ 。

8.5 试证明(8.21)式可表示为以下的形式：

$$\cosh rd = \frac{\cos \varphi}{|S_{12}|}$$

式中， $\varphi$  是  $S_{12}$  的相角， $S_{12}$  是该单元的散射矩阵非对角线元素 (参看4.8节)

8.6 由(8.20)式和(8.6)式以及  $\Gamma_B$  和  $\overline{Z}_B^{-1}$  的相似点，用  $A_{11}$  表示  $\Gamma_B$ 。

\* 科恩使用稍为不同的频率变量，但是，就所研究的带宽而言，基本上与我们所讨论的相同。

8.7 试证明并联电纳  $j\overline{B}$  的波振幅传输矩阵为

$$\{A\} = \begin{pmatrix} \frac{2+j\overline{B}}{2} & j\frac{\overline{B}}{2} \\ -j\frac{\overline{B}}{2} & \frac{4+\overline{B}^2}{2(2+j\overline{B})} \end{pmatrix}$$

8.8 一条普通传输线的负载  $Z_L$  上的反射系数为  $(\overline{Z}_L - 1) / (\overline{Z}_L + 1)$ 。试证明表示布洛赫波  $\Gamma_L$  的(8.30)式可以表示为

$$\Gamma_L = \frac{1 + \Gamma_{B^-} \Gamma_{L^+} - \Gamma_{L^-}}{1 + \Gamma_{B^+} \Gamma_{L^-} - \Gamma_{B^-}}$$

式中,  $\Gamma_{B^\pm}$  是组成布洛赫波的分量特性反射系数。

8.9 对于电容性加载同轴线中的布洛赫波, 试证明当布洛赫波向  $+z$  方向传播时, 任意两组相邻膜片之间的 TEM 电压波为

$$V = V_n^+ e^{-ik_0 z} + V_n^- e^{ik_0 z} = V_n^+ e^{-ik_0 z} + \Gamma_{B^+} V_n^+ e^{ik_0 z}$$

当布洛赫波向  $+z$  方向传播时为

$$V = V_n^+ e^{-ik_0 z} + \Gamma_{B^-} V_n^+ e^{ik_0 z}$$

其端面已取为  $z=0$ , 且  $V_{B^+} = V_n^+(1 + \Gamma_{B^+})$ ,  $V_{B^-} = V_n^+(1 + \Gamma_{B^-})$ 。

8.10 设有一在  $z=nd$  处 ( $n = -\infty$  到  $\infty$ ) 用并联容性电纳  $j\overline{B}$  加载的无限长传输线。试证明组成布洛赫波的电流和电压波为

$$V_B = V^+ e^{-ik_0 z} + V^- e^{ik_0 z}$$

$$I_B = I^+ e^{-ik_0 z} + I^- e^{ik_0 z} = V^+ e^{-ik_0 z} - V^- e^{ik_0 z}$$

式中,  $V^- = -V^+ (1 - e^{-i\theta - i\beta d}) / (1 - e^{i\theta - i\beta d})$ ,  $\theta = k_0 d$ 。令  $V_B(z)$  等于  $V_0(z) e^{-i\beta z}$ , 把  $V_0(z)$  展开为空间谐波的无穷级数。注意: 利用条件  $V_B(z=d) = e^{-i\theta d} V_B(0)$  和由(8.10a)式表示的  $\beta$ , 可以得到  $V^+$  和  $V^-$  之间的关系式。

8.11 试证明薄套螺旋线第  $n$  次模的本征值方程为

$$\frac{(h^2 a^2 + n\beta a \cot\psi)^2}{(k_0 h a^2 \cot\psi)^2} = \frac{K_n'(ha) I_n'(ha)}{K_n(ha) I_n(ha)}$$

8.12 设有一个由  $N$  个单元的电容性加载同轴线组成的  $N$  节滤

波器。此滤波器端接一电阻性负载  $R$ ， $R$  等于零频率时的镜象阻抗，即等于 1。输入端波源的内阻等于  $\bar{R}$ 。试证明传送到负载上的功率为

$$P = \frac{V_s^2}{|\bar{R} + \bar{Z}_{in}|^2} R \bar{Z}_{in}$$

式中， $V_s$  是波源的电压， $\bar{Z}_{in}$  为

$$\bar{Z}_{in} = \bar{Z}_i \frac{\bar{R} + \bar{Z}_i \tanh rNd}{\bar{Z}_i + \bar{R} \tanh rNd}$$

$\bar{Z}_i$ 、 $rd$  是任一频率下的镜象参数。通带中， $Z_i$  为实数， $\tanh rd = j \tan \beta d$ ，试证明

$$P = \frac{V_s^2 Z_i^2 R (1+t^2)}{4R^2 Z_i^2 + (R^2 + Z_i^2) t^2} = \frac{V_s^2 (1+t^2)}{4R(1+t^2) + R \frac{R^2 - Z_i^2}{R Z_i} t^2}$$

从而证明功率损耗比变成

$$P_{LR} = \frac{V_s^2 / 4R}{P} = 1 + \left( \frac{R^2 - Z_i^2}{2R Z_i} \right)^2 \sin^2 N\beta d$$

在  $B = 10\omega$  时画出通带内  $P_{LR}$  随  $\omega$  变化的曲线。参照给出  $\bar{Z}_i = \bar{Z}_B$  和  $\beta d$  的 (8.10a) 式和 (8.16) 式。证明阻带内的功率损耗比为

$$P_{LR} = 1 + \frac{1}{4} \left| \frac{R}{Z_i} + \frac{Z_i}{R} \right|^2 \sinh^2 N\alpha d$$

8.13 按以下技术条件设计一个三腔  $\lambda/4$  耦合的滤波器：波导宽度  $a = 0.9$  英寸；边频  $f_1 = 10000$  兆赫， $f_2 = 10400$  兆赫；通带容限  $k^2 = 0.0233$ ；切比雪夫响应。若采用具有圆孔的感性膜片，试求孔的半径和膜片间隔。

8.14 设计一个具有切比雪夫响应的四腔直接耦合空腔滤波器。其通带容限为  $k^2 = 0.0233$ ；边频为  $f_1 = 9500$  兆赫， $f_2 = 10500$  兆赫；波导宽边为 0.9 英寸。求膜片的尺寸和间隔。可采用任一种合适的膜片。

8.15 设计一个四腔直接耦合最平坦波导滤波器，其技术条件

与习题8.14中给出的相同。注意：按低通原型设计的最平坦滤波器通带容限为1。为了得到在 $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 之间的通带容限 $k^2$ ，这个设计必须在更宽的带宽(比如说 $\beta'_1$ 和 $\beta'_2$ )内进行。于是应得

$$\left[ \frac{\beta_0}{\beta'_2 - \beta'_1} \left( \frac{\beta}{\beta_0} - \frac{\beta_0}{\beta} \right) \right]^2 = 1 \quad \text{当 } \beta = \beta'_1, \beta'_2 \text{ 时}$$

还有 $\beta'_1\beta'_2 = \beta_0^2$ 。求出 $\beta'_2$ 和 $\beta'_1$ ，以便使

$$\left[ \frac{\beta_0}{\beta'_2 - \beta'_1} \left( \frac{\beta}{\beta_0} - \frac{\beta_0}{\beta} \right) \right]^2 = k^2 \quad \text{当 } \beta = \beta_1 \text{ 和 } \beta_2 \text{ 时}$$

若用 $\beta'_1$ 和 $\beta'_2$ 的这些值进行设计，则在 $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 之间的通带内应保持所要求的通带容限 $k^2$ 。证明在一般情况下

$$\beta'_1\beta'_2 = \beta_1\beta_2 \text{ 和 } \beta'_2 - \beta'_1 = (\beta_2 - \beta_1)k^{-1/N}$$

8.16 试证明图8.33b和c的电路的归一化镜象阻抗为

$$(1 - \overline{B}_k^2 - 2\overline{B}_k \cot \theta_k)^{-\frac{1}{2}} \text{ 和 } \left( \frac{2\sin 2\theta_{1k} + \cos 2\theta_{1k} - \overline{B}}{2\sin 2\theta_{1k} + \cos 2\theta_{1k} + \overline{B}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

当 $\omega = \omega_0$ ， $\overline{B} = 0$ 时，证明为了使 $Z_i = 1$ ，必须通过(8.131)式把 $B_k$ 与 $\theta_k$ 联系起来。证明这两个电路的镜象相移常数 $\varphi$ 为

$$\cos \varphi = \cos \theta_k + \overline{B}_k \sin \theta_k \quad \text{和} \quad \cos \varphi = \cos 2\theta_{1k} - \frac{\overline{B}}{2} \sin 2\theta_{1k}$$

并且，如果 $\theta_k + 2\theta_{1k} = \pi$ ，则在 $\omega_0$ 时两者就相等。

## 参 考 文 献

周期性结构

1. Brillouin, L., "Wave Propagation in Periodic Structures," 2d ed., Dover Publications, Inc., New York, 1953.
2. Slater, J.C., "Microwave Electronics," D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1950.
3. Watkins, D.A., "Topics in Electromagnetic Theory," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1958.
4. Collin, R.E., "Field Theory of Guided Waves," McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.

5. Bevensee, R.M., "Electromagnetic Slow Wave System," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964.

微波滤波器

6. Riblet, H.J., Synthesis of Narrow Band Direct Coupled Filters. *Proc. IRE*, Vol. 40, pp. 1219—1223, October, 1952.
7. Jones, E.M.T., Synthesis of Wide Band Microwave Filters to Have Prescribed Insertion Loss, *IRE Conv. Record*, pt. 5, pp. 119—128, 1956.
8. Ozaki, H., and J. Ishii, Synthesis of a Class of Strip Line Filters, *IRE Trans.*, Vol. CT-5, pp. 104—109, June, 1958.
9. Ozaki, H., and J. Ishii, Synthesis of Transmission Line Networks and the Design of UHF Filters, *IRE Trans.*, Vol. CT-2, pp. 325—336, December, 1955.
10. Young, L., The Quarter-Wave Transformer Prototype Circuit, *IRE Trans.*, Vol. MTT-8, pp. 483—489, September, 1960.
11. Ghose, R.N., "Microwave Circuit Theory and Analysis," McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.
12. Riblet, H.J., A Unified Discussion of High Q Waveguide Filter Design Theory, *IRE Trans.*, Vol. MTT-6, pp. 359—368, October, 1958.
13. Jones, E.M.T., and J.T. Bolljahn, Coupled Strip Transmission Line Filters and Directional Couplers, *IRE Trans.*, Vol. MTT-4, pp. 75—81, April, 1956.
14. Bradley, E.H., Design and Development of Strip Line Filters, *IRE Trans.*, Vol. MTT-4, pp. 86—93, April, 1956.
15. Wenzel, R.J., Exact Design of TEM Microwave Networks Using Quarter-wave Lines, *IEEE Trans.*, Vol. MTT-12, pp. 94—111, June, 1964.
16. Matthaei, G.L., L. Young, and E.M.T. Jones, "Microwave Filters, Impedance-matching Networks, and Coupling Structures," McGraw-Hill Book Company, New York, 1964.

## 第9章 微波电子管

### 9.1 引论

普通的低频电子管（比如三极管）不能在微波频率下工作，这是因为电子由阴极到栅极的渡越时间，成为要被放大的正弦信号周期不可忽视的部分。换句话说，传播时间成为重要的因素，这个为低频电路所固有的限制，在低频电子管中也同样存在。设计微波电子管时，必须尽量利用波的传播效应。

概括地说，微波电子管有两种主要类型：一类应用电磁空腔谐振器（速调管和某些磁控管）；另一类应用慢波电路（行波管）。两类电子管都利用能在其中激励起空间电荷波和回旋加速波的电子束。空间电荷波主要是电子的纵向振荡，它与空腔谐振器中和慢波电路中的电磁场相互作用，便得到了放大。空腔谐振器和慢波电路的特性已经讨论过了。还需要做的是研究在电子束上空间电荷波的传播，以及研究在电子束与空腔谐振器中和慢波结构中的场之间的相互作用。

本章主要研究电子束和空间电荷波所可能具有的性质。此外，还研究电子束与微波空腔谐振器或慢波电路的相互作用，以便说明各种不同的微波电子管的工作原理。由于篇幅所限不能对现有的各种不同的微波电子管都作详细的探讨。我们将集中研究那些不同程度地成为所有微波电子管基本工作原理的一些基本问题。

电子束动态特性的分析，可使用两种方法。最早使用的方法是轨道法（或拉格朗日法）。这个方法细致地研究个别电子的运动，并假定所有其他电子以同样的方式运动。轨道法的优点是容许相当



容易地处理某些非线性（或大信号）效应。

另一个方法是场的方法，有时称为欧拉法（或流体动力学法）。这个方法把电子束基本上当作带电的流体，描述任一点上的速度、电荷密度、交变电流等的各种场变量是作为时间的函数而引入的，而不去跟踪单个电子的运动。导致空间电荷波的场方法比较统一，并适合于在同样的普遍数学体系内处理所有不同类型的微波电子管。因此，本书中只采用场的方法。

微波电子管的精确分析是非常困难的和麻烦的。如同任何一个物理问题一样，需要作许多简化的假定，以便得到能够进行分析而又不是太复杂的数学模型。简化理论是否成功必须由它预示的和实验结果相一致的程度来判定。

本章前几节讨论电子束和在电子束上空间电荷波传播的若干模型。所遵守的方程是麦克斯韦方程、牛顿定律和洛仑兹力方程。电荷元的运动方程是非线性方程，但是，在假定小信号（即交流量远小于直流量）的条件下，可以把它线性化。我们将只研究小信号的情况，因为它足以阐明微波电子管的工作原理。大信号的分析要困难得多，一般说来，其理论尚未充分发展起来。

在研究电子束的动力学以后，将具体地研究速调管和行波管。也讨论若干种其他的微波电子管，但更偏重于定性的方式。

## 9.2 直流状态下的电子束

利用由阴极、加速极和聚焦极组成的适当的电子枪，能够产生基本上具有匀速 $v_0$ 的电子束\*。图9.1是一个半径为 $a$ 的圆柱形电子

---

\* 电子枪的设计不在本书中讨论。可以参看，

*J. R. Pierce, "Theory and Design of Electron Beams," D. Van Nostrand and Company, Inc., Princeton, N. J., 1950.*

*K. K. Spangenberg, "Vacuum Tubes," McGraw-Hill Book Company, New York, 1948.*

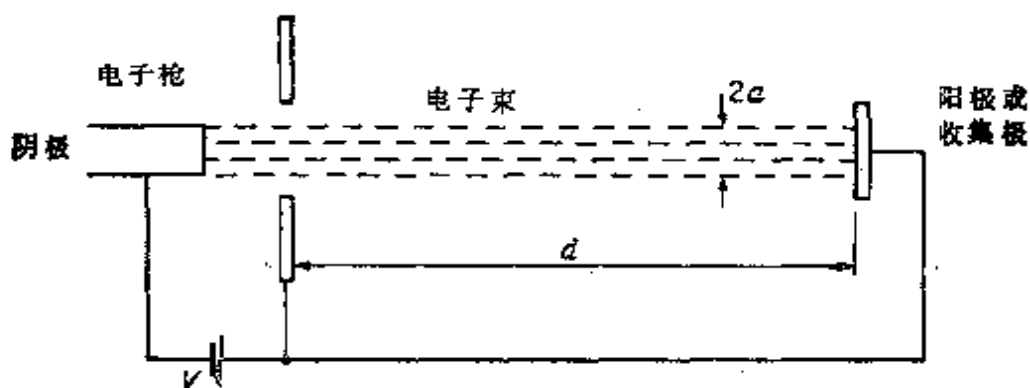


图 9.1 一个圆柱形的电子束

束的略图。设使电子加速的电位差为  $V$ ，则其速度  $v_0$  为

$$v_0 = \left( \frac{2Ve}{m} \right)^{1/2} = 5.93 \times 10^6 V^{1/2} \text{ 米/秒} \quad (9.1)$$

式中， $-e$  为电子电荷， $m$  为电子的质量。当  $V=1000$  伏特时， $v_0 = 1.87 \times 10^7$  米/秒  $= 0.0625c$ 。电子束的导流系数定义为  $IV^{-3/2}$ ，式中， $I$  是电子束的总电流。

库仑斥力或者说直流空间电荷力将使电子束散开，也就是使电子向外作径向运动。空间电荷力与电子束的密度（即单位体积的电子数）成正比。对用于微波电子管中通常的电子束密度（每立方米有  $10^{12} - 10^{16}$  个电子），若漂移空间短（图 9.1 中的  $d$  小），则由空间电荷力引起的电子束的离散可以忽略。这在许多速调管中都是这样。但是，在行波管中，若不应用某些使电子束集中在一起（即聚焦）的方法，则电子束要通过这样长的距离，必然会产生显著的散束现象。这些克服直流空间电荷力的方法，已产生了三种常用的电子束模型。下面讨论这些模型。

### 离子中和电子束

即使在微波电子管中具有高度的真空，也仍然存在很多的中性气体粒子。其中的许多气体分子通过与具有相当高能量的电子碰撞而电离。正离子将中和电子束的负空间电荷。但是，由于正离子的质量至少比电子质量大 1800 倍，故离子的交变运动与电子比较起来

可以忽略，因而，在高频电磁场与电子束相互作用时，不需要考虑正离子。

虽然所有的电子束在某种程度上是离子中和的，但是很难达到使电子的空间电荷完全中和。然而，为了便于作数学分析，常常假定完全离子中和的电子束作为一个模型。斯洋吉伯格的书中讨论了由空间电荷力引起的电子束的离散。

### 轴向狭流电子束

若沿电子束速度方向加一个很大的恒定磁场 $B_0$ ，则其作用是约束电子沿径向运动。空间电荷力使电子有一个径向速度。磁场 $B_0$ 产生的力 $-e\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0$ ，使电子环绕磁力线作圆周运动。从而阻止电子束沿径向离散。

在磁聚焦电子束中，磁场 $B_0$ 有通量线穿过阴极表面，如图9.2a所示。虽然会有某些电子横过磁力线扩散，但是，只要 $B_0$ 足够大，电子束离散的量可保持很小。

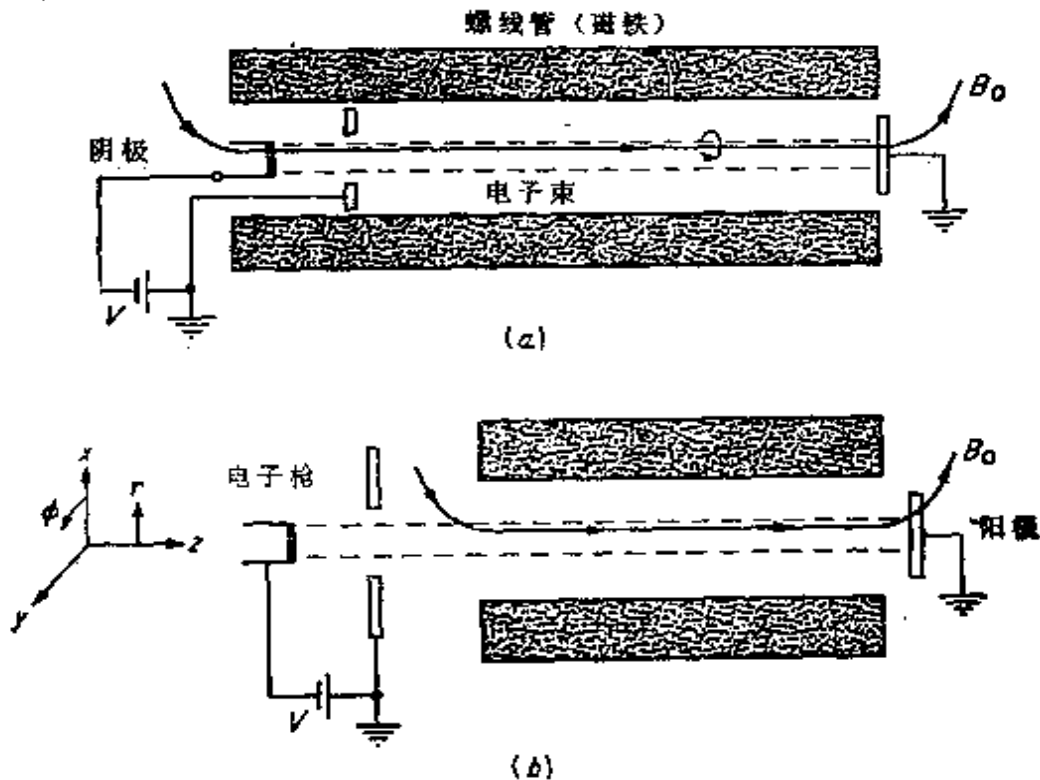


图 9.2 (a) 轴向狭流的磁聚焦，(b) 布里渊流的磁聚焦。

为便于数学分析 假定 $B_0$ 为无限大, 因为在这种情况下, 可以使电子不发生横向运动。由于现在电子只沿轴向运动(一维运动), 所以在交流情况下电子束行为的分析将大大简化。轴向狭流模型通常用于行波管的研究中。

### 布里渊流

在布里渊流(即将叙述)中, 轴向磁场 $B_0$ 是不允许穿过阴极表面的。由于场力线是连续的, 它们必须在靠近阴极处沿径向离开电子束区, 如图9.2b所示。当电子束进入磁场区域时, 磁场使它以拉莫频率 $\omega_l = eB_0/2m$ 作匀速旋转。在圆柱坐标 $r, \varphi, z$ 下, 一个电子的运动方程为

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$$

在 $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{a}_z$ 即均匀的区域中, 可以把上式写为分量的形式:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -\frac{e}{m} \left( E_r + r B_0 \frac{d\varphi}{dt} \right) \quad (9.2a)$$

$$r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{e}{m} B_0 \frac{dr}{dt} \quad (9.2b)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = 0 \quad \frac{dz}{dt} = v_0 \quad (9.2c)$$

假定 $E_z = E_r = 0$ , 应用高斯定律可以求出径向电场。若电子束的直流电荷密度为 $-\rho_0$ , 则得 $2\pi r D_r = -\pi r^2 \rho_0$ , 即 $E_r = -r\rho_0/2\epsilon_0$ 。于是在一个电子上的径向空间电荷力为 $-eE_r = re\rho_0/2\epsilon_0$ 。如果 $d^2\varphi/dt^2 = 0$ , 则由(9.2b)式可得

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_l = -\frac{eB_0}{2m} \quad (9.3)$$

若此解满足(9.2a)式, 且使 $d^2 r/dt^2$ 为零, 则要求

$$r\omega_l^2 = \frac{e}{m} \left( -\frac{r\rho_0}{2\epsilon_0} + r B_0 \omega_l \right)$$

或

$$\omega_i^2 = \frac{e\rho_0}{2m\epsilon_0} = \frac{\omega_p^2}{2} \quad (9.4)$$

式中,  $\omega_p = (e\rho_0/m\epsilon_0)^{\frac{1}{2}}$  称为等离子体频率。用于微波电子管的电子束其 $\omega_p$ 典型值的范围为 $10^7$ 到 $10^9$ 。若所取的聚焦场 $B_0$ 满足(9.4)式, 则电子就没有径向加速度。径向平衡条件实际上是由空间电荷引起的向外径向力 $-eE$ , 和由离心加速度引起的向外径向力 $m\omega_i^2 r$ , 与磁场引起的向内径向力 $e\omega_i r B_0$ 的平衡。在这些条件下的电子束流称为布里渊流。

虽然我们已得到在均匀 $B_0$ 场区域中的稳态布里渊流条件, 但不去说明以速度 $v_0$ ,  $a_0$ 离开阴极的电子束, 当它通过在阴极前面非均匀的场区域进入均匀的 $B_0$ 场区域时, 它应具有布里渊流特性。要说明这一点, 需要证明电子束的角动量由布里渊流的初始零值到其终值的变化, 等于由非均匀区域中径向磁场产生的转矩 $ev_0 B_0$ 对时间的积分。其推导读者可参考布里渊的原始论文\*。

布里渊流所需要的条件在实践中能够做到。即使电子束部分地被离子中和, 只要 $\rho_0$ 不为零, 就可以求出满足(9.4)式的 $B_0$ 值。但是, 在交流条件下布里渊流电子束的行为, 由于存在电子的横向运动而较难于处理。因此, 理想的轴向狭流模型用得较普遍。

在磁控管型(M型)行波管中, 使用平板状电子束。这类电子束可以产生一种类似于称为平板状布里渊流的流动。在9.11节处理M型行波管时, 要讨论板状电子束的性质, 因此不包含在本节之内。

---

\* L. Brillouin, *A Theorem of Larmor and Its Importance for Electrons in Magnetic Fields*, *Phys. Rev.*, Vol. 67, p. 260, 1945.  
W. G. Dow, *Nonuniform D.C. Electron Flow in Magnetically Focused Cylindrical Beams*, *Advan. Electron. Electron Phys.*, Vol. 10, 1958.  
Pierce, *op. cit.*

### 9.3 狭流电子束上的空间电荷波

这一节专门分析半径为  $b$  的圆柱波导内轴向狭流电子束上的空间电荷波。电子束的半径为  $a$ ，如图 9.3 所示。并假定了小信号条件。

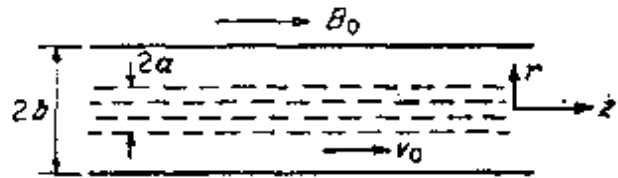


图 9.3 圆柱波导内的电子束

认为电子束在横截面上的密度是均匀的，其直流电荷密度为  $-\rho_0$ ，轴向速度为  $v_0$ 。 $z$  方向的直流电流密度为  $J_0 = -\rho_0 v_0$ 。直流参数  $\rho_0$ 、 $v_0$  和  $J_0$  与空间和时间坐标无关。在具有时间关系  $e^{i\omega t}$  的交流情况下，将有随时间和空间坐标而变化的电荷密度、速度和电流的交变分量。这些交变分量用  $\rho$ 、 $\mathbf{V}$  和  $\mathbf{J}$  表示，而不带时间因子  $e^{i\omega t}$ 。电子密度对其直流数值  $N$  的交流变动将用  $n$  表示。

电磁场满足下列方程：

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H} \quad (9.5a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{J} \quad (9.5b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (9.5c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (9.5d)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (9.5e)$$

电荷密度为  $-\rho_0 + \rho$ ，荷质比  $\eta$  等于电子荷质比（即  $\eta = e/m$ ）的电子束的一个单位体积，有一种受下列方程支配的运动：

$$(N+n)m \frac{d\mathbf{V}_t}{dt} = (\rho - \rho_0)(\mathbf{E} + \mathbf{V}_t \times \mathbf{B} + \mathbf{V}_t \times \mathbf{B}_0) \quad (9.5f)$$

式中， $N+n$  是每单位体积内的电子数， $\mathbf{V}_t = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}$  是总的速度。因为在小信号的情况下， $|\mathbf{B}| \ll |\mathbf{B}_0|$ ，所以其受力项  $\mathbf{V}_t \times \mathbf{B}$  与  $\mathbf{V}_t \times \mathbf{B}_0$  相比可以略去。此外，由于  $B = \mu_0 H \approx \mu_0 Y_0 E = E/c$ ，可见  $|\mathbf{V}_t \times \mathbf{B}|$  比

比小  $V_0/c$  倍。因而交变磁场力可忽略。总的速度  $\mathbf{V}_t$  是  $x$ 、 $y$ 、 $z$  和  $t$  的函数。此外，电荷元的位置  $x$ 、 $y$ 、 $z$  是时间的函数。因为  $\mathbf{V}_t = a_x dx/dt + a_y dy/dt + a_z dz/dt$ 。故

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}_t}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{V}_t}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{V}_t}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}_t}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}_t}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial \mathbf{V}_t}{\partial t} + (\mathbf{V}_t \cdot \nabla) \mathbf{V} \end{aligned} \quad (9.6)$$

可见，展开  $d\mathbf{V}_t/dt$  得到了与  $v_t^2$  有关的非线性项  $(\mathbf{V}_t \cdot \nabla) \mathbf{V}$ 。但是，就远比直流速度  $\mathbf{V}_0$  小的交变速度  $\mathbf{V}$  而言，因为  $\mathbf{V}_0$  是常量，二阶项  $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$  可略去，故得

$$((\mathbf{V} + \mathbf{V}_0) \cdot \nabla)(\mathbf{V} + \mathbf{V}_0) = (\mathbf{V} + \mathbf{V}_0) \cdot \nabla \mathbf{V} \approx (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \mathbf{V} \quad (9.7)$$

于是得到

$$(N+n)m \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = (\rho - \rho_0)(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}_0)$$

但是包含  $n$  和  $\rho$  的项是两个变量的乘积，在小信号的情况下可以去掉。因为  $Ne = \rho_0$ ， $e/m = \eta$ ，所以，一阶线性化运动方程便成为

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\eta(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) \quad (9.8)$$

对所考虑的圆柱形电子束来说，同样有  $\mathbf{V}_0 = a_z v_0$  和时间关系  $e^{i\omega t}$ 。若令  $\mathbf{B}_0$  接近无限大，则  $\mathbf{V}$  的横向分量必须为零，所以，在(9.8)式中的  $\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0$  项为零。因而  $\mathbf{V}$  只有一个沿  $z$  方向的分量。而(9.8)式成为

$$j\omega v + v_0 \frac{\partial v}{\partial z} = -\eta E_z \quad (9.9)$$

当  $\mathbf{V}$  只有一个  $z$  分量时，由于总电流为

$$\begin{aligned} J_0 + \mathbf{J} &= (-\rho_0 + \rho)(\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}) = -\rho_0 \mathbf{V}_0 + (\rho \mathbf{V}_0 - \rho_0 \mathbf{V}) + \rho \mathbf{V} \\ &\approx -\rho_0 \mathbf{V}_0 + (\rho \mathbf{V}_0 - \rho_0 \mathbf{V}) \end{aligned} \quad (9.10)$$

在去掉二阶项  $\rho \mathbf{V}$ （它是两个小的交变量之积）后，交变电流密度  $\mathbf{J}$  只有  $z$  分量。于是直流和交变电流为

$$\mathbf{J}_0 = -\rho_0 \mathbf{V}_0 \quad (9.11a)$$

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{V}_0 - \rho_0 \mathbf{V} \quad (9.11b)$$

由连续性方程(9.5e)得

$$\frac{\partial J}{\partial z} = -j\omega\rho \quad (9.12)$$

若利用(9.9)式、(9.11b)式和(9.12)式可把 $\mathbf{J}$ 表示为 $E_z$ 的函数, 则可以用通常的方式求解麦克斯韦方程(9.5a)和(9.5b), 以得到波的解。

因为我们寻求波的解, 故可以假定所有的交变量都有 $z$ 的函数 $e^{-i\beta z}$ 。在此情况下, 由(9.9)式和(9.12)式得

$$(j\omega - j\beta v_0)v = -\eta E_z \quad (9.13a)$$

$$j\beta J = j\omega\rho \quad (9.13b)$$

为了方便, 用 $\beta_0$ 表示 $\omega/v_0$ ,  $\beta_0$ 可以看作为电子束的直流传播常数, 利用(9.11b)式和(9.13)式可得出

$$J = -j \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{\beta_0^2 \epsilon_0 E_z}{(\beta_0 - \beta)^2} \quad (9.14)$$

式中,  $\omega_p^2 = \rho_0 \eta / \epsilon_0$ 是等离子体频率的平方,  $-\rho_0$ 是电子束的直流电子电荷密度。

为了求解圆柱波导内的电子束的麦克斯韦方程, 引入矢位是方便的。对于方位角对称(不是 $\varphi$ 函数)的模来说, 用只有 $z$ 分量的矢位 $A_z(r, z) = \psi(r)e^{-i\beta z}$ 就可以满足所有的边界条件。 $A_z$ 所满足的方程为

$$\nabla^2 A_z + k_0^2 A_z = -\mu_0 J$$

由 $A_z$ 得

$$\begin{aligned} E_z &= -j\omega A_z + \frac{\nabla \nabla \cdot \mathbf{A}_z}{j\omega\mu_0\epsilon_0} \Big|_z = \frac{k_0^2 A_z + \partial^2 A_z / \partial z^2}{j\omega\mu_0\epsilon_0} \\ &= \frac{k_0^2 - \beta^2}{j\omega\mu_0\epsilon_0} A_z \end{aligned}$$

把此式代入(9.14)式整理后得



$$\mu_0 J = - \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \beta_0^2 \frac{k_0^2 - \beta^2}{(\beta_0 - \beta)^2} A_z \quad (9.15)$$

在以  $A_z$  表示  $J$  的(9.15)式之后,  $A_z$  的亥姆霍兹方程便成为

$$\nabla_r^2 A_z + p^2 A_z = 0 \quad 0 \leq r \leq a \quad (9.16a)$$

$$\nabla_r^2 A_z - k^2 A_z = 0 \quad a \leq r \leq b \quad (9.16b)$$

式中, 已用  $\nabla_r^2 - \beta^2$  代替了  $\nabla^2$ , 并令

$$p^2 = -\beta^2 + k_0^2 + \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \beta_0^2 \frac{\beta - k_0^2}{(\beta_0 - \beta)^2}$$

$$= -(\beta^2 - k_0^2) \left[ 1 - \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \left( \frac{\beta_0}{\beta_0 - \beta} \right)^2 \right] \quad (9.17a)$$

$$k^2 = \beta^2 - k_0^2 \quad (9.17b)$$

分析的结果将证明空间电荷波是具有  $\beta \approx \beta_0 \gg k_0$  (因而  $p$  和  $h$  为实数) 的慢波。由于此模  $A_z$  不随  $\varphi$  变化, 故(9.16)式化为

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} + \left\{ \begin{matrix} p^2 \\ -h^2 \end{matrix} \right\} \psi = 0 \quad (9.18)$$

式中,  $A_z = \psi(r)e^{-i\omega t}$ 。  $\psi$  方程是零阶贝塞尔方程, 其解为  $J_0(pr)$ 、 $Y_0(pr)$ 、 $J_0(hr)$  和  $Y_0(hr)$ 。虚宗量的贝塞尔函数, 可用变形的贝塞尔函数  $I_0(hr)$ 、 $K_0(hr)$  代替。在  $0 \leq r \leq a$  区域, 因为  $Y_0$  成为无穷大, 故不能用  $Y_0$ 。所以可令

$$\psi(r) = C_1 J_0(pr) \quad 0 \leq r \leq a$$

$$\psi(r) = C_2 I_0(hr) + C_3 K_0(hr) \quad a \leq r \leq b$$

式中,  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$  是任意常数。轴向电场在  $r = b$  处必须为零; 在  $r = a$  处必须连续。这些条件适合  $A_z$ , 因而也适合  $\psi$ 。所以

$$C_1 J_0(pa) = C_2 I_0(ha) + C_3 K_0(ha) \quad (9.19a)$$

$$0 = C_2 I_0(hb) + C_3 K_0(hb) \quad (9.19b)$$

除  $E_z$  以外, 其他场分量仅为  $E_r$  和  $H_\varphi$ , 可用  $A_z$  表示为

$$E_r = - \frac{\beta}{\omega \mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial A_z}{\partial r} = - \frac{\beta c}{k_0} \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

$$H_{\phi} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{k_0}{\beta} Y_0 E_r$$

在  $r = a$  处  $H_{\phi}$  的连续性要求

$$C_1 p J_0'(pa) = C_2 h I_0'(ha) + C_3 h K_0'(ha) \quad (9.20)$$

式中的一撇表示对宗量  $pa$  或  $ha$  的导数。为了使(9.19)式和(9.20)式的  $C_1$ 、 $C_2$  和  $C_3$  具有一个非无效解，系数的行列式必须为零。于是可得出

$$p \frac{J_0'(pa)}{J_0(pa)} = h \frac{K_0(hb)I_0'(ha) - K_0'(ha)I_0(hb)}{K_0(hb)I_0(ha) - K_0'(ha)I_0(hb)} \quad (9.21)$$

这个超越方程和由(9.17)式得到的

$$p^2 = -h^2 + \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \frac{\beta_0^2 h^2}{(\beta_0 - \sqrt{h^2 + k_0^2})^2} \quad (9.22)$$

一起决定传播常数  $\beta$ 。

现在研究两种特殊情况。首先研究  $b$  和  $a$  很大的情况。因为当  $x$  很大时

$$I_0(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \quad K_0(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$$

故可由(9.21)式得  $p \tan(pa - \pi/4) = h$ 。但是，由于使  $a$  趋于无穷大，唯一的与  $a$  无关的解是  $p = h = 0$ 。于是，由(9.17)式可得如下的  $\beta$  解：

$$\beta = \pm k_0 \quad (9.23a)$$

$$\beta = \beta_0 \left(1 \pm \frac{\omega_p}{\omega}\right) \quad (9.23b)$$

但当  $p = h = 0$ ， $\beta = \pm k_0$  时，如早先得出的  $E_r$ 、 $H_{\phi}$  和  $E_z$  的方程所指明的那样，所有的场分量都为零。因而这是一个无效解。另外的解  $\beta = \beta_0(1 \pm \omega_p/\omega)$  相当于空间电荷波。因为在微波管的典型条件下， $\omega_p \ll \omega$ ，故其波速为

$$\frac{\omega}{\beta} = \frac{v_0}{1 \pm \omega_p/\omega} \approx v_0 \left(1 \mp \frac{\omega_p}{\omega}\right)$$

此波速稍大于或稍小于直流电子束的速度 $v_0$ 。这两个波称为快的和慢的空间电荷波。当 $p=0$ 时， $E_r$ 和 $H_\theta$ 都为零，但 $E_z$ 保持有限值。于是可以把空间电荷波看作电子束中电子的纵振荡。当 $\omega=\omega_p$ 时，对应于 $\beta=0$ 的解，即为非传输波。可见，等离子体频率就是电子在无限大电子束中的固有振荡频率。因为横向场为零，所以，即使 $B_0$ 为有限值，只要电子束具有无限大的半径，空间电荷波也是不变化的。

第二种特殊情况是研究 $b=a$ ，即电子束充满波导的情况。由(9.21)式可以看出，由于分母变为零，故其右边变为无限大。于是，要求 $J_0(pa)=0$ 。所以 $pa$ 取圆波导中的 $TM_{0,m}$ 模的典型值。其最低次模的解为（参看3.7节） $pa=2.405$ 或一般地为 $pa=p_{0m}$ ，式中， $p_{0m}$ 由表3.3给出。现在应用(9.22)式可得出

$$\begin{aligned} \left(-\frac{p_{0m}}{a}\right)^2 &= -h^2 \left[ 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \frac{\beta_0^2}{(\beta_0 - \sqrt{h^2 + k_0^2})^2} \right] \\ &= (k_0^2 - \beta^2) \left[ 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \frac{\beta_0^2}{(\beta_0 - \beta)^2} \right] \quad (9.24) \end{aligned}$$

对于激励波，我们期望 $\beta$ 近似等于 $k_0$ 。于是，由于 $\omega_p \ll \omega$ 和 $\beta_0 \gg k_0$ 。(9.24)式的近似解为

$$\beta^2 = k_0^2 - \left(-\frac{p_{0m}}{a}\right)^2 \quad (9.25)$$

这是圆柱波导中 $TM_{0,m}$ 模未被扰动时的传播常数。把(9.25)式给出的解用于(9.24)式中，乘以 $\omega_p^2$ 的项，可以改正 $\beta$ 。

更有意义的是 $\beta \approx \beta_0$ 的空间电荷波。因为这些空间电荷波的 $k_0^2 \ll \beta^2$ ，所以(9.24)式可以近似为

$$\left(-\frac{p_{0m}}{a}\right)^2 = -\beta^2 \left[ 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \frac{\beta_0^2}{(\beta_0 - \beta)^2} \right]$$

它是以 $\beta^2$ 为变量的一个二次方程式。为了得到近似解，令 $\beta = \beta_0(1 + \delta)$ （式中的 $\delta$ 应很小），则得

$$\left(\frac{p_{0m}}{a}\right)^2 = -\beta_0^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \frac{1}{\delta^2}\right]$$

由此可得

$$\delta = \frac{\pm (\omega_p/\omega)\beta_0}{(\beta_0^2 + (p_{0m}/a)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

从而

$$\beta = \beta_0 \left[1 \pm \frac{\omega_p}{\omega} \left(1 + \frac{p_{0m}^2}{\beta_0^2 a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \quad (9.26)$$

注意 $\delta$ 是很小的，它证实了所做的近似是正确的。引入下式表示的有效等离子体频率 $\omega_e$

$$\omega_e = \omega_p \left(1 + \frac{p_{0m}^2}{\beta_0^2 a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = F\omega_p \quad (9.27)$$

就可以把(9.26)式表示为与(9.23b)式相同的形式。式中， $F$ 称为空间电荷减缩因数，例如， $\omega_e^2 = F^2 \rho_0 \eta / \epsilon_0$ ，则有效空间电荷为 $F^2 \rho_0$ 。因此， $\beta$ 可以写为

$$\beta = \beta_0 \left(1 \pm \frac{\omega_e}{\omega}\right) \quad (9.28)$$

对于完全充满波导的电子束来说，也存在速度稍大于和稍小于电子束速度 $v_0$ 的慢的和快的空间电荷波。但是，有效的等离子体频率由于场中有横向变化而减小。然而，空间电荷波的横向分量 $E_r, H_\theta$ 是非常小的。只有轴向电场 $E_z$ 是大的。

在一般情况下，当 $a \neq b$ 时， $\beta$ 的解是繁冗的。引入有效等离子体频率或空间电荷减缩因素后，空间电荷波的最后结果可以用(9.28)式的形式表示。由布兰奇和米兰所作的曲线得出的典型结果表示在图9.4中\*。

哈恩和拉莫于1939年首先提出了空间电荷波的理论。自那时以来，已经研究了各种条件下的空间电荷波。本章后面所引用的参考

\* G.M.Branch and T.G.Mihran, *Plasma Frequency Reduction Factors in Electron Beams*, IRE Trans., Vol.ED-2, pp.3-11, 1955.

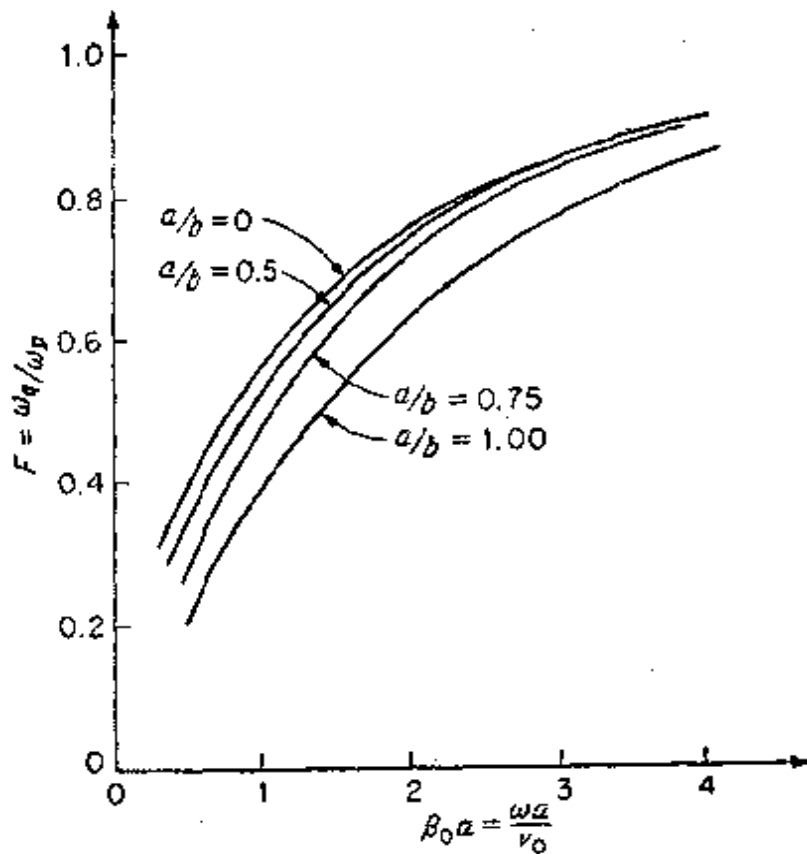


图 9.4 在半径为  $b$  的圆波导内，半径为  $a$  速度为  $v_0$  的圆柱形电子束的空间电荷减缩因数。此数据适用于空间电荷波的主模  $TE_{01}$  模

文献将介绍这一专题的著作。对于寻常的（即 O 型）行波管分析来说，用上面所讨论的模型描述其主要工作特性是足够精确的。

## 9.4 非聚焦电子束上的空间电荷波

许多小功率速调管，当电子束必须通过的距离（漂移空间长度）较短时，采用没有磁场聚焦的电子束。因而，研究在这种电子束上空间电荷波的传播是重要的。我们来研究半径为  $a$  直流参数为  $-\rho_0$ 、 $v_0 a$  的电子束。对具有轴对称的空间电荷波来说，场分量只有  $E_r$ 、 $E_z$  和  $H_\theta$ 。它们服从麦克斯韦方程(9.5)式和力的方程(9.8)式，在其中  $B_z$  等于零\*。

\* 静态的空间电荷力假定可略去，对电子束密度小和漂移空间短的情况，作这样的假定是正确的。换言之，可以假定电子束是离子中和的。

设空间电荷波与  $z$  的关系为  $e^{-i\beta z}$ , 则(9.5a)式到(9.5c)式和(9.8)式的分量形式为

$$j\beta E_r + \frac{\partial E_z}{\partial r} = j\omega\mu_0 H_\varphi \quad (9.29a)$$

$$j\beta H_\varphi = j\omega\epsilon_0 E_r + J_r \quad (9.29b)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r H_\varphi = j\omega\epsilon_0 E_z + J_z \quad (9.29c)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r E_r - j\beta E_z = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (9.29d)$$

$$v_r = \frac{j\eta E_r}{\omega - \beta v_0} \quad (9.29e)$$

$$v_z = \frac{j\eta E_z}{\omega - \beta v_0} \quad (9.29f)$$

此外, 尚有关系式

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{V}_0 - \rho_0 \mathbf{V}$$

它的分量形式为

$$J_r = -\rho_0 v_r = \sigma E_r \quad (9.30a)$$

$$J_z = -\rho_0 v_z + \rho v_0 = \sigma E_z + \rho_0 v_0 \quad (9.30b)$$

式中, 已应用了(9.29e)式和(9.29f)式, 并已引入了如下的等效电导率:

$$\sigma = \frac{-j\eta\rho_0}{\omega - \beta v_0} = \frac{-j\epsilon_0\omega^2}{\omega - \beta v_0} \quad (9.31)$$

利用(9.30)式, 由连续性方程  $\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega\rho$  可得出

$$\sigma \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r E_r - j\beta E_z \right) - j\beta v_0 \rho = -j\omega\rho$$

若用(9.29d)式来代替括号中的项, 则得

$$\left( \frac{\sigma}{\epsilon_0} - j\beta v_0 + j\omega \right) \rho = 0 \quad (9.32)$$

若交变电荷密度  $\rho$  不为零, 则必须使

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} - j\beta v_0 + j\omega = 0$$

这要求  $\beta$  为

$$\beta = \frac{\omega \pm \omega_p}{v_0} = \beta_0 \left( 1 \pm \frac{\omega_p}{\omega} \right)$$

其相应的波动解就是一个无限大电子束中（其中  $E_r = H_\theta = 0$ ）的空间电荷波。对于具有有限半径的电子束来说， $\beta$  的这些值不能满足  $r = a$  处的边界条件。因此，我们寻求的空间电荷波必须具有不同的  $\beta$  值，必须有一个使 (9.32) 式成立的零交变空间电荷密度  $\rho$ 。对这些波来说，由 (9.30) 式可得  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ ，或

$$\mathbf{J} = j\omega\epsilon_0 \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0} \mathbf{E}$$

于是， $\mathbf{H}$  的麦克斯韦旋度方程便成为

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{J} \\ &= j\omega\epsilon_0 \left( 1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0} \right) \mathbf{E} = j\omega\epsilon \mathbf{E} \end{aligned}$$

式中，电子束的等效电容率  $\epsilon$  为

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_0 \left( 1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0} \right) \\ &= \epsilon_0 \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \beta v_0)} \right] \end{aligned} \quad (9.33)$$

应用了等效电容率  $\epsilon$  后，电子束可以当作一个介质圆柱。于是， $E_r$  满足的方程为

$$\nabla^2 E_r + k^2 E_r = \nabla_r^2 E_r + (k^2 - \beta^2) E_r = 0 \quad (9.34)$$

式中

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon = k_0^2 \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \beta v_0)} \right]$$

对于所期望的慢空间电荷波来说， $\beta \gg k_0$ ，所以  $E_r$  的适当解为

$$E_r = C_1 I_0(\beta r) \quad 0 \leq r \leq a \quad (9.35a)$$

$$E_z = C_2 K_0(hr) \quad r \geq a \quad (9.35b)$$

式中,  $p = (\beta^2 - k^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $h = (\beta^2 - k_0^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $C_1$ 、 $C_2$  为待求的振幅常数。

由于下面的原因\*, 在  $r = a$  处的边界条件与狭流电子束的边界条件不相同。因为电子有一个径向的交变速度, 所以, 电子束的边界由于电子在直流边界附近来回振荡而不留在它的直流位置  $r = a$  上。合成边界条件因而成为有波纹的, 如图9.5a所示。此图中表

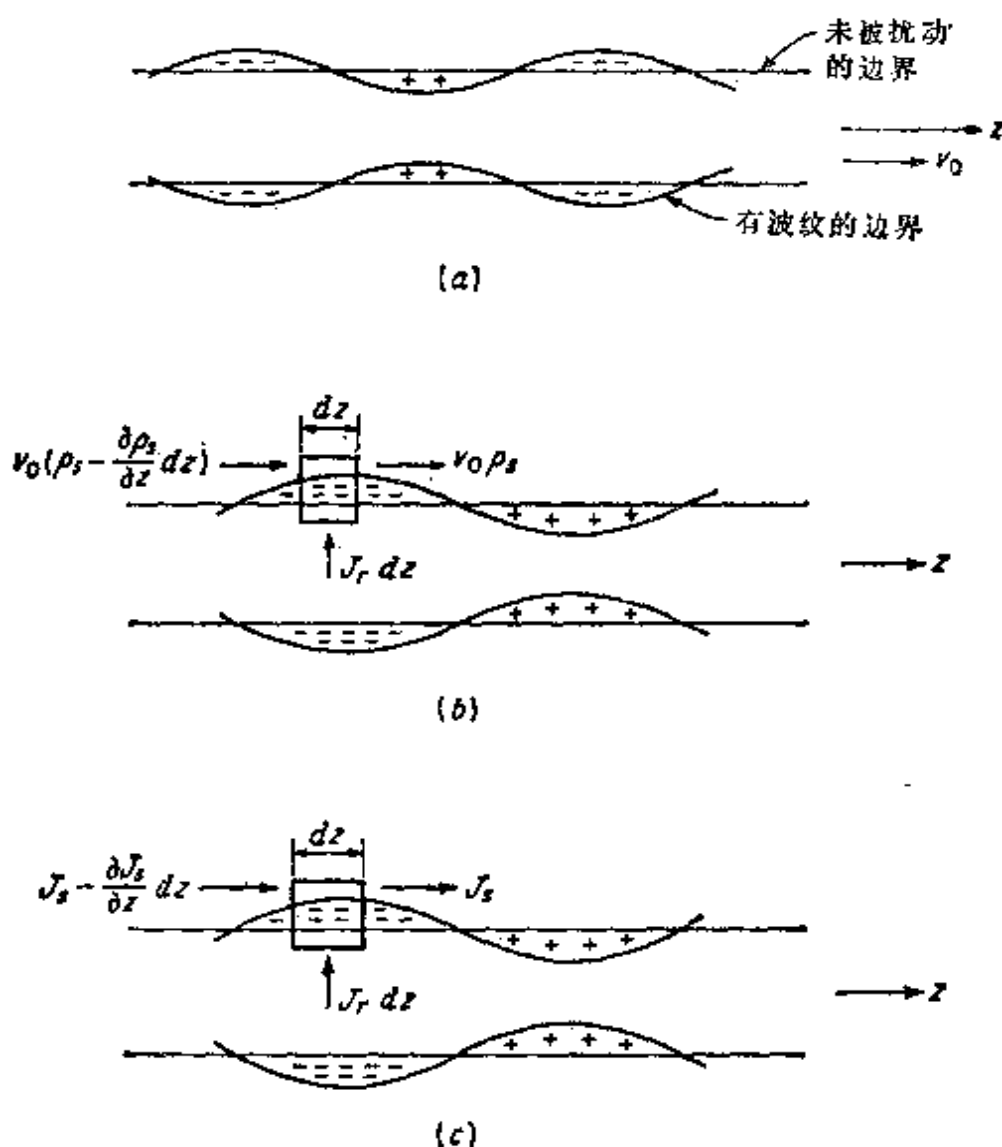


图 9.5 波纹电子束表面上的边界条件

\* 参看 W.C.Hahn, *Small Signal Theory of Velocity Modulated Electron Beams*, Gen.Elec.Rev., Vol.42, pp.258—270, 1939.



示的正电荷代表负电荷的不足额。用一个表面电荷层代替此波纹边界，可以说明在小信号条件下波纹边界对径向电场的作用。当然，这完全和极化电荷在介质边界附近相对一个平均边界来回振荡情况下的做法相同。用介质极化强度  $\mathbf{P}$  表示的表面电荷给定为  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E})$ 。对于电子束的表面电荷密度  $\rho_s$ ，它由两个原因引起，即：由径向电流  $J_r$  产生的流向边界的电荷；由于表面电荷随电子束移动而被带到给定的  $z$  点上的电荷。也就是说，表面电荷的增加率为（图 9.5 b）

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} &= j\omega \rho_s = J_r - v_0 \frac{\partial \rho_s}{\partial z} \\ &= J_r + j\beta v_0 \rho_s \end{aligned}$$

$-v_0 \partial \rho_s / \partial z$  项的出现如下所述：设  $z$  点的表面电荷密度为  $\rho_s$ ，则在  $z - dz$  点的电荷密度近似为  $\rho_s - (\partial \rho_s / \partial z) dz$ 。在边界上的  $z$  点把电荷带走的速率为  $v_0 \rho_s$ ，由邻近点  $z - dz$  流向  $z$  点的电荷速率为  $v_0 (\rho_s - (\partial \rho_s / \partial z) dz)$ 。因为与  $z$  的关系为  $e^{-i\beta z}$ ，故在间隔  $dz$  内由于有限的电子束速度  $v_0$  引起的净电荷积累率为  $-v_0 (\partial \rho_s / \partial z) dz = j\beta v_0 \rho_s dz$ 。用  $dz$  来除就得到电荷密度。等效表面电荷的最终表示式为

$$\begin{aligned} \rho_s &= \frac{J_r}{j(\omega - \beta v_0)} = \frac{\sigma E_r}{j(\omega - \beta v_0)} \\ &= \frac{-\eta \rho_0 E_r}{(\omega - \beta v_0)^2} \end{aligned} \quad (9.36)$$

已经通过未被扰动边界的电荷总数为  $-\rho_0 r$ ，其中， $r$  是单位体积中电荷的交变位移。因为

$$\frac{dr}{dt} = v_r = \frac{\partial r}{\partial t} + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) r = j(\omega - \beta v_0) r$$

所以

$$\rho_s = -\rho_0 r = \frac{-\rho_0 v_r}{j(\omega - \beta v_0)} = \frac{J_r}{j(\omega - \beta v_0)}$$

它是得到 (9.36) 式的另一种推导。

用于径向电场的边界条件为

$$\begin{aligned} E_{2r} - E_{1r} &= \frac{\rho_s}{\epsilon_0} = \frac{-\eta \rho_0 E_{1r}}{\epsilon_0 (\omega - \beta v_0)^2} \\ &= -\frac{\omega_p^2 E_{1r}}{(\omega - \beta v_0)^2} \end{aligned} \quad (9.37)$$

式中，下标 1 和 2 分别地指  $r < a$  区域和  $r > a$  区域的场。上述边界条件也可以表示为如下的形式：

$$\epsilon_0 E_{2r} = \left[ \epsilon_0 + \frac{\sigma}{j(\omega - \beta v_0)} \right] E_{1r}$$

因为此圆柱沿  $z$  方向以速度  $v_0$  作等速运动，所以后一结果除了用  $\omega - \beta v_0$  代替  $\omega$  外，与介质圆柱边界上所得的结果是相似的。

与等效表面电荷相联系的是等效表面电流密度  $J_s = J_s \mathbf{a}_z$ 。为了得到  $J_s$  的表示式，我们研究图 9.5c。电荷流入边界上长为  $dz$  的一个小区域的总速率为

$$J_s dz = \frac{\partial J_s}{\partial z} dz$$

它必须等于在间隔  $dz$  内表面电荷密度的增加率  $j\omega\rho_s$ 。因此，根据 (9.36) 式，在用  $j(\omega - \beta v_0)\rho$  代替  $J_s$  后得

$$-\frac{\partial J_s}{\partial z} = j\beta J_s = j\omega\rho_s - J_s = j\beta v_0 \rho_s$$

即

$$J_s = \rho_s v_0 \quad (9.38)$$

当  $\omega \gg \omega_p$  时，总的表面电流通常远大于总的体电流，因而把它包括在内是很重要的。

加于  $H_\phi$  的边界条件是

$$H_{2\phi} - H_{1\phi} = J_s = \rho_s v_0 \quad (9.39)$$

当  $H_\phi$  满足这个不连续关系时，径向电场的边界条件也同样满足。用上述的边界条件就能够求出电子束问题的完全解答。

联立 (9.29a) 式和 (9.29b) 式，得到

$$\begin{aligned}
 H_{\phi} &= \frac{j\omega\epsilon_0 + \sigma}{\beta^2 - k_0^2 + j\omega\mu_0\sigma} \frac{\partial E_z}{\partial r} \\
 &= \frac{j\omega\epsilon}{\beta^2 - k^2} \frac{\partial E_z}{\partial r}
 \end{aligned}$$

参照(9.35)式, 可得出

$$\begin{aligned}
 H_{\phi} &= H_{1\phi} = \frac{j\omega\epsilon}{p} C_1 I_0'(pr) \\
 &= \frac{j\omega\epsilon}{p} C_1 I_1(pr) \quad r < a \quad (9.40a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{\phi} &= H_{2\phi} = \frac{j\omega\epsilon_0}{h} C_2 K_0'(hr) \\
 &= -\frac{j\omega\epsilon_0}{h} C_2 K_1(hr) \quad r > a \quad (9.40b)
 \end{aligned}$$

我们要求  $E_z$  在  $r=a$  处连续,  $H_{\phi}$  满足条件(9.39)式。因而

$$C_1 I_0(pa) = C_2 K_0(ha) \quad (9.41a)$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{j\omega\epsilon_0}{h} C_2 K_1(ha) - \frac{j\omega\epsilon}{p} C_1 I_1(pa) &= \rho_{sv} e \\
 &= \frac{\sigma v_0}{j(\omega - \beta v_0)} E_{1r}
 \end{aligned}$$

由(9.29b)式得  $E_{1r}(j\omega\epsilon_0 + \sigma) = j\beta H_{1\phi}$ , 因而第二个边界条件变为

$$\begin{aligned}
 \frac{C_2 K_1(ha)}{h} &= -\frac{C_1 I_1(pa)}{p} \\
 &\quad \times \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - \beta v_0)^2} \right] \quad (9.41b)
 \end{aligned}$$

用(9.41a)式除(9.41b)式, 得

$$\frac{I_1(pa)}{p I_0(pa)} \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - \beta v_0)^2} \right]$$

$$= -\frac{K_1(ha)}{hK_0(ha)} \quad (9.42)$$

传播常数  $\beta$  由这个方程的一个解和关系式

$$\begin{aligned} \beta^2 &= p^2 + k^2 = p^2 + k_0^2 \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \beta v_0)} \right] \\ &= h^2 + k_0^2 \end{aligned} \quad (9.43)$$

一起确定。对空间电荷波来说， $\beta \gg k_0$ ，所以可以用  $\beta$  代替  $h$  和  $p$ ，它是用来简化 (9.42) 式和 (9.43) 式的一种近似。

求解 (9.42) 式和 (9.43) 式所得到的结果，可以表示为 (9.28) 式的形式：

$$\beta = \beta_0 \left( 1 \pm \frac{\omega_p}{\omega} \right)$$

在微波频率下， $\omega_p/\omega$  通常在 0.01 到 0.1 的范围内，所以， $\beta$  与  $\beta_0$  只差百分之几或者更小。图 9.6 中画出了等离子体频率减缩因数  $F = \omega_e/\omega$  随  $\beta a$  的变化曲线。如果在 (9.42) 式中用  $\beta$  代替  $p$  和  $h$ ，则可以把 (9.42) 式变为如下形式：

$$\beta a = \beta_0 a \left[ 1 \pm \frac{\omega_p}{\omega} \left( \frac{K_1 I_0}{K_0 I_1} + 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

由此可见，

$$F = \frac{\omega_e}{\omega_p} = \left[ 1 + \frac{K_1(\beta a) I_0(\beta a)}{K_0(\beta a) I_1(\beta a)} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (9.44)$$

计算此表示式可得到  $F$ ，如图 9.6 所示。图 9.6 中的数据可以用来求  $\beta_0 a$  的对应值，即

$$\beta_0 a = \frac{\beta a}{1 \pm F(\omega_e/\omega)} \quad (9.45)$$

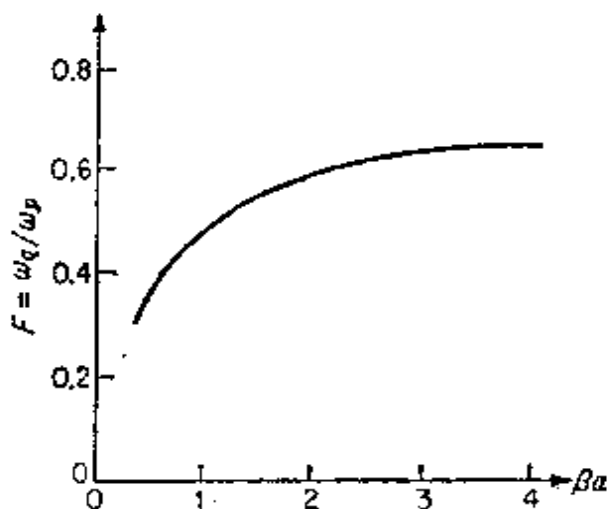


图 9.6 圆柱形非聚焦电子束的等离子体频率减缩因数  $F$  随  $\beta a$  的变化

在狭流电子束中，只允许有轴向的交变运流电流存在。因此，由于此电流 $J_z$ 是 $z$ 的函数，故存在交变电荷密度 $\rho$ ，且它必然与空间电荷密度的变化有关。对于非聚焦电子束来说，也存在径向交变运流电流，这使总电流 $J+j\omega\epsilon_0\mathbf{E}$ 可能成为管式场，即形成不终止于交变空间电荷上的连续的闭合流线。

## 9.5 交流功率关系

研究电子束上空间电荷波的交流功率，对于理解行波管的放大机理是重要的，当然，对于功率的计算也是重要的。丘\*首先导出了狭流电子束的小信号功率定理。豪斯和博布罗夫\*\*及克吕伐\*作了进一步的发展。公式推导是简捷的，但对其组成的各项的解释往往不清楚，它与被研究的电子束模型有关。

与电子束有关的场的麦克斯韦方程是

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0\mathbf{H} \quad \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{J}$$

式中，小信号交变电流密度为（为普遍起见，把表面电流包括在内）

$$\mathbf{J} = -\rho_0\mathbf{V} + \rho\mathbf{V}_0 + \rho_s\mathbf{V}_0$$

此外，还有运动方程为

$$j\omega\mathbf{V} + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla)\mathbf{V} = -\eta(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}_0)$$

展开下面的表示式，并应用上述方程，得到

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) &= \mathbf{H}^* \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}^* \\ &= -j\omega\mu_0\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* + j\omega\epsilon_0\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* \end{aligned} \quad (9.46)$$

\* L.J.Chu, *A Kinetic Power Theorem*, paper presented at the IRE-PGED Electron Tube Research Conference, Durham, N.H., June, 1951.

\*\* H.A.Haus and D.Bobroff, *Small Signal Power Theorem for Electron Beams*, *J. Appl. Phys.*, Vol. 28, pp. 694—703, June, 1957.

\* J.W.Klulver, *Small Signal Power Conservation Theorem for Irrotational Electron Beams*, *J. Appl. Phys.*, Vol. pp. 618—622, April, 1958.

电子束内部的连续性方程可以写作

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 \cdot \nabla \cdot \mathbf{J} &= -j\omega\rho\mathbf{V}_0 = -j\omega(\rho\mathbf{V}_0 - \rho_0\mathbf{V}) - j\omega\rho_0\mathbf{V} \\ &= -j\omega\mathbf{J} - j\omega\rho_0\mathbf{V} \end{aligned}$$

若用  $\mathbf{V}/\eta$  乘此方程的复数共轭数, 则得

$$\frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_0}{\eta} \nabla \cdot \mathbf{J}^* = \frac{j\omega}{\eta} \mathbf{V} \cdot \mathbf{J}^* + \frac{j\omega\rho_0}{\eta} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^*$$

用  $\mathbf{J}^*/\eta$  乘前面的运动方程得

$$\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} + \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{V} \times \mathbf{B}_0 = -\frac{j\omega}{\eta} \mathbf{V} \cdot \mathbf{J}^* - \frac{\mathbf{J}^*}{\eta} \cdot (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \mathbf{V}$$

因为  $\mathbf{J}$  和  $\mathbf{V}$  的横向分量方向相同, 所以,

$$\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{V} \times \mathbf{B}_0 = \mathbf{J}^* \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{B}_0 = 0$$

把此方程前面的两个方程加起来, 则得

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} - \frac{j\omega\rho_0}{\eta} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^* &= -\frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_0}{\eta} \nabla \cdot \mathbf{J}^* \\ &\quad - \frac{\mathbf{J}^*}{\eta} \cdot (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \mathbf{V} \end{aligned}$$

若引入  $\nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_0 \mathbf{J}^*) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_0 \nabla \cdot \mathbf{J}^* + \mathbf{J}^* \cdot \nabla (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_0)$  项, 则上式的右边为

$$-\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_0}{\eta} \mathbf{J}^* \right) - \frac{1}{\eta} (\mathbf{J}^* \cdot (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \mathbf{V} - \mathbf{J}^* \cdot \nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_0)$$

当  $\mathbf{V}_0 = v_0 \mathbf{a}_z$  时, 把中括号内的项在直角坐标下展开, 可以化为

$$\frac{v_0}{\eta} \mathbf{a}_z \times \mathbf{J}^* \cdot \nabla \times \mathbf{V}$$

从而得

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} - \frac{j\omega\rho_0}{\eta} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^* &= -\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_0}{\eta} \mathbf{J}^* \right) \\ &\quad - \frac{v_0}{\eta} \mathbf{a}_z \times \mathbf{J}^* \cdot \nabla \times \mathbf{V} \end{aligned} \quad (9.47)$$

把 (9.47) 式和 (9.46) 式相加得到交流功率定理:

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \left( \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* - \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_0}{\eta} \mathbf{J}^* \right) \\ &= -j\omega\mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* - j\omega \frac{\rho_0}{\eta} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^* + j\omega\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \\ & \quad + \frac{v_0}{\eta} \mathbf{a}_z \times \mathbf{J}^* \cdot \nabla \times \mathbf{V} \end{aligned} \quad (9.48)$$

由于  $\rho_0/\eta = (\rho_0/e)m$  是电子束中每单位体积的质量密度, 故  $(\rho_0/2\eta) \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^*$  项是电子束中的交流动能密度。

现在专门研究  $\mathbf{J} = \mathbf{a}_z J_z$  和 (9.48) 式右边最后一项变为零的狭流电子束的情况。于是, (9.48) 式的实部为

$$\text{Re} \nabla \cdot \left( \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* - \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_0}{\eta} \mathbf{J}^* \right) = 0 \quad (9.49)$$

在包围如图 9.7 所示横截面  $S_1$  和  $S_2$  之间的电子束的体积上所作的体

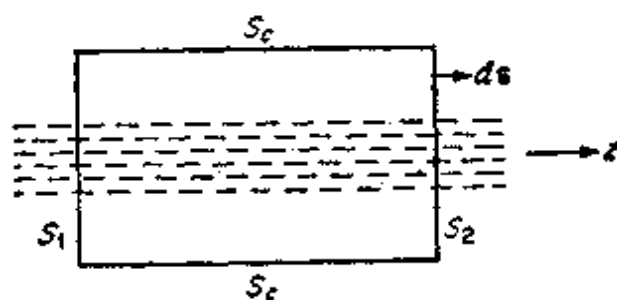


图 9.7 一段电子束

积分, 可以转化为表面  $S_1 + S_2 + S_c$  上的面积分。于是, 得到如下的功率守恒定理:

$$\begin{aligned} \text{Re} \oint_S \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{S} &= -\text{Re} \int_{S_2} \frac{-\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_0}{2\eta} \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{a}_z dS \\ & \quad + \text{Re} \int_{S_1} \frac{-\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_0}{2\eta} \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{a}_z dS \end{aligned} \quad (9.50)$$

$(-\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_0)/\eta = -(m/e)\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_0 = V_i$  项具有电压的量纲, 故称为动电压。它是把电子束的动能变换为电磁能的项。为了使净的电磁能总量可以流出表面  $S$ ,

$$R_s \oint_s \frac{1}{2} V_s J_s^* \cdot dS$$

必须是负的。

研究在无限大横截面上的轴向狭流电子束的空间电荷波的应用，可以对上述关系有更全面的认识。对于慢的和快的空间电荷波来说，利用(9.13a)、(9.14)和(9.49)式，可得到交流功率，即得到

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} V_s J_s^*\right) &= R_s \frac{-v_0 v_s J_s^*}{2\eta} \\ &= -\frac{\omega \omega_p^2 \epsilon_0}{2v_0^2 (\beta_s - \beta_0)^3} |E_{zs}|^2 \\ \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} V_s J_s^*\right) &= -\frac{\omega \omega_p^2 \epsilon_0}{2v_0^2 (\beta_s - \beta_0)^3} |E_{zs}|^2 \end{aligned}$$

由于  $\beta_s > \beta_0 > \beta_r$ ，所以慢空间电荷波具有负的交流功率，而快空间电荷波具有正的交流功率。若电子束只激发慢空间电荷波，则负交流功率的意义就是电子束的某些直流能量已通过激励过程被取出而转换成负的交流能量。此负的交流动能又必须转换成电磁能流，以便保持功率守恒。在讨论行波管时，将会看到慢空间电荷波是产生放大的一个因素。

## 9.6 速度调制

前面几节已经确立了电子束上空间电荷波的存在。现在必须研究在电子束上激励这些波，即产生交变速度调制的问题。在速调管中，通常电子束穿过位于圆柱形重入式空腔谐振器中心的两个间隔很近的栅极，来产生速度调制。如图9.8所示。选用特殊形式的空腔谐振器，是为了满足在栅极间建立高交变电场强度（要求栅极间隔小），但保持空腔谐振器的高Q值的要求。后者要求体积——表面积比值要大。若令  $R_s(E_s e^{i\omega t}) = E_s \cos \omega t$  为穿过间隙（常常指聚



束隙)时空腔谐振器的电场。则当  $E_z \cos \omega t$  沿  $-z$  方向时, 进入此间隙的那些电子将被加速, 并将以大于  $v_0$  的速度离开。当  $E_z \cos \omega t$

沿  $+z$  方向时, 进入间隙区域的电子减慢下来, 并将以小于  $v_0$  的速度离开。显然, 在两个平行栅极之间所加的交变电场会使电子束进行速度调制, 下面对速度调制过程作详细分析\*。

我们来研究在 9.4 节讨论过的那种非聚焦电子束的类型。设空腔谐振器间隙区域的场为  $E_z \cos \omega t$ 。电子将基本上以入口速度  $v_0$  越过此间隙。若某一个特定的电子通过中间平面

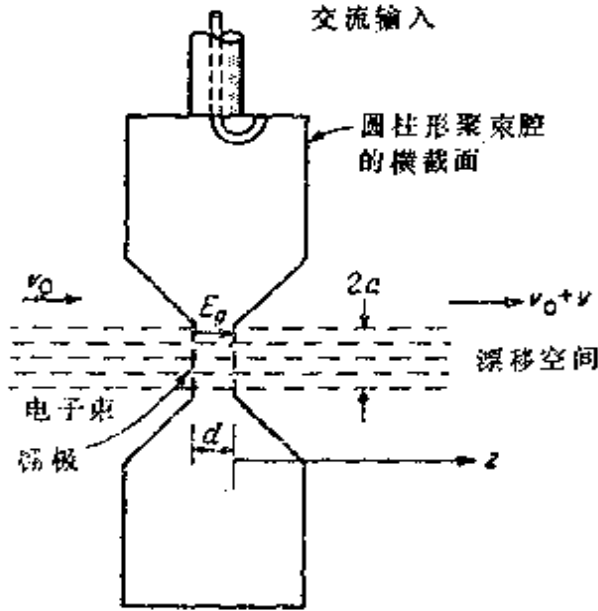


图 9.8 电子束的速度调制

面  $z = -d/2$  的时刻为  $t_1$ , 则当此电子在  $z = -d/2 + v_0(t - t_1)$  位置时, 在  $t$  时刻空腔谐振器的场为

$$E_z \cos \omega t = E_z \cos \frac{\omega}{v_0} \left( z + \frac{d}{2} + v_0 t_1 \right)$$

在电子渡越此间隙时间内, 空腔谐振器的场对电子所作的功为

$$\begin{aligned} W &= \int_{-d/2}^0 -e E_z \cos \beta_0 \left( z + \frac{d}{2} + v_0 t_1 \right) dz \\ &= -e E_z d \frac{\sin(\beta_0 d/2)}{\beta_0 d/2} \cos \omega t_1 \end{aligned} \quad (9.51)$$

式中,  $\beta_0 = \omega/v_0$  为电子束的直流传播常数。电子束耦合参数  $M$  定义为

$$M = \frac{\sin(\beta_0 d/2)}{\beta_0 d/2} \quad (9.52)$$

\* 此分析以弹道公式为基础, 而不用场的方法, 因为前者更为直接。

对在  $t$  时刻通过中间平面的电子来说，对此电子所作的功显然为

$$-eE_z dM \cos \omega t$$

对电子做功的结果使它的动能增加。若由聚束腔出来的出口速度为  $v_0 + v_z$ ，则由于在小信号条件下  $v_z \ll v_0$ ，故得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m(v_0 + v_z)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 &= \frac{1}{2} m(2v_0 v_z + v_z^2) \\ &\approx m v_0 v_z = -e E_z dM \cos \omega t \end{aligned} \quad (9.53)$$

(9.53) 式可写成复数形式：

$$v_z e^{i\omega t} = \frac{-\eta}{v_0} E_z dM e^{i\omega t}$$

所以在出口栅极处的电子束轴向交变速度的值为

$$v_z = \frac{-\eta}{v_0} M(E_z d) \quad (9.54)$$

上面的一级近似分析指出，由于 (9.51) 式在由  $t_1$  到  $t_1 + 1/f$  的一个周期内的平均值为零，所以，在电子束聚束过程中所做的功的平均值应为零。但是这个结果是不正确的，因为事实是要有净的平均功，以对电子束进行速度调制。为了求出所作功的平均值，必须作二级近似的分析\*。为表示对电子束进行速度调制而所需作的功的主要效应，可以用加在聚束腔上的等效并联电导来代表（聚束腔的电子束加载）。这个并联电导的大小，一般的情况是使聚束腔的  $Q$  值减小到其空载  $Q$  值的二分之一左右。尽管上面给出的一级近似分析不能足够精确地得出电子束加载等效电导，但它对电子束的速度调制作出了满意的答案，使我们从这个分析中得到了有意义的数据。

---

\* *K. R. Spangenberg, "Vacuum Tubes," Chap. 17, McGraw-Hill Book Company, New York, 1943.*  
*M. Chodorow and C. Sushind, "Fundamentals of Microwave Electronics," chap. 3, McGraw-Hill Book Company, New York, 1954.*

由于已知聚束腔出口栅极处的速度调制，故能够计算在聚束腔外的漂移空间中电子束上所激励的空间电荷波振幅。下面将详细地研究非聚焦电子束的情况。狭流电子束的情况较易于分析，并且，虽然在大多数速调管中不使用这种电子束，但在速调管分析中，它还是通常所假定的模型。然而，原来非聚焦电子束和狭流电子束的结果基本上是等效的。主要的差别是，非聚焦电子束对交变电流的主要贡献来自电子束上的等效面电流，而狭流电子束对交变电流的主要贡献来自分布在电子束横截面上的体电流。为了作比较，在分析过程中也将给出狭流电子束的结果。

在  $z > 0$  的漂移空间，将由于进入电子束的交变速度调制而发出空间电荷波。在出口栅极的平面上，空间电荷波的径向电场被短路而必须为零。适当地组合快和慢空间电荷波，可以满足这个条件。若令  $E_{r+}$  和  $E_{r-}$  为快慢空间电荷波的径向电场，则要求在  $z=0$  处  $E_{r+} = -E_{r-}$ 。但依据一阶变形贝塞尔函数  $I_1(pr)$ ， $E_{r+}$  和  $E_{r-}$  依赖于  $r$ ，式中的  $p$  对快波与慢波是不同的。然而，对于一般的电子束来说， $p \approx \beta \approx \beta_0$ ，所以径向关系可以取  $I_1(\beta_0 r)$ ，而误差可忽略。在此情况下，可以满足  $z=0$  处的边界条件，而不需引入高次空间电荷波。

若选取这两个具有相同振幅并在  $z=0$  处把轴向交变速度  $v_z$  同相组合起来的空間电荷波，则可以滿足  $E_r$  所需要的边界条件。于是，令  $v_{z+}$  和  $v_{z-}$  为快和慢空间电荷波的轴向速度振幅，则可写成

$$v_z = v_{z+} e^{-j\beta_+ z} + v_{z-} e^{-j\beta_- z} = v_{z+} (e^{-j\beta_+ z} + e^{-j\beta_- z})$$

式中， $\beta_+ = \beta_0(1 + \omega_q/\omega)$ ， $\beta_- = \beta_0(1 - \omega_q/\omega)$ ， $\omega_q$  是等效的等离子体频率，它等于  $F\omega_p$ 。由这些表示式得

$$v_z = 2v_{z+} \cos \beta_q z e^{-j\beta_0 z} \quad (9.55)$$

式中， $\beta_q = \beta_0 \omega_q/\omega = \omega_q/v_0$ 。要注意，根据  $I_0(\beta_0 r)$  可知， $v_{z+}$  是  $r$  的一个函数。但是， $\beta_0 \alpha$  很小，以致  $v_{z+}$  几乎不变。所以可在  $r=0$  处使  $2v_{z+}$  等于 (9.54) 式给出的  $v_z$ ，以得到

$$v_z = \frac{-\eta}{v_0} M V_s \cos \beta_s z I_0(\beta_0 r) e^{-j\beta_0 z} \quad (9.56)$$

它是在  $z > 0$  的漂移空间中任一点的轴向交变速度。在 (9.56) 式中，已经用  $V_s$  代替了间隙的激励电压  $E_s d$ 。

根据非聚焦电子束的空间交变电荷密度  $\rho$  为零，而由 (9.30) 式，可得  $J_z = -\rho_0 v_z$ 。所以，在漂移空间中的轴向交变电流密度为

$$J_z = \frac{\eta \rho_0}{v_0} M V_s \cos \beta_s z I_0(\beta_0 r) e^{-j\beta_0 z} \quad (9.57)$$

面电流  $J_z$  将在后面计算，并将变为比体电流更为重要。

为了求出  $E_z$ ，我们利用 (9.29f) 式得

$$\begin{aligned} E_{zs} &= \frac{\omega - \beta_s v_0}{j\eta} v_{zs} = -\frac{\omega_s}{j\eta} v_{zs} \\ &= -\frac{\omega_s}{j\eta} v_{st} \\ E_{st} &= \frac{\omega - \beta_s v_0}{j\eta} v_{st} = \frac{\omega_s}{j\eta} v_{st} \end{aligned}$$

所以，轴向电场为

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\omega_s}{j\eta} v_{st} (e^{-j\beta_s z} - e^{-j\beta_0 z}) \\ &= \frac{2\omega_s}{\eta} v_{st} e^{-j\beta_0 z} \sin \beta_s z \end{aligned}$$

引用前述的  $v_{st}$  表示式得

$$E_z = -\beta_s M V_s I_0(\beta_0 r) \sin \beta_s z e^{-j\beta_0 z} \quad (9.58)$$

注意在出口栅极处（那里  $z=0$ ） $E_z$  为零。

因为  $\beta_s \gg \beta_0$ ，所以由 (9.29d) 式得

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r E_{rs} &= j\beta_s E_{zs} = -(\beta_0 + \beta_s) \frac{\omega_s}{\eta} v_{st} \\ &\approx -\frac{\omega_s}{\eta} \beta_0 v_{st} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r E_{z1} &= j\beta_1 E_{z1} = (\beta_0 - \beta_2) \frac{\omega_0}{\eta} v_{z1} \\ &\approx \frac{\omega_0}{\eta} \beta_0 v_{z1} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (E_{z1} + E_{z2}) = -2\beta_1 \frac{\omega_0}{\eta} v_{z1} \approx 0$$

可见  $E_z$  的边界条件在很大的近似程度上得到满足。如果需要的话，稍为调整一下两个空间电荷波的振幅，就可以在一个特定的  $r$  值上使  $E_{z1} + E_{z2}$  精确地为零。但是，由于对这两个波已经用  $I_1(\beta_0 r)$  来近似  $I_1(\rho r)$ ，所以，现在与  $\beta_0$  比较把  $\beta_2$  去掉的这种近似与前面的假定是一致的。

如果研究  $J_z$  和  $v_z$  的表示式，就可以看出，由于两个空间电荷波之间的差拍或干涉，使交变电流和速度在漂移空间中按  $\cos\beta_2 z$  变化。最大体电流密度出现在

$$z = n \frac{\lambda_2}{2} \quad (9.59)$$

处，式中， $\lambda_2 = 2\pi/\beta_2$  是空间电荷波的波长， $n$  是一个整数。

若把上面研究的狭流电子束认为是在 9.3 节中所讨论过的电子束，则利用 (9.11b) 式和 (9.12) 式就会得到

$$J_z = - \frac{\omega \rho_0 v_z}{\omega - \beta v_0}$$

在这种情况下，

$$J_{zs} = \frac{\omega \rho_0 v_{zs}}{\omega_0} \quad J_{z1} = - \frac{\omega \rho_0 v_{z1}}{\omega_0}$$

对于狭流电子束来说，若  $v_z$  按  $\cos\beta_2 z$  变化，则  $J_z$  按  $\sin\beta_2 z$  变化。两种电子束模型特性的不同，是由于在非聚焦电子束中交变空间电荷密度为零引起的，这个条件能够存在是由于允许电子的径向交变运动。这两种电子束模型的轴向电流为

$$J_z = -\rho_0 v_z + \rho v_0 \quad J_z = -\rho_0 v_z$$

空间电荷  $\rho$  使  $J_z$  和  $v_z$  之间的关系由  $J_z = -\rho_0 v_z$  变到  $J_z = -\rho_0 v_z \omega / (\omega - \beta v_0)$ ，它又使随  $z$  变化的电流振幅产生差异。在使用某些大功率和长漂移空间的速调管时，要应用磁聚焦。在这种情况下，狭流电子束应是一种合用的模型。狭流电子束在  $r = 0$  处的轴向电流密度应当为

$$J_z = -\frac{j\eta\rho_0}{v_0} - \frac{\omega}{\omega_0} MV_e \sin \beta_e z e^{-j\beta_0 z} \quad (9.60)$$

其电流密度的峰值为由 (9.57) 式给出的非聚焦电子束的最大电流密度的  $\omega/\omega_0$  倍。这说明狭流电子束是较好的。但这不是一般情况，因为，如下面的分析将要证明的，非聚焦电子束的表面电流  $J_s$  可能对总的轴向交变电流有很重要的贡献。

(9.36) 式和 (9.38) 式给出了面电流密度。对这两个空间电荷波，可得

$$J_{zs} = -\frac{\eta\rho_0 v_0}{(\omega - \beta_s v_0)^2} E_{rs} = -\frac{\eta\rho_0 v_0}{\omega_0^2} E_{rs}$$

$$J_{zt} = -\frac{\eta\rho_0 v_0}{\omega_0^2} E_{rt}$$

把 (9.29 a) 式和 (9.29 b) 式联立起来得

$$E_r = \frac{j\beta}{p^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{j\beta}{p} C_1 I_1(pr) \approx jC_1 I_1(\beta_0 r)$$

式中， $C_1 I_0(pr) = E_z$ 。所以

$$J_s = -\frac{j\eta\rho_0 v_0}{\omega_0^2} I_1(\beta_0 a) (C_{1r} e^{-j\beta_0 z} + C_{1t} e^{-j\beta_0 z})$$

现在， $E_{rr} = -(\omega_0/j\eta)v_{rt}$ ， $E_{rt} = (\omega_0/j\eta)v_{rt}$ ，故得  $C_{1r} = -(\omega_0/j\eta)v_{rt}$ ， $C_{1t} = (\omega_0/j\eta)v_{rt}$ ，式中， $2v_{rt} = -(\eta/v_0)MV_e$ 。 $J_s$  的最后表示式成为

$$J_s = \frac{j\eta\rho_0}{\omega_0} MV_e I_1(\beta_0 a) \sin \beta_e z e^{-j\beta_0 z} \quad (9.61)$$

现在来比较对总轴向电流的相对贡献。总面电流为

$$I_s = 2\pi a \frac{j\eta\rho_0}{\omega_0} MV_e I_1(\beta_0 a) \sin\beta_0 z e^{-i\beta_0 z} \quad (9.62a)$$

在轴向流动的总的体电流为

$$I_z = \pi a \frac{2\eta\rho_0}{\beta_0 v_0} MV_e I_1(\beta_0 a) \cos\beta_0 z e^{-i\beta_0 z} \quad (9.62b)$$

这里，已经利用了如下的结果：

$$\int_0^a I_0(\beta_0 r) 2\pi r dr = \frac{2\pi a}{\beta_0} I_1(\beta_0 a)$$

峰值振幅之比为

$$\frac{(I_s)_{max}}{(I_z)_{max}} = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (9.63)$$

(9.63)式给出了一个很有意义的结果，即在非聚焦电子束情况下的总面电流是其总体电流的 $\omega/\omega_0$ 倍。事实上，由(9.62a)式给出的总面电流，等于半径很小的狭流电子束的总体电流，即 $\pi a^2 J_s$ ，其中，若用 $\beta_0 a/2$ 代替 $I_1(\beta_0 a)$ ，则对于狭流电子束来说，由(9.60)式给出的 $J_s$ 的峰值振幅与 $I_s$ 的相等。所以，我们得出了对于两类电子束大体上是同样有效的结论，至少对短的漂移空间、电子束的离散不显著的情况是如此。显然，交变空间电荷聚束对于在速度调制电子束中产生大密度交变电流是一个重要的机制。对于狭流电子束来说，交变空间电荷聚束在电子束内形成；对非聚焦电子束来说，交变空间电荷聚束以波纹边界的形式出现在电子束的表面上。图9.9给出了与这两种电子束模型相联系电场图形。图中所表示的正电荷只是等效电荷，它表示离开这个区域的电子的净迁移，而留下小于 $\rho_0$ 的净负电荷密度。可以把这种情况看作在恒定的直流电荷密度 $-\rho_0$ 的基础上迭加一个小的正电荷密度。

在判断非聚焦电子束的体电流与表面电流相对振幅时，比值 $\omega/\omega_0$ 必须已知。通常， $\omega_0$ 与等离子体角频率 $\omega_p$ 相差不到1/2倍左右。图9.10中画出了在几种电子束加速电压 $V$ 下 $f_s = \omega_s/2\pi$ 随电子束的电流密度 $J_0$ （以毫安/厘米<sup>2</sup>为单位）变化的曲线。注意： $f_s$ 正比于

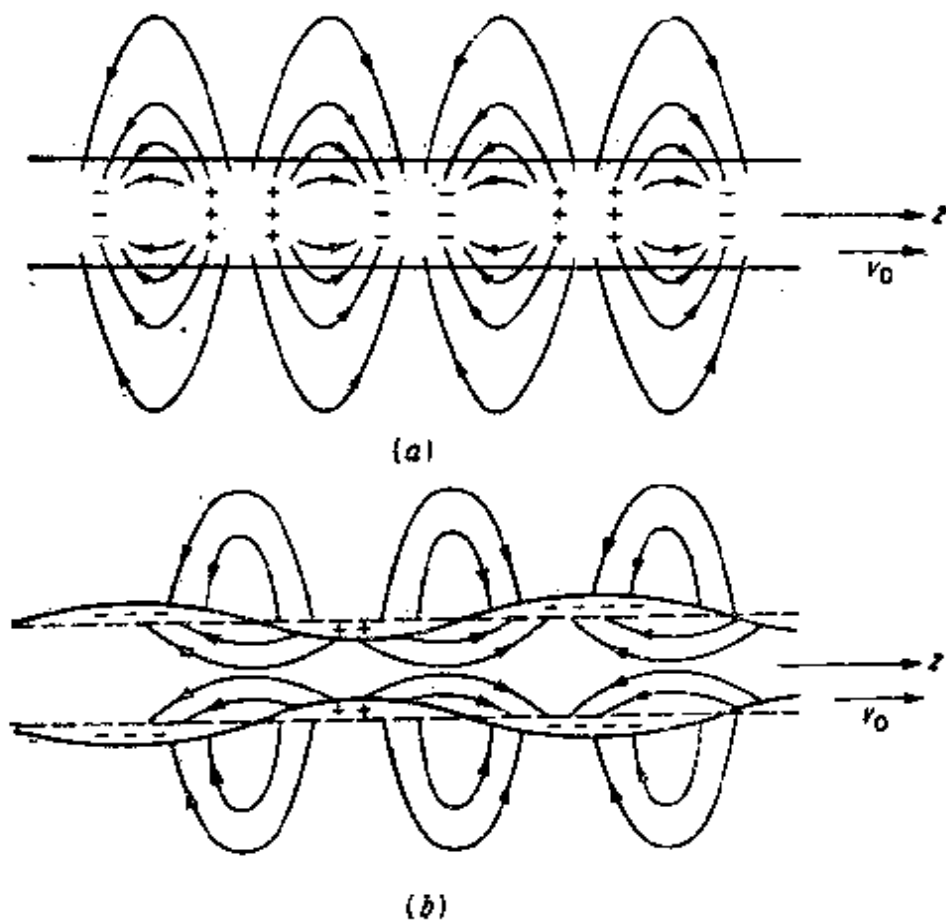


图 9.9 与交变空间电荷束相联系的电力线  
(a) 狭流电子束; (b) 非聚焦电子束

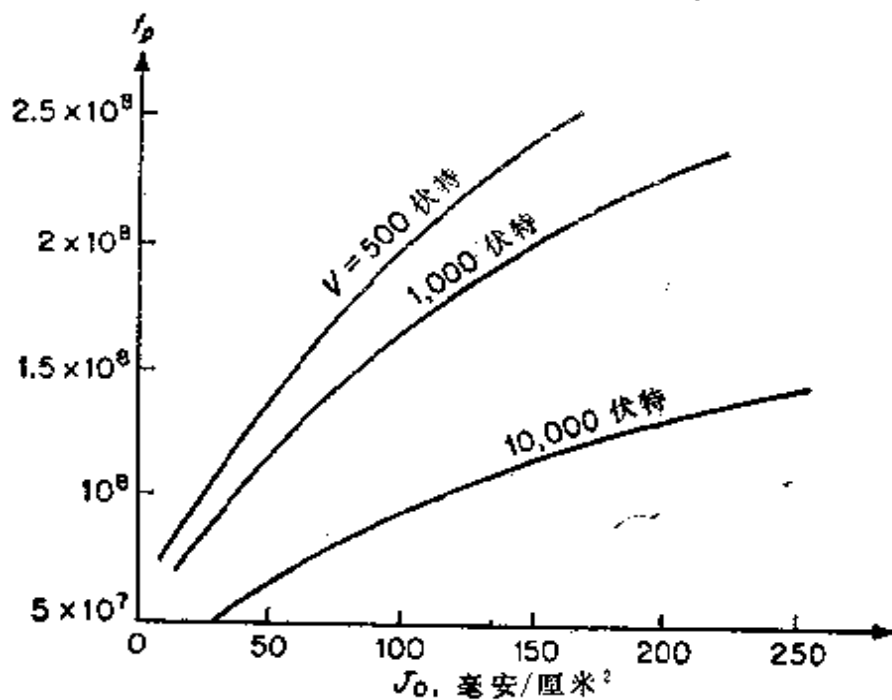


图 9.10 等离子体频率随电子束电流密度的变化



$$J_0^{\frac{1}{2}} / V^{\frac{1}{4}}$$

## 9.7 双腔速调管

图9.11中表示的是典型的双腔速调管放大器的略图。第一腔为输入信号所激励，信号可以通过同轴线环或波导孔与此空腔耦合。第一腔起聚束器和对电子束进行速度调制的作用。第二腔与聚束器之间是长为  $l$  的漂移空间，理想的情况是这样取  $l$ ，即使第二腔（有时称为获能腔）的交变电流为最大。于是，通过用以速度调制形式加于电子束上的交流信号激励第二腔，从而在其中产生一个交

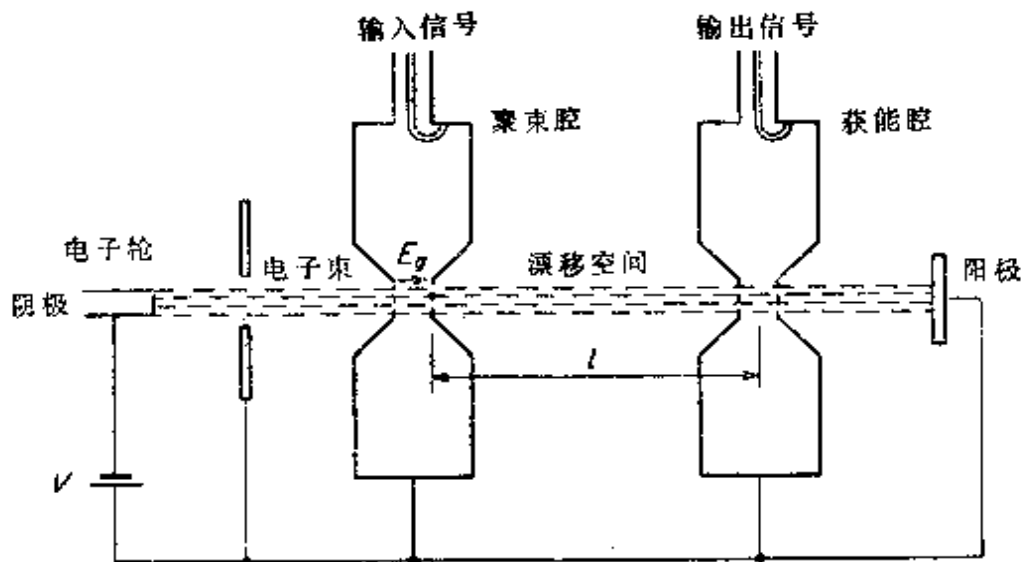


图 9.11 双腔速调管放大器

变电流。电子束上的交变电流使第二腔所激励的电平远比聚束腔高，从而产生了放大。输出信号由第二腔取出。如果需要的话，可以把被放大的一部分输出信号以回授的方式反馈到聚束腔，以获得自激振荡。

分析速调管的方式之一，是从假定输出腔的集总参数等效电路开始的，然后通过计算在此空腔中心的栅极上在电子束经过时所感应的电荷对时间的变化率，来算出流入此等效电路的电流。这种分析正确地描述了速调管的性能，但它未能说明在空腔内实际发生的

电磁场与电子束相互作用的机理。更好的方法是一开始就用场分析，它将最终导致一个等效电路，以提供作为电路问题分析的基础。下面介绍这个方法。首先计算交变电流通过空腔时在空腔中建立的场。这就可以在一个谐振频率附近得出此空腔的一个等效电路。下一步是求速度调制的电子束通过时空腔（或它的等效电路）的响应，此电子束上的交变电流是传播的电流波形式。由此得到了电子束耦合系数的定义，它是已调电子束在空腔中激发起响应的有效程度的量度。第三步（已经在9.6节中介绍过了）是求当未调制电子束通过存在振荡电场的空腔时，在其上产生交变电流。这三个方面的分析，实质上提供了速调管工作的完整概念。

### 圆柱形空腔的激励

在速调管的空腔中，希望栅网间隔小，以便使耦合参数  $M = \{\sin(\beta_0 d/2)\}/(\beta_0 d/2)$  接近于 1。渡越角  $\beta_0 d = \omega d/v_0$  应保持很小。此外，还需要高 Q 腔，因此要使用重入式空腔。分析这种空腔中的模是困难的，因而改为分析普通的圆柱形空腔。由已调电子束激励的后一类型空腔所含的主要特点，与重入式空腔是相同的。

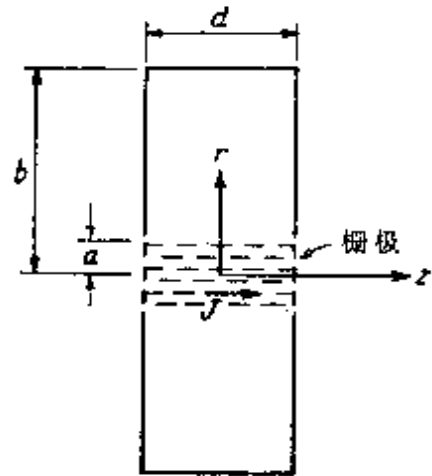


图 9.12 由轴向电流激励的圆柱形空腔

图9.12表示要研究的圆柱形空腔。此空腔的半径为  $b$ ，长度为  $d$ ，在中间开两个小的圆柱形孔，并放上栅网，以便使电子束能够穿过。电子束的半径为

$a$ 。它与空腔半径  $b$  相比小得多。首先研究用轴向交变电流

$$J_z = J e^{i\omega t} \quad 0 \leq r \leq a \quad (9.64)$$

对此空腔的激励。然后将研究在速度调制的电子束上出现的行波电流  $J e^{i\omega t - i\beta_0 z}$ ，并将发现，电子束的耦合参数  $M$  改变了空腔的响应。

鉴于  $z$  方向电流的均匀性和轴向对称性，只激励  $TM_{0m0}$  模。它

们有 $E_r$ 、 $E_\varphi$ 、 $H_z$ 三个分量，而 $H_r$ 等于零。为了方便，引入矢位 $A_z$ ，它是

$$\nabla^2 A_z + k_0^2 A_z = \begin{cases} -\mu_0 J & 0 \leq r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad (9.65)$$

的一个解。在 $r = b$ 处，得 $A_z = 0$ ，所以在边界上 $E_z$ 应等于零。由于不随 $z$ 或 $\varphi$ 变化，故由 $A_z$ 得

$$E_z = -j\omega A_z \quad (9.66a)$$

$$H_\varphi = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial r} \quad (9.66b)$$

此空腔的固有模是方程

$$\nabla^2 A_{z,0m0} + k_{0m0}^2 A_{z,0m0} = 0 \quad (9.67)$$

的解。式中， $k_{0m0} = \omega_{0m0}(\mu_0 \epsilon_0)^{\frac{1}{2}}$ ，而 $\omega_{0m0}$ 是 $TM_{0m0}$ 模的谐振频率。由于不随 $z$ 或 $\varphi$ 变化， $\nabla^2$ 便成为

$$\nabla^2 = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}$$

而(9.67)式的解是贝塞尔函数，即

$$A_{z,0m0} = C_m J_0\left(\frac{p_{0m} r}{b}\right) \quad (9.68)$$

式中，取 $p_{0m}$ 使 $J_0(p_{0m}) = 0$ ， $C_m$ 是任意常数，同时，由于轴向无变化， $k_{0m0} = p_{0m}/b$ （参看7.3节）。

由于贝塞尔函数类似于正弦和余弦函数，并且可以用在矢位的付立叶级数展开式中，故可以选取(9.65)式的解为

$$A_z = \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_0\left(\frac{p_{0m} r}{b}\right) \quad (9.69)$$

把(9.69)式代入(9.65)式，由于(9.69)式是(9.67)式的一个解，故得

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m (k_{0m0}^2 - k_0^2) J_0\left(\frac{p_{0m} r}{b}\right) = \mu_0 J \quad 0 \leq r \leq a \quad (9.70)$$

由于存在如下的正交性：

$$\int_0^b J_0\left(\frac{p_{0m}r}{b}\right) J_0\left(\frac{p_{0n}r}{b}\right) r dr = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{b^2}{2} J_1^2(p_{0m}) & n = m \end{cases} \quad (9.71)$$

所以，若以  $rJ_0(p_{0m}r/b)$  乘(9.70)式的两边然后积分，并用  $\omega/c$  代替  $k_0$  以及类似地代换了  $k_{0m0}$  之后，得到

$$\begin{aligned} C_m &= \frac{2\mu_0}{(k_{0m0}^2 - k_0^2)b^2 J_1^2(p_{0m})} \int_0^a J J_0\left(\frac{p_{0m}r}{b}\right) r dr \\ &= \frac{2\mu_0 J a J_1(p_{0m}a/b) c^2}{p_{0m} b J_1^2(p_{0m}) (\omega_{0m0} - \omega)(\omega_{0m0} + \omega)} \end{aligned} \quad (9.72)$$

这个方程对所有的  $m$  值都成立。由这些表示式立即可以看出，只对  $\omega \approx \omega_{0m0}$  的那些模才能激励起大的振幅。此外，还可看到，对某一个特定的  $m$  值来说，若  $\omega = \omega_{0m0}$ ，则  $C_m$  变为无限大。无限大响应的发生是由于空腔是理想的，且被它的固有谐振频率之一所激励的缘故。实际的空腔  $Q$  值是有限值，且不会出现无限振幅的响应。如7.1节和7.3节所指出的那样，有限  $Q$  值的影响在于用下式代替谐振频率：

$$\omega_{0m0} \left(1 + \frac{j}{2Q_{0m0}}\right)$$

式中， $Q_{0m0}$  是  $TM_{0m0}$  模的  $Q$  值。由(7.41)式给出的空腔  $Q$  值当为

$$Q_{0m0} = \frac{p_{0m} c}{(1 + b/d)\omega_{0m0} \delta_r} \quad (9.73)$$

所以对有限  $Q$  值的空腔激励的振幅为

$$C_m = - \frac{2\mu_0 a J c^2 J_1(p_{0m}a/b)}{p_{0m} b J_1^2(p_{0m}) (\omega_{0m0} + \omega)(\omega - \omega_{0m0} - j\omega_{0m0}/2Q_{0m0})} \quad (9.74)$$

若取  $\omega = \omega_{010}$ ，则  $C_1$  大，而所有其他的  $C_m$  将很小。在这种情况下

$$A_r = C_1 J_0\left(\frac{p_{01}r}{b}\right) = - \frac{2j\mu_0 a J c^3 J_1(p_{01}a/b) Q}{b^2 J_1^2(p_{01}) \omega^3} J_0\left(\frac{p_{01}r}{b}\right) \quad (9.75)$$

式中的  $\omega$  和  $Q$  现在对应于  $TM_{010}$  模。注意：由于  $A_r$  正比于  $Q$  值，故高  $Q$  是需要的。若此空腔与外部负载耦合，则必须用有载  $Q$ ，即  $Q_L$

来代替。

总的交变电流为  $I = \pi a^2 J_z$ 。同样，由于  $a \ll b$ ，故可用  $J_0(p_{01}a/b)$  代替  $J_z(p_{01}a/b)$ 。在谐振频率  $\omega_{010}$  附近，即当  $\omega = \omega_{010} + \Delta\omega$  时，可得出电场  $E_z$  为

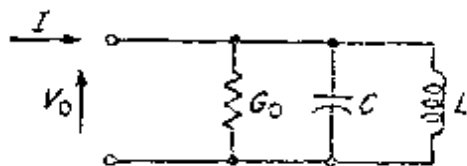
$$E_z = -j\omega A_z = \frac{jI J_0(p_{01}r/b)}{2\pi b^2 \epsilon_0 J_1^2(p_{01})(\Delta\omega - j\omega_{010}/2Q)} \quad (9.76)$$

如果引入一个等效电压  $V_0$ ，作为在  $r=0$  处空腔间隙上  $E_z$  的线积分，即  $V_0 = -E_z d$ ，则可以对此空腔定义一个导纳：

$$Y_0 = \frac{I}{V_0} = \frac{2\pi b^2}{d} \epsilon_0 J_1^2(p_{01}) \left( j\Delta\omega + \frac{\omega_{010}}{2Q} \right) \quad (9.77)$$

对于如图 9.13 那样的谐振频率为  $\omega_{010} = (LC)^{-1/2}$  的集中参数  $LCG_0$  电路，可得

$$Y_0 = G_0 + 2jC\Delta\omega = G_0 \left( 1 + j\frac{2\Delta\omega}{\omega_{010}} Q \right)$$



式中， $Q = \omega_{010} C / G_0$ 。与 (9.77) 式比较表明，空腔的等效电导  $G_0$  为（注意： $\epsilon_0 \Rightarrow Y_0/c$ ）

图 9.13 不带负载的激励空腔的等效电路

$$G_0 = \pi b^2 Y_0 J_1^2(p_{01}) \frac{\omega_{010}}{d Q c} \quad (9.78)$$

于是，上述等效电路似乎是在  $TM_{010}$  模的谐振频率  $\omega_{010}$  附近表示谐振腔的一个可能的等效电路。但是，必须指出，即使在没有电子束电流  $I$  时，它仍能正确地说明此空腔的特性。

$TM_{010}$  模储藏电场中的能量为（假定  $E_z = J_0(p_{01}r/b)$ ）

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{4} \int_0^d \int_0^{2\pi} \int_0^b J_0^2 \left( \frac{p_{01}r}{b} \right) r dr d\omega dz = \frac{\pi \epsilon_0}{4} b^2 d J_1^2(p_{01})$$

在  $r=0$  处加在此空腔上相应的电压为  $V = E_z d = d$ 。由于  $Q = 2\omega W_e / P_i$ ，故空腔中的功率损耗为

$$P_i = \frac{2\omega W_e}{Q}$$

若定义电导 $G$ 使 $P_i = \frac{1}{2} V^2 G$ , 则由于 $\omega = \omega_{010}$ 可得出

$$G = \frac{2P_i}{V^2} = \frac{4\omega W_e}{V^2 Q} = \frac{\pi \epsilon_0 b^2 \omega_{010} J_1^2(p_{01})}{d Q} = G_0$$

可见对空腔电导的两个定义导致同样的结果。

如果需要的话, 可由 $\omega_{010} C = Q G_0$ 和 $\omega_{010}^2 LC = 1$ 给定 $C$ 和 $L$ , 所以由已知的 $Q$ 和 $G_0$ 的值也可求出 $L$ 和 $C$ 。

### 用速度调制的电子束激励空腔

在速度调制的非聚焦电子束中, 其交变电流主要是电子束的交变表面电流 $I_s = 2\pi a J_s$ , 其中, 由于一般的电子束 $\omega \gg \omega_c$ , 故 $J_s$ 由(9.61)式给定。当 $z$ 由聚束腔的输出栅极算起时, 此电流与 $z$ 的关系为 $\sin \beta_q z e^{-i\beta_0 z}$ 。输出腔离输入腔的距离应为 $l = (n + \frac{1}{2})(\lambda_c/2)$ , 以使 $\sin \beta_q z$ 等于1, 而 $I_s$ 具有最大值。因为 $\beta_q \ll \beta_0$ , 故得 $\beta_q d \ll 1$ , 且输出腔中交变电流随 $z$ 的变化可以表示为 $e^{-i\beta_0 l} e^{-i\beta_0 z}$ , 这里, 已把 $z$ 改为 $l + z$ , 以使新的原点在输出腔的中心。空腔就这样为行波电流所激励。

当交变电流依赖于 $z$ 时, 能激励所有的 $TM_{0mn}$ 模, 于是 $A_z$ 的解具有如下的形式:

$$A_z = C_{mn} J_0\left(\frac{p_{0m} r}{b}\right) \cos \frac{n\pi z}{d}$$

因而要用

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} \left[ \left(\frac{p_{0m}}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 - k_0^2 \right] J_0\left(\frac{p_{0m} r}{b}\right) \cos \frac{n\pi z}{d} = \mu_0 J_s(r, z) \quad (9.79)$$

代替(9.70)式。但是, 若 $\omega \approx \omega_{010}$ , 则只有 $m=1$ ,  $n=0$ , 即 $TM_{010}$ 模激励起大的振幅。为了求出 $C_{10}$ , 我们用 $m=1$ ,  $n=0$ 的 $r J_0(p_{01} r/b) \cos(n\pi z/d)$ 乘(9.79)式, 并对 $r$ 和 $z$ 进行积分得

$$C_{10} = \frac{2\mu_0}{(k_{010}^2 - k_0^2) b^2 J_1^2(p_{01})} \int_0^a J_s(r) r J_0\left(\frac{p_{01} r}{b}\right) dr \int_{-d/2}^{d/2} dz$$

$$\frac{1}{d} e^{-j\beta_0 z} dz$$

后一结果表明：激励振幅为因子

$$\int_{-d/2}^{d/2} \frac{1}{d} e^{-j\beta_0 z} dz = \frac{\sin(\beta_0 d/2)}{\beta_0 d/2} = M$$

所改变，它是电子束的耦合系数。由于除了  $r = a$  时  $J_r \neq 0$  以外，其余的  $r$  值  $J_r = 0$ ，且当  $a \ll b$  时， $J_0(p_{01}a/b) \approx 1$ ，故对  $r$  的积分，可以用没有因子  $e^{-j\beta_0 r}$  的  $aJ_r$  来代替。所以，当  $\omega = \omega_{010} + \Delta\omega$  时，得  $r = 0$  处的  $E_r$  为

$$E_r = \frac{jM(jI_1)e^{-j\beta_0 l}}{2\pi b^2 \epsilon_0 J_1^2(p_{01})(\Delta\omega - j\omega_{010}/2Q)} \quad (9.80)$$

式中， $I_1$  由(9.62a)式得到，且为

$$I_1 = 2\pi a \frac{\eta \rho_0}{\omega_0} M I_1(\beta_0 a) V_s \approx \pi a^2 \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega_0} \beta_0 M V_s \quad (9.81)$$

上式考虑了当  $\beta_0 a \ll 1$  时， $I_1(\beta_0 a) \approx \beta_0 a/2$ ，同时假定采用了漂移空间最佳长度  $l$ ，使  $\sin\beta_0 l$  等于 1。若把(9.80)式与(9.76)式比较，则可发现， $E_r$  的变化只是用电流  $I_1$  代替电流  $I$ ，并乘以电子束耦合系数  $M$  和一个与此无关的相位因子  $e^{-j\beta_0 l}$ 。

由于加于空腔上的电压乘上了一个因子  $M$ ，因而在等效电路中用以产生电压  $V$  的等效电流便为

$$I_e = M I_1 \quad (9.82)$$

由此可见， $M$  称为电子束耦合系数显然是合适的。为了在电子束与空腔之间有良好的耦合，需要渡越时间  $\beta_0 d$  短。

当外部负载与输出腔耦合时，它可以用附加一个电导  $G_L$  与  $G_0$  并联来表示。输出腔的等效电路如图 9.14a 所示，其中， $I_e = M I_1$  是流入此电路的等效电流。供给外部负载  $G_L$  的功率为

$$P_0 = \frac{1}{2} \frac{|I_e|^2 G_L}{(G_0 + G_L)^2} \quad (9.83)$$

对输入腔可以假定类似的等效电路，如图 9.14b 所示。当两个

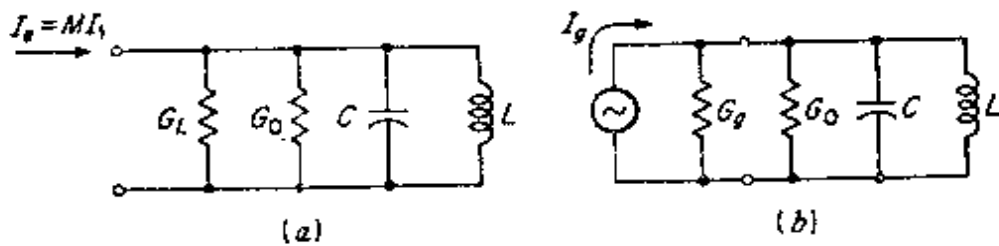


图 9.14 (a) 输出腔的等效电路; (b) 输入腔的等效电路。

空腔相同时, 其空腔电导皆为  $G_0$ 。若假定电子束在输入腔上的加载可忽略, 则输入腔等效电路中的总电导为  $G_0 + G_s$ , 其中,  $G_s$  为信号源的等效电导\*。

聚束腔在谐振时的输入功率为

$$P_{in} = \frac{1}{2} \frac{|I_g|^2 G_0}{(G_s + G_0)^2} \quad (9.84)$$

它加在  $G_0$  上的电压为

$$V_g = \frac{I_g}{G_0 + G_s} = \left( \frac{2P_{in}}{G_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9.85)$$

这也是速度调制电压。现在可以求此速调管的功率增益或放大量。把(9.81)、(9.83)和(9.85)结合起来, 得到

$$\begin{aligned} A &= \frac{P_0}{P_{in}} = \frac{|I_g|^2 G_L}{|I_g|^2 G_0} \left( \frac{G_0 + G_s}{G_0 + G_L} \right) \\ &= \left( \frac{\pi a^2 \epsilon_0 \beta_0 \omega_p^2}{\omega_s} \right)^2 \frac{M^4 G_L}{G_0 (G_0 + G_L)^2} \\ &= \left( \pi a^2 Y_0 \beta_0 \frac{\omega_p}{c} \frac{\omega_p}{\omega_s} \right)^2 \frac{M^4 G_L}{G_0 (G_0 + G_L)^2} \quad (9.86) \end{aligned}$$

作为一个例子, 我们来研究  $G_L = G_0$  且电子束半径  $a = 0.2$  厘米的情况。若还假定电子束电流密度为  $100$  毫安/厘米<sup>2</sup>, 加速电压为  $1000$  伏特, 则由图9.10得出  $\omega_p = 1.02 \times 10^9$ 。因为  $f = 10^{10}$ ,  $\omega =$

\*表示电子束对输入腔加载的电导为  $G_s = (I_0/V) M [M - \cos(\beta_0 d/2)]$ , 当它不能忽略时, 把它加到  $G_0 + G_s$  上予以考虑即成。注意,  $I_0$  为电子束直流电流,  $V$  为加速电压。参看本章末所引证的斯洋吉伯格的著作的第17章。



$6.28 \times 10^{10}$ ,  $\beta_0 = \omega/v_0 = 33.6$  厘米/厘米, 所以,  $\beta_0 a = 6.72$ 。由于  $\omega_p \ll \omega$ , 故得  $\beta a \approx \beta_0 a$ , 再由图 9.6 查出  $\omega_s \approx 0.7 \omega_p$ 。利用这些数据, 可以得到功率放大系数  $A$  为  $0.094(Y_0/G_0)^2 M^4$ 。为了计算  $G_0$ , 可利用 (9.78) 式和 (9.73) 式。已经知道  $P_{01} = 2.405$ , 且由于  $P_{01} = k_{010} b$ , 故得

$$b = \frac{2.405c}{6.28 \times 10^{10}} = 1.15 \text{ 厘米}$$

为了使  $\beta_0 d$  保持很小, 必须取很小的  $d$ 。若取  $d = 0.05$  厘米, 则  $\beta_0 d = 1.68$ ,  $M^4 = 0.62$ , 我们甚至希望使  $d$  更小, 但是, 这样一来会使所研究的这种空腔的  $Q$  值 (因而  $G_0$ ) 变小。由 (9.73) 式求得铜空腔的  $Q = 785$ , 它不是很大值。若用重入式空腔, 能够得到增大 10 倍的  $Q$  值。应用 (9.78) 式可得  $G_0 \approx 0.06 Y_0$ , 于是功率放大量为 16.2, 即 12 分贝。由于重入式空腔  $d$  做得很小时仍能保持高的空载  $Q$  值, 故用它会得到相当高的增益。但是, 即使用已研究过的非最佳空腔, 其增益也是相当高的。对已算出的这个特例来说, 电子束负载电导  $G_L$  与空腔电导  $G_0$  相比是很小的。对于具有更高的无载  $Q$  和更有效率的空腔来说, 空腔电导  $G_0$  会更小, 这时电子束负载电导  $G_L$  不可忽略。

为了得到比双腔速调管更高得多的功率增益, 可采用多腔速调管。其增益以其所使用的空腔数按指数增加。多腔速调管中的第一个空腔同样是用以对电子束进行起始速度调制。电路中的最后一个腔体同样用作输出腔。中间的空腔保持不被任何外部电路加载, 而用来增加调制, 从而增加电子束的交变电流。用多腔速调管功率增益可达到 50 到 60 分贝。

## 9.8 反射速调管

反射速调管是一种加入了反馈机构的振荡管。它用同一个空腔来聚束和输出。图9.15给出了反射速调管的简图。其工作原理如下所述：

若在空腔中有一个起始的交流场，则当电子束通过此空腔时，会得到速度调制。进入漂移空间以后，由电位为 $-V_r$ 的反射极（反射器的电极）所产生的大直流场使电子束减速和返回（反射）。于是电子束又通过此空腔，但方向反过来了。适当地选反射极电压 $V_r$ ，可以做到：当电子束在其回程中经过空腔时，其交流电流的相位正好激起与原来调制电场同相的电场。这样，反馈是正的，且振荡会增强，直到系统的损耗和非线性的作用阻止其振幅进一步增大为止。

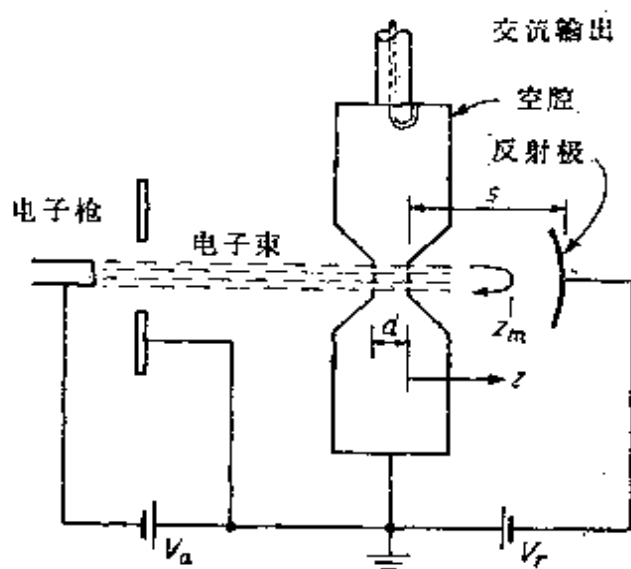


图 9.15 反射速调管

当速度调制的电子束进入漂移空间时，它受到恒定减速场 $V_r/s$ 的支配，这里的 $s$ 是空腔的输出栅极—反射极间隔。其结果是电子束传播常数 $\beta_0 = \omega/v_0$ 渐渐地减少到零，然后又回升到 $-\beta_0$ 。电子束上交变电流所经历的总相位变化将为

$$\theta = 2 \int_0^{z_m} \beta_0(z) dz$$

式中， $z_m$ 是一个电子所能穿入漂移空间的最大距离。也可以用电子回到空腔的渡越时间 $T$ 计算 $\theta$ 。在漂移空间中

$$\frac{dv_0(z)}{dz} = -\eta \frac{V_r}{s}$$

积分得  $v_0(z) = v_0 - \eta V_r z/s$ 。所以

$$v_0(Z_m) = v_0 - \eta \frac{V_r}{s} \frac{T}{2} = 0$$

解此式得  $T/2 = v_0 s / \eta V_r$ 。返回时间也等于  $T/2$ 。所以

$$\theta = \omega T = \frac{2v_0 s \omega}{\eta V_r} \quad (9.87)$$

若令  $V_k$  为加速间隙的交流电压，则当用  $\theta$  代替  $\beta_0 z$  和用  $\beta_0 \theta / \beta_0 = \omega_p \theta / \omega$  代替  $\beta_0 z$  时，通过此空腔反射回来的电子束交变电流由(9.62a)式给出。于是

$$I_r = \frac{j\pi a^2 \eta \rho_0 \beta_0 M V_k}{\omega_p} \sin \frac{\omega_p \theta}{\omega} e^{-j\theta}$$

式中，已经用  $\beta_0 a/2$  来近似表示  $I_1(\beta_0 a)$ 。反射速调管中的  $\theta$  通常很小，所以  $\sin(\omega_p \theta / \omega)$  可以用  $\omega_p \theta / \omega$  来代替。空腔激励的有效电流为  $I_e = I_r M$ ，且为

$$I_e = \frac{\pi a^2 \eta \rho_0 M^2 V_k}{v_0} \theta e^{j(\pi/2 - \theta)} = \frac{I_0}{V_r} \frac{V_k}{2} M^2 \theta (\sin \theta + j \cos \theta) \quad (9.88)$$

式中， $I_0$  是电子束总的直流电流  $\pi a^2 \rho_0 v_0$ ， $V_r$  是由  $v_0^2 = 2\eta V_r$  决定的加速电压。

电子束交流电子导纳的定义是

$$Y_e = \frac{I_e}{V_k} = \frac{I_0}{V_r} \frac{M^2}{2} \theta (\sin \theta + j \cos \theta) \quad (9.89)$$

反射速调管的等效电路由电子电纳与加载空腔并联所组成。如图9.16所示。当其纯电导小于零时，或更准确地说当

$$Y_e + (G_L + G_0) \left( 1 + j \frac{2\Delta\omega}{\omega_{010}} Q_L \right) = 0 \quad (9.90)$$

(式中， $Q_L$  为空腔的有载Q值) 时，就能产生振荡。由于由(9.87)

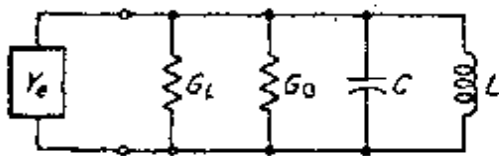


图 9.16 反射速调管的等效电路

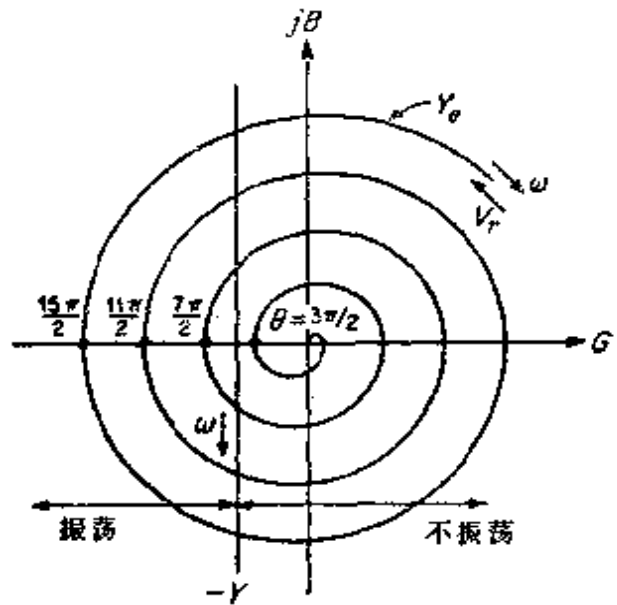


图 9.17 反射速调管的导纳图

式给出的  $\theta$  是反射极电压的函数，故振荡有赖于  $V_r$  的正确选取。图 9.17 中画出了在极坐标中导纳  $Y$  随  $\theta$  的变化曲线。注意： $|Y|$  随  $\theta$  而增加。在同一个平面上，也画出了空腔的负导纳

$$-Y = -(G_c + G_L) \left( 1 + j \frac{2\Delta\omega}{\omega_{010}} Q_L \right)$$

的曲线。倘若假定在谐振频率  $\omega_{010}$  附近  $G_0$ 、 $G_L$ 、 $Q_L$  与  $\omega$  无关，则  $-Y$  是在  $G = -(G_0 + G_L)$  处平行于  $jB$  轴的一条直线。这种结构表明  $\theta$  在  $3\pi/2$ 、 $7\pi/2$  等附近时能够振荡。因为，在这个区域中  $G_c + G_0 + G_L < 0$ 。此外，振荡还将发生在  $V_r$  值的范围取在  $\theta = 3\pi/2 + 2n\pi$  附近时。每一个  $n$  值得出一个振荡模。一般的速调管可以得到七个或更多的振荡模。因为稳定振荡时  $Y_c + Y = 0$ ，所以当调谐到一个给定的模时，其振荡频率随  $V_r$  的变化而变化。图 9.18 表示输出功率和频率随反射极电压而变化的典型调谐曲线。事实上，各种模是由于当  $V_r$  减小时，电子在漂移空间中的渡越时间增加所引起的，振荡发生在渡越时间  $T$  等于  $(\frac{1}{2} + n)f^{-1}$  或  $\frac{1}{2} + n$  个交流周期时，因为在这些条件下，交变电流具有合适的相位。

能大批供应的反射速调管，其范围从小型的能产生 100 毫瓦的

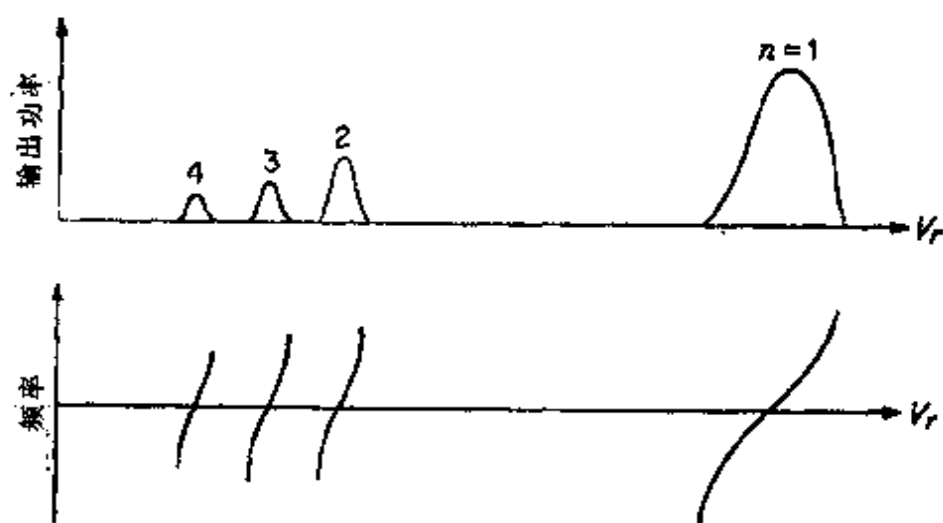


图 9.18 反射速调管的调谐曲线

功率到在连续运用中能够传送几瓦的功率。已经有了采用两个或两个以上空腔的小型速调管放大器，其输出功率范围从几百毫瓦到几百千瓦。

## 9.9 磁控管

这一节对磁控管振荡器作定性的阐述。磁控管的基本结构是若干个同样的谐振腔围绕着圆柱形阴极排列成圆柱形图样，如图9.19所示。用一块永久磁铁来产生垂直于横截面的强磁场。阳极对于阴极保持高的正电位 $V_a$ 。由阴极发射的电子被加速向阳极块前进，但

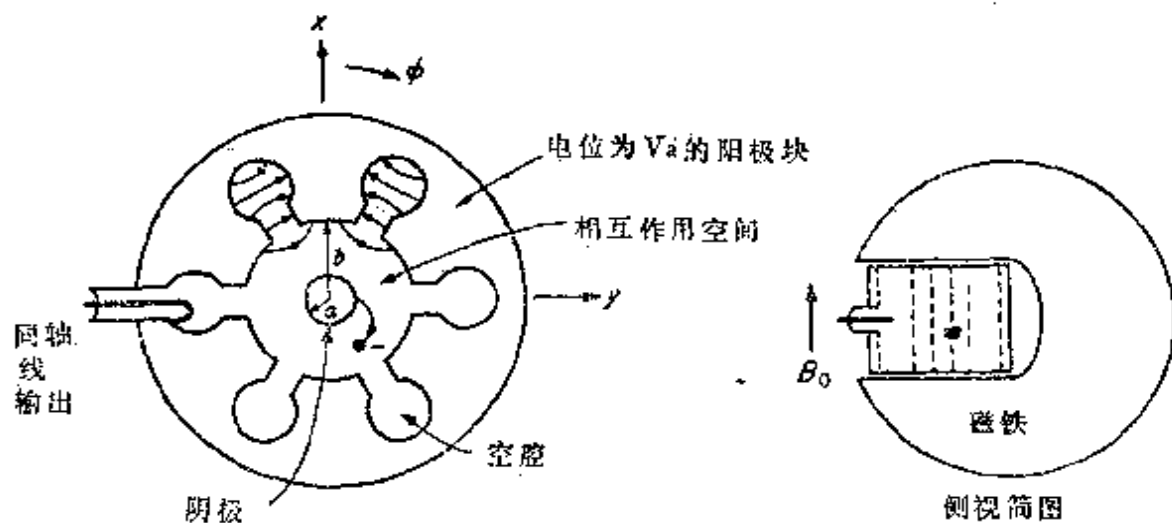


图 9.19 多腔磁控管

是，在磁场 $B_0$ 存在的情况下，其方位角的方向产生一个力 $-ev_r B_0$ ，它使电子的轨迹以相同的方向偏转。若阴极半径为 $a$ ，阳极半径为 $b$ ，则在任一半径 $r$ 上的电位为 $V(r) = V_0(l_n(r/a))/(l_n(b/a))$ 。在半径 $r$ 处电子的速度为

$$v(r) = (2\eta V(r))^{1/2}$$

如果向外离心力 $mv^2/r$ 加径向电场力 $-eE_r = eV_0/(rl_n(b/a))$ 与内向的磁力 $ev(r)B_0$ 严格地相等，则电子能以 $r$ 为半径围绕阴极作圆运动。因而对半径为 $r$ 的圆运动得

$$\frac{mv^2}{r} + \frac{eV_0}{rl_n(b/a)} = evB_0 \quad (9.91a)$$

或者由于 $v = \omega_e r$ 得

$$\omega_e^2 - \eta B_0 \omega_e + \frac{\eta V_0}{r^2 l_n(b/a)} = 0 \quad (9.91b)$$

式中， $\omega_e$ 是电子的角速度。为了以后参考，可解出(9.91)式的加速电压 $V_0$ 为

$$V_0 = \left( \omega_e r^2 l_n \frac{b}{a} \right) \left( B_0 - \frac{\omega_e}{\eta} \right) \quad (9.92)$$

这个 $V_0$ 值将使电子以半径 $r$ 和角频率 $\omega_e$ 作圆运动。如果存在具有相速等于电子速度 $\omega_e r$ 、沿方位角方向传播的交变电磁场，则在此场与旋转的电子云之间能够发生强烈的相互作用。以下讨论出现这种类型电磁场的可能性。

多腔磁控管在方位角(即 $\varphi$ )方向是一种周期性结构。若有 $N$ 个空腔，则 $\varphi$ 的周期为 $2\pi/N$ 。按照福罗奎定理，每个场分量可以展开为

$$\begin{aligned} \psi(r, \varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\beta z - i2n\pi r/\rho} \psi_n(r) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(r) e^{-i\beta z - i n N \varphi} \end{aligned} \quad (9.93)$$

式中，周期  $p = 2\pi/N$ 。但是由于此结构本身是闭合的，故  $\Psi(r, 2\pi) = \Psi(r, 0)$ ，使  $\beta 2\pi$  等于  $2\pi$  的倍数的  $\beta$  值只可能为

$$\beta_m = m \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.94)$$

$\beta$  的值确定以后，对应的频率  $\omega$  便确定了，比如说是  $\omega_m$ ，它是第  $m$  次模的谐振频率。换句话说，当  $\omega = \omega_m$  时，我们得到  $\beta_m$  的一个值  $m$ ，所以，典型的场分量的形式为

$$\psi_m(r, \varphi) e^{j\omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(r) e^{-j(m+nN)\varphi + j\omega_m t}$$

对第  $m$  个谐振模的第  $n$  次空间谐波，在半径为  $r$  处在  $\varphi$  方向的相速为

$$v_{p, m+n} = \frac{\omega_m r}{\beta_{m+n}} = \frac{\omega_m r}{m+nN} \quad (9.95)$$

即角相速为  $\omega_m / \beta_{m+n}$ 。

在磁控管振荡器中通常应用的模是  $\pi$  模，它的特点是，邻近两空腔之间的相位变化为  $\pi$  弧度，即  $180^\circ$ 。具有输入间隙的每个空腔其作用相当于四分之一波长短路传输线。所以，在其间隙处有最大的电场。 $\pi$  模的相邻两空腔的场的方向是相反的。图 9.19 中画出了两个空腔的电力线图。对于  $\pi$  模来说，因为  $\varphi$  的变化等于一个周期  $2\pi/N$ ，故  $\beta_m \varphi = m\varphi$  必须等于  $\pi$ 。因此， $m = N/2$ ，而第  $n$  次空间谐波的相速为

$$v_{p, nN/2} = \frac{2\omega_{N/2} r}{N(1+2n)} \quad (9.96)$$

为了使电子云和在某一半径  $r$  上的某一空间谐波相互作用，必须选取  $V_0$ ，使  $\omega_0 r = v(r) = v_{p, nN/2}$ ，或

$$\omega_0 = \frac{2\omega_{N/2}}{N(1+2n)} \quad (9.97)$$

使电子云和交变场同步所需要的电压  $V_0$  可以由 (9.92) 式求得。若在阴极和阳极之间取  $r$  的中间值，即  $r = (b+a)/2$ ，并注意到在一般的磁控管中  $b/a$  小到足以使  $\ln(b/a) \approx 2(b-a)/(b+a)$ ，则得

$$V_s = \frac{\omega_m}{m+nN} \frac{b^2 - a^2}{2} \left( B_0 - \frac{\omega_m/\eta}{m+nN} \right) \quad (9.98a)$$

一般说，对 $\pi$ 模

$$V_s = \frac{2\omega_{N/2}}{N(1+2n)} \frac{b^2 - a^2}{2} \left[ B_0 - \frac{2\omega_{N/2}}{\eta N(1+2n)} \right] \quad (9.98b)$$

式中， $m = N/2$ 。

从物理观点看，电子云和交变场的第 $n$ 次谐波之间的同步意味着，处于使电子慢下来的 $E_z$ 位置上的那些电子，将把能量给予场。当电子慢下来时，它们沿径向向外运动(参看(9.91)式)，最后被阳极截取。被交变场加速的电子向阴极运动，直到它们进入适当的相位关系，把能量交给场为止。当发生这后一情况时，它们开始慢下来，并沿螺旋线向阳极前进。所以，只有从相互作用空间失去能量的电子，才把一份净能量给予了交变场。

交流功率可以用如图9.19所示的同轴线环或利用一个波导从一个空腔中耦合出来。

## 9.10 O型行波管

普通的(即O型)行波管应用磁聚焦电子束和在第8章中讨论过的螺旋线周期性结构。并把电子束的速度调整到近似地等于沿螺旋线传播的电磁波相速。在这些条件下，可以使电子束与场之间产生强烈的相互作用。由另一种观点看，可以认为慢波结构的存在，改变了空间电荷波的传播常数，使它成为一个复数，并代表一个增长波。在详细地分析一个特定的行波管结构后，我们将介绍一个更满意的放大机理。不作细致研究，要充分了解其所包含的物理原理是有些困难的。

为了简化，我们将利用8.10节中讨论过的薄套螺旋线模型，和在9.3节中研究过的那种轴向狭流电子束模型( $B_0$ 为无限大)。此外，还假定电子束完全地充满此螺旋线的内部区域。事实上，这个



假定是不可能实现的。但为了简化分析，仍作这样假定。行波管的基本工作原理不会因这个假定而变化。行波管是以轴向对称模工作的，所以所有的场量与角度 $\varphi$ 无关。

图9.20表示一个典型的行波管的结构，其主要部分是一个电子枪、一条螺旋线、一个产生聚焦场 $B_0$ 的螺线管以及与螺旋线相耦合的适当的交流输入和输出装置。取螺旋线的半径为 $a$ ，螺距角为

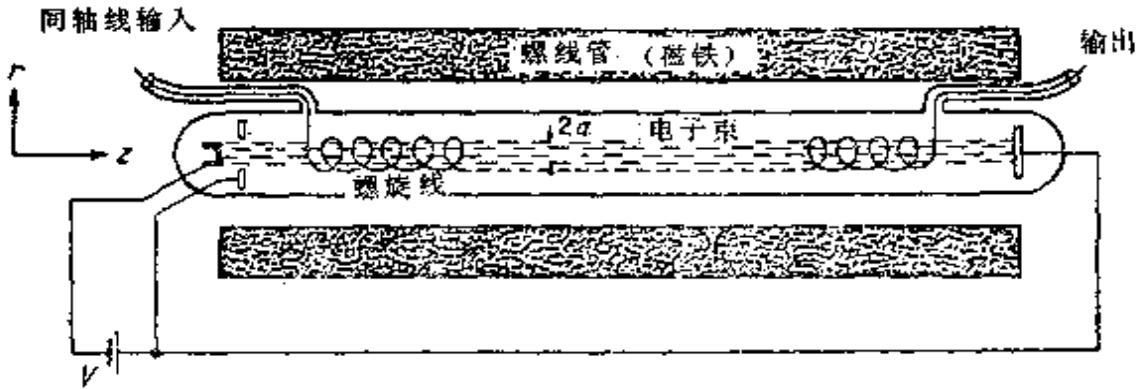


图 9.20 O型行波管

$\psi$ 。螺旋线可以用沿卷绕方向电导率为无限大、在垂直于卷绕方向电导率为零的圆柱套来近似。

8.10节已经指出，为了满足在 $r = a$ 处的边界条件，需要有 $TM$ 和 $TE$ 两种模。但是，对于一个具有轴向狭流电子束来说，其交变速度只允许有一个 $Z$ 分量， $TE$ 模由于 $E_z = 0$ 而不受电子束的作用。所以当 $n = 0$ 时， $TE$ 模场分量就是8.10节中(8.72a)式给出的那些场分量。同理，在 $r > a$ ，即在螺旋线以外处， $TM$ 模的场分量就是8.10节中(8.72b)式所给出的那些场分量。在有电子束存在的情况下，螺旋线区域内的 $TM$ 模的场为9.3节所给出的那些。但是，为了方便，这里重复一些有关的方程。矢位 $A_z$ 是(9.16a)式

$$\nabla_r^2 A_z + P^2 A_z = 0$$

的一个解，式中

$$P^2 = (k_0^2 - \beta^2) \left[ 1 - \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right)^2 \left( \frac{\beta_0}{\beta_c - \beta} \right)^2 \right] = -g^2 \quad (9.99)$$

对于现在这个问题， $P^2$ 应是负的，所以用 $-g^2$ 代替 $P^2$ 。 $A_z$ 的解与

$I_0(gr)$ 成正比。由于 $E_z$ 正比于 $A_z$ ，故可取

$$E_z = a_0 I_0(gr) e^{-i\beta z}$$

式中， $a_0$ 是一个振幅常数。场分量 $E_r$ 和 $H_\phi$ 不难由麦克斯韦方程求得，即

$$E_r = \frac{j\beta}{\beta^2 - k_0^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} \quad H_\phi = \frac{k_0}{\beta} Y_0 E_z$$

这样，当 $n=0$ 即轴向对称时，可以把两个区域的场写成如下的表示式：

对于 $TE$ 模，

$$\left. \begin{aligned} H_z &= C_0 I_0(hr) e^{-i\beta z} \\ H_r &= -\frac{j\beta}{h} C_0 I_1(hr) e^{-i\beta z} \\ E_\phi &= -\frac{j\omega\mu_0}{h} C_0 I_1(hr) e^{-i\beta z} \end{aligned} \right\} r < a \text{处}$$

$$\left. \begin{aligned} H_z &= d_0 K_0(hr) e^{-i\beta z} \\ H_r &= -\frac{j\beta}{h} d_0 K_1(hr) e^{-i\beta z} \\ E_\phi &= \frac{j\omega\mu_0}{h} d_0 K_1(hr) e^{-i\beta z} \end{aligned} \right\} r > a \text{处}$$

对于 $TM$ 模

$$\left. \begin{aligned} E_z &= a_0 I_0(gr) e^{-i\beta z} \\ E_r &= -\frac{j\beta g}{h^2} a_0 I_1(gr) e^{-i\beta z} \\ H_\phi &= -\frac{j\omega\epsilon_0 g}{h^2} a_0 I_1(gr) e^{-i\beta z} \end{aligned} \right\} r < a \text{处}$$

$$\left. \begin{aligned} E_z &= b_0 K_0(hr) e^{-i\beta z} \\ E_r &= -\frac{j\beta}{h} b_0 K_1(hr) e^{-i\beta z} \\ H_\phi &= -\frac{j\omega\epsilon_0}{h} b_0 K_1(hr) e^{-i\beta z} \end{aligned} \right\} r > a \text{处}$$

式中,  $h^2 = \beta^2 - k_0^2$ 。

薄套螺旋线在  $r = a$  处的边界条件由(8.69)式给出。用于现在的问题得

$$\frac{-j\omega\mu_0}{h} c_0 I_1(ha) \cos\psi + a_0 I_0(ga) \sin\psi = 0$$

$$\frac{j\omega\mu_0}{h} d_0 K_1(ha) \cos\psi + b_0 K_0(ha) \sin\psi = 0$$

$$\begin{aligned} a_0 I_0(ga) \cos\psi + \frac{j\omega\mu_0}{h} c_0 I_1(ha) \sin\psi \\ = b_0 K_0(ha) \cos\psi - \frac{j\omega\mu_0}{h} d_0 K_1(ha) \sin\psi \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} a_0 I_0(ha) \sin\psi + \frac{j\omega\epsilon_0 g}{h^2} a_0 I_1(ga) \cos\psi \\ = d_0 K_0(ha) \sin\psi - \frac{j\omega\epsilon_0}{h} b_0 K_1(ha) \cos\psi \end{aligned}$$

若由前面两个方程求解  $c_0$  和  $d_0$  并代入到后两个方程, 则得  $a_0$  和  $b_0$  的两个齐次方程。为了得到非无效解, 其行列式必须为零。使行列式为零, 得

$$g \frac{I_1(ga)}{I_0(ga)} = \frac{h^2 \tan^2 \psi}{k_0^2} \left[ \frac{I_0(ha)}{I_1(ha)} + \frac{K_0(ha)}{K_1(ha)} \right] - h \frac{K_1(ha)}{K_0(ha)} \quad (9.100)$$

对大多数行波管来说, 其参数使  $ga$  和  $ha$  是大值。在这种情况下, (9.100) 式中贝塞尔函数之比近似为 1, 故得

$$g = 2 \frac{h^3}{k_0^2} \tan^2 \psi - h \quad (9.101a)$$

由(9.99)式得

$$g^2 = h^2 \left[ 1 - \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \left( \frac{\beta_0}{\beta_0 - \beta} \right)^2 \right]$$

所以

$$\left[ 1 - \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \left( \frac{\beta_0}{\beta_0 - \beta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 2 \frac{h^2}{k_0^2} \tan^2 \psi - 1 \quad (9.101b)$$

式中,  $h^2 = \beta^2 - k_0^2$ 。上式是  $\beta$  的六次方程, 它是不能精确地求解的。

因为研究的是慢波系统,  $\beta^2$  应比  $k_0^2$  大, 且  $h^2 \approx \beta^2$ 。此外, 由于当电子束不存在时, 螺旋线的相速选定为等于  $v_0$ , 故可使  $k_0 \cot \psi$  等于  $\beta_0$ , 即  $k_0 \csc \psi$  为螺旋线的传播常数, 同时由于  $\psi$  很小, 故可用  $\tan \psi$  代替  $\sin \psi$ 。于是得

$$1 - \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \left( \frac{\beta_0}{\beta_0 - \beta} \right)^2 = \left( \frac{2\beta^2}{\beta_0^2} - 1 \right)^2$$

现在假定  $\beta = \beta_0(1 + \delta)$ , 其中  $\delta$  很小, 用它代入得

$$\begin{aligned} \delta^2 - \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 &= \delta^2 (1 + 4\delta + 2\delta^2)^2 \\ &= 4\delta^6 + 16\delta^5 + 20\delta^4 + 8\delta^3 + \delta^2 \end{aligned} \quad (9.102)$$

因为  $\delta$  很小, 所以除了包含  $\delta$  的最低次幂项以外几乎都可以去掉。这里是取立方项, 于是

$$\delta^3 = -\frac{1}{8} \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2$$

$\delta$  的三个解是  $\frac{1}{2}(\omega_p/\omega)^{\frac{2}{3}}$  乘 -1 的立方根, 它们是 -1 和  $(1 \pm j\sqrt{3})/2$ 。

所以

$$\delta_1 = -\frac{1}{2} \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (9.103a)$$

$$\delta_2 = \frac{1}{4} \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^{\frac{2}{3}} (1 - j\sqrt{3}) \quad (9.103b)$$

$$\delta_3 = \frac{1}{4} \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^{\frac{2}{3}} (1 + j\sqrt{3}) \quad (9.103c)$$

由于  $\omega_p/\omega$  很小, 假定  $\delta$  为很小是合适的。对应的传播常数为

$$j\beta_1 = j\beta_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \quad (9.104a)$$

$$j\beta_2 = j\beta_0 \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^{\frac{2}{3}} (1 - j\sqrt{3}) \right] \quad (9.104b)$$

$$j\beta_3 = j\beta_0 \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^{\frac{2}{3}} (1 + j\sqrt{3}) \right] \quad (9.104c)$$

第一个解对应于相速稍大于电子束速度的波。另外两个解的相速稍小于电子束速度。此外， $j\beta_2$  对应于一个衰减波，而  $j\beta_3$  对应于一个增长波。增长常数  $\alpha_z$  为

$$\alpha_z = \beta_0 \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (9.105)$$

若在输入端这三个波都出现，则在输出端只有后一个波将占优势。

本征值方程(9.101b)还有另外的解。我们希望得到一个向  $-z$  方向传播的  $\beta \approx -k_0 \csc \Psi \approx -\beta_0$  的波。它不被电子束显著地扰动。因而我们假定  $\beta = -\beta_0(1 + \delta)$ ，且认为  $\delta$  很小。代入(9.101b)式并保持  $\delta$  的最低次幂得

$$\delta = -\frac{1}{32} \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2$$

所以第四个解为

$$j\beta_4 = -j\beta_0 \left[ 1 - \frac{1}{32} \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \right] \approx -j\beta_0 \quad (9.106)$$

求(9.101b)式其余的两个解得  $\beta$  的值近似等于  $\pm k_0$ 。但是，本征值方程(9.101b)在假定  $ga$  和  $ha$  为很大和  $\beta$  远比  $k_0$  大时，是实际的本征值方程(9.100)的近似。因此，六次方程(9.101b)的两个解  $\beta = \pm k_0$  不是(9.100)式的解，且不对应实际的波。

由(9.14)式和(9.13a)式给出的交变电流和交变速度为

$$v = -\frac{j\eta E_z}{v_0(\beta_0 - \beta)} \quad (9.107)$$

$$J = -j \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{\beta_0^2}{(\beta_0 - \beta)^2} \epsilon_0 E_z \quad (9.108)$$

这些方程表明,对于 $\beta$ 与 $\beta_0$ 有显著差别的三个波来说, $v$ 和 $J$ 是可以忽略的。所以, $v$ 和 $J$ 是由讨论过的前三个慢波产生的。第四个波可以由管子输出端的反射激励。若在输入端也存在反射,则它将被放大,并连续反射和放大,从而形成振荡。为了避免这个不希望的特性,把一个衰减电阻片或一个集成铁氧体隔离器放入行波管中。

因为在输入端必须得到与这三个正向慢波有关的总交变电流和速度为零,所以,在输入端 $Z=0$ 处起始条件为

$$J_1 + J_2 + J_3 = 0 \quad v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

当假定

$$E_z = I_0(\beta_0 r)(C_1 e^{-i\beta_1 z} + C_2 e^{-i\beta_2 z} + C_3 e^{-i\beta_3 z})$$

和利用(9.108)式以及起始条件时,则可得出

$$\frac{J_2}{J_1} = e^{i2\pi/3} \quad \frac{J_3}{J_1} = e^{-i2\pi/3}$$

可见,在输入端的这三个波都具有同样的大小,即得 $C_1 = C_2 = C_3$ 。增长波的振幅将为输入信号的三分之一,所以行波管的振幅增益为

$$\frac{E_0}{E_i} = \frac{1}{3} e^{\alpha_g l}$$

式中, $\alpha_g$ 即为(9.105)式, $l$ 是行波管的长度。用分贝表示的功率增益为

$$\begin{aligned} A &= 20 \log 0.333 + 20 \alpha_g l \log e \\ &= -9.54 + 3.75 \beta_0 l \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^{\frac{2}{3}} \end{aligned} \quad (9.109)$$

借助于前面讨论的结果,现在可以来描述其放大的物理机理了。注意增长波的相速稍小于电子束的速度。这个增长波就是被扰动的慢空间电荷波。快慢空间电荷波的交流功率密度为(参看(9.49)、(9.13a)和(9.14)式)

$$R_c \frac{-v_0 v_1 J_1^*}{2\eta} = -\frac{\omega \omega_p^2 \epsilon_0}{2v_1^2 (\beta_1 - \beta_0)^3} |E_{z1}|^2$$

$$R_c \frac{-v_0 v_2 J_2^*}{2\eta} = -\frac{\omega \omega_p^2 \epsilon_0}{2v_0^2 (\beta_2 - \beta_0)^3} |E_{z2}|^2$$

因为慢空间电荷波的  $\beta_2 > \beta_0$ ，所以它的交流功率密度为负，而快空间电荷波的交流功率密度为正。由于慢波增长，故它失去能量，因而，根据守恒定理(9.49)式，要求电磁功率增加。慢波的交变电流的相角应与  $E_z$  的相角有一定的关系，即是使  $R_c(E_z, J_z^*)$  是负的，从而使电流连续地把能量给予场。这可以通过在(9.14)式中以  $\beta_2$  代替  $\beta$  得到

$$\operatorname{Re}(E_{z2} I_z^*) = -2\sqrt{3} \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^{\frac{3}{2}} \beta_0^2 \epsilon_0 |E_{z2}|^2$$

来证实。为进一步帮助理解行波管，可以把行波管看作如同多腔速调管那样应用大量的间隔接近的空腔间隙，而把螺旋线的相邻匝认为是组成了一个间隙。

行波管比速调管优越的主要点，是它有相当宽的工作频带。一般的行波管在一个或一个以上的倍频程上提供30到50分贝的增益。功率运用范围从几毫瓦到几兆瓦。

## 9.11 M型行波管

磁控管型(M型)行波管是圆柱形磁控管的一种线性型式。图9.21就是一种采用皱摺状或类似梳状的慢波电路的M型行波管略图。电子束的宽度比其厚度大得多而近似于片状。电压  $V_0$  加在底极和阳极块之间，强恒定磁场加在与电子束速度  $v_0$  垂直的方向上，而恒定电场  $-E_0$  由阳极到底极之间的电压  $V_0$  产生。从电位为  $V_0$  的阴极出来向上运动的电子被磁场偏转成为向  $+Z$  方向运动的电子束。所需的电子流类型是一种只具有  $Z$  向速度  $v_0(y)$  的类型，一般说，它是  $y$  的函数。电子在一个交叉的  $E$ 、 $B$  场中流动，它是典型的磁控管型行

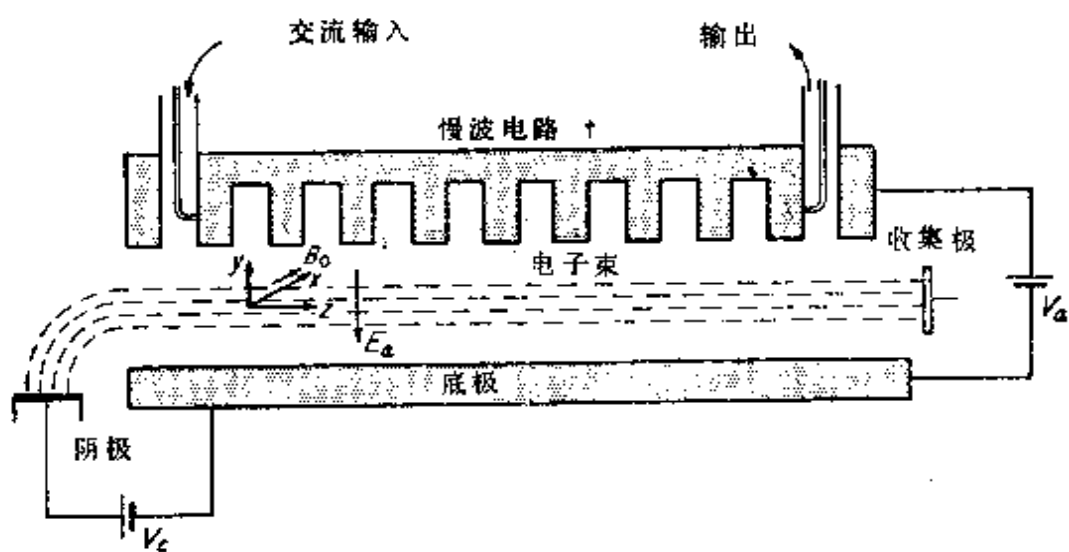


图 9.21 M型行波管

波管。

对于稳定流,  $v_0(y)\mathbf{a}_z$  不随  $Z$  而变化。若用  $V(y)$  表示底极和阳极块之间任一  $y$  值上的电位, 则必得磁力

$$-ev_0(y)\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z B_0 = -eB_0 v_0(y)\mathbf{a}_y$$

和电场力  $\mathbf{a}_y e \partial V / \partial y$  之间的平衡, 所以

$$\frac{\partial V}{\partial y} = v_0(y) B_0 \quad (9.110)$$

速度  $v_0(y)$  可由能量方程求得:

$$-\frac{1}{2} m v_0^2(y) = e(V - V_c)$$

对  $y$  取导数得

$$v_0(y) \frac{\partial v_0}{\partial y} = \eta \frac{\partial V}{\partial y} \quad (9.111)$$

电位  $V(y)$  由外加的电位  $V_0$  和在电子束中的直流空间电荷引起。在平衡条件下, 作用到电子上的力  $-e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) = 0$ 。由于  $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{a}_z$  和  $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{a}_z$ , 故对此方程取散度得

$$\nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 = 0 = -\frac{\rho_{cs}}{\epsilon_0} + B_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} \quad (9.112)$$



式中的  $-\rho_0$  是负的直流电荷密度， $S$  是一个因子，它表示未被正离子中和的那部分负空间电荷。当不存在正离子时， $S = 1$ 。若假定  $S = 1$ ，则(9.110)到(9.112)这一组关系式只有在

$$\omega_e^2 = \eta^2 B_0^2 = \frac{\rho_0 \eta}{\epsilon_0} = \omega_p^2$$

即

$$\omega_e = \omega_p \quad (9.113)$$

时才成立，这个条件可以通过消去  $\partial V / \partial y$  和  $\partial v_0 / \partial y$  来求出。当这个条件满足时，这种流动称为平面布里渊流。

根据上述的电子束模型，可解出能够在电子束上传播的空间电荷波。在有慢波结构参加的情况下，其传播常数被扰动，而产生类似于 O 型行波管中那样的增长波。读者要进行详细分析，可参考本章后面提示的文献。它所包含的原理与本书中已经证明过的结论没有很大的差异。

## 9.12 其他类型的微波电子管

除了已经讨论过的几种主要类型的微波电子管以外，还有许多其他种类的微波电子管。有一种行波管（电阻壁行波管放大器）中，用电阻性材料作为衬里的无波导代替了螺旋线。电阻性衬里使慢波在此波导中传播，在没有电子束的情况下，波具有很高的衰减。若有电子束存在时，则当增长常数  $\alpha_e$  大到足以抵消由于电阻性衬里引起的衰减时，便产生放大作用，从而得到净的放大。

行波管的另一种形式（双电子束行波管放大器）采用两个平行的电子束。在这种行波管中，一个电子束为另一个电子束提供慢波结构或电路。

借助于顺次地通过加速和减速区域的电子束，也可能直接地放大空间电荷波。由于电子束速度  $v_0$  周期性地变化或跳跃变化到新的值，故这种类型的管子称为速度跳变放大器。

对于O型和M型两类行波管来说，可以调节电子束速度使它等于由布洛赫波组成的任一空间谐波的相速，这个布洛赫波可以沿当作慢波电路的周期性结构传播。特别是，可能在电子束和反向传播的空间谐波之间相互作用。我们研究一个沿-Z方向传播的布洛赫波。对于这个波， $E_z$ 的展开式为

$$E_z(r, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(r) e^{i\beta z + i2\pi n z/p}$$

式中， $p$ 是沿Z方向的周期性结构的周期。若希望电子束和 $n = -1$ 的空间谐波相互作用，则只需选取

$$v_0 = v_p = \frac{\omega}{-(\beta - 2\pi/p)} = \frac{\omega}{2\pi/p - \beta}$$

若周期 $p$ 足够小，则 $n = -1$ 的空间谐波的相速向+Z方向，而它的群速向-Z方向。如果 $n = -1$ 的空间谐波被放大了，则所有其他空间谐波也被放大，因为，为了满足边界条件，它们都必须具有很确定的振幅。非相互作用的空间谐波的放大，是由于和电子束相互作用而被放大的空间谐波，在金属边界上感应的表面电流和电荷的增长。具有与返回的空间谐波相互作用的微波电子管一般用作振荡器，并称为返回波振荡器或返波管。它们的输出耦合在阴极一端。

还有其他形式的微波电子管，而且，无疑地还在进一步研制。更深入的讨论，可查阅本章后所列的参考文献。

### 9.13 微波电子管中的噪声

微波放大器的噪声特性是重要的，因为它们将最后决定通信线路有效信号功率的下限。低于某一下限阈值的信号将完全被微波放大器引起的噪声所淹没，并且不能被检出。这一节介绍有关噪声问题的若干有用结果。由于篇幅的限制，对由微波电子管所产生的噪声不作任何理论上的推导。在斯马林和豪斯所编的书中对电子管和

其他电子器件的噪声理论作了详细的讨论，读者可以参考它\*。

电子管中噪声的主要来源是：(1)由阴极产生的电子随机发射，它使电子束的直流电荷密度 $\rho_0$ 随机变化；(2)电子以随机速度逸出，结果形成直流电子束速度 $v_0$ 的随机变化；(3)阴极表面的不均匀发射，其结果使电子束速度的随机成分的散布增加；(4)电子被栅网、慢波电路（例如螺旋线）和其他电极不规则的拦截；(5)由收集极引起的电子的二次发射。噪声在电子管的输出端以场的振幅快速的和随机的起伏来显示。它的频谱由零频率到大大超过微波波段的频率基本上都是常数。若随机起伏大于所放大的输出信号，则后者将完全被淹没。通常用来描述放大器的噪声特性的两个参数是噪声系数 $F$ 和等效噪声温度 $T_A$ 。这些参数的重要性的意义，将在下面对热噪声的讨论中继续研究。

### 热噪声

由电子在电阻 $R$ 中在绝对温度 $T$ 时的随机运动引起的噪声称为

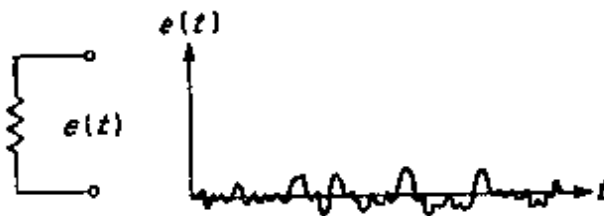


图 9.22 加在电阻上的噪声电压

热噪声（有时也指尼奎斯特噪声）。如果在电阻上呈现的噪声电压被理想的无噪声放大器放大，并显示在示波器上，则它应有如图9.22中所表示那样的形状。由于电压的正负具有

同等的概率，所以中值（平均值）为零。当然，均方值不为零，而是

$$e_n^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^2(t) dt$$

根据基本的物理定律可以求出其均方值。实际上，用噪声功率或者用与小频率间隔 $\Delta f$ 内噪声功率相联系的噪声电压的均方根值是合

\* L.D.Smullin and H.A.Haus(eds.), "Noise in Electron Devices", John Wiley and Sons, Inc., New York, 1959.

适的。后者为

$$e_n = \left( \frac{4hfR\Delta f}{e^{hf/kT} - 1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9.114)$$

式中， $h$  是普朗克常数， $k$  是玻耳兹曼常数， $T$  是  $K$  温标的绝对温度。对于无线电和微波通信中所遇到的温度和频率， $hf \ll kT$ ，所以，(9.114) 式可近似为

$$e_n = (4kTR\Delta f)^{\frac{1}{2}} \quad (9.115)$$

现在设一个电阻  $R$  在温度为  $T$  时与特性阻抗  $Z_c = R$  的无耗传输线相连接。则此电阻产生总的噪声功率

$$P_n = \left( \frac{e_n}{R + Z_c} \right)^2 Z_c = \frac{e_n^2}{4R} = kT\Delta f \quad (9.116)$$

将以  $TEM$  波的形式传播出去。所以，量  $kT\Delta f$  就是在温度  $T$  时由电阻所能得到的最大有效噪声功率。

若把一个电阻接到输入阻抗为  $Z_{in} = R$  的放大器输入端，使产生最大功率传输，则在频率间隔  $\Delta f$  内输入到放大器的噪声功率为  $kT\Delta f$ 。若放大器功率增益为  $A$ ，则放大后的输出噪声功率为  $kTA\Delta f$ 。

### 噪声源的等效噪声温度

设有一个任意的噪声源（例如充气放电管）接到无限长的无耗传输线的情况。并设噪声源在频率间隔  $\Delta f$  内与传输线匹配。若所研究的入射波在频率  $f$  附近的频率间隔  $\Delta f$  内完全地被端接在传输线上（图 9.23）的噪声源所吸收，则此噪声源是匹配的。令噪声源传送到此传输线的噪声功率为  $P_n$ ，而频率间隔  $\Delta f$  以  $f$  为中心。则噪声源的等效噪声温度  $T_e$  的定义是：与  $Z_c$  相等的电阻  $R$  得到同样的噪声功率  $P_n$  时所必定具有的温度。于是

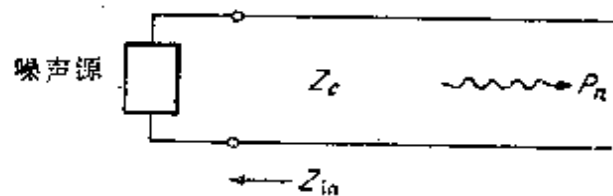


图 9.23 与传输线相连接的一个任意的噪声源

$$T_e = \frac{P_n}{k\Delta f} \quad (9.117)$$

### 噪声系数

图9.24表示一个功率增益为  $A$ 、在输入端与电阻  $R$  匹配和在

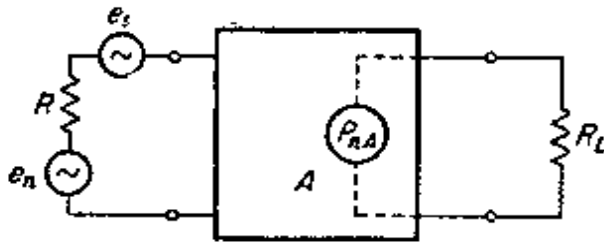


图 9.24 有内部噪声源的放大器

在输出端与电阻  $R_L$  匹配的放大器略图。其输出端由  $R$  引起的被放大的热噪声功率为  $AkT\Delta f$ 。此外，由于放大器内部产生的噪声（由组成放大器的电子器件和电阻所引起）

在输出端将呈现一个附加噪声功率（比如说  $P_{nA}$ ）。所以总的输出噪声功率应为

$$AkT\Delta f + P_{nA}$$

可以把  $R$  中的噪声功率  $kT\Delta f$  认为是由具有端电压  $e_n = (4kT\Delta fR)^{1/2}$  的等效噪声源与一个理想的无噪声电阻  $R$  串联所引起的。

若把信号电压  $e_s$  加在输入端，则在匹配情况下的输入信号功率为  $P_{si} = e_s^2/4R$ 。由功率增益  $A$  的定义，输出信号功率应为  $P_{so} = AP_{si}$ 。故放大器的噪声系数为

$$\begin{aligned} F &= \frac{\text{输入端信号噪声比}}{\text{输出端信号噪声比}} \\ &= \frac{P_{si}/kT\Delta f}{AP_{si}/(AkT\Delta f + P_{nA})} \\ &= 1 + \frac{P_{nA}}{AkT\Delta f} \end{aligned} \quad (9.118)$$

由于放大器噪声  $P_{nA}$  是一个确定的量，故噪声系数  $F$  不会是最唯一的，除非  $R$  上输入噪声功率的温度  $T$  的值被规定。通常，取  $T$  为  $290^\circ K$ ，即  $17^\circ C$ ，它是室温。还要指出，噪声系数是在匹配条件下定义的。理想的无噪声放大器的噪声系数应当为 1。由放大器引起的噪声按

(9.118)式应表示为

$$P_{nA} = (AkT_0 \Delta f)(F - 1) \quad (9.119)$$

式中,  $T_0 = 290^\circ K$

用等效噪声温度 $T_A$ 有时更便于描述放大器的噪声特性。它被定义为产生同样的噪声功率输出时等效电阻 $R$ 在输入端必须具有的温度, 于是

$$T_A = \frac{P_{nA}}{Ak\Delta f} = (F - 1)T_0 \quad (9.120)$$

作为一个例子, 我们研究一个噪声系数为1.2的放大器, 因为 $F$ 接近于理想值1, 所以它看来是表示一个十分良好的低噪声放大器。此放大器在输出端呈现的噪声功率为

$$P_{nA} = 0.2AkT_0 \Delta f$$

若在输入端有一个噪声温度为 $20^\circ K$ 的电阻或其他源, 则由此源引起的总的输出噪声功率应为

$$P_n = Ak\Delta f 20 = AkT_0 \Delta f \frac{20}{290} = 0.069 AkT_0 \Delta f$$

在这种情况下, 放大器所贡献的噪声比输入源大 $2/0.69 = 2.9$ 倍, 即使它的噪声系数接近于1, 也应看作是一个有噪声的放大器。

若已经给定了放大器的等效噪声温度, 在现在的情况下为 $(F - 1)T_0 = 0.2 \times 290 = 58^\circ K$ , 立即可以看到, 对温度为 $20^\circ K$ 的输入噪声源来说, 由放大器引起的噪声应是主要的。可见, 对低温输入噪声源来说, 放大器的等效噪声温度 $T_A$ 是要确定的一个更有意义的参数。

微波行波管放大器的噪声系数为4到20分贝或者更大一些。对现在所使用的管子来说, 只有最佳设计的行波管, 并且频率在5000兆赫以下, 才能达到4分贝。10分贝的噪声系数(即 $F = 10$ ), 对已使用的多数行波管来说, 具有更大的代表性。

## 习 题

9.1 设电子束的半径为  $a$ ，速度为  $v_0$ ，空间电荷密度为  $\rho_0$ ，则直流电流密度为  $J_0 = -\rho_0 v_0$ 。试证明产生的磁场为

$$H_\phi = \begin{cases} -\frac{r\rho_0 v_0}{2} & 0 \leq r \leq a \\ -\frac{a^2 \rho_0 v_0}{2r} & r \geq a \end{cases}$$

并证明压缩力  $-ev_0 \times B_\phi$  远小于由空间电荷电场引起的径向向外力，因而可以忽略。

9.2 通过使离心力与  $-ev \times B_0$  力相等，证明速度为  $v$  的电子以回旋频率  $\omega_c = eB_0/m = \eta B_0$  作圆周运动。

9.3 电子束的半径为 0.2 厘米，加速电压为 1000 伏特。电子束的总电流为 0.3 安培。试求电子束的导流系数、空间电荷密度  $\rho_0$  和速度  $v_0$ ，并求每立方米内的电子数和由空间电荷产生的径向电场。当电子束移动距离  $d = 5$  厘米时，估算位于边界上的一个电子的径向位移。利用方程式  $m d^2 r / dt^2 = -e E_r$ ，并假定  $E_r$  为常数，它的值等于电子束边界上的值。在此情况下，若  $d$  保持小于 5 厘米，电子束的离散是否很显著？

9.4 在  $B_0 = a_z B_0$  的场中，有一个直流参数为  $\rho_0$ 、 $v_0 = v_0 a_z$  的电子束。假定时间关系为  $e^{i\omega t}$ ，与  $Z$  的关系为  $e^{-i\beta Z}$ ，并对  $v = v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z$  求解(9.8)式的线性运动方程得到

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = -\eta \begin{bmatrix} j(\omega - \beta v_0)/\Delta & -\omega_c/\Delta & 0 \\ \omega_c/\Delta & j(\omega - \beta v_0)/\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 1/j(\omega - \beta v_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

式中， $\Delta = \omega_c^2 - (\omega - \beta v_0)^2$

由连续性方程(9.5e)和(9.11b)证明

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{V}_0 \nabla \cdot \mathbf{J}}{-j\omega} - \rho_0 \mathbf{V}$$

$$J_z = \frac{v_0 \nabla \cdot \mathbf{J}}{-j\omega} - \rho_0 v_z$$

$$J_z = -\rho_0 v_z$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\beta J_z - \rho_0 \nabla_z \cdot \mathbf{V}_z$$

$$J_z = \frac{jJ_0 \nabla_z \cdot \mathbf{V}_z - \omega \rho_0 v_z}{\omega - \beta v_0}$$

9.5 利用习题9.4的结果，对于在无限大电子束中的波，当所有的交变量不随  $x$  和  $y$  变化时，求  $\beta$  的解，注意空间电荷波的  $E_x = E_y = 0$ ，但  $E_z$  为有限值。对激励波来说， $E_z = 0$ 。

提示：注意： $\nabla \times \mathbf{H} = -j\beta \mathbf{a}_z \times \mathbf{H}$ ， $\nabla \times \mathbf{E} = -j\beta \mathbf{a}_z \times \mathbf{E}$ ，它导致方程  $j(\beta^2 - k_0^2)E_z = \omega \mu_0 J_z = -\omega \mu_0 \rho V_z$ 。

答案：激励波的  $\beta$  是

$$(\omega - \beta v_0) \frac{\omega \omega_p^2}{C^2} - (\beta^2 - k_0^2) \Delta = \pm \frac{\omega_c \omega \omega_p^2}{C^2}$$

的一个解，式中， $\Delta$  为习题9.4中所给出的。注意两个解为  $\omega - \beta v_0 = \pm \omega_c$ 。它们是回旋加速波。因为  $\beta \approx k_0$ ，所以  $\omega \gg \beta v_0$ ，其他四个近似解为

$$\beta = \pm k_0 \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)} \right]$$

9.6 试计算本书中所研究过的这类速调管放大器的增益，其数据如下：电子束半径 = 0.3 厘米，电子束电流密度 = 100 毫安/厘米<sup>2</sup>，加速电压 = 1000 伏特，频率 = 3000 兆赫。  $G_L = G_0$ ，空腔宽度  $d = 0.2$  厘米，腔壁电导率 =  $5.8 \times 10^7$  姆欧/米。在  $d = 0.3$  厘米时作同样的计算，并与前面计算结果比较。

9.7 设有一个应用图9.2所示形式的圆柱形空腔的反射速调管，应用习题9.6的数据（ $d = 0.2$  厘米）。外部负载  $G_L = G_0$ ，空腔栅极到反射板的距离  $s$  为 1 厘米。在频率为 3000 兆赫时，计算并



画出电子导纳螺旋线随反射极电压  $V_r$  的变化。在同一个电纳平面上画出空腔负导纳  $-Y$  的曲线。求调谐在  $n=2$  和  $n=3$  的模时反射极电压的变化。计算在调谐各个模时，振荡频率的变化。

9.8 设有半径为  $a$  的一个圆柱波导用一个电阻片作衬里，使  $r=a$  处的边界条件为  $E_z = -Z_m H_\varphi$ ，式中， $Z_m = (1+j)/\sigma\delta$  是波导壁的表面阻抗。当速度为  $v_0 \mathbf{a}_z$  的电子束（轴向狭流）完全充满此波导时，作为一个行波管来分析这种结构。为获得放大，求合适的  $Z_m$  值。并求得到最大增益时  $Z_m$  的最佳值。

答案： $\beta$  是

$$\frac{1}{g} \frac{I_0(ga)}{I_1(ga)} = -\frac{j\omega\epsilon_0 Z_m}{\beta^2 - k_0^2}$$

的一个解。因为  $ga$  大，所以  $I_0/I_1 \approx 1$ ，当  $\delta$  很小时， $\beta = (1+\delta)\beta_0$ ， $\delta^2$  为

$$\delta^2 = j \frac{2k_0^2 (R_m/Z_0)^2 (\omega_p/\omega)^2}{\beta_0^2 + j2k_0^2 (R_m/Z_0)^2}$$

式中， $Z_m = (1+j)R_m$

9.9 恒定的等离子体（每单位体积为具有相等数目的电子和离子的已电离的气体）均匀地充满半径为  $a$  的圆柱波导。在高频下，由于离子的质量远大于电子的质量，故离子的运动可以略去。所以此波导与轴向直流速度为零的电子束充满的波导具有同样的特性。试利用(9.93)式证明可以把此波导认为是如同用电容率为  $\epsilon = \epsilon_0 (1 - \omega_0^2/\omega^2)$  的介质所充满的波导，其中， $\omega_0$  为等离子体的等离子体频率。求最低次元对称  $E$  模的解，并证明当  $\omega < \omega_0$  而使  $\epsilon$  为负时，波阻抗是电感性的。

9.10 习题9.9的结果可以用来分析电子束——等离子体放大器。设有一个通过等离子体充满的波导的电子束，试用狭流模型描述此电子束，并证明当电子束完全充满此波导时，倘若都用  $\epsilon = \epsilon_0 (1 - \omega_0^2/\omega^2)$  代替  $\epsilon_0$ （其中， $\omega_0$  是等离子体的等离子体频率），则9.3节的方程是有效的。特别是(9.24)到(9.26)式成立。于是，

在(9.26)式中,若用 $(e\rho_0/m\epsilon)^{\frac{1}{2}} = (\epsilon\rho_0/m_0e)^{\frac{1}{2}} \left[ \omega/(\omega^2 - \omega_0^2) \right]^{\frac{1}{2}}$ 代替 $\omega_p = (e\rho_0/m\epsilon_0)^{\frac{1}{2}}$ ,则可以看出,当 $\omega < \omega_0$ 时, $\beta$ 变成复数,并得到一对增长波和衰减波。证明放大系数为

$$\beta_0 \left[ -\frac{\omega\epsilon_0}{e\rho_0} \left( 1 + \frac{P_{01}^2}{\alpha^2\beta_0^2} \right)^2 (\omega - \omega_0') \right]^{-\frac{1}{2}}$$

且当 $\omega$ 接近于 $\omega_0$ 时它是很大的。还应指出,对于通过没有边界的等离子体介质的具有有限半径的狭流电子束来说,9.4节的方程还要用 $\epsilon$ 代替 $\epsilon_0$ 。对于电子束——等离子体放大器的这种模型来说,可以用(9.45)式代替(9.26)式。并可预计其增益系数与狭流模型的增益系数有同一数量级。

9.11 设有一个两级放大器,其每一级的功率增益为 $A_1$ 和 $A_2$ 。设第一级噪声系数为 $F_1$ ,第二级噪声系数为 $F_2$ 。设在匹配的条件下,证明总的噪声系数 $F = 1 + (F_1 - 1) + (F_2 - 1)/A_1 = F_1 + (F_2 - 1)/A_1$ 。将放大器的等效噪声温度用每一级的等效噪声温度表示。

9.12 一个速调管放大器的噪声系数(由于散粒效应)为

$$F = \frac{M_i^2 e I_0}{4G_i k T}$$

式中, $M_i$ 是电子束的耦合系数, $G_i$ 是输入空腔的电导,温度 $T$ 可取为 $290^\circ K$ 。在 $M_i \approx 1$ , $I_0 = 50$ 毫安,空腔电导 $G_i = 0.01 Y$ 的情况下,求出 $F$ 。

## 参 考 文 献

1. Slater, J.C.: "Microwave Electronics," D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1950.
2. Pierce, J.R.: "Traveling Wave Tubes," D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1950.
3. Kleen, W.J.: "Electronics of Microwave Tubes," Academic Press Inc., New York, 1958.
4. Beck, A.H.W.: "Space Charge Waves," Pergamon Press, New

York, 1958.

5. Hutter, R.G.: "Beam and Wave Electronics in Microwave Tubes", D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1960.
6. Spangenberg, K.R.: "Vacuum Tubes," McGraw-Hill Book Company, New York, 1948.
7. Hamilton, D.R., J.K. Knipp and J.B. Horner Kuper: "Klystrons and Microwave Triodes," McGraw-Hill Book Company, New York, 1948.
8. Collins, G.B.: "Microwave Magnetrans," McGraw-Hill Book Company, New York, 1948.
9. Chodorow, M., and C. Susskind: "Fundamentals of Microwave Electronics," McGraw-Hill Book Company, New York, 1961.
10. Reich, H.J., P.F. Ordnung, H.L. Krauss, and J.K. Shalnik: "Microwave Theory and Techniques," D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1953.
11. Reich, H.J., J.K. Shalnik, P.F. Ordnung, and H.L. Krauss: "Microwave Principles," D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1957.

空间电荷波理论

12. Ramo, S.: "The Electronic Wave Theory of Velocity Modulated Tubes," *Proc. IRE*, Vol. 27, p. 757, 1939.
13. Ramo, S.: "Space-charge and Field Waves in an Electron Beam," *Phys. Rev.*, Vol. 56, p. 276, 1939.
14. Hahn, W.C.: "Small Signal Theory of Velocity Modulated Electron Beams," *Gen. Elec. Rev.*, Vol. 42, p. 258, 1939.
15. Chodorow, M., and L. Zitelli: "The Radio Frequency Current Distribution in Brillouin Flow," *IRE Trans.*, Vol. ED-6, p. 352, 1959.
16. Rigrod, W., and J. Lewis: "Wave Propagation along a Magnetically Focused Cylindrical Electron Beam," *Bell System Tech. J.*, Vol. 33, p. 399, 1954.
17. Brewer, G.R.: "Some Effects of Magnetic Field Strength on Space-charge Wave Propagation," *Proc. IRE*, Vol. 44, p. 896, 1956.

## 第10章 微波量子放大器

本章介绍一种比较新型的微波放大器的基本工作原理，这种放大器称为微波量子放大器（辐射的受激发射微波放大）。微波量子放大器与微波电子管相比，是一种低噪声放大器。

微波量子放大器的工作与某些量子力学效应有关。原子中围绕着核的电子不服从经典力学，而遵守量子波动力学。量子波动力学和电磁理论中的经典波动力学之间有许多相似点，书中已讨论过后一类的问题。因此，对量子波动力学的某些方面作简短的但有意义的讨论，对于理解微波量子放大器的工作是重要的。所以，前两节对波动力学和原子中辐射的吸收和发射作简短的介绍。主要目的是为了探讨几个重要的概念，比如能级，由波函数表征的量子态、辐射的受激发射和受激吸收、自发辐射等。此外，这两节还提供了一个基础，以对受激吸收和受激发射的爱因斯坦系数的来源及角动量的性质有某些了解。篇幅不允许对微波量子放大器作详细的量子力学处理；然而，熟悉量子力学的主要结论，对正确理解微波量子放大器的工作和影响其工作的各种参数是需要的。以这些基本材料为基础，我们就有可能提出一个适合于通常的微波电路分析的微波量子放大器的宏观等效电路<sup>\*</sup>。

---

<sup>\*</sup> A.E.Siegman, "Microwave Solid-state Masers" (McGraw-Hill Book Company, New York, 1964)一书中，对微波量子放大器的量子力学问题作了很好的说明。

<sup>\*\*</sup> 读者不愿意了解微波量子放大器工作量子方面的细节，可不看10.1节和10.2节。只要无条件地接受量子力学的结论，就不会对连贯性有很大的影响。

## 10.1 量子力学的一些基础

量子力学是由于经典力学不能正确地理解和预知处于原子能级上的物质的许多观察到的现象而被提出来的。统一的量子力学理论的提出或综合，是一项非常重大的成就。在这个理论的早期发展中，巧妙地利用了与经典力学、光学和电磁理论的类比。正如任何一种理论的情况一样，基本的前提是建立在假说上，它的正确性决定于与实验结果的一致性。量子理论在解释原子现象上的成就，使它必然被看作是自然界的基本定律，正如麦克斯韦方程被看作是描述电场和磁场特性的自然界基本定律一样。

描述原子中电子运动所得到的基本方程是一个波动方程。由薛定谔首先提出，故称为薛定谔波动方程。为了介绍与此方程有关的主要概念，我们来研究它的最简单的应用之一，即它对氢原子的描述。

氢原子由一个质量为 $M$ 和电荷为 $e$ 的质子与一个质量为 $m \ll M$ 和电荷为 $-e$ 的电子所组成。按照经典力学，电子围绕质子（即原子核）在给定半径 $r_c$ 的轨道上旋转。但是，按照量子力学，电子可以处于离开质子的任一径向距离 $r$ 的位置上，而在任一确定的径向

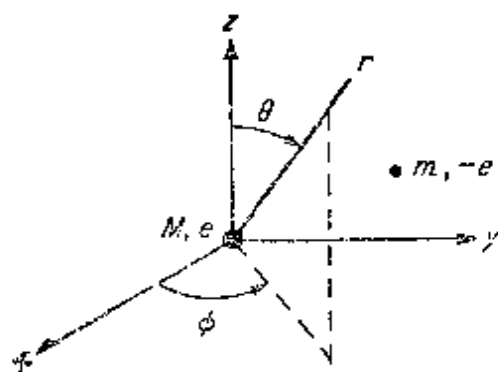


图 10.1 用来描述氢原子的球坐标

距离上只有一定的概率。于是，电子的位置被函数 $\psi(r, \theta, \varphi)$ 所规定，使电子位于体积元 $dV = r_0^2 \sin \theta_0 d r_0 d \theta_0 d \varphi_0$ 中给定点 $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ 的概率为

$$P(r_0, \theta_0, \varphi_0) dV = \psi(r_0, \theta_0, \varphi_0) \psi^*(r_0, \theta_0, \varphi_0) dV \quad (10.1)$$

式中， $\psi^*$ 是 $\psi$ 的复数共轭， $r, \theta, \varphi$ 是如图10.1所示的球坐标。函数 $\psi$ 是薛定谔方程的一个解，所以称为波函数。一般地说， $\psi$ 是时

间函数。所以，位于 $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ 的电子的概率可能随时间变化。

$\Psi(r, \theta, \varphi, t)$ 的薛定谔波动方程为

$$\nabla^2 \Psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V(r) \Psi + j \frac{4\pi m}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0 \quad (10.2)$$

式中， $h$ 是普朗克常数， $m$ 是电子的质量， $V(r)$ 是电子的位能。在现在的情况下，位能 $V(r)$ 只是库仑位能，即

$$V(r) = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

当 $V(r)$ 不是时间的函数时，此方程能分离，使其解 $\psi(r, \theta, \varphi, t)$ 可表示为乘积的形式：

$$\Psi(r, \theta, \varphi, t) = \psi(r, \theta, \varphi) f(t)$$

当把这种形式的解代入(10.2)式并被 $\psi f$ 来除时，则得

$$\frac{1}{\psi} \left[ -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \nabla^2 \psi + V(r) \psi \right] = -\frac{h}{2\pi j} \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial t}$$

因为左边与时间无关，所以，只有在两边都等于一个常数时，此方程才能满足所有的 $t$ 值。于是令

$$\frac{df}{dt} = -\frac{2\pi j}{h} W f$$

它的解为

$$f(t) = e^{-12.566 W t / h} \quad (10.3)$$

常数 $W$ 具有能量的量纲。它由与时间无关的薛定谔方程

$$\nabla^2 \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (W - V(r)) \psi = 0 \quad (10.4)$$

的解来确定。方程(10.4)将有无限多个具有相应的本征值 $W_n$ 的解 $\psi_n$ 。每一个解对应于电子所可能具有的某一定态或组态。

$\psi$ 所满足的方程类似于在无限大半径的球形空腔中电场分量所应满足的方程，其相对电容率是 $r$ 的函数，即

$$K(r) k_0^2 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} (W - V(r))$$

在  $r = \infty$  处的边界条件是波函数为零值。将存在无限多个谐振模，每一个模有一个给定的谐振频率或本征值。在电子的情况下，当电子在由本征函数  $\psi_n$  所描述的状态下，本征值  $W_n$  对应于电子的能级。因为电子必须处于实际空间的某处，概率为 1，故必须归一化  $\psi_n$ ，使得

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Psi_n \Psi_n^* r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = 1 \quad (10.5)$$

我们将不进行推导而给出(10.4)式的解，因为详细的推导对理解波函数的意义并不重要。对于包含  $\theta$  和  $\varphi$  的变化而言，存在着由下式给出的三重无限解（米、千克、秒单位制）

$$\Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) \Theta_{lm}(\theta) \Phi_m(\varphi) \quad (10.6)$$

式中， $n$ 、 $l$  和  $m$  为整数  $0, 1, 2, \dots$ ，而

$$R_{nl}(r) = - \left\{ \left( \frac{2}{nr_0} \right)^2 \frac{(n-l-1)!}{2n((n+1)!)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \times e^{-\rho/2} \rho^l L_{n+l}^{2l+1}(\rho) \quad (10.7a)$$

其中， $\rho = 2r/nr_0$ ， $r_0 = e_0 \hbar^2 / \pi m e^2$ ，

$$\Theta_{lm}(\theta) = \left[ \frac{(2l+1)(l-|m|)!}{2(l+|m|)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos \theta) \quad (10.7b)$$

$$\Phi(\varphi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{im\varphi} \quad (10.7c)$$

函数  $L_{n+l}^{2l+1}$  是缔合拉盖尔多项式，函数  $P_l^m(\cos \theta)$  是缔合勒让特多项式。(10.7) 式中的常数的选取，使得此函数是归一化的，比如

$$\int_0^{2\pi} \Phi_m \Phi_m^* d\varphi = 1$$

以下写出所含函数的前几个显式， $\Phi_n$  的前几项为

$$\Phi_0 = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \quad \Phi_1(\varphi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{i\varphi}$$

$\Theta_{lm}(\theta)$  的前几项为

$$\Theta_{00} = 2^{-\frac{1}{2}} \quad \Theta_{10} = \frac{\sqrt{6}}{2} \cos \theta$$

$$\Theta_{1,1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \quad \Theta_{2,0} = \frac{\sqrt{10}}{4} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$R_{nl}$ 的前几项为

$$R_{1,0} = r_0^{-3/2} 2e^{-\rho/2}$$

$$R_{2,0} = \frac{r_0^{-5/2}}{2\sqrt{2}} (2 - \rho) e^{-\rho/2}$$

$$R_{2,1} = \frac{r_0^{-5/2}}{2\sqrt{6}} \rho e^{-\rho/2}$$

尤其要注意径向函数急速地衰减，使电子距离质子远于  $\rho = 1$ ，或者大于  $r = nr_0/2$  的距离上的概率非常小。距离  $r_0$  就是旧的半径量子理论所容许的最小轨道半径。

为使列出的解满足薛定谔波动方程，对整数  $m$ 、 $l$  和  $n$ （称为量子数）作如下的限制：

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (10.8a)$$

$$l = |m|, |m| + 1, |m| + 2, \dots \quad (10.8b)$$

$$n = l + 1, l + 2, l + 3, \dots \quad (10.8c)$$

能级（或本征值） $W$  只取决于  $n$ ，且为\*

$$W_n = - \frac{2\pi^2 m e^4}{(4\pi\epsilon_0 h n)^2} \quad (10.9)$$

因为  $W_n$  只取决于整数  $n$ ，所以，一个具有能量  $W_n$  的电子可以占有许多（实际上为  $2n^2$ ）个波函数或量子态。这些简并性类似于在波导和空腔中遇到的简并性，例如，在矩形波导中  $TE_{nm}$  模和  $TM_{nm}$  模具有同样的传播常数。

氢原子的正常态是对应于最低能级  $W_1$  的基态。在基态下，完全的波函数为

$$\Psi_{1,0,0} e^{-j2\pi W_1 t/h} = R_{1,0} \Theta_{0,0} \Phi_{0,0} e^{-j2\pi W_1 t/h}$$

\* 为了简化讨论，我们已经认为质子的质量为无限大。求  $W_n$  的精确结果时，应该用折合质量  $mM/(m+M)$  代替质量  $m$ 。还要注意  $m$  还被用来表示量子数。根据上下文的意义应当是不致相混的。



$$= r_0^{-3/2} \pi^{-1/2} e^{-r/r_0} e^{-j2\pi W_1 t/h}$$

电子在体积元  $r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$  中点  $(r, \theta, \varphi)$  上的概率为

$$P(r)dV = \Psi_{1,0,0} \Psi_{1,0,0}^* dV$$

$$= \frac{1}{\pi r_0^3} e^{-2r/r_0} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

并与  $\theta$  和  $\varphi$  无关。通过对  $\theta$  和  $\varphi$  的积分得到电子在  $r$  和  $r+dr$  之间的概率为

$$P(r)dr = \frac{4}{r_0^3} e^{-2r/r_0} r^2 dr \quad (10.10)$$

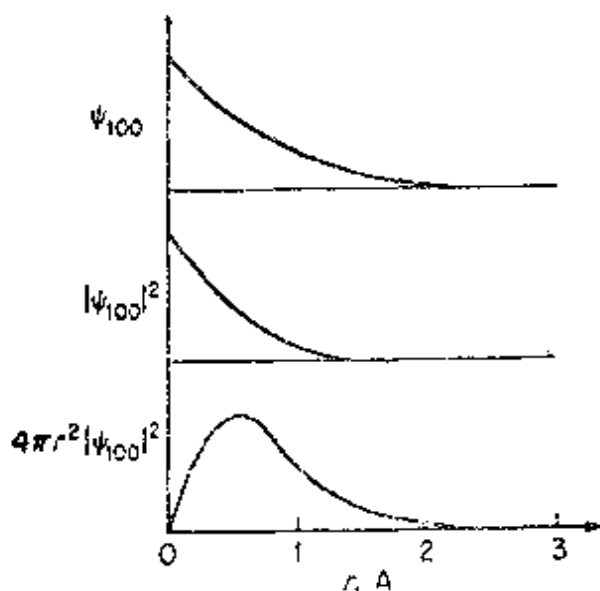


图 10.2 氢原子基态的描述

图10.2绘出了  $\psi_{1,0,0}$ 、 $|\psi_{1,0,0}|^2$  和  $rP(r) = 4\pi |\psi_{1,0,0}|^2$  的曲线，它表明电子在与原子核的距离在 1 埃以内有很高的概率。

当原子或原子的系统波函数的完全集合为已知时，就有可能计算或估算此系统经典特性的任何平均值。例如，设坐标的任一函数  $F(r, \theta, \varphi)$  的平均值为  $\bar{F}$ ，则原子的第  $nlm$  态的  $\bar{F}$  为

$$\bar{F} = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Psi_{nlm}^* F(r, \theta, \varphi) \Psi_{nlm} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \quad (10.11)$$

任何由象  $G(p_x, x, \dots)$  一样的动力学函数（其中  $p_x$  是  $x$  方向的动量，等等）所描述的经典特性，在把  $G(p_x, x, \dots)$  理解为微分算符

$$G(p_x, x, \dots) \longrightarrow G\left(\frac{h}{2\pi j} \frac{\partial}{\partial x}, x, \dots\right)$$

时，就可得到它的平均值，它按下列规则求出：

$$\bar{G} = \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_{nlm} G\left(\frac{h}{2\pi j} \frac{\partial}{\partial x}, x, \dots\right) \times \Psi_{nlm} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (10.12)$$

角动量  $\mathbf{S}$  的经典表示为  $\mathbf{S} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$ , 其各分量为

$$S_x = y p_z - z p_y$$

$$S_y = z p_x - x p_z$$

$$S_z = x p_y - y p_x$$

把这些换成算符

$$S_x \longrightarrow \frac{h}{2\pi j} \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \dots$$

代入 (10.12) 式, 便可确定与给定量子态相联系的角动量平均值。以球坐标表示这些微分算符时, 便可以对氢原子计算积分 (10.12) 式, 对第  $nlm$  态得

$$\bar{S}^2 = \bar{S}_x^2 + \bar{S}_y^2 + \bar{S}_z^2 = \frac{l(l+1)}{4\pi^2} h^2 \quad (10.13)$$

注意:  $\bar{S}^2$  只与角 (即方位) 量子数  $l$  有关, 它表示波函数随  $\theta$  的变化。可以得出  $Z$  方向 (只有把原子置于外磁场中时, 才存在有意义的  $Z$  轴) 的平均角动量为

$$\bar{S}_z = \frac{mh}{2\pi} \quad (10.14)$$

它只取决于在波函数中描述  $\varphi$  变化的“磁”量子数  $m$ 。

可以把角动量设想为一个矢量, 它在  $Z$  轴上投影为  $mh/2\pi$ , 在  $xy$  平面上的投影为  $\bar{S}_r$ , 它被给出为

$$(l(l+1) - m^2)^{\frac{1}{2}} \frac{h}{2\pi}$$

如图 10.3 所示。于是, 按 (10.13) 式的要求, 此矢量的总长度为  $(S_x^2 + S_y^2)^{\frac{1}{2}} = (l(l+1)h^2/4\pi^2)^{\frac{1}{2}}$ 。因为  $l$  和  $m$  是整数, 所以,  $S$  显然只能有某些离散的取向。这就是角动量矢量离散取向的量子基础, 可以把它与经典理论允许的连续取向相对照。但是, 用

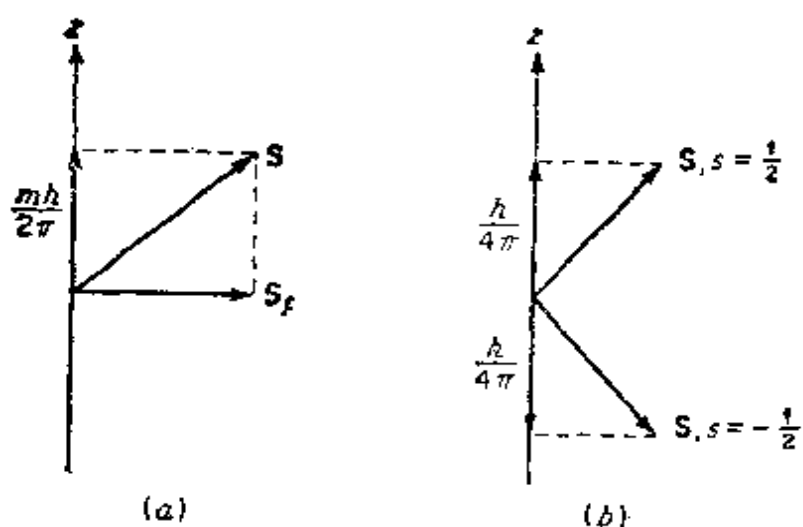


图 10.3 角动量矢量与自旋动量矢量

一个给定方位的矢量代表角动量是人为的。由 (10.13) 式给出的总平均动量和它的 Z 轴投影才是重要的参数。所以，矢量图象仅仅是用来引出经典力学和量子力学结论之间差别的工具。因为  $n$  由 (10.8c) 式给出，所以当量子数  $n$  给定时， $l$  的允许值为  $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$ 。于是，若  $n = 2$ ，则必得  $l = 0, 1$ 。若  $l = 1$ ，则可得  $m = 0, \pm 1$ ，因而，在这种情况下角动量矢量可以顺 Z 轴方向，垂直于 Z 轴方向，或反平行于 Z 轴方向。

除了与电子平均轨道运动相联系的角动量以外，电子还有它自己内在的自旋动量。自旋动量可以平行于或反平行于 Z 轴指向，它在 Z 轴上的投影值为

$$S_{sz} = s \frac{h}{2\pi} \quad s = \pm \frac{1}{2} \quad (10.15)$$

自旋动量也可以设想为总长度是  $(s(s+1))^{1/2} h/2\pi$  的一个矢量，其中， $s = \frac{1}{2}$ 。所以，允许的自旋动量矢量方位有两个，即在 z 轴的投影为  $\pm h/4\pi$  的那两个，如图 10.3b 所示。

对于由许多电子（比如说  $N$  个）和核电荷  $N_e$  所组成的原子，电子的波动方程为

$$\left[ \sum_{i=1}^N \nabla_i^2 + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left( \sum_{i=1}^N \frac{N_e e^2}{4\pi\epsilon_0 r_i} \right) \right]$$

$$\left. - \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^N \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{is}} \right) + j \frac{4\pi m}{h} \frac{\partial}{\partial t} \Big] \Psi = 0 \quad (10.16a)$$

式中， $r_i$ 是由原子核到第*i*个电子的距离， $r_{is}$ 是第*i*个和第*s*个电子之间的距离， $\nabla_i^2$ 是作用在第*i*个电子的坐标上的拉普拉斯算符，波函数 $\psi$ 是所有电子的坐标和时间的函数。这个方程不可能精确求解。若忽略电子与电子之间的相互作用，或者用近似表示*N*-1个电子对某一特定电子影响的球对称位函数，代替电子与电子间的位能项，则可得到近似解。在此情况下， $\psi$ 可以表示为类似氢原子的单个电子的波函数的积。为便于后面使用，用算符 $\mathcal{H}$ 代表(10.16a)式方括号内的量，则得

$$\mathcal{H}\Psi = 0 \quad (10.16b)$$

### 多粒子系统的统计描述

在包含许多粒子的系统中（比如复杂的原子和原子群中），每一个粒子都有一个薛定谔方程的解的波函数来描述的位置。但是，在这些系统中，任一个粒子的位能取决于它与所有其他粒子的相对位置。所以，此波动方程的精确解答是不易求得的。较方便的方法是把系统的某些统计平均特性作为一个整体来描述。

我们研究原子的宏观系统。此系统可能存在于无限多个态中，用波函数 $\psi_n$ 来描述第*n*个态，它是所有各个粒子坐标的函数。这个态对应的能量为 $W_n$ 。因为系统必须处于可能的状态之一，故在能量为 $W_n$ 的*n*状态下，系统的概率为

$$P_n = A e^{-W_n/kT} \quad (10.17)$$

式中，选*A*为这样的常数，它使

$$\sum_n P_n = A \sum_n e^{-W_n/kT} = 1$$

在(10.17)式中，*T*是克耳文温标的绝对温度， $k = 1.3709 \times 10^{-23}$ 焦耳/度，它是玻耳兹曼常数。这个概率分布定律称为玻耳兹曼分

布，在后面确定任一能级上原子的相对数时是有用的。

## 10.2 辐射的吸收和发射

如果一个能量为 $W_n$ 态的原子跃迁到能量为 $W_m$ 的较低能态，它将以频率为 $f_{nm}$ 辐射数量为 $W_n - W_m$ 的能量，这个频率由普朗克公式得出

$$f_{nm} = \frac{W_n - W_m}{h} \quad (10.18)$$

反之，若把能量为 $W_m$ 态的原子置于频率为 $f_{nm}$ 的电磁场中，则它能吸收量子的能量，在向上跃迁到能量为 $W_n$ 的 $n$ 态。在正常情况下的物质中，低能态中的粒子数（或原子数）远超过在较高能态下的粒子数，这可由检验（10.17）式的玻耳兹曼分布来证明。因而，辐射的吸收超过辐射的发射。在微波量子放大器中，通过在两能级之间造成粒子数的反转，即使高能态的原子数多于低能态的原子数，就可能使这种情况反过来。

把一个原子置于频率为 $f$ 的电磁场中时，总是存在着由于辐射的吸收或发射，而从某一起始态跃迁到另一终止态的一定的概率。产生跃迁的概率可以由微扰分析来决定，以下作概略的叙述。

设有一个原子其所有稳定的量子本征态都是已知的。这些本征态由一个具有能量本征值 $W_n$ 的波函数 $\psi_n$ 的无穷集来描述。当把原子置于电磁场中时，它在任一刻的状态可以用包含函数 $\psi_n$ 的完全集合的付立叶级数来描述，其系数 $a_n(t)$ 是时间的函数，于是

$$\psi = \sum_n a_n(t) \psi_n e^{-i2\pi W_n t/h} \quad (10.19)$$

为了使后面的分析简化，只包括与时间有关的因子 $e^{-i2\pi W_n t/h}$ 。我们可以把 $a_n(t) e^{-i2\pi W_n t/h}$ 认为是一个等效的新系数 $c_n(t)$ 。若所加的电场只沿 $x$ 轴方向，且为

$$E_x = E_0 \cos \omega t$$

则在此场中电子的能量为  $eE_0 x_i \cos \omega t$ , 其中,  $x_i$  是原子中第  $i$  个电子的  $x$  坐标。添加此外部位能项后, 波动方程(10.16)式改变成为

$$\left( \mathcal{H} - \sum_{i=1}^N eE_0 x_i \cos \omega t \right) \psi = 0 \quad (10.20)$$

若把假定的  $\psi$  展开式代入 (10.20) 式, 并注意  $\psi_n$  是  $\mathcal{H}\psi_n = 0$  的解, 则得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N eE_0 x_i \cos \omega t \sum_n a_n(t) \psi_n e^{-j2\pi W_n t/h} \\ &= -\frac{h}{2\pi j} \sum_n \psi_n e^{-j2\pi W_n t/h} \frac{da_n(t)}{dt} \end{aligned} \quad (10.21)$$

量子理论中出现的本征函数  $\psi_n$  总是正交的, 所以

$$\int_V \psi_m^* \psi_n dV = \begin{cases} 1 & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

式中, 积分是在所有粒子的坐标上进行的。所以, 若用  $\psi_m^* e^{j2\pi W_m t/h}$  乘以 (10.21) 式, 并对所有电子坐标进行积分, 则得

$$\begin{aligned} \frac{da_m(t)}{dt} &= -\frac{2\pi j}{h} E_0 \cos \omega t \sum_n a_n e^{-j2\pi(W_n - W_m)t/h} \\ &\quad \times \sum_{i=1}^N \int_V \psi_m^* e x_i \psi_n dV, \\ & \quad m=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (10.22a)$$

系数  $a_n(t)$  与指数项  $e^{-j2\pi(W_n - W_m)t/h}$  相比是慢变化的, 为使  $da_m(t)/dt$  的方程简化, 可以用它的起始值  $a_n(0)$  代替。于是得

$$\begin{aligned} \frac{da_m(t)}{dt} &= -\frac{2\pi j}{h} E_0 \cos \omega t \\ &\quad \times \sum_n a_n(0) p_{n, \dots m} e^{-j2\pi(W_n - W_m)t/h} \end{aligned} \quad (10.22b)$$

式中,  $p_{n, \dots m}$  定义为以下的积分:

$$\sum_{i=1}^N e \int_V \psi_m^* x_i \psi_n dV = p_{n, \dots m}$$

它是由  $n$  态跃迁到  $m$  态时原子电偶极矩  $p_{x, nm}$  的  $x$  分量。

现在假定在  $t = 0$  时原子在  $n$  态，所以，当  $m \neq n$  时， $a_n(0) = 1$ ， $a_m(0) = 0$ 。注意  $\psi$  必须是归一化的，即

$$\begin{aligned} \int_V \psi^* \psi dV &= \sum_n \sum_m a_n^* a_m \int_V \psi_n^* \psi_m dV \\ &= \sum_n a_n a_n^* = 1 \end{aligned}$$

则如所有其他的  $a_n(0)$  为零，必得  $a_n(0) = 1$ 。现在简单地积分 (10.22b) 式便得到

$$\begin{aligned} a_m(t) &= \frac{1}{2} E_0 p_{x, nm} \left( \frac{1 - e^{(2\pi j/h)(W_m - W_n + hf)t}}{W_m - W_n + hf} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - e^{(2\pi j/h)(W_m - W_n - hf)t}}{W_m - W_n - hf} \right) \end{aligned} \quad (10.23)$$

它指出第  $m$  态的系数  $a_m(t)$  如何随时间变化。显然，只有当频率  $f$  接近于  $|W_m - W_n|/h$  的值时，由  $n$  态跃迁到  $m$  态的概率才是重要的。这里所提到的现象非常类似于用频率为  $f$  的外加电流去激励空腔谐振器。只有当  $f$  接近于空腔谐振器的一个频率时，才能激励起具有较大振幅的模。若  $hf = \pm (W_m - W_n)$ ，则得

$$a_m(t) = - \frac{\pi j}{h} E_0 p_{x, nm} t \quad (10.24)$$

可见，在起初  $a_m(t)$  随时间线性增长。

在单位时间内一个原子吸收一个辐射量子即光子，并由能级  $W_m$  跃迁到较高能级的概率表示如下：

$$P_{m \rightarrow n} = B_{nm} U(f_{nm}) \quad (10.25)$$

式中， $U(f_{nm})df$  是在间隔  $df$  内频率为  $f_{nm}$  的电磁场单位体积的能量密度， $B_{nm}$  称为爱因斯坦吸收系数。处于大于  $W_m$  的能级  $W_n$  中的原子，有发射辐射并下降到能级  $W_m$  的自然趋势，在单位时间内发生这种情况的概率为  $A_{mn}$ 。后面将指出，当存在电磁场时，它将激发原子，使其由能级  $W_m$  下降到  $W_n$ ，其概率由 (10.25) 式给出。所以，

在单位时间内由  $m$  态跃迁到  $n$  态的辐射的发射概率为

$$P_{nm, \epsilon} = A_{nm} + B_{nm}U(f_{nm}) \quad (10.26)$$

式中,  $B_{nm}$  是受激发射的爱因斯坦系数, 且等于  $B_{mn}$ ,  $A_{nm}$  是自发发射概率的爱因斯坦系数。

现在求  $B_{nm}$  的值。由 (10.23) 式, 若假设  $W_m > W_n$ , 且  $hf \approx W_m - W_n$ , 以致使其右边的第一项可以去掉, 则得

$$a_n(t)a_m^*(t) = |E_0|^2 p_{n,m}^2 \times \frac{\sin^2[(\pi/h)(W_m - W_n - hf)t]}{(W_m - W_n - hf)^2}$$

任一个物理场不会是单色的, 而总是包括  $f_{nm}$  在内的一个频带, 所以, 把  $E_0$  看作  $f$  的函数, 使  $E_0(f)\cos 2\pi ft$  是频率为  $f$  时  $E_x(t)$  的付立叶成分。我们必须把上述方程的右边对频率  $f$  进行积分。但由于被积函数在  $f_{nm}$  附近有很高的尖峰, 所以可以取  $E_0(f)$  等于  $E_0(f_{nm})$ , 并把积分延伸到由负无穷大到正无穷大, 而其误差可忽略。这样, 利用已知结果

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi$$

得到

$$a_n(t)a_m^*(t) \approx \frac{\pi^2}{h^2} p_{n,m}^2 |E_0|^2 t \quad (10.27)$$

若  $E_x(t)$  是电场, 则此电场总的能量密度为

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_x^2(t) dt = U_x$$

也可以把它表示在频率域中。于是, 若令  $E_0/2$  为  $E_x(t)$  的付立叶变换, 即

$$\frac{E_0(f)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} E_x(t) e^{-j\omega t} dt$$

则可得到



$$U_{\text{电}} = \frac{\epsilon_0}{4} \int_0^{\infty} |E_0(f)|^2 df$$

所以,  $\epsilon_0 |E_0|^2/4$  是频率间隔  $df$  内每单位体积的能量。

若入射电场还有  $y$  和  $z$  分量, 且具有同样的振幅, 则在电磁场中的能量密度应为

$$U(f) = 2 \frac{\epsilon_0}{4} (|E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2) = \frac{3}{2} \epsilon_0 |E_0|^2$$

因为磁场贡献同样大小的能量密度。现在, 可以把 (10.27) 式改为普遍的形式:

$$a_m(t)a_m^*(t) = \frac{\pi^2}{h^2} E_0^2 (p_{x, nm}^2 + p_{y, nm}^2 + p_{z, nm}^2) t \quad (10.28)$$

若把  $U$  看作能量密度,  $Udf$  便为小频率间隔  $df$  内的单位体积能量, 则用  $U$  表示  $E_0^2$  可得

$$\frac{a_m(t)a_m^*(t)}{t} = \frac{2\pi^2}{3\epsilon_0 h^2} U (p_{x, nm}^2 + p_{y, nm}^2 + p_{z, nm}^2)$$

这是原子由  $n$  态跃迁到  $m$  态每单位时间的概率。若与 (10.25) 式比较, 则可看出  $B_{nm}$  为

$$B_{nm} = \frac{2\pi^2}{3\epsilon_0 h^2} (p_{x, nm}^2 + p_{y, nm}^2 + p_{z, nm}^2) \quad (10.29)$$

对于受激发射, 还要研究  $W_m > W_n$ , 但利用起始条件  $a_m(0) = 1$ , 和所有其他的  $a_n(0) = 0$  的情况。相同的论证表明:  $B_{mn} = B_{nm}$ , 所以, 受激发射和吸收的系数是相等的。

下面将指出, 可以用  $B_{nm}$  得出系数  $A_{mn}$ 。若在能量密度为  $U$  的场中的原子系统与辐射场相平衡, 则向上跃迁数必须等于向下跃迁数。根据玻耳兹曼分布, 能量为  $W_m$  和  $W_n$  的原子个数之比为

$$\frac{N_m}{N_n} = e^{-(W_m - W_n)/kT}$$

单位时间内由能级  $W_n$  跃迁到  $W_m$  的原子数为  $B_{nm}U$  乘以能参与跃迁的原子数, 即

$$N_m B_{mn} U$$

而每单位时间由于发生辐射的发射而从能级  $W_m$  向下跃迁到  $W_n$  的原子数为

$$N_m (A_{mn} + B_{mn} U)$$

对于平衡的情况，必然有

$$N_m B_{mn} U = N_m (A_{mn} + B_{mn} U)$$

所以

$$\frac{N_m}{N_n} = \frac{B_{nm} U}{A_{mn} + B_{mn} U} = e^{-(W_n - W_m)/kT}$$

因此

$$A_{mn} = B_{nm} U \frac{1 - e^{-(W_n - W_m)/kT}}{e^{-(W_n - W_m)/kT}}$$

但对于一个在温度  $T$  下与其自身的辐射处于热平衡的系统，在频率  $f_{nm} = (W_n - W_m)/h$  时，其辐射密度  $U$  由普朗克定律给出为

$$U = \frac{8\pi h f_{nm}^3}{c^3} \frac{e^{-hf_{nm}/kT}}{1 - e^{-hf_{nm}/kT}} \quad (10.30)$$

在  $A_{mn}$  的表示式中，利用这个结果得出的  $A_{mn}$  表示式为

$$A_{mn} = \frac{8\pi h f_{nm}^3}{c^3} B_{nm} \quad (10.31)$$

由前面的关系式不难求出，对于热平衡系统来说，在温度给定为

$$T = \frac{hf_{nm}}{k \ln 2} = 6.9 \times 10^{-11} f_{nm} \quad (10.32)$$

下，其自发发射概率应等于受激发射概率。当频率  $f_{nm} = 10^{10}$  赫时，相应的温度为  $0.69^\circ K$ 。必须指出，在热平衡时，系统的能量密度  $U$  就是由所含原子的系统产生的辐射场的能量密度。在更一般的情况下，当存在外加场时，即使温度高于由 (10.32) 式给出的温度，受激发射也能大大超过自发发射。为了使受激发射超过自发发射，只需要使能量密度  $U$  超过 (10.31) 式中的值  $8\pi h f_{nm}^3 / c^3$  就行了。当频率  $f_{nm} = 10^{10}$  赫时，它相当于能量密度大于  $6.1 \times 10^{-28}$  焦耳/

米<sup>3</sup>。

上面的分析是关于电偶极子辐射的情形。一般说，原子也可以有净磁偶极矩。在这种情况下，将要在薛定谔方程中添加位能项，它表示磁偶极矩和外加磁场之间的相互作用能。于是，系数  $B_{nm}$  和  $B_{n\lambda}$  将包含来自原子的磁偶极矩的贡献。它在形式上与由电偶极子所引起的贡献相似。

物质的电偶极子极化的经典模型是具有弹性地束缚于原子核的电荷的极化，再加上人为的以说明能量吸收的阻尼项。倘若在经典的运动方程中的常数选来使在跃迁频率  $f_{nm}$  上产生谐振，并有给出正确吸收值的阻尼常数，则吸收的量子力学描述就证实了这个模型是正确的。当包含由正常占据的基态到几个较高能级的跃迁时，经典模型必须假定为若干阻尼振子之和，而每一个阻尼振子与一个跃迁相对应，并且这些振子的参数的选取需与量子力学的结果一致。

当原子由能级  $W_n$  向下跃迁到能级  $W_\lambda$  时，它发射频率为  $f_{nm} = (W_n - W_\lambda) / h$  的辐射。因为跃迁取有限长的时间，所以，所发射的波列为有限长度  $\tau$  的正弦波，如图 10.4a 所示。此波列的付立叶频谱为

$$\frac{\tau}{2} \left[ \frac{\sin \pi (f_{nm} - f) \tau}{\pi (f_{nm} - f) \tau} + \frac{\sin \pi (f_{nm} + f) \tau}{\pi (f_{nm} + f) \tau} \right]$$

它画在图 10.4b 中。频谱宽度基本上为

$$\Delta f = \frac{2}{\tau}$$

叫做谱线的自然宽度。谱线的自然宽度是很小的，约  $10^{-6} f_{nm}$  的数量级。

在有大量原子组成的系统中，不同原子中的电子的位能，由于与其他原子发生碰撞而被扰动。其结果是使辐射的发射和吸收有宽得多的谱线宽度（碰撞增宽），因为能级  $W_n$  和  $W_\lambda$  数值的散布引起  $f_{nm}$  数值的散布。

由一个原子到另一个原子的自发发射的发生具有随机的相位。

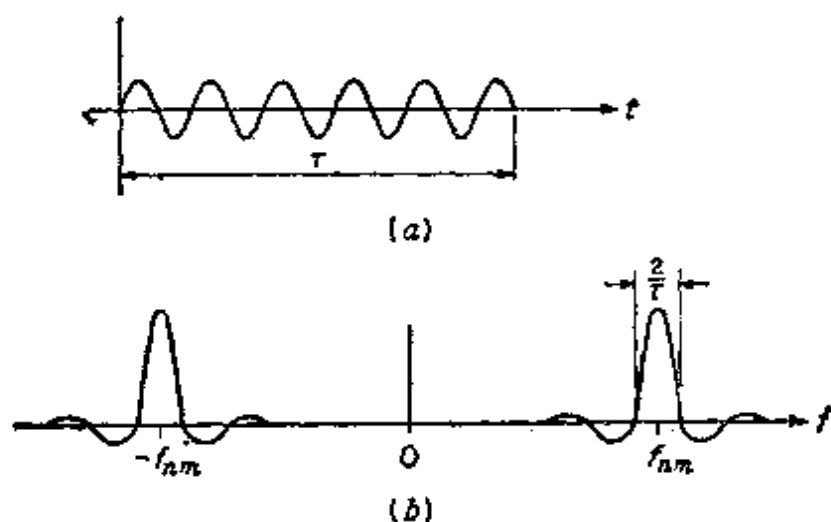


图 10.4 原子所发射的辐射特性

但是，对受激发射来说，所有的原子发射的辐射是同相的，且与激励辐射场相干。受激发射的这个特性在微波量子放大器工作中是头等重要的。

### 10.3 介绍一种微波量子放大器

这一节定性地介绍一种典型的微波量子放大器。后面几节进行分析研究。首先叙述组成微波量子放大器的基本部件。

三能级红宝石微波量子放大器由其中有红宝石晶体的空腔及沉浸空腔的液氮槽所组成，如图10.5所示。氮杜瓦瓶周围用装液氮的第二个杜瓦瓶包住，它只是用来防止液氮的快速蒸发。空腔设计在使其同时在两个频率（即泵浦频率 $f_p$ 和信号频率 $f_s$ ）上谐振。泵浦源功率通过同轴线或波导送入空腔。信号是通过三端口环行器耦合到空腔里的。三端口环行器是为了把输入信号和放大的输出信号隔离开，以防止放大器的不稳定及产生振荡的可能性。

工作物质是顺磁性物质，比如红宝石。用一块永久磁铁把恒定的强磁场加到红宝石上，可以得到合适的三个能级。当把一个磁偶极矩 $M$ 放入磁场时，其能量为 $W = -M \cdot B_0 = -MB_0 \cos\theta$ 。量子力学的研究指出，只允许某些分立的取向或分立的 $\theta$ 值。图10.6概略地

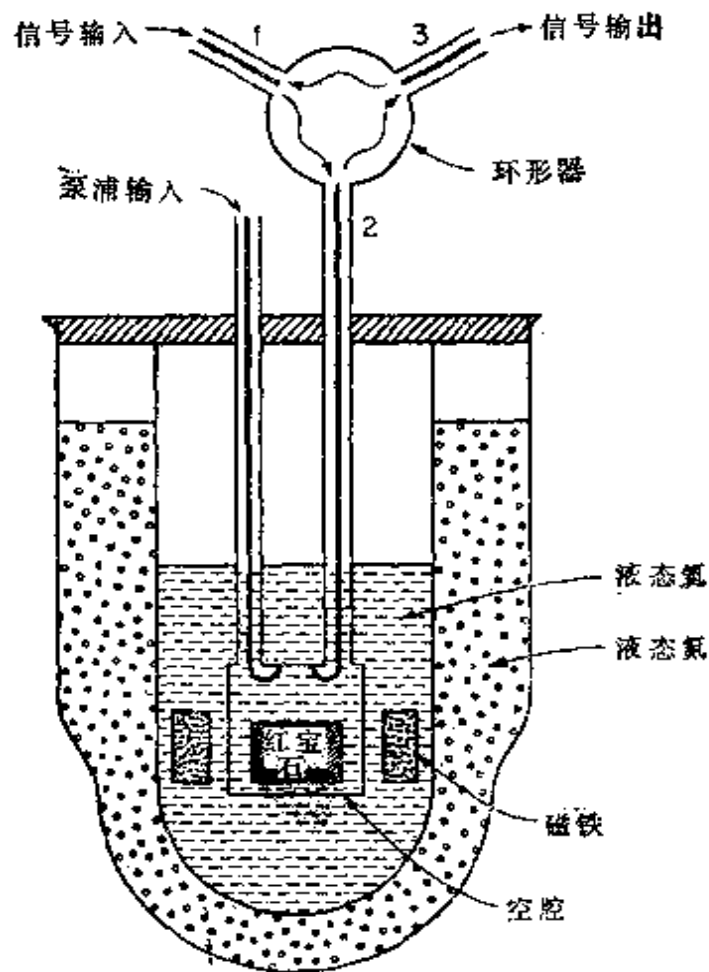


图 10.5 微波量子放大器的主要部件

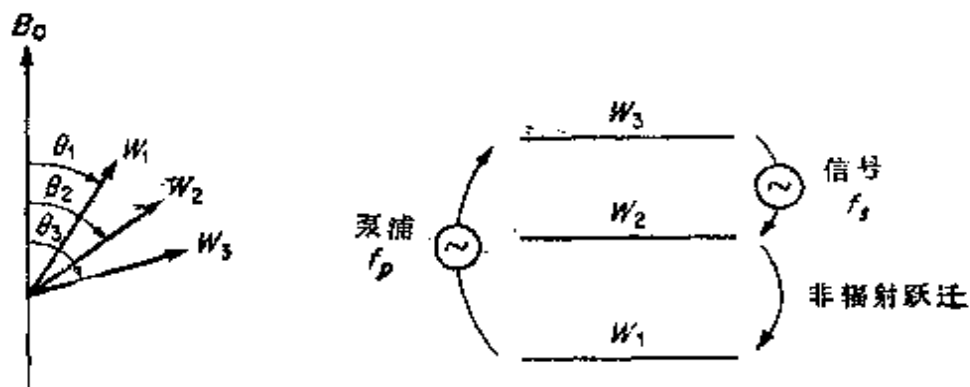


图 10.6 红宝石晶体中能级的说明

说明了与偶极矩 $M$ 的三种取向所对应的三个能级。这三个能级分别记作 $W_1$ 、 $W_2$ 和 $W_3$ 。按照玻耳兹曼分布，在热力学平衡条件下，在能级 $W_1$ 、 $W_2$ 和 $W_3$ 中的磁偶极子数分别为 $N_1$ 、 $N_2$ 和 $N_3$ ，且 $N_1 > N_2 > N_3$ 。为了使微波量子放大器工作，需要把能级 $W_3$ 和 $W_2$ 的粒子数反转，即需要使处于能级 $W_3$ 上的磁偶极子数比处于能级 $W_2$ 上的磁偶极子数多。这种粒子数反转是通过加入频率为 $f_0 = (W_3 - W_1)/h$ 的强泵浦信号来实现的，它具有由能级 $W_1$ 到能级 $W_3$ 的受激跃迁的作用。被“抽运”到能级 $W_3$ 上的磁偶极子将弛豫回能级 $W_2$ ，然后又回到能级 $W_1$ ，与此同时，将伴随有频率为 $(W_3 - W_2)/h$ 和 $(W_2 - W_1)/h$ 的辐射发射。若同时把频率为 $(W_3 - W_2)/h$ 的信号加到晶体上，则其作用是以更大的速率产生由能级 $W_3$ 到能级 $W_2$ 的受激跃迁。当晶体保持在液氮温度下时，受激跃迁数将大于自发跃迁数。所以，在低温下，单位时间内由能级 $W_3$ 到能级 $W_2$ 的跃迁数由所加的信号控制。外加信号的一个光子将触发（即激发）许多跃迁，所以，在信号频率上发射出辐射的振幅远大于所加信号的振幅。因为受激辐射与激发信号是同相和相干的，所以红宝石晶体具有放大作用。

当能级为 $W_3$ 和 $W_2$ 的粒子数被反转时，就使红宝石的导磁率的虚部是正的。于是，此物质显示增益角正切，而不是损耗角正切。若此增益大于空腔所有其他的损耗，则此空腔将起与负阻相并联的 $LC$ 电路的作用。显然，这时空腔将有可能在信号频率上提供功率。环行器是用来隔离输入信号和被放大的输出信号的。若做不到这一点，则输出信号会部分反射到输入线中，这个反射部分又会被放大。连续的反射和放大可能导致振荡，这是不希望的。下面几节将更详细地分析微波量子放大器。

## 10.4 红宝石中的能级

在10.1节中已讨论过简单氢原子的可能的量子力学组态。这一节把前述结果推广到较复杂原子中去。作为有 $N$ 个电子的原子的薛定谔波动方程(10.16a)的一级近似解,用球对称位能形式

$$\sum_{i=1}^N eV_i(r)$$

代替电子与电子之间相互作用能项

$$\sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^N \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{is}}$$

式中, $V_i(r)$ 是由除了第 $i$ 个以外的所有电子所产生的近似电位。用这个近似式,波动方程分离成对每一个电子的单个波动方程,并具有如下的形式:

$$\left\{ \nabla_i^2 + \frac{8\pi^2 m^2}{h^2} \left[ -\frac{Ne^2}{4\pi\epsilon_0 r_i} - eV_i(r) \right] + j \frac{4\pi m}{h} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \psi_i = 0$$

式中, $\psi_i$ 是第 $i$ 个电子的波函数。原子的总波函数是所有 $\psi_i$ 的乘积,即 $\psi = \psi_1 \psi_2 \cdots \psi_N$ 。显然,每个电子将具有与氢原子相类似的若干可能的量子组态。但是,进一步研究指出,在一个原子中,没有两个电子能具有同样的波函数。这种情况称为泡利不相容原理。此外,对应于第 $n$ 个能级 $W_n$ 的简并数(或波函数的个数)与氢原子是不相同的。还有,能量现在是与角量子数 $l$ 有关。对应于某一给定能量 $W_n$ 的电子的位置,在特定的半径 $r_n$ 上是占优势的,对所有的 $n$ ,具有 $r_n > r_{n-1}$ 。所以,可以把各个电子归并成为壳层图象。各个壳层以表10.1所示的方式标记。在氢原子中,在 $2s$ 或 $2p$ 壳层(即组态)上的一个电子具有同样的能量 $W_2$ 。在较复杂的原子中,在 $2p$ 壳层(或组态)上一个电子的能量,高于 $2s$ 壳层的一个电子的能量。所以在复杂原子中,简并的本征态较少,即具有相同能量的波函数较少。图10.7表示各个不同壳层的相对能级。

表 10.1

壳 层 标 记

	轨 道 动 量 矩 量 子 数 $l$			
能 级	0	1	2	3
$W_1$	1s			
$W_2$	2s	2p		
$W_3$	3s	3p	3d	
$W_4$	4s	4p	4d	4f

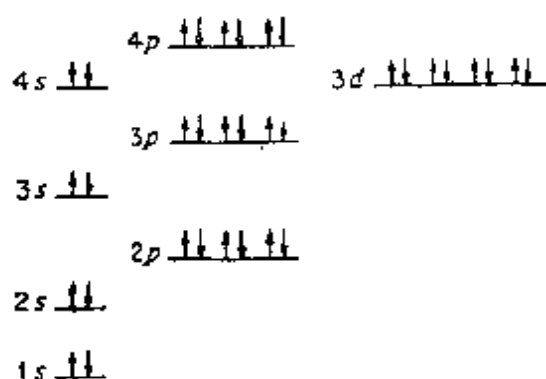


图 10.7 原子中各个电子壳层上的能级及占据数目

在任一给定的壳层上能存在的电子数，根据每一个波函数只对应一个电子的泡利不相容原理来确定。因而，在壳层1s上，能存在两个电子，一个有 $h/2\pi$ 的 $z$ 向自旋，一个有 $-h/2\pi$ 的 $z$ 向自旋。在其他壳层上，允许的电子数如图10.7所示。箭头表示允许存在的两个可能的自旋动量的取向。具有 $N$ 个电子的原子在正常情况下处于基态（即最低能态），它相当于由1s壳层起，依次地充满各个壳层。

对于一个已知电子组态的原子，便有一个确定的角动量，它由每个电子的轨道角动量和自旋角动量两者贡献所产生。磁偶极矩与总的角动量有关。按照经典的观点，圆轨道上速度为 $V$ 的电子其角动量为 $S = mr \times V$ ，等效的环电流为 $-eV$ ，所以，磁偶极矩为

$$M = -e \frac{1}{2} r \times V$$



因而， $M = -(e/2m)S$  这个结果在量子力学中也是正确的。但是，与电子自旋角动量相联系的磁偶极矩 $M_s$ 为

$$M_s = -\frac{e}{m}S_s$$

因为两者的比例因子是不同的，所以，总磁偶极矩与总角动量的关系，用另一个因子 $g$ 来表示， $g$ 称为光谱分裂因子。 $g$ 的数值取决于轨道和自旋角动量对总角动量贡献的相对大小。若用 $S$ 表示总角动量，则磁偶极矩为

$$M = -\frac{e}{2m}gS \quad (10.33)$$

因为规定 $S$ 以 $h/2\pi$ 为单位，所以一个电子的磁矩为 $eh/2\pi m$ ，这个量称为波尔磁子。在许多物质中，磁矩主要由电子的自旋引起，于是 $g$ 接近于2。这些物质称为顺磁性物质。

若研究图10.7，则将看到，在填满的那些壳层，由电子自旋引起的磁矩完全抵消。只有在有不完全填满壳层的物质中，才有净的自旋磁矩存在。在所谓过渡族元素中，比如铁族，包括钪、钛、钒、铬、锰、铁、钴、镍、铜和锌，4s和3d两壳层有相等的能量，但在3d壳层被占据以前，4s壳层没有完全填满。例如，有24个电子的

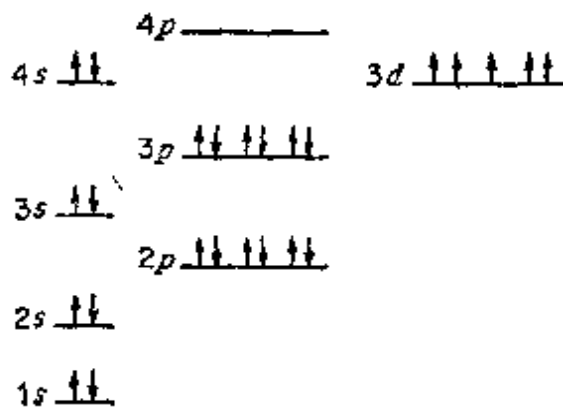


图 10.8 铬原子的电子组态

铬，具有如图10.8所示的电子组态。在与其他原子化合时，4s壳层电子和3d壳层的一个或两个电子起价电子的作用，以填满与铬化合的原子的壳层。因为这仍然在3d壳层剩有若干自旋磁矩未被抵消的电子，所以，这种物质将呈现净磁偶极矩。普通微波量子放大器的

材料是红宝石，它是由大约百分之零点一的氧化铬 $Cr_2O_3$ 与百分之九十九的非磁性氧化铝 $Al_2O_3$ 的混合物所组成。在这种混合物中，

每立方厘米中约有 $10^{19}$ 个具有磁性作用的铬离子。

在铬离子 $Cr^{3+}$ 的 $3d$ 壳层上有三个不成对电子自旋。这些自旋有如下的取向：三个都向上；两个向上，一个向下；两个向下，一个向上；三个都向下。沿 $z$ 轴对应的磁偶极矩为

$$M_z = -\frac{eh}{2\pi m} g a_s S \quad S = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \quad (10.34)$$

当红宝石晶体放入磁场中时，由(10.34)式给出的总磁偶极矩在 $z$ 轴上的四个不同的投影，对应于以 $z$ 轴为基准的四个不同的取向角 $\theta$ 。因为对应的能量为

$$W = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_0 = -MB_0 \cos \theta = -M_z B_0$$

所以，原始的能级分裂成新的能级，其绝对值取决于场的强度 $B_0$ 。在自由的 $Cr^{3+}$ 离子中，在 $3d$ 壳层上电子的任一个自旋取向的能量是相同的。当此离子结合到晶体结构中时，由于晶格的电场而出现一个把能量分成两个能级的零场分裂。加上 $B_0$ 场可把这两个能级总共分裂成如图10.9所示的四个能级。此外，由于红宝石是一种结晶的各向异性媒质，所以能量与 $B_0$ 场的依赖关系取决于场与晶体轴的相对取向。这种能量与相对于晶轴 $c$ 的取向角 $\varphi$ 的依赖关系，也表示在图10.9中。由磁场引起的能级分裂称为塞曼分裂。应当指出，当场 $B_0$ 由1到4千高斯（0.1到0.4韦伯/米<sup>2</sup>）时，两不同能级之间的能量差对应于微波波段的频率。与此大不相同的是，当电子由一个壳层向其邻近的较低或较高的壳层跃迁时，与之相联系的频率却在光学范围。可见，微波量子放大器是依靠在顺磁性物质中能级的塞曼分裂。当红宝石用作工作物质时，应用三个较低的能级，使微波量子放大器工作。其泵浦源通常把自旋由能级抽运到能级 $W_3$ 。信号控制由能级 $W_3$ 到 $W_1$ 的跃迁速率。其后此自旋自然地弛豫回能级 $W_1$ ，以完成此循环。

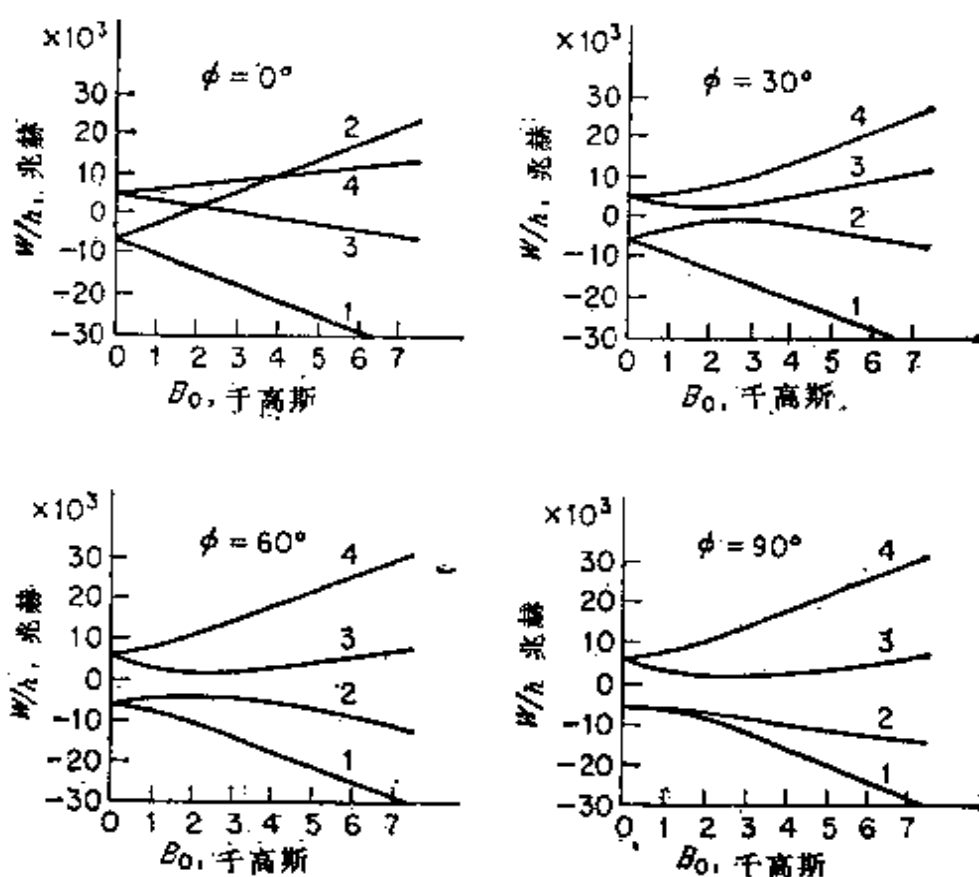


图 10.9 在红宝石晶体中，能级随场强 $B_0$ （以千高斯为单位）和场相对于晶轴 $c$ 的取向角 $\phi$ 的变化〔根据“*Microwave Solid-state Masers*” (pp. 115—116, by A. E. Siegman, Copyright, 1964, McGraw-Mill Book Company) 改绘〕。

## 10.5 微波量子放大器工作的分析

上一节定性地叙述了把红宝石晶体置于恒定磁场 $B_0$ 中时，其能级是如何产生的。现在研究在有泵浦频率和信号频率的电磁场参与时，在不同能级之间自旋跃迁的动力学。

我们研究如图10.10所示的三个能级 $W_1$ 、 $W_2$ 和 $W_3$ 。在没有泵浦和信号功率的情况下，设在这三个能级中，晶体每单位体积的自旋数分别为 $N_1$ 、 $N_2$ 和 $N_3$ 。若令 $N_1 + N_2 + N_3$ 为属于这三个能级的自旋总数，则在热力学平衡的条件下，由玻耳兹曼分布定律得出每个能级上自旋密度数为

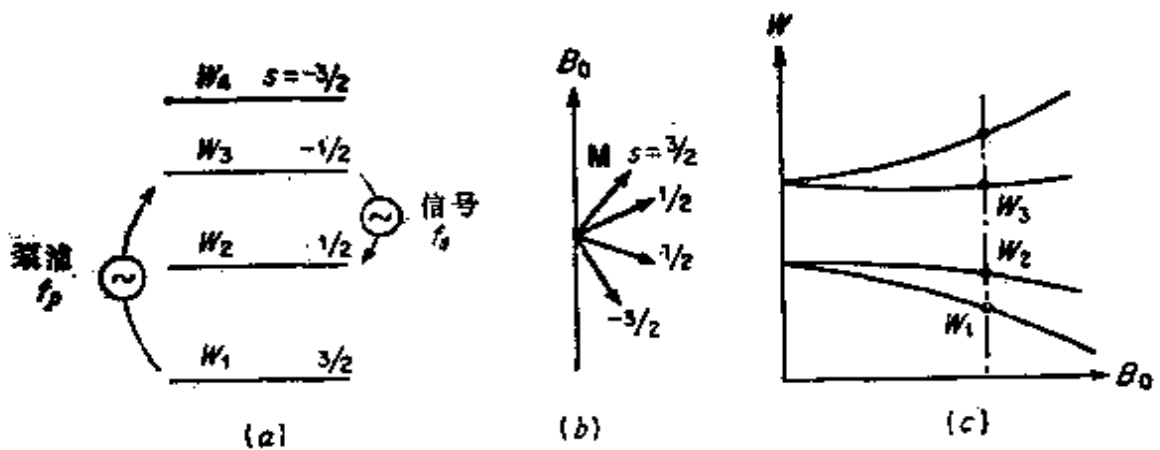


图 10.10 红宝石微波量子放大器中使用的三个能级

$$N_i = N \frac{e^{-W_i/kT}}{e^{-W_1/kT} + e^{-W_2/kT} + e^{-W_3/kT}}$$

$$\approx N \frac{1 - W_i/kT}{3} \quad i=1, 2, 3, \quad W_i \ll kT \quad (10.35)$$

(10.35) 式的分母取为使  $N_1 + N_2 + N_3 = N$ 。当泵浦和信号功率都加入时，此系统就不处于热力学平衡了。对于这种情况，我们令  $n_1$ 、 $n_2$  和  $n_3$  分别地为每单位体积中在能级  $W_1$ 、 $W_2$  和  $W_3$  上的自旋数。

为了写出确定定态值  $n_i$  的速率方程，必须研究产生跃迁的各种因素。首先，是加上泵浦或信号功率而引起跃迁时，每单位时间的受激跃迁概率。若取泵浦频率  $f_p$  等于  $(W_3 - W_1)/h$ ，则可以在能级  $W_1$  和  $W_3$  之间发生受激跃迁。令  $C_{13}$  为在  $W_1$  和  $W_3$  之间发生的每单位时间的受激跃迁概率，于是，由于向上和向下的受激跃迁概率是相等的，故在每单位体积和每单位时间内，由能级  $W_1$  向能级  $W_3$  向上净跃迁数为  $C_{13}(n_1 - n_3)$ 。此跃迁概率  $C_{13}$  基本上爱因斯坦系数  $B_{13}$  乘以晶体中泵浦功率密度。但是，在现在的情况下， $C_{13}$  由铬离子的磁偶极矩引起，而不是由电偶极矩引起，同理，由频率为  $f_s = (W_3 - W_2)/h$  的信号功率，在能级  $W_2$  和  $W_3$  之间引起的净向上跃迁概率为  $C_{23}(n_2 - n_3)$ ，其中的  $C_{23}$  是爱因斯坦系数  $B_{23}$  乘以信号功率。

自旋将与晶格的热振动相互作用，其结果是能够在不同的能级之间发生向上或向下的跃迁。据称，这些跃迁由自旋晶格相互作用引起。令 $D_{ij}$ 为自旋晶格相互作用引起的在能级 $W_i$ 和 $W_j$ 之间每单位时间的跃迁概率。那么在任两个能级（比如说 $W_1$ 和 $W_2$ ）之间，每单位时间向上和向下跃迁数应分别为 $D_{12}n_1$ 和 $D_{21}n_2$ 。在平衡条件下，必然有 $D_{12}N_1 = D_{21}N_2$ ，所以

$$\frac{D_{12}}{D_{21}} = \frac{N_2}{N_1} = e^{(W_1 - W_2)/kT} \quad (10.36)$$

式中， $T$ 为平衡温度。在自旋—晶格相互作用时，受激跃迁并不伴随有电磁辐射的光子的发射和吸收。能量的交换被晶格振动能的增减所代替。这种能量的交换被称作一个声子的发射或吸收，它是振动能的量子，而不是电磁能的量子。

除了自旋—晶格相互作用激发的跃迁外，还有由黑体辐射场参与激发的跃迁。尤其是存在着由自发跃迁引起的自发辐射，其单位时间的概率由爱因斯坦系数 $A_{ij}$ 给定。若 $U$ 是黑体辐射能量密度，则每单位时间由能级 $W_i$ 向上到能级 $W_j$ 的激发跃迁数为 $UB_{ji}n_i$ ，每单位时间向下跃迁数为 $UB_{ij}n_j + A_{ij}n_j$ ，式中， $B_{ij} = B_{ji}$ 。 $B_{ij}$ 由在 $i$ 和 $j$ 能级之间跃迁的铬离子磁偶极矩确定。由 $A_{ij}$ 确定的自发发射是造成微波量子放大器噪声特性的原因，因为与之伴随的辐射既不与泵浦场又不与信号场相干。在保持液氮温度下的微波量子放大器中，黑体辐射能量密度 $U$ 很小，以致其跃迁概率与自旋—晶格相互作用所产生的跃迁概率相比可以忽略。所以，从实际效果上看，粒子数密度 $n_i$ 的速率方程与由黑体或热辐射激发的跃迁是无关的。

若考虑到上面研究的情况，则可以说明能级 $W_1$ 的粒子数密度的变化率，应等于由能级2到能级1的跃迁数减去由能级1上升到能级2和3的跃迁数。所以

$$\frac{dn_1}{dt} = D_{21}n_2 + D_{31}n_3 - (D_{12} + D_{13})n_1 + C_{13}(n_3 - n_1) \quad (10.37a)$$

同理可得

$$-\frac{dn_2}{dt} = D_{12}n_1 + D_{32}n_3 - (D_{21} + D_{23})n_2 + C_{23}(n_3 - n_2) \quad (10.37b)$$

$$-\frac{dn_3}{dt} = D_{13}n_1 + D_{23}n_2 - (D_{31} + D_{32})n_3 + C_{23}(n_2 - n_3) \quad (10.37c)$$

应当指出，由于频率为 $(W_2 - W_1)/h$ 的外加场不存在，故没有 $C_{12}$ 的项。因此，后一种跃迁常称为非辐射跃迁。这些速率方程是描述三能级微波量子放大器的基本方程。就普遍性而言，能级 $W_4$ 的速率方程也应包括在内。但是，由于粒子数密度 $n_4$ 并无显著变化，所以，为了简单起见，只研究三个速率方程就行了。

首先要研究定态工作情况。在这种情况下， $n_1$ 、 $n_2$ 和 $n_3$ 不随时间变化，并由(10.37)式得

$$D_{21}n_2 + D_{31}n_3 - (D_{12} + D_{13})n_1 + C_{13}(n_3 - n_1) = 0 \quad (10.38a)$$

$$D_{12}n_1 + D_{32}n_3 - (D_{21} + D_{23})n_2 + C_{23}(n_3 - n_2) = 0 \quad (10.38b)$$

$$D_{13}n_1 + D_{23}n_2 - (D_{31} + D_{32})n_3 + C_{23}(n_2 - n_3) = 0 \quad (10.38c)$$

在作进一步研究前，先研究简单的没有外加能量的两能级自旋系统。其速率方程应为

$$\frac{dn_1}{dt} = D_{21}n_2 - D_{12}n_1$$

$$\frac{dn_2}{dt} = D_{12}n_1 - D_{21}n_2$$

这两个方程相减得

$$\frac{d\Delta n_{12}}{dt} = \frac{d(n_1 - n_2)}{dt} = 2D_{21}n_2 - 2D_{12}n_1$$

因为  $n_1 + n_2 = N_1 + N_2 = N$ , 故可以把此方程写为

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta n_{12}}{dt} &= D_{21}(n_2 - n_1) + D_{21}(n_2 + n_1) + D_{12}(n_2 - n_1) \\ &\quad - D_{12}(n_2 + n_1) \\ &= -\Delta n_{12}(D_{12} + D_{21}) + (D_{21} - D_{12})N \end{aligned}$$

由(10.36)式得  $N_1 D_{12} = N_2 D_{21}$ , 所以可把  $(D_{21} - D_{12})N = (D_{21} - D_{12})(N_1 + N_2)$  项写作  $(D_{12} + D_{21})\Delta N_{12}$  加上  $2(D_{12}N - D_{21}N_2)$ 。于是

$$\frac{d\Delta n_{12}}{dt} = -(D_{12} + D_{21})(\Delta n_{12} - \Delta N_{12})$$

其解为

$$\Delta n_{12} = \Delta N_{12} + (\Delta n_0 - \Delta N_{12})e^{-(D_{12} + D_{21})t} \quad (10.39)$$

式中,  $\Delta n_0$  为  $t=0$  时的粒子数差。量  $(D_{12} + D_{21})^{-1}$  是弛豫时间常数  $\tau_{12}$ , 由此可得粒子数差的变化率接近于热平衡值  $\Delta N_{12}$ 。

若引入弛豫时间常数  $\tau_{ij} = (D_{ij} + D_{ji})^{-1}$  和粒子数差  $\Delta n_{ij} = n_i - n_j$ , 则可以重新把定态的速率方程(10.38)写为

$$\frac{\Delta n_{12} - \Delta N_{12}}{2\tau_{12}} + \frac{\Delta n_{13} - \Delta N_{13}}{2\tau_{13}} + C_{13}\Delta n_{13} = 0 \quad (10.40a)$$

$$\frac{\Delta n_{21} - \Delta N_{21}}{2\tau_{12}} + \frac{\Delta n_{23} - \Delta N_{23}}{2\tau_{23}} + C_{23}\Delta n_{23} = 0 \quad (10.40b)$$

$$\frac{\Delta n_{31} - \Delta N_{31}}{2\tau_{13}} + \frac{\Delta n_{32} - \Delta N_{32}}{2\tau_{23}} + C_{13}\Delta n_{31} + C_{23}\Delta n_{32} = 0 \quad (10.40c)$$

由这些代数方程可以精确地解出  $\Delta n_{ij}$ 。但是, 这些解难以说清, 因此, 将只求出近似解, 它仍能足够精确地导出主要结论。首先, 要注意由于所有的  $\tau_{ij}$  和  $\Delta n_{ij}$  都是有限的, 所以若无限地增加泵浦功率, 则粒子数差  $\Delta n_{13}$  必须为零。这是因为  $C_{13}$  直接地正比于泵浦功率。因此能够得到的  $W_3$  的最大粒子数密度, 正好等于能级  $W_1$  的粒子数密度, 即  $n_3 = n_1$ 。这个条件称为泵浦跃迁的自旋饱和条

件。大多数微波量子放大器工作于泵浦功率大到足以产生饱和，或者至少很接近于饱和。若在(10.40b)式中令 $\Delta n_{13}=0$ ，并求解 $\Delta n_{23}$ ，则得(应当指出，当 $\Delta n_{13}=0$ 时， $n_1=n_3$ ， $\Delta n_{12}=n_1-n_2=-\Delta n_{23}=(n_2-n_3)$ ， $\Delta n_{ij}=\Delta n_{ji}$ ，等等)

$$\Delta n_{32} = -\Delta n_{21} = \frac{\Delta N_{12}/\tau_{13} - \Delta N_{23}/\tau_{23}}{\tau_{12}^{-1} + \tau_{23}^{-1} + 2C_{23}} \quad (10.41)$$

若要使能级3比能级2有较大的粒子数密度，则由于 $\Delta n_{32}=n_3-n_2$ 是正的，故(10.41)式的左边必须为正。于是，为使能级3和2的粒子数反转时，要求

$$\Delta N_{23}\tau_{12} < \Delta N_{12}\tau_{23}$$

或两边除以 $N_2$ 得

$$\left(1 - \frac{N_3}{N_2}\right)\tau_{12} < \left(\frac{N_1}{N_2} - 1\right)\tau_{23}$$

由玻耳兹曼分布定律得

$$\frac{N_3}{N_2} = e^{-(W_3 - W_2)/kT} = e^{-f_s h/kT}$$

$$\frac{N_1}{N_2} = e^{f_i h/kT}$$

式中， $f_i = (W_2 - W_1)/h$ 为非辐射跃迁频率。在微波范围内，即使当 $T$ 为液氮温度( $4^\circ K$ )时， $fh/kT$ 非常小。例如， $f=10^{10}$ 赫， $T=4^\circ K$ 时， $fh/kT=0.12$ 。所以指数项可以用 $1 - hf_s/kT$ 和 $1 + hf_i/kT$ 来近似，从而得到

$$\frac{f_s}{f_i} < \frac{\tau_{23}}{\tau_{12}} \quad (10.42)$$

如果此条件不成立，则由于(10.41)式右边将为负，故改为在能级 $W_2$ 和 $W_1$ 之间发生粒子数反转。在这种情况下，由2到1的跃迁应当用作放大跃迁，由3到2的跃迁应为非辐射跃迁。(10.42)式表明，信号频率对非辐射频率之比，必须大于信号跃迁弛豫时间和非辐射跃迁弛豫时间之比。



很重要的一个参数是所能达到的粒子数反转数，因为这将是能获得的大量最终限制因素。其反转比是  $\Delta n_{32}$  与热平衡粒子数差  $\Delta N_{23}$  之比。由 (10.41) 式，假定其中没有信号功率，即  $C_{23} = 0$ ，则得

$$\frac{\Delta n_{32}}{\Delta N_{23}} = \frac{\tau_{23} \Delta N_{12} / \Delta N_{23} - \tau_{12}}{\tau_{12} + \tau_{23}}$$

但是，如前所述， $\Delta N_{12} / \Delta N_{23} = (N_1 - N_2) / (N_2 - N_3)$  可以用  $f_i / f_s$  来近似，所以得

$$\frac{\Delta n_{32}}{\Delta N_{23}} = \frac{(\tau_{23} / \tau_{12}) f_i / f_s - 1}{1 + \tau_{23} / \tau_{12}}$$

由于  $f_s = f_s + f_i$ ，所以也可以用下面形式表示反转比

$$\frac{\Delta n_{32}}{\Delta N_{23}} = \frac{f_s / f_s - (1 + \tau_{12} / \tau_{23})}{1 + \tau_{12} / \tau_{23}} \quad (10.43)$$

若  $\tau_{12} / \tau_{23}$  为零，则得到最大反转比。在这个最佳情况下，

$$\frac{\Delta n_{32}}{\Delta N_{23}} = \frac{f_s}{f_s} - 1 \quad \text{当 } \frac{\tau_{12}}{\tau_{23}} \rightarrow 0 \text{ 时} \quad (10.44)$$

为了得到一个大的反转比，泵浦频率必须比信号频率高。若  $\tau_{12} = \tau_{23}$ ，则反转比为

$$\frac{\Delta n_{32}}{\Delta N_{23}} = \frac{f_s}{2f_s} - 1 \quad \text{当 } \tau_{12} = \tau_{23} \text{ 时} \quad (10.45)$$

无论如何，反转比只取决于两个弛豫时间之比，所以即使弛豫时间稍微被改变，只要保持同样的比率，其增益将不变化。

信号功率在单位体积晶体中在单位时间内将产生由能级  $W_3$  到能级  $W_2$  的向下受激跃迁  $C_{23} \Delta n_{32}$ 。放出的辐射是相干的，并与激励信号是同相的。单位时间放出的能量，或放出的功率由普朗克关系式给出为

$$P_s = hf_s C_{23} \Delta n_{32} \quad (10.46)$$

为了得到线性放大， $\Delta n_{32}$  必须基本上与信号功率无关，因为  $C_{23}$  是直接正比于信号功率的。由 (10.41) 式可以看出，使  $\Delta n_{32}$  与  $C_{23}$

无关的条件为

$$C_{23} \ll \frac{\tau_{12} + \tau_{23}}{2\tau_{12}\tau_{23}} \quad (10.47)$$

若此条件不满足，则不能得到线性放大。而且，(10.41)式还指出，若 $C_{23}$ 很大（这相当于大信号的情况），则由于 $\Delta n_{32}$ 变小，而使粒子数反转减小。实际上，这意味着由能级 $W_3$ 到能级 $W_2$ 的信号受激跃迁太快，使粒子数反转不能保持。因为(10.41)式的根据是泵浦具有相对于能级1为饱和的能级3这一假定，所以，增加泵浦功率不会减轻这种信号饱和作用。也就是说，泵浦最多能做到使 $n_3$ 等于 $n_1$ 。若 $n_3 > n_1$ ，则泵浦将引起向下跃迁。信号饱和通常发生在功率电平低于10微瓦时。

因为所提供的信号功率正比于 $\Delta n_{32}$ ，所以重要的是使 $\Delta n_{32}$ 尽可能大。由于 $\Delta n_{32}$ 正比于 $\Delta N_{23}$ ，根据(10.45)式可以看出，要求 $\Delta N_{23} = N_2 - N_3$ 有大的数值。此时 $N_2 - N_3$ 正比于 $N_2(1 - N_3/N_2) = N_2(1 - e^{-(W_3 - W_2)/kT})$ ，它只有在 $e^{-(W_3 - W_2)/kT}$ 保持为小的数值时，才是大的。这要求 $(W_3 - W_2)/kT$ 是大数值，这一条件只在低温下才能满足。因此，为了获得大的粒子数反转，微波量子放大器需要低的工作温度。由低工作温度所得到的一个重大好处，是微波量子放大器所产生的噪声功率非常低。使用低工作温度得到的另一个重大好处，是很长的弛豫时间。它又意味着使能级1到能级3的跃迁达到饱和只需要很小的泵浦功率，参照(10.40)式可以证明这一点。

## 10.6 宏观磁化率

为了定量计算功率放大量和其他有关的参数，必须知道受激跃迁概率 $C_{13}$ 和 $C_{23}$ 的值。跃迁概率 $C_{13}$ 和 $C_{23}$ 可以通过类似于在10.2节中用来计算跃迁概率 $B_{11}$ 的微扰分析来计算。基本的差别在于，在现在的情况下，交流电磁场与红宝石晶体相互作用是通过铬离子的

磁偶极矩，而不是电偶极矩。因为红宝石是顺磁性物质，并加有恒定磁场  $B_0$ ，所以宏观导磁率在形式上与回转铁氧体媒质的导磁率相类似。因此，宏观磁化率通常是以矩阵的形式表示的量（参看6.6节），即

$$\bar{\chi}_m = \begin{bmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{bmatrix}$$

与铁氧体中的情况一样，没有零元素是由于磁场  $B_0$  相对于坐标轴是任意取向的。若没有损耗，则  $\chi_{ij} = \chi_{ji}^*$ ，即此矩阵为厄密矩阵。若存在损耗，则  $\chi_{ij} \neq \chi_{ji}^*$ 。在这种情况下，可以把  $\bar{\chi}_m$  分为一个厄密矩阵加一个反厄密矩阵（即为  $\chi_{ij} = -\chi_{ji}^*$  矩阵）它的矩阵元为

$$\chi'_{ij} = (\chi'_{ji})^* = \frac{1}{2}(\chi_{ij} + \chi_{ji}^*)$$

$$\chi''_{ij} = -(\chi''_{ji})^* = \frac{j}{2}(\chi_{ij} - \chi_{ji}^*)$$

故得  $\chi_{ij} = \chi'_{ij} - j\chi''_{ij}$ ，或者一般地

$$\bar{\chi}_m = \bar{\chi}'_m - j\bar{\chi}''_m$$

现在要证明，其中的第二个矩阵  $-j\bar{\chi}''_m$  是造成物质中功率损耗的原因。

若研究2.5节的复数坡印廷矢量公式，则可得出单位体积内的功率损耗为  $Re((j\omega/2)\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{B})$ 。把它写成为

$$Re\left(\frac{j\omega}{2}\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{B}\right) = \frac{j\omega}{4}\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{B} - \frac{j\omega}{4}\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}^*$$

即为  $j\omega\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{B}/2$  与它的共轭数之和的一半。若令  $\mathbf{B} = \mu_0(1 + \bar{\chi}_m) \cdot \mathbf{H}$ ，其中， $\bar{\chi}_m \cdot \mathbf{H}$  是矩阵  $\bar{\chi}_m$  与元素为  $H_x, H_y, H_z$  的行矩阵之积的缩写符号，则得

$$Re \frac{j\omega}{2} \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{B} = \frac{j\omega\mu_0}{4} (\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} + \mathbf{H}^* \cdot \bar{\chi}_m \cdot \mathbf{H} - \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \bar{\chi}_m^* \cdot \mathbf{H}^*)$$

$$= \frac{j\omega\mu_0}{2} (\mathbf{H}^* \cdot \bar{\mathbf{x}}_m^* \cdot \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{x}}_m \cdot \mathbf{H}^*)$$

但  $\mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{x}}_m^* \cdot \mathbf{H}^*$  可以写作  $\mathbf{H}^* \cdot \bar{\mathbf{x}}_{m1} \cdot \mathbf{H}$ , 其中,  $\bar{\mathbf{x}}_{m1}$  是转置矩阵。所以, 单位体积内的功率损耗为

$$\frac{\omega\mu_0}{2} \mathbf{H}^* \cdot \left[ \frac{j}{2} (\bar{\mathbf{x}}_m - \bar{\mathbf{x}}_{m1}) \right] \cdot \mathbf{H} = \frac{\omega\mu_0}{2} \mathbf{H}^* \cdot \bar{\mathbf{x}}_m^* \cdot \mathbf{H} \quad (10.48)$$

于是, 磁化率矩阵对损耗有贡献的是反厄密矩阵的  $(j/2)(\bar{\mathbf{x}}_m - \bar{\mathbf{x}}_{m1})$  部分, 先前我们把它叫做  $\bar{\mathbf{x}}_m^*$ 。若没有损耗, 则  $\bar{\mathbf{x}}_m = \bar{\mathbf{x}}_{m1}^*$ ,  $\bar{\mathbf{x}}_m$  是一个厄密矩阵。由于吸收 (或发射) 的功率也正比于  $C_{nm}$ , 所以, 可望得到  $C_{nm}$  类似的关系式。  $C_{nm}$  的计算指出, 确实得到了这种形式。业已得出\*

$$C_{nm} = \left( \frac{eg\mu_0}{4m} \right)^2 L(f) \mathbf{H}^* \cdot \bar{\mathbf{x}}_{nm} \cdot \mathbf{H} \quad (10.49)$$

式中,  $\mathbf{H}^* \cdot \bar{\mathbf{x}}_{nm} \cdot \mathbf{H}$  是  $\mathbf{H}$  与  $3 \times 3$  矩阵  $\bar{\mathbf{x}}_{nm}$  的双重矩阵乘积的缩写符号。矩阵  $\bar{\mathbf{x}}_{nm}$  的形式为

$$\bar{\mathbf{x}}_{nm} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} a^2 & -ja\beta & a\gamma \\ ja\beta & \beta^2 & j\beta\gamma \\ a\gamma & -j\beta\gamma & \gamma^2 \end{bmatrix} \quad (10.50)$$

由此矩阵  $\bar{\mathbf{x}}_{nm}$  可给出由态  $n$  到态  $m$  的跃迁概率。相应的磁化率用  $\bar{\mathbf{x}}_m$  表示。于是得

$$\mathbf{H}^* \cdot \bar{\mathbf{x}}_{nm} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{4} (H_z^* \ H_x^* \ H_y^*) \begin{bmatrix} a^2 & -ja\beta & a\gamma \\ ja\beta & \beta^2 & j\beta\gamma \\ a\gamma & -j\beta\gamma & \gamma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_z \\ H_x \\ H_y \end{bmatrix} \quad (10.51)$$

为使(10.50)式成立,  $z$  轴取为红宝石晶体的  $c$  轴, 并使外加场  $B_0$  落在  $xz$  平面上。其矩阵元  $a$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  取决于所研究的跃迁、恒定场  $B_0$

\* 更详细的讨论可参看: A.E.Siegman, "Microwave Solid-state Masers," (McGraw-Hill Book Company, New York, 1964)。此文还还包括矩阵参数  $a$ 、 $\beta$  和  $\gamma$  的详细的数值表。

的强度和 $B_0$ 场的取向。在(10.49)式中， $g$ 是光谱分裂因子，对红宝石来说，它很接近于2。量 $L(f)$ 描述所研究跃迁的吸收线形（或发射线形），它被归一化为

$$\int_0^{\infty} L(f)df = 1$$

线形可用洛仑兹线形近似，即为

$$L(f) = \frac{2\tau}{1 + \tau^2(\omega - \omega_{nm})^2} \quad (10.52)$$

式中， $\tau$ 可以认为是跃迁的寿命（参看10.2节末尾的讨论）。谱线的半宽度为 $\Delta f = (\pi\tau)^{-1}$ 。对红宝石来说，典型的 $\tau$ 值约为 $10^{-7}$ 到 $10^{-8}$ 秒。

西格曼在其书中列出了 $\alpha$ 、 $\beta$ 和 $\gamma$ 值的详细表格。为了便于说明问题，我们把几个典型值列于表10.2中（参看图10.11关于磁场取向角 $\varphi$ 的定义）。

表 10.2 红宝石数据 ( $H_0 = 2$ 千高斯)

	$W_1/h$ (兆赫)	$W_2/h$ (兆赫)	$W_3/h$ (兆赫)	$W_4/h$ (兆赫)
$\varphi = 10^\circ$	-14,014	2,363	2,897	8,754
$\varphi = 40^\circ$	-12,756	-852	2,868	10,739
$\varphi = 90^\circ$	-8,459	-7,005	2,866	12,585

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
$\varphi = 10^\circ$			
1-3跃迁	1.66	1.66	-0.0947
2-3跃迁	0.47	-0.55	0.99
$\varphi = 40^\circ$			
1-3跃迁	1.49	1.48	-0.341
2-3跃迁	0.82	-1.33	1.28
$\varphi = 90^\circ$			
1-3跃迁	1.75	$2.76 \times 10^{-6}$	$-1.51 \times 10^{-6}$
2-3跃迁	$3.3 \times 10^{-7}$	-2.1	1.2

矩阵元  $\alpha$ 、 $\beta$  和  $\gamma$  随偏置磁场的方位角的变化大，是由于红宝石晶体的各向异性结构。它存在对自旋有重大影响的晶格电场。红宝石晶体在一个轴上具有对称性，此轴称为  $c$  轴。红宝石晶体的各向异性结构，也在相对电容率上显示出来，它沿  $c$  轴的值为 11.5，而在垂直于  $c$  轴方向上为 9.5。

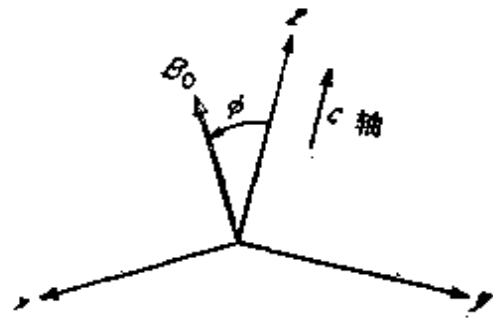


图 10.11 偏置磁场  $B_0$  的取向角  $\varphi$

红宝石与铁氧体在磁性能上的主要差别，是由于红宝石中有磁性激活的铬离子的浓度非常低（少于百分之一），因而磁化率与  $\mu_0$  有很小的但是重要的量的差别。若增大铬离子的浓度，则自旋由于间隔更近而开始相互作用。其效果是使能级变宽，从而使谱线宽度更宽，线的峰值强度因而减低，微波量子放大器的性能就受到影响。因此，最佳铬离子浓度小于百分之一。

由跃迁概率  $C_{2,3}$  与能级 2 和 3 的粒子数密度之差表示的红宝石晶体每单位体积中的吸收功率为  $C_{2,3} \Delta n_{2,3} h f_3$ 。若粒子数反转，则  $n_3 > n_2$ ，而  $\Delta n_{2,3}$  是负的，故信号频率上的吸收将改为净的功率发射。若把量子力学的吸收功率表示式与经典表示式(10.48)式比较，则可看出宏观磁化率矩阵  $\bar{\chi}_m'$  为

$$\bar{\chi}_m' = \frac{\Delta n_{2,3} h}{\pi \mu_0} \left( \frac{e \mu_B}{2m} \right)^2 L(f) \bar{\chi}_{nm} \quad (10.53)$$

式中，已令  $g = 2$ ，且  $\bar{\chi}_{nm}$  由 (10.50) 式给出，其中的  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  对应于 2-3 ( $n = 2, m = 3$ ) 的信号跃迁。

在求部分地被红宝石晶体填充的空腔中的场分布时，由于磁化率远小于 1，故不需要考虑它。但是，红宝石的相对电容率很大，必须予以考虑。因为相对电容率也是各向异性的，所以空腔给定模的边值问题的解是十分复杂的。磁化率矩阵的反厄密部分由 (10.53) 式给出。此外，还有一个厄密部分，但它在谐振频率上变为零。若

微波量子放大器运用在很窄的波段上（与谱线的半宽度比较），则可假定  $\overline{x_m}$  的厄密部分保持为零。当带宽较宽时，还必须知道  $\overline{x_m}$ ，因为它由谐振时的零值增加到有限值时，对空腔谐振器产生显著的失调效应（相当于改变空腔谐振器的电感）。当总的有载 Q 值高时，这个效应可能限制最大工作带宽。

## 10.7 微波量子放大器的等效电路

至此，我们已经全部介绍了为导出 10.3 节所讨论过的那种空腔型微波量子放大器等效电路所需要的主要结果。现在研究如图 10.12 所示的包含一个适当偏置的红宝石晶体的微波空腔谐振器，此空腔谐振器通过环形器与输入和输出信号线耦合。此外，还有一条泵浦

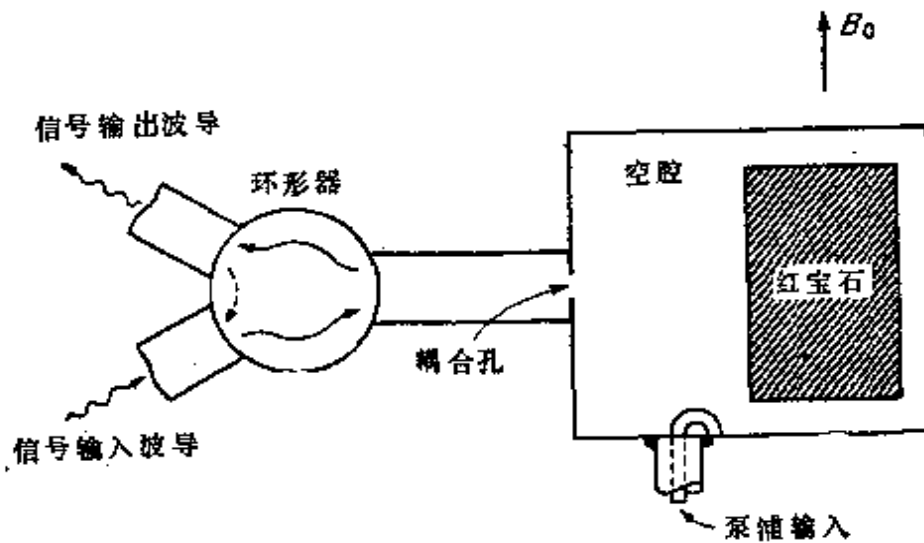


图 10.12 一个微波量子放大器

信号耦合线，把它放在空腔面上的一点，在这点不会与信号模的场相耦合。例如，若用一小环与泵耦合，则此小环可置于信号磁场通过此环产生零磁链的那一点上。于是，在信号频率上，泵浦电路在空腔等效电路中不起作用。

不加泵浦功率时，红宝石是不起作用的，空腔的等效电路就只是含有一种介质材料（即红宝石）的普通空腔等效电路。一旦确定

了场以后，空腔中所储频率为 $f_s$ 的能量，就可以由以下关系式求出：

$$W_e = W_m = \frac{\mu_0}{4} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* dV \quad (10.54)$$

在确定所储藏的平均磁能时，可以假定忽略 $\bar{x}_m$ 。腔壁上的功率损耗，加上由于红宝石中介质损耗引起的功率损耗也可以求出，从而可以确定无载 $Q$ 值。于是，可以用电感 $L_0$ 、电容 $C_0$ 和电阻 $R_0$ 的串联或并联来表示此空腔，如图10.13a所示。在等效电路中，此空腔通过特性阻抗为 $Z_c$ 的传输线与外部负载耦合。临界耦合(参看7.4节)时，此空腔的谐振电路以附加等效串联电阻 $R_e$ 作为负载。非临界耦合时，耦合的程度用耦合参数 $K = Q/Q_e$ 来描述，其中， $Q$ 为空腔的

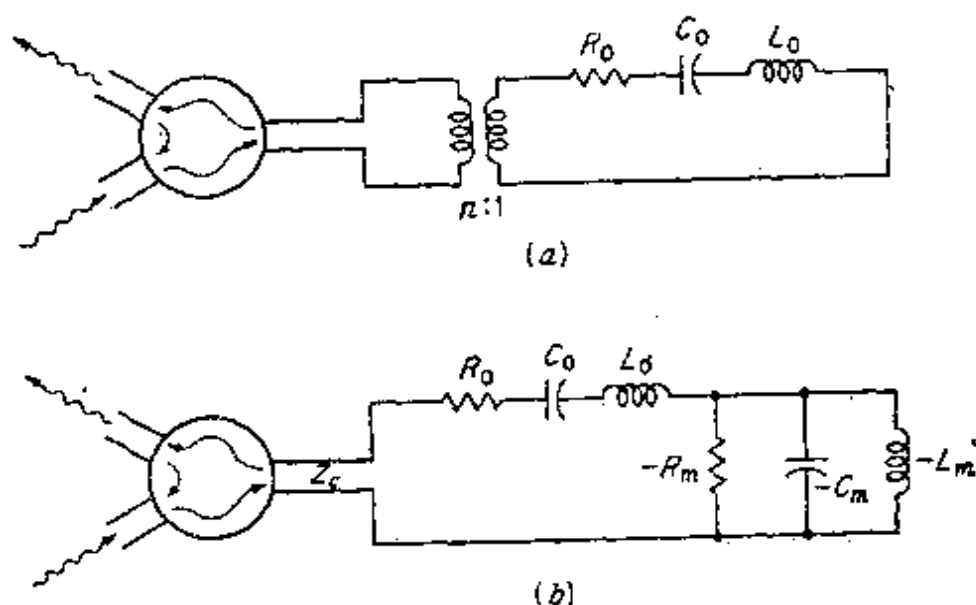


图 10.13 微波量子放大器的等效电路

无载 $Q$ 值，它等于 $\omega L_0/R_0$ ， $Q_e$ 为外部(或辐射) $Q$ 值。若在等效电路中引入匝数比为 $n:1$ 的理想变压器，则如果取适当的匝数比，便可以确定任何程度的耦合。由外部电路引起的空腔等效负载(或负载)为 $R_e = Z_c/n^2$ ，故外部 $Q$ 为

$$Q_e = \frac{\omega L_0}{R_e} = n^2 \frac{\omega L_0}{Z_c} \quad (10.55)$$



因而耦合参数为

$$K = \frac{Q}{Q_c} = \frac{\omega L_0}{R_0} \frac{Z_c}{n^2 \omega L_c} = \frac{1}{n^2} \frac{Z_c}{R_0} \quad (10.56)$$

耦合孔和耦合环通常也会引起一些电抗，这里假定此耦合电抗已被包含在元件  $L_0$ 、 $C_0$  中。实际上我们可以求出无载  $Q$  值和谐振频率（在现在的情况下为  $f_c$ ）。当耦合参数  $K$  被确定，且输入线的等效阻抗被给定时，在等效电路中，除  $n^2$  以外的所有其他参数都固定了。于是得

$$L_0 C_0 = \omega_0^{-2} R_0 = \frac{\omega L_0}{Q} = \frac{Z_c}{n^2 K}$$

当  $n^2$  选定时，可求出用  $Q$  和  $K$  来表示的  $L_0$ 、 $C_0$  和  $R_0$ 。匝数比  $n:1$  可以任意选取，因为它相当于空腔阻抗水平选取的任意性。为了方便，取  $n$  等于 1，在此情况下，可省去变压器。

如果现在接入泵浦功率，以产生能级 3 到 2 的粒子数反转，则此量子放大器的晶体便成为一个在频率  $f_c$  上供给功率的工作源。这个功率是由每激发一次自旋而使之由能级 3 向下跃迁到 2 时，发射出一份能量  $hf_c$  而产生的。所产生的总功率为 (10.49) 式，或者说等于  $(\omega \mu_0 / 2) \mathbf{H}^* \cdot \overline{\mathbf{x}_m} \cdot \mathbf{H}$  在晶体所占的空腔体积  $V_c$  上的积分，其中， $\overline{\mathbf{x}_m}$  由 (10.53) 式给定，于是

$$P_s = \frac{\omega_s \mu_0}{2} \int_{V_c} \mathbf{H}^* \cdot \overline{\mathbf{x}_m} \cdot \mathbf{H} dV \quad (10.57)$$

由于  $\Delta n_{23} = -\Delta n_{32}$ （其中，对于被反转的能级来说， $\Delta n_{32}$  是正的），故是产生功率，而不是吸收功率。由微波量子放大器工作而产生的功率，可以用等效电路中的等效负阻  $-R_m$  来表示，如图 10.13b 所示。 $R_m$  的计算如下：当等效电路中存在电流  $I$  时，在  $L_0$  所储藏的能量为

$$W_m = \frac{1}{2} L_0 I I^*$$

由  $-R_m$  所产生的功率为  $P_s = -\frac{1}{2} R_m I I^*$ 。所以

$$\frac{P_s}{W_m} = -\frac{2R_m}{L_c} \frac{2\omega_s \int_{V_c} \mathbf{H}^* \cdot \bar{\mathbf{x}}'_m \cdot \mathbf{H} dV}{\int_V \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} dV} \quad (10.58)$$

根据  $L_c$  便可确定  $R_m$ 。只有在空腔中到处都是红宝石晶体，且具有使量  $\mathbf{H}^* \cdot \bar{\mathbf{x}}'_m \cdot \mathbf{H}$  到处为最大的  $\mathbf{H}$  场结构时，(10.58) 式的分子才得到可能的最大值。若  $\int_{V_c} \mathbf{H}^* \cdot \bar{\mathbf{x}}'_m \cdot \mathbf{H} dV$  的理想极大值表示为  $\sigma^2 \int_V \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} dV$ ，则在任何实际情况下得(参考(10.53)式)

$$\frac{\int_{V_c} \mathbf{H}^* \cdot \bar{\mathbf{x}}'_m \cdot \mathbf{H} dV}{\int_V \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} dV} = \eta \sigma^2 \left[ \frac{\Delta n_{23} h}{\pi \mu_0} \left( \frac{e \mu_0}{2m} \right)^2 L(f) \right] \quad (10.59)$$

式中， $\eta$  称为填充因数。由这些参数得

$$\frac{P_s}{W_m} = -\frac{2R_m}{L_c} = 2\omega_s \eta \sigma^2 \left[ \frac{\Delta n_{23} h}{\pi \mu_0} \left( \frac{e \mu_0}{2m} \right)^2 L(f) \right] \quad (10.60)$$

$\sigma^2$  的值为  $\pm(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$ 。负阻引起负等效磁  $Q$  值(记作  $-Q_m$ )为

$$\frac{1}{-Q_m} = \frac{-R_m}{\omega_s L_c} = \eta \sigma^2 \frac{\Delta n_{23} h \mu_0}{\pi} \left( \frac{e}{2m} \right)^2 L(f) \quad (10.61)$$

这个磁  $Q_m$  是描述空腔型微波量子放大器的最重要的一个参数。

添加负电抗元件  $-L_m$ 、 $-C_m$  是由于添加了由磁化率的  $\bar{\mathbf{x}}'_m$  部分引起的少量磁能  $\Delta W_m$ ，即为

$$\Delta W_m = \frac{\mu_0}{4} \int_{V_c} \mathbf{H}^* \cdot \bar{\mathbf{x}}'_m \cdot \mathbf{H} dV \quad (10.62)$$

在谐振时， $\Delta W_m$  为零；低于谐振频率时，它为负；高于谐振频率时，它为正。所以，磁化率的整个宏观性质，完全等效于具有负元件  $-G_m^{-1}$ 、 $-L_m$  和  $-C_m$  的并联谐振电路。这种情况是不足为奇的，因为如在 2.5 节中已研究过的那样，在物质中极化的一般经典模型，是一个表示阻尼振子或等效  $RLC$  谐振电路的二阶微分方程。在现在的情况下，由于粒子数密度的反转，等效电路元件都是负的。我们称之为磁能的能量  $\Delta W_m$ ，更正确地说，应认为是与自旋的交流运动相联系的时间平均动能和位能之差。因此，它在谐振频率时为零。

在谐振的每一边具有相反的符号是不奇怪的。

具有负元件的并联谐振电路的输入导纳为

$$Y_{in} = -G_m - j\omega C_m \left( 1 - \frac{1}{\omega^2 L_m C_m} \right)$$

若取  $L_m C_m$  使得  $L_m C_m = \omega_s^{-2}$ , 则

$$Y_{in} = -G_m - j\omega C_m \frac{\omega^2 - \omega_s^2}{\omega^2} \approx -G_m - jC_m 2(\omega - \omega_s)$$

由此得出, 在谐振时,  $Y_{in} = -G_m$ ; 高于谐振频率时,  $Y_{in}$  有一感性等效电纳  $-j2C_m(\omega - \omega_s)$ ; 低于谐振频率时,  $Y_{in}$  有一容性等效电纳。

若在此电路中有电流  $I$ , 则产生的功率为

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\frac{1}{2} I I^* Z_{in}) &= \operatorname{Re} \left[ \frac{-G_m + j2C_m(\omega - \omega_s)}{G_m^2 + 4C_m^2(\omega - \omega_s)^2} \cdot \frac{I I^*}{2} \right] \\ &= \frac{-\frac{1}{2} G_m I I^*}{G_m^2 + 4C_m^2(\omega - \omega_s)^2} \end{aligned} \quad (10.63)$$

如果把把这个结果与表示式  $-\frac{1}{2} R_m I I^*$  比较, 就可看出, 洛仑兹线形因子  $2\tau / (1 + \tau^2(\omega - \omega_s)^2)$  与并联谐振电路的特性曲线相对应。若用并联谐振电路的阻抗代替洛仑兹线形因子, 则可以对磁化率矩阵的两个部分作正确的说明。为了完全对应, 必须取  $\tau^2 = 4C_m^2 / G_m^2$ , 即

$$C_m = \frac{\tau G_m}{2} \quad (10.64)$$

可以看出, 谐振时(10.63)式为  $-I I^* / 2G_m$ 。由于谐振时  $L(f) = 2\tau$ , 且所产生的功率为

$$\begin{aligned} P_s &= -\frac{1}{2} R_m I I^* = \frac{\omega_s \mu_2}{2} \int_{V_c} \mathbf{H}^* \cdot \vec{\mathbf{x}}_m \cdot \mathbf{H} dV \\ &= \frac{1}{4} I I^* L_0 (2\omega_s \eta \sigma^2) \left[ \frac{\Delta n_{23} k \mu_0}{\pi} \left( \frac{e}{2m} \right)^2 2\tau \right] \end{aligned}$$

故根据(10.60)式, 我们必须规定等效电阻  $R_m = G_m^{-1}$  为

$$-R_m = \omega_s L_0 \eta \sigma^2 \left[ \frac{\Delta n_{23} h \nu_0}{\pi} \left( \frac{e}{2m} \right)^2 2\tau \right] \quad (10.65)$$

于是，依据前面所取的  $L_0$  值和红宝石晶体的参数（包括其线宽度参数  $\tau$ ），便可以用(10.65)式规定在等效电路中将要使用的等效电阻  $R_m$ 。然后由(10.64)式确定电容  $C_m$ ，以及用关系式  $L_m C_m = \omega_s^{-2}$  给定  $L_m$ 。这样就可以来组成微波量子放大器的等效电路了。这里值得指出的一点是，用来计算磁化率矩阵厄密特部分  $\overline{x}_m$  的方法，是一个正确的方法，因为磁化率参数是一个  $\omega$  的解析函数，正如阻抗函数是  $\omega$  的一个解析函数一样。知道了  $\overline{x}_m$  的实部或虚部，就足以确定其他的参数。因此，能修改洛仑兹线形以包括磁化率矩阵两部分的贡献不全是偶然的。磁化率实部和虚部之间的关系式由克罗奈-克雷默斯关系式给出，在许多参考文献中，读者可以找到对它的讨论\*。

## 10.8 微波量子放大器的增益

微波量子放大器的增益，不难由图10.13b中的等效电路求出。设电压为  $V_i$  的信号入射到此量子放大器的空腔上，则反射波的电压应为  $V_r = \Gamma V_i$ ，式中， $\Gamma$  是空腔输入端的反射系数。此反射系数为

$$\Gamma = \frac{Z_{in} - Z_c}{Z_{in} + Z_c} \quad (10.66)$$

在谐振时，空腔的输入阻抗简化为  $R_0 - R_m$ ，在此情况下，

$$\Gamma = \frac{R_0 - R_m - Z_c}{R_0 + Z_c - R_m} = \frac{R_m - (R_0 - Z_c)}{R_m - (R_0 + Z_c)} \quad (10.67)$$

若  $R_m$  大于  $R_0$ ，则反射系数会大于 1。通常，无载 Q 值为几千，典型的磁 Q<sub>m</sub> 值为 50 到 200。这样，由于  $R_m = \omega L_0 / Q_m$ ， $R_0 = \omega L_0 / Q$ ，故  $R_m$  比  $R_0$  大一个数量级。因此， $\Gamma$  很接近于

\* 例如参看：R.S.Gouray, *Dispersion Relations for Tensor Media and Their Application to Ferrites*, *J. Appl. Phys.*, Vol. 28, p. 283, 1957.

$$\frac{V_r}{V_i} = \Gamma = \frac{R_m + Z_c}{R_m - Z_c} = -\frac{Z_c + R_m}{Z_c - R_m} \quad (10.68)$$

它清楚地表明  $\Gamma$  大于 1。可见，传输线端接一个负电阻可得到大于 1 的反射系数。实质上，这是由于一个负阻对传输线供给功率，而不是吸收入射功率所引起的。微波量子放大器的电压增益为  $|\Gamma|$ ，所以，谐振频率下的电压增益为

$$\left| \frac{V_r}{V_i} \right| = \left| \frac{R_m - (R_0 - Z_c)}{R_m - (R_0 + Z_c)} \right| \approx \left| \frac{R_m + Z_c}{R_m - Z_c} \right| \quad (10.69)$$

在谐振频率下的电压增益，可以用空腔的无载  $Q$  值、磁  $Q_m$  值和外部  $Q_e$  值，或用  $\omega, L$  除 (10.69) 式中各项所得的耦合参数  $K$  表示。于是

$$\left| \frac{V_r}{V_i} \right| = \left| \frac{Q_m^{-1} - Q^{-1} + Q_e^{-1}}{Q_m^{-1} - Q^{-1} - Q_e^{-1}} \right|$$

若引入可调参数  $K = Q/Q_e$ ，则得

$$\left| \frac{V_r}{V_i} \right| = \left| \frac{Q - Q_m(1 - K)}{Q - Q_m(1 + K)} \right| \quad (10.70)$$

为了在频带中心得到最大增益，应选取空腔的耦合参数  $K$  使 (10.70) 式的分母非常小。若取

$$K = \frac{Q - Q_m}{Q_m} \quad (10.71)$$

则 (10.70) 式的分母将为零，从而由于增益无限大而引起振荡。

微波量子放大器总的有载  $Q$  值为

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_e} + \frac{1}{Q_m}$$

根据上式可以把频带中心的功率增益表示为

$$G_s = \left| \frac{V_r}{V_i} \right|^2 = \left( \frac{Q^{-1} + Q_e^{-1} - Q_m^{-1} - 2Q_e^{-1}}{Q^{-1} + Q_e^{-1} - Q_m^{-1}} \right)^2 \quad (10.72)$$

如果已把耦合调整到使放大器处于振荡的边缘，则  $Q^{-1} + Q_e^{-1} \approx Q_m^{-1}$ 。在此情况下，可把  $G_s$  表示为

$$G_b \approx \left( \frac{2Q_L}{Q_e} \right)^2 = \left( \frac{2Q_L}{Q_m} \right)^2 \quad (10.73)$$

这个最后结果是通过利用(10.71)式并由于 $Q \gg Q_m$ 以求得

$$Q_e = \frac{QQ_m}{Q - Q_m} \approx Q_m$$

而得到的。为了得到高增益，外部 $Q_e$ 值应近似等于磁 $Q_m$ 。若取 $Q_e = Q_m$ ，则空腔的有载 $Q_L$ 等于空腔的无载 $Q$ 值。从而使频带中心的功率增益可表示为

$$G_b = \left( \frac{2Q}{Q_m} \right)^2 \quad (10.74)$$

可见，为了得到高增益，要求空腔具有高的无载 $Q$ 值。此外，还需要低的磁 $Q_m$ 值，这就要填充因数 $\eta$ 尽可能接近于1，并要求调节任一个其他参数，使跃迁概率 $C_{23}$ 达到最大。为使增益稳定，选取的外部 $Q_e$ 必须使总的有载 $Q_L$ 值不太大。若 $Q_L$ 值太大，则某一参数有很小的变化就能使 $Q_L$ 变成无限大，从而会引起振荡。

为了求谐振频率以外频率的增益，需要谐振附近的 $Z_{in}$ 表示式，由等效电路不难求出 $Z_{in}$ 为

$$Z_{in} = R_b + j\omega L_b \left( 1 - \frac{1}{\omega^2 L_b C_b} \right) + \left[ -G_m - j\omega C_m \left( 1 - \frac{1}{\omega^2 C_m L_m} \right) \right]^{-1}$$

因为 $L_b C_b = L_m C_m = \omega_s^{-2}$ ， $\omega^2 - \omega_s^2 \approx 2\omega_s \Delta\omega$ ，故得

$$Z_{in} \approx R_b + 2jL_b \Delta\omega - (G_m + j2C_m \Delta\omega)^{-1}$$

现在可以求出功率增益 $|G|^2$ ，在用 $R_b Q$ 代替 $\omega_s L$ 和用 $\tau G_m / 2$ 代替 $C_m$ （按(10.64)式）以后，得出

$$G = |G|^2 = \left| \frac{(R_b(1 + 2jQ\Delta\omega/\omega_s) - Z_c)(1 + j\tau\Delta\omega) - R_m}{(R_b(1 + 2jQ\Delta\omega/\omega_s) + Z_c)(1 + j\tau\Delta\omega) - R_m} \right|^2$$

我们首先关心的是使 $2Q\Delta\omega/\omega_s$ 和 $\tau\Delta\omega$ 约为1时的频移 $\Delta\omega$ ，对一个高增益的微波量子放大器来说， $Z_c \approx R_m$ ， $R_m \gg R_b$ ，即 $Q_m \ll Q$ ，所以， $R_b(1 + 2jQ\Delta\omega/\omega_s)$ 与 $Z_c$ 相比可以忽略，从而， $G$ 的表示式便成为

$$G \approx \frac{(2R_m)^2 + (R_m \tau \Delta\omega)^2}{(R_0 + Z_e - R_m)^2 + (Z_e \tau \Delta\omega)^2}$$

$$= \left( \frac{2R_m}{R_0 + Z_e - R_m} \right)^2 \frac{1 + (\tau \Delta\omega / 2)^2}{1 + \left( \frac{R_m}{R_0 + Z_e - R_m} \right)^2 (\tau \Delta\omega)^2}$$

由于  $2R_m / (R_0 + Z_e - R_m) = 2Q_L / Q_m$ ，且频带中心增益为

$$G_0 = \frac{4Q_L^2}{Q_m^2}$$

故得

$$G = G_0 \frac{1 + (\tau \Delta\omega / 2)^2}{1 + G_0 (\tau \Delta\omega / 2)^2} \quad (10.75)$$

因为  $G_0$  远大于 1，所以当其分母变成等于 2 时，增益便减少到  $G_0 / 2$ 。于是高增益微波量子放大器的增益—带宽积为

$$\sqrt{G_0} \frac{\Delta\omega}{\omega_s} = \frac{2\sqrt{G_0}}{\omega_s \tau} = \frac{\sqrt{G_0}}{\pi f_s \tau} = \frac{(\Delta f)_L}{f_s} \sqrt{G_0} \quad (10.76)$$

式中， $(\Delta f)_L$  是发射谱线的 3 分贝宽度。由此可见，若微波量子放大器增益高，则其有效带宽就很窄。例如，典型的谱线宽度为 100 兆赫，若增益为 20 分贝时，有效带宽只有 10 兆赫。只要使磁  $Q_m$  足够小，就能得到高增益。但由于增益—带宽积受磁谐振谱线宽度的限制，所以进一步减少  $Q_m$  不能改善增益—带宽积。

原则上，接近磁谐振谱线宽度  $(\Delta f)_L$  并仍能保持高增益的带宽是可以得到的。纯的空腔谐振器是一个窄带电路，这是增益—带宽积受 (10.76) 式限制的原因。使用更精巧的空腔网络，可以显著地改善增益—带宽积。对宽频带问题的讨论，读者可参考西格曼的书。解决宽频带问题的另一种办法是改用行波式微波量子放大器，其中的空腔用慢波结构代替。10.10 节将简单阐述行波式微波量子放大器。

## 10.9 微波量子放大器的噪声

微波量子放大器在信号频率上的噪声，是由电子自旋自发地由能级 $W_3$ 降落在能级 $W_2$ 时，辐射的自发发射所引起的。自发发射与信号不相干，因而表现为噪声。每单位时间产生的自发跃迁数为 $A_{32}n_3$ ，其中， $A_{32}$ 是自发跃迁概率的爱因斯坦系数， $n_3$ 是在能级 $W_3$ 上每单位体积的自旋数。若不加泵浦功率，此量子放大器的晶体仍可以用电阻、电感和电容并联所组成的等效电路来表示。但是，在这种情况下，等效电路元件应是正的，因为这些元件由(10.16)式定义，它所包含的因子 $\Delta n_{23}$ ，现在被热力学平衡的粒子数差 $\Delta N_{23}$ 所代替，而它是正的。由于关闭泵浦功率时不会引起其他变化，故新的等效电路元件为

$$R'_m = \frac{\Delta N_{23}}{\Delta n_{23}} (-R_m)$$

$$L'_m = \frac{\Delta N_{23}}{\Delta n_{23}} (-L_m)$$

$$C'_m = \frac{\Delta N_{23}}{\Delta n_{23}} (-C_m)$$

在热力学平衡条件下，在电阻 $R'_m$ 上的噪声电压均方值 $e_n^2$ 为

$$e_n^2 = 4kTR'_m \Delta f \quad (10.77)$$

这个噪声功率来自速率为 $A_{32}N_3$ 时产生的自发跃迁，其中， $N_3$ 是平衡温度为 $T$ 时能级 $W_3$ 上每单位体积的自旋数。若把泵浦功率加上，则所产生的噪声电压便正比于 $A_{32}n_3$ 。因为产生噪声的机构没有改变，而只改变粒子数密度，所以，比例常数将严格地与热平衡情况下的比例常数相同。因而，当泵浦开动时，在微波量子放大器晶体等效电路上的均方噪声电压应为

$$\frac{e_n^2}{A_{32}n_3} = \frac{4kTR'_m \Delta f}{A_{32}N_3}$$



代入 $R_m'$ 得

$$e_n^2 = 4kT \Delta f (-R_m) \frac{\Delta N_{23}}{N_3} \frac{n_{23}}{\Delta n_{23}}$$

这样,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N_{23}}{N_3} &= \frac{N_2}{N_3} - 1 = e^{-(W_2 - W_3)/kT} - 1 \\ &= e^{h\nu/kT} - 1 \approx \frac{h\nu}{kT} \end{aligned}$$

倘若引入一个等效温度 $T_s$ , 那么, 可用类似的形式表示 $\Delta n_{23}/n_3$ , 于是

$$\frac{\Delta n_{23}}{n_3} = \frac{n_2}{n_3} - 1 = \frac{h\nu}{kT_s} = \frac{h\nu}{k(-T_s)}$$

现在, 对于反转的分布能级来说,  $n_2 < n_3$ , 且 $\Delta n_{23}$ 是负的。此时, 自旋温度 $T_s$ 是一个负温度, 因此, 可用 $-T_s$ 来表示它。当把这些关系式代入 $e_n^2$ 表示式时, 便得到

$$e_n^2 = 4k(-T_s)(-R_m)\Delta f \quad (10.78)$$

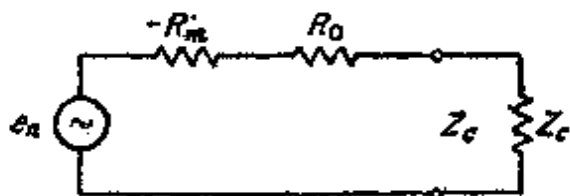


图 10.14 计算噪声用的微波量子放大器等效电路

只要用负的自旋温度 $-T_s$ 和负的等效电阻 $-R_m'$ 来代替噪声电压公式(10.77)中通常意义下的温度和电阻, 就能像确定任何一个其他电路的噪声特性一样, 来确定微波量子放大器的噪声特性。

为了求出传送到外部负载上的噪声功率, 我们研究如图 10.14 所示的谐振时的微波量子放大器的等效电路。由于输出线端接一适当的负载 $Z_c$ , 故此量子放大器传送到 $Z_c$ 上的噪声功率为

$$P_n = \left| \frac{e_n}{R_0 + Z_c - R_m} \right|^2 Z_c = \frac{4kT_s R_m Z_c \Delta f}{(R_0 + Z_c - R_m)^2} \quad (10.79)$$

由于高增益时 $Z_c = R_m$ ,  $R_m \gg R_0$ , 故谐振时此量子放大器的增益 $G_n$ 为

$$G_0 = \left( \frac{R_0 - R_m - Z_c}{R_0 + Z_c - R_m} \right)^2 \approx \frac{4R_m^2}{(R_0 + Z_c - R_m)^2}$$

因此，此量子放大器的噪声温度为

$$T_n = \frac{P_n}{G_0 k \Delta f} \approx T_s \quad (10.80)$$

因为自旋温度 $T_s$ 的大小近似等于液氮温度，所以，微波量子放大器是一种具有很低噪声的器件。还存在由空腔的等效损耗电阻 $R_0$ （它处于液氮温度下）引起的噪声，但由于 $R_0 \ll R_m$ ，故通常忽略它。

当把微波量子放大器结合到完整的接收系统中时，将有许多处于环境温度下的元件。由于这些元件（比如波导、环行器等）有一些损耗，从而有一定等效电阻，它们将产生附加噪声。虽然损耗可能很小，但温度较高，因而能够使总的接收机噪声温度显著变坏。所以，接收机总的等效噪声温度增大5倍到20倍，甚至更多，或等效噪声温度为 $20^\circ$ 到 $80^\circ$  K或者更高的情况是常见的。

## 10.10 行波式微波量子放大器

空腔型微波量子放大器中的电磁场基本上是驻波。但是，为了得到放大，并不一定需要驻波场。如果场是一个传播波或者说是行波，微波量子放大器晶体同样可在信号频率上激励出功率。为了理解它所包含的基本机理，我们研究一种传输线，比如以微波量子放大器材料填充的平行板传输线。在不加泵浦功率时，此传输线可以用单位长度的串联电感 $L$ 和串联电阻 $R$ 加上并联电容 $C$ 和电导 $G$ 来表示。其衰减常数为

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} (RY_c + GZ_c) \quad (10.81)$$

式中， $Z_c = (L/C)^{\frac{1}{2}} = Y_c^{-1}$ 。当泵浦源接通时，此量子放大器物质就起作用，并产生一个负的等效串联电阻 $-R_m$ 。若 $R_m$ 足够大，则新的衰减常数为

$$\alpha = -\frac{1}{2}((R - R_m)Y_c + GZ_c) = \alpha_0 - \alpha_m \quad (10.82)$$

式中， $\alpha_m = R_m Y_c / 2$ 可以是负的，因而相当于一个增益系数。于是在信号频率上，此波将按指数规律增长。

任一个行波式微波量子放大器所希望的特点是每单位长度的增益高，以便使所需的微波量子放大器材料的尺寸及数量保持较小。从希望用来偏置晶体的磁铁小，以及希望昂贵的氮槽小的观点看，也希望小尺寸。用作行波量子放大器的波导结构应当是这样一种结构，即在其波通路中每单位长度所储藏的磁能的时间平均值很大。其原因是由微波量子放大器工作引起的等效串联电阻和增长常数 $\alpha_m$ 正比于磁能密度。因为由量子放大器工作所产生的功率的变化率正比于功率 $P$ ，所以可以写作

$$\frac{dP}{dz} = 2\alpha_m P \quad (10.83)$$

但是，在行波系统中，功率 $P$ 为每单位长度平均电能和磁能密度乘群速（或能流速度） $v_g$ 。因为在行波的情况下，平均电能密度 $U_e$ 等于平均磁能密度 $U_m$ ，故可写成 $P = 2U_m v_g$ ，由波通路中的一个单位长度的微波量子放大器晶体所产生能量的变化率，可对(10.57)式求导数得出，且为（对 $z$ 的积分去掉了）

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{\omega_s \mu_0}{2} \int_S \mathbf{H}^* \cdot \bar{\chi}_m' \cdot \mathbf{H} \, dS \quad (10.84)$$

式中的积分是在波导电路的横截面上进行的，此时的磁能密度为

$$U_m = \frac{\mu_0}{4} \int_S \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} \, dS \quad (10.85)$$

把上面的结果结合起来，则得

$$\alpha_m = \frac{1}{2P} \frac{dP}{dz} = -\frac{1}{4v_g U_m} \frac{dP}{dz}$$

$$= -\frac{\omega_s}{2v_g} \frac{\int_s \mathbf{H}^* \cdot \vec{\chi}_m \cdot \mathbf{H} dS}{\int_s \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} dS} \quad (10.86)$$

为了在每单位长度上得到高增益，需要群速 $v_g$ 的值小。所以，对行波式微波量子放大器来说，波导结构应当是具有群速小的结构。与行波管不同，行波管需要具有等于电子束速度的相速小的结构，行波式微波量子放大器对群速的值不作严格要求。要群速小主要是由于实际的需要。仅从电的方面考虑，增长常数 $d_m$ 小总是可以用较长的行波系统来补偿。

如果行波式微波量子放大器中使用的输入和输出耦合电路和群速 $v_g$ ，在等于磁谐振谱线宽度的频带内，可以保持相对地恒定，则增益基本上恒定的有效带宽将等于谱线宽度。这些条件比较容易满足，所以行波式微波量子放大器是一种宽频带放大器。

图10.15表示一种用微波量子放大器晶体填充矩形波导而得到的简单行波式微波量子放大器（氮槽未画出）。若晶体的C轴与一个坐标轴重合，则主模 $H_{10}$ 模与一个沿 $y$ 方向电容率为 $\epsilon$ 的介质填充的波导中的相同。利用介质板 $\lambda/4$ 变换器，可以在信号频率上使微波量子放大器晶体与空心波导匹配。泵浦功率可以通过同轴线探针或其他适当的装置耦合进去。

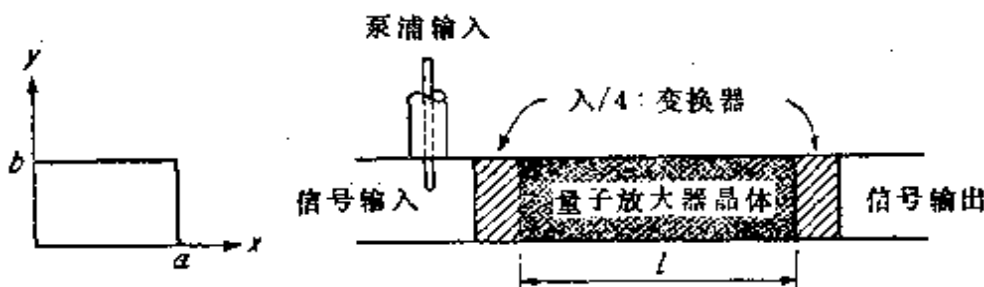


图 10.15 一个简单的行波式微波量子放大器

按空腔中的表示式 $2\omega W_m/P_L$ 来讨论，行波式微波量子放大器的磁 $Q_m$ 值可以定义为

$$Q_m = \frac{2\omega_s U_m}{dP/dZ} \quad (10.87)$$

由(10.86)式可得出用 $Q_m$ 表示的 $\alpha_m$ 为

$$\alpha_m = \frac{\omega_s}{2v_g Q_m} \quad (10.88)$$

图10.15中所示的微波量子放大器的群速为

$$v_g = \frac{c^2}{\epsilon v_p} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \frac{\beta}{k}$$

式中， $\beta$ 是传播常数， $k = \sqrt{\epsilon} k_0$ 。传播常数 $\beta$ 由 $\beta^2 = k^2 - (\pi/a)^2$ 给定，所以

$$\frac{d\beta}{\beta} = \left(\frac{k}{\beta}\right)^2 \frac{dk}{k}$$

若选取的频率和波导尺寸使 $\beta = 0.5k$ ，则当频率变化百分之一时， $\beta$ （即 $k$ ）仍只变化百分之四。对红宝石来说，除沿光轴（C轴）外，相对电容率 $\epsilon/\epsilon_0$ 可取为9.5，C轴上的 $\epsilon/\epsilon_0$ 近似等于11.5。若取前者，则得

$$v_g = \frac{0.5c}{\sqrt{9.5}} = 0.162c$$

相当于减慢到16.2%。一般的磁 $Q_m$ 值为100，所以，在频率为 $10^4$ 兆赫（X波段）时，由(10.88)式给定的增长常数 $\alpha_m$ 为0.065奈贝/厘米。若应用10英寸长的红宝石作为工作物质，则振幅增益应为 $e^{\alpha_m l}$ 倍，其中 $\alpha_m l = 0.065 \times 25.4 = 1.65$ 。用分贝表示的增益为14.3分贝。若长度加倍，则增益增加到28.6分贝。这个例子清楚地说明，若要在短的长度上得到高增益，必须大大减小群速。用适当的周期性慢波结构（比如螺旋线），可以很容易减慢到2%甚至更多。可见，在实际的行波式量子放大器设计中，在每个自由空间波长上得到10分贝或者更高的增益是可能的。

## 10.11 激 光 器

激光器是光学型的微波量子放大器，术语 *Laser* 是“辐射的受激发射的光放大”的缩写。至今已作了大量研究的两类激光器，是脉冲式红宝石激光器和连续工作的氦—氖气体激光器。下面对这两类激光器作定性的描述。此外，业已发现，可能在多种物质中得到激光作用。

### 红宝石激光器

图10.16是脉冲式红宝石激光器的略图。红宝石棒一般长约6英寸，直径约为0.5英寸，两端磨成光学平面，并镀上银。一端能完全反射，另一端可部分地透光。红宝石棒的两个镀银端形成一个平行板法布里—珀罗(参看7.5节)光学谐振器。红宝石被大功率的闪光灯所围绕，并用反射腔把闪光灯的光线集中到棒上。当闪光灯发光时，在红宝石中的铬原子被“抽”到较高的能级。原子几乎立即弛豫回

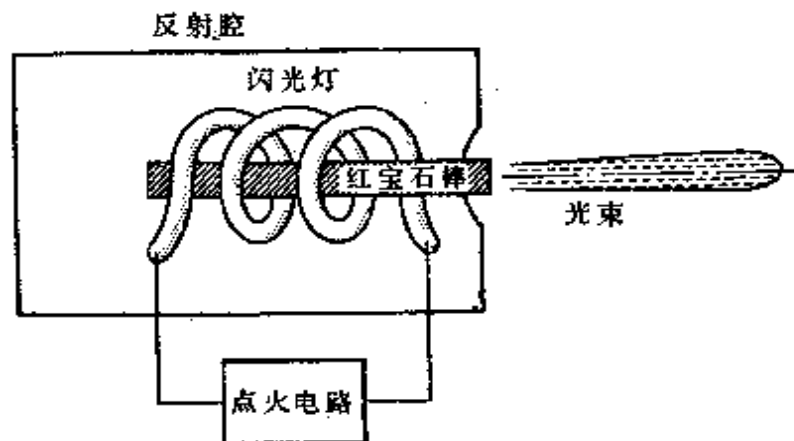


图 10.16 脉冲式红宝石棒激光器

到居于中间的亚稳能级上。在正常的低能态和居中的亚稳态之间的频率差对应于红光。当一些铬原子由亚稳态能级降低到较低能级时，它们放出辐射能激励另外的原子，使其向下跃迁。这个再生过程迅速触发所有的原子向下跃迁。所放出的相干辐射很快地累积起

来，并由部分透明端辐射出高能红光脉冲。因为红宝石棒的横截面对光的波长来说是很大的。所以，辐射的光被限制在很窄的光束内，其角宽度约为10到30弧秒。峰值输出功率还可达到50兆瓦或者更高，其总输出能量达到100焦耳。要得到这样大的输出，闪光灯需要产生50000焦耳或者更高的光输出，所以，效率是非常低的。

### 气体激光器

红宝石激光器具有脉冲的输出，而气体激光器具有连续的输出。所以它更适合于通信中应用。常用的气体激光器，是如图 10.17 所示的氩-氦气体激光器。在放电管中充有氩和氦的混合气体，利用接到如图所示的放在放电管周围电极上的射频波源，可以引起并维持放电。贝尔电话实验室在制造第一个气体激光器时，采用这种装置。

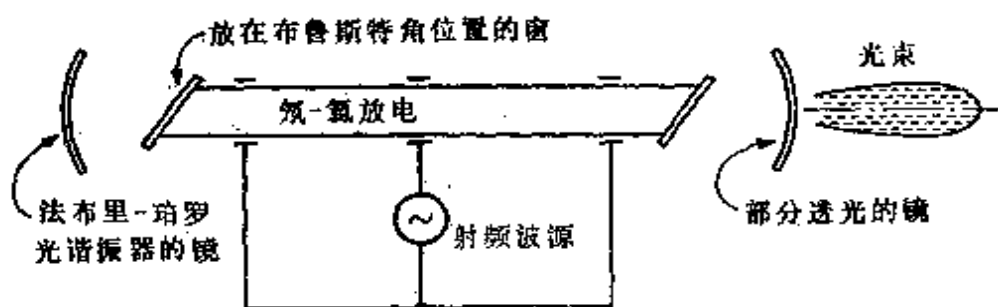


图 10.17 氩-氦气体激光器

为了形成法布里-珀罗光谐振腔，把放电管放在两镜之间。放电管的两端通常由放在布鲁斯特角位置的玻璃窗封闭，以防止反射（参看2.8节）。可把一面镜子做成部分透光，以便在空腔外面形成辐射光束。

放电可使氦原子激发到很高的亚稳能级上。当被激发的氦原子与氩原子相碰撞时，氦原子把能量转移到氩原子上，并使氩原子跳到高的亚稳能级上。当氩原子降落到它原来的低能级时，就发射红光。发射的光在两镜之间来回反射，进一步激发向下跃迁。辐射将不断地增强起来；直到向下跃迁的速率，与受激氩原子碰撞产生的向上跃迁速率相等为止。

当激励能量为20到50瓦时，输出功率约为0.01瓦。利用克尔盒或其他的能按照调制信号控制光强度的装置，可以对输出射束作音频调制。在本章末所引用的参考文献中，对几种调制方法作了讨论。

## 习 题

10.1 求解单个自由电子（零位能）的薛定谔波动方程。也就是证明：若 $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 4\pi m\omega/h$ ，则 $\Psi = e^{-i\omega(t + k_x x + k_y y + k_z z)}$ 是一个解。其频率 $\omega$ 等于能量 $W$ 除以 $h/2\pi$ ，即 $\omega = 2\pi W/h$ 。从而证明用 $W$ 表示的波长为 $h/(2mW)^{1/2} = h/mv$ ，其中， $\frac{1}{2}mv^2$ 等于速度为 $v$ 的一个粒子的能量 $W$ 。证明其群速 $\partial\omega/\partial k = v$ 。

10.2 微波量子放大器晶体具有对应于频率 $10^{10}$ 、 $2 \times 10^{10}$ 和 $6 \times 10^{10}$ 兆赫的三个能级（ $W = hf$ ），求在液氮温度 $4.2^\circ K$ 和室温 $290^\circ K$ 下，在能级2和3（ $N_2/N_1$ 和 $N_3/N_1$ ）上的相对粒子数。

10.3 求当 $\tau_{12} = \tau_{23}$ 和 $T = 4^\circ K$ 时，在3到2反向跃迁的情况下，三能级微波量子放大器的反转比。假定泵浦使能级3饱和，以致 $\Delta n_{13} = 0$ 。其能级为习题10.2中给出的那些。当 $T = 4^\circ K$ 或大于 $4^\circ K$ 时，可以使用(10.43)式。求在 $200^\circ K$ 时 $\Delta n_{32}$ 与 $4^\circ K$ 时 $\Delta n_{32}$ 之比。

10.4 求由(10.53)式给定的 $\bar{x}''$ 矩阵元的最大值。假定在线形因子 $L(f)$ 中 $\tau = 10^{-8}$ 秒， $\omega_s = \omega_{32}$ 。并且用 $B_0 = 2$ 千高斯和 $\varphi = 40^\circ$ 及 $\alpha$ 、 $\beta$ 和 $\gamma$ 的表中值。为了求 $\Delta n_{23}$ ，假定 $T = 4^\circ K$ ，反转比为 $f_3/2f_1 - 1$ 。可以由表10.2中所列举的能量求出泵浦频率和信号频率。取有效自旋（ $N_1 + N_2 + N_3$ ）的总数为 $10^{20}$ 个自旋/厘米<sup>3</sup>。 $N_1$ 可由(10.35)式得出。自旋密度对应于在红宝石晶体中近似掺杂0.5%的铬。泵浦频率为 $f_{31} = f_3 - f_1$ ，式中的 $f_3$ 和 $f_1$ 由表10.2给出。

10.5 有一个微波量子放大器以习题10.4给出的参数工作。当填充因数 $\eta = 0.2$ 时，求磁 $Q_m$ 值。当空腔的无载 $Q$ 值为5000时，为得



到30分贝的增益，求外部 $Q_e$ 值和空腔耦合参数 $K$ ，并求出将形成振荡时耦合参数 $K$ 变化的百分数。

10.6 一段端接阻抗 $R + jX$ 的传输线，令其反射系数为 $\Gamma_+$ 。若负载阻抗变为一 $R + jX$ ，证明新的反射系数 $\Gamma_-$ 为 $\Gamma_- = (\Gamma_+)^{-1}$ 。这个关系式把微波量子放大器的宽频带问题，化为在所要求的频带上使 $\Gamma_+$ 小而且恒定的一种普通网络问题。当 $\Gamma_+$ 小且恒定时，此放大器的增益 $|\Gamma_-|$ 应是大而且恒定的。

10.7 一个尺寸为 $a = 0.6$ 厘米， $b = 0.3$ 厘米的矩形波导，用光轴(即 $c$ 轴)沿着 $z$ 轴方向的红宝石晶体填充。在此波导中的场为 $H_{10}$ 模，2千高斯的磁场加在与 $c$ 轴成 $90^\circ$ ，即沿 $y$ 轴的方向上。信号频率为由3到2跃迁的频率，跃迁的数据应用表10.2中给出的数据。假定最佳反转比为 $f_3/f_1 = 1$ ，有效自旋 $N_1 + N_2 + N_3$ 的总数等于 $10^{20}$ 个自旋/厘米<sup>3</sup>。取磁谱线宽度的时间常数 $\tau$ 等于 $2 \times 10^9$ 秒。求由(10.87)式给定的磁 $Q_e$ 值和由(10.88)式给定的增长常数 $\alpha_m$ 。并计算获得20分贝增益时所需要的波导长度。可以假定泵浦使1—3跃迁饱和，工作温度为 $4^\circ K$ 。当1—3跃迁时， $\alpha$ 可以取为零，且由于 $B_0$ 加在 $y$ 轴上，而不加在 $x$ 轴上，故要使用的磁化率跃迁矩阵的适当形式为

$$\bar{\chi}_{nm} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \beta^2 & -j\beta\alpha & j\beta\gamma \\ j\beta\alpha & \alpha^2 & -\alpha\gamma \\ -j\beta\gamma & -\alpha\gamma & \gamma^2 \end{bmatrix}$$

而不使用(10.50)式。 $H_{10}$ 模的场分量为 $H_x$ 、 $H_z$ 和 $E_y$ 。 $\alpha$ 、 $\beta$ 和 $\gamma$ 由表10.2给出。在 $\bar{\chi}_{nm}$ 中出现的 $\beta$ 不应与波导的传播常数相混淆。

### 参 考 文 献

微波量子放大器的两类引论性的读物是：

1. From, W.: *The Maser, Microwave J.*, Vol. 1, pp. 13—25, November-December, 1958.
2. Heffner, H.: *Masers and Parametric Amplifiers, Microwave J.*, Vol. 2, pp. 33—40, March, 1959.

3. Siegman, A.E.: "Microwave Solid-state Masers," McGraw-Hill Book Company, New York, 1964. Highly recommended for a comprehensive discussion of solid-state microwave masers.
4. Singer, J.R.: "Masers and Lasers," 2d ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963.
5. Troup, G.: "Masers: Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation," Methuen & Co., Ltd., London, 1959.
6. Vuylsteke, A.A.: "Element of Maser Theory," D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1960.

#### 激光器

7. Lenygel, B.A.: "Lasers," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1962.
8. Yariv, A., and J.P. Gordon: "The Laser," *Proc. IEEE*, Vol. 51, pp. 4-29, January, 1963.
9. Special Issue on Quantum Electronics, *Proc. IEEE*, Vol. 51, January, 1963. Contains many excellent papers related to masers and lasers.

#### 量子力学

10. Pauling, L., and E.B. Wilson, Jr.: "Introduction to Quantum Mechanics," McGraw-Hill Book Company, New York, 1935.
11. Schiff, L.I.: "Quantum Mechanics" 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1955.
12. Kompanejets, A.S.: "Theoretical Physics," Dover Publications, Inc., New York, 1962.

## 第11章 参量放大器

参量放大器是利用非线性电抗（即加上适当的泵信号后电抗随时间的变化而变化）的一种放大器。电抗参量随时间的变化能用来产生放大，这是术语参量放大器的来由。早在1831年，雷利从理论上证明了信号的参量放大的可能性。1948年范德齐首先分析了非线性电容器\*。他指出这种器件也可用作低噪声放大器，因为它基本上是不产生热噪声的电抗元件。韦斯依照早先希沙的建议(1957)，利用铁氧体非线性效应（参看6.6节），首先做成了微波参量放大器。以后几年，通过许多工作者的共同努力，研制成了半导体二极管（因为电抗可变，故有时称为可变电抗二极管）参量放大器。目前，半导体结二极管最广泛地应用在参量放大器中。因此，本书中只限于讨论这种特殊类型的参量放大器。 $p-n$ 结二极管具有一个非线性电容。若同时加上频率为 $\omega_p$ 的泵浦信号和频率为 $\omega_s$ 的小幅度信号，则此器件在信号频率 $\omega_s$ 上呈现类似于时变线性电容的特性。后面几节将证明，时变电容或非线性电容可以接入一种电路中，以使小幅度信号得到线性放大。在进行这些分析之前，先简单阐述一下二极管的一些特性，而后介绍门雷——罗威关系式。后者对于确定参量放大器的最大增益和其他特性，是一组很有价值的功率守恒关系式。

### 11.1 $p-n$ 结二极管

用于参量放大器的二极管，由 $n$ 型和 $p$ 型的半导体材料的结所组成。 $n$ 型半导体有过剩的电子，故称为 $n$ 型（或称负型） $n$ 型

\* A. Van der Ziel, *On the Mixing Properties of Nonlinear Capacitances*, *J. Appl. Phys.*, Vol. 19, pp. 999-1006, November, 1948.

材料的一个例子是一种纯的半导体（比如说锗）中掺有少量（约为十万分之一）砷或锑元素。锗是4价原子，而砷或锑是5价原子。于是，砷或锑原子要占据锗原子（即基质晶体）原来占据的一个位置，用四个价电子形成键，并留下一个过剩的价电子。在外加电场的作用下，剩下的价电子比较自由地在晶体附近移动，从而使此材料成为电子的施主（即成为n型）。

在p型（或称正型）材料中，选取比主原子的原子价小的原子作为杂质原子。例如，可以把具有3价的镓掺入锗晶体中。当镓原子取代锗原子时，只有三个有效价电子形成所要求的键。稳定的键要求四个价电子，因而，在镓原子的每一个空位上，产生一个空穴，它可以被经过那里的电子所占据。若由其他键上来的一个电子移到其上并占据此空穴，结果在其他点上产生一个新的空穴。其总效果是空穴好像是带正电的载流子，即能够通过晶体移动的等效正电子。事实上，空穴具有正的等效载流子的作用，因而，p型材料除了载流子电荷的符号与电子相反外，其余可以认为与n型材料基本上是相同的。

现在研究n型和p型材料的线性缓变结，如图11.1a所示，在线性缓变结中，n型材料逐渐地且以线性的方式在通过距离d后变到p型材料。这个变化是通过逐渐地减少掺杂（即减少施主原子的浓度）而得到的。先在 $x = d/2$ 到 $x = 0$ 区域逐渐地减到零，然后在 $x = 0$ 到 $x = -d/2$ 区域线性地增加受主原子的浓度。若受主原子的密度为 $N_a$ ，施主原子的密度为 $N_d$ ，则沿此结的浓度差应随 $x$ 作线性变化，于是

$$N_d - N_a = kx \quad (11.1)$$

式中， $k$ 是一个适当的常数。

当杂质浓度有梯度时，电子将由高浓度区域向低浓度区域扩散。空穴也将以类似的方式扩散。所以，电子将扩散到结的p型一侧，空穴将扩散到结的n型一侧。这个扩散过程连续进行到其空间电荷分布以及其合成电场建立起足够的强度，以产生一个与浓度梯度所产生

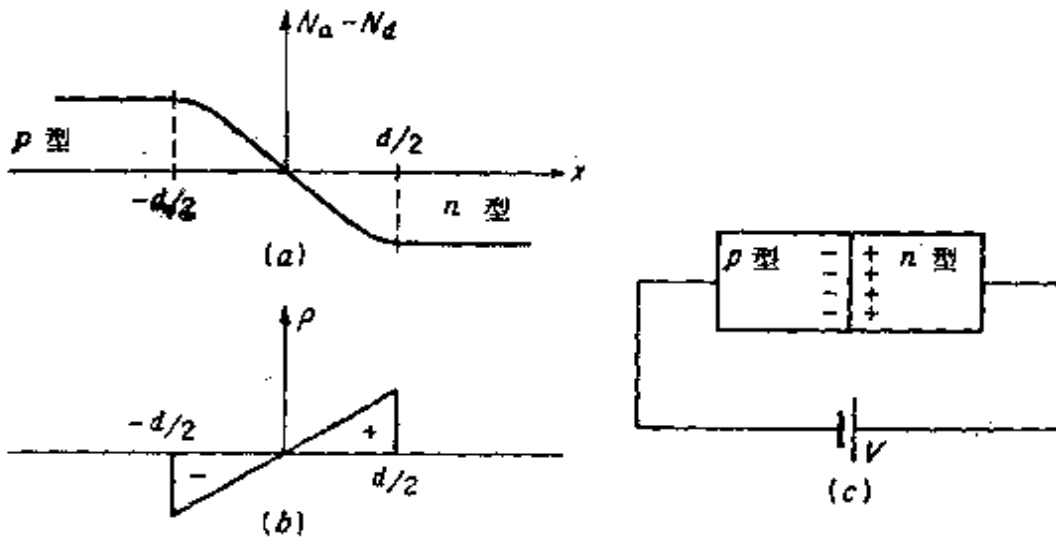


图 11.1 线性缓变结

的作用力大小相等方向相反的力时为止。当已经达到平衡时，在结上产生一个实质上没有电荷的称为耗尽区的小区域。在耗尽区的两边积累的空间电荷与存在于耗尽区上的电场一起组成一个等效电容器。若在结上加反向偏置电压，则它将迫使电子分布和空穴分布差得更远，耗尽区的展宽使结电容减小。显然，若把交流泵浦电压迭加在偏压上，则等效结电容能够随时间的变化而变化。

在缓变结中，由于空间电荷密度在跨过结时线性变化，故不产生完全没有载流子的耗尽区。空间电荷通过结时作线性变化，而不是电荷在  $x = \pm d/2$  处的集中。但是，其效果在很大程度上是相同的。设线性变化的空间电荷密度（每单位横截面积）为  $\rho = qx$ ，其中， $q$  是一个适当的常数，则由电位  $\Phi$  的泊松方程得

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} = -\frac{q}{\epsilon}x$$

对它进行积分，并由对称性的考虑，利用电场的边界条件，即在  $|x| > d/2$  处，电场（即  $d\Phi/dx$ ）为零，在  $x = 0$  处， $\Phi = 0$ ，得到

$$\Phi = -\frac{qx}{2\epsilon} \left( \frac{x^2}{3} - \frac{d^2}{4} \right) \quad (11.2)$$

加在结上的电位差为

$$\phi\left(\frac{d}{2}\right) - \phi\left(-\frac{d}{2}\right) = \frac{qd^3}{12\epsilon}$$

在平衡条件下, 此电位差必须等于接触电位  $\phi_c$  加负的外加偏压  $-V$ , 所以

$$\phi_c - V = \frac{qd^3}{12\epsilon} \quad (11.3)$$

每单位面积上所储藏的总电荷为

$$Q = \int_0^{d/2} qx dx = \frac{qd^2}{8}$$

用(11.3)式消去  $d$  得

$$Q = \frac{q}{8} \left[ \frac{12\epsilon(\phi_c - V)}{q} \right]^{2/3} \quad (11.4)$$

因为电容是电压的函数, 故它的定义必须是  $Q$  的增量与  $(\phi_c - V)$  的增量之比。所以, 每单位横截面积上的电容为

$$C = \frac{dQ}{d(\phi_c - V)} = \epsilon \left[ \frac{q}{12\epsilon(\phi_c - V)} \right]^{1/3} \quad (11.5)$$

由此式可以看出, 结电容  $C$  由于它取决于电压  $V$ , 故它是非线性的。若  $C$  是一个线性元件, 则  $Q = CV$ 。在突变结二极管中,  $C$  正比于  $(\phi_c - V)^{-1/3}$ 。

若用  $V_0$  表示  $\phi_c - V$ , 并加上泵浦电压  $v_p = V_p \cos \omega_p t$ , 则电容便成为一个时间的函数:

$$C(t) = \epsilon \left( \frac{q}{12\epsilon V_0} \right)^{1/3} \left( 1 + \frac{V_p}{V_0} \cos \omega_p t \right)^{-1/3} \quad (11.6)$$

这样, 便得到一个也是时间函数的非线性电容。此电容是时间的周期函数, 故能用付立叶级数展开式

$$C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos n\omega_p t \quad (11.7)$$

表示, 其系数为

$$C_0 = \frac{\epsilon}{2\pi} \left( \frac{q}{12\epsilon V_0} \right)^{\frac{1}{3}} \int_{-\pi}^{\pi} \left( 1 + \frac{V_1}{V_0} \cos \theta \right)^{-\frac{1}{3}} d\theta$$

$$C_n = \frac{\epsilon}{\pi} \left( \frac{q}{12\epsilon V_0} \right)^{\frac{1}{3}} \int_{-\pi}^{\pi} \left( 1 + \frac{V_1}{V_0} \cos \theta \right)^{-\frac{1}{3}} \cos n\theta d\theta$$

式中， $\theta = \omega_p t$ 。计算这些系数，需要一个数字化的过程。但是，分析参量放大器的一般特性，并不需要知道 $C_n$ 的数值。在前面的分析中已阐明了一个重要特性，即 $C(t)$ 是一个时间函数，它可以用包含泵浦频率 $f_p$ 的所有谐波的付立叶级数来表示。要着重指出的是：一般说来，其系数不是交流电压 $V_1$ ，或电压 $V_0$ 的线性函数。因此，由于结电容 $C(t)$ 是一个非线性电容，故对任意交流信号的振幅来说，迭加原理不成立。在小信号条件下，可以用在工作点附近 $C(t)$ 的泰勒级数展开式，而只保留信号振幅的线性项。在这种情况下，迭加原理成立。因为所有放大器件对足够大的外加信号来说都是非线性的，所以这里的饱和与任何其他放大器的饱和没有什么差别。

除了与二极管的结有关的电容外，在耗尽区中还有由材料的体电阻引起的分路电导。此分路电导正比于体电阻的面积，同时，由于 $C$ 也正比于此面积，故其比值与二极管横截面无关。耗尽区分路电导很小，故常常可以忽略。更重要的是耗尽区以外的 $n$ 型和 $p$ 型半导体材料的串联电阻。当 $p-n$ 结被密封并装上引线时，还存在由晶体管座引起的分路电容 $C_p$ 和由引线引起的串联电感 $L_s$ 。于是其总的等效电路可表示为如图11.2

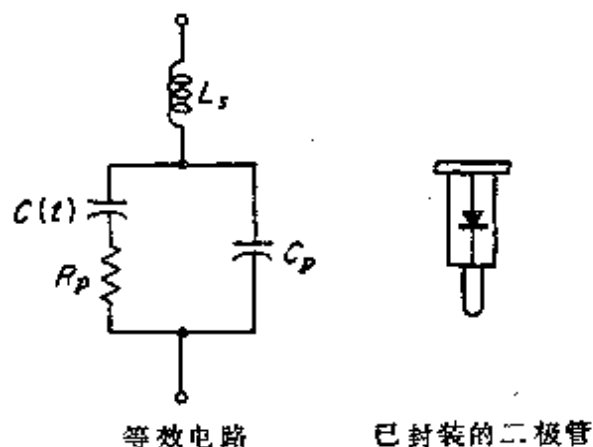


图 11.2 参量二极管的等效电路

的形式。在微波频率下， $C_p$ 和 $L_s$ 的典型值分别小于1微微法和1毫微亨。结电容 $C$ 也约为1微微法， $R_p$ 的典型值为几个欧姆。

## 11.2 门雷——罗威关系式

门雷——罗威已导出了一组功率守恒关系式，在估计非线性电抗组成的参量器件所能达到的性能时，它是极其有用的\*。下面就来推导这些关系式。

图11.3中表示的就是门雷和罗威所研究的电路。它由  $n$  个电阻性负载和理想的带通滤波器串联的支路与一个无耗非线性电容并联组成。若加入频率为  $f_1$  和  $f_2$  的两个正弦信号，则非线性电容将产生

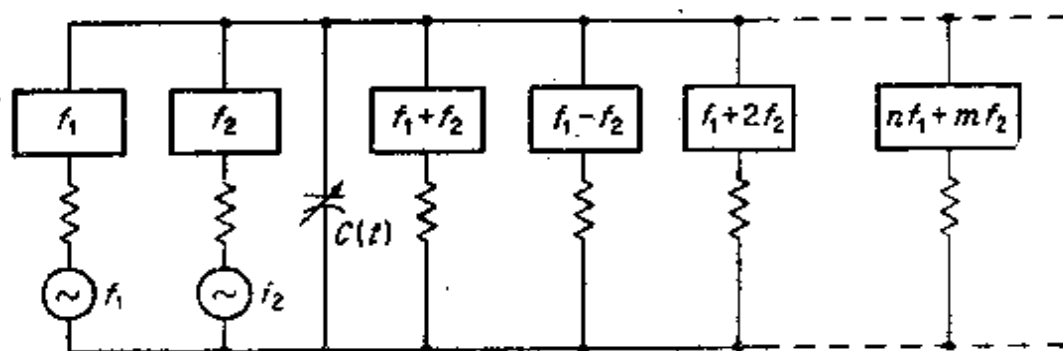


图 11.3 说明门雷—罗威关系式的电路

$f_1$  和  $f_2$  的谐波。每个带通滤波器只让  $nf_1 + mf_2$  的一个谐波分量通过。于是整个电路分隔了所有的谐波，且使其功率耗散在各个电阻性负载上。门雷——罗威关系式确立了把频率  $f_1$  和  $f_2$  的输入功率变换为其他频率的功率的两个支配条件。

令  $C$  上的电荷  $Q$  是加在  $C$  上的电压  $v = v_1 + v_2 = V_1 \cos \omega_1 t + V_2 \cos \omega_2 t$  的单值函数，则  $Q = Q(v)$ 。可以把  $Q$  展开为  $v$  的泰勒级数，即

$$Q = Q(0) + \frac{\partial Q}{\partial v} v + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial v^2} v^2 + \dots \quad (11.8)$$

\* J. M. Manley and H. E. Rowe, *Some General Properties of Nonlinear Elements, Part I, General Energy Relations*, Proc. IRE, Vol. 44, pp 904—913, July, 1956, 也可看 Proc. IRE, Vol. 47, pp. 2115—2116, December, 1959.



式中，所有的导数在  $v = 0$  时计算。由于  $v$  的所有幂次都存在，显然，因为  $v = (V_1/2)(e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}) + (V_2/2)(e^{j\omega_2 t} + e^{-j\omega_2 t})$ ，故电荷  $Q$  将具有  $f_1$  和  $f_2$  的所有谐波频率。若各谐波的电流允许通过  $C$ ，则加在  $C$  上的电压也将包含所有可能的谐波。在此情况下， $Q$  是所有电压的函数。但是，对于展开式(11.8)，除了其系数会具有不同的值外，仍然有效。所以， $Q$  的一般展开式为

$$Q = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} Q_{nm} e^{j(n\omega_1 + m\omega_2)t} \quad (11.9)$$

由于电荷是时间的实函数，故必得  $Q_{-n,-m} = Q_{nm}^*$ ，以便使  $n$ 、 $m$  和  $-n$ 、 $-m$  项合成频率为  $n\omega_1 + m\omega_2$  的时间的实函数。

由于总电压  $V$  可以表示为电荷的函数  $V(Q)$ ，故由类似的  $V(Q)$  泰勒级数展开式证明  $V$  能够表示为类似于(11.9)式的形式，于是，

$$V = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_{nm} e^{j(n\omega_1 + m\omega_2)t} \quad (11.10)$$

当  $V$  为实数时，必得  $V_{-n,-m} = V_{nm}^*$ 。

通过  $C$  的电流为  $Q$  对时间的总变率，且为

$$\begin{aligned} I &= \frac{dQ}{dt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} j(n\omega_1 + m\omega_2) Q_{nm} e^{j(n\omega_1 + m\omega_2)t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_{nm} e^{j(n\omega_1 + m\omega_2)t} \end{aligned} \quad (11.11)$$

式中， $I_{nm} = j(n\omega_1 + m\omega_2) Q_{nm}$ 。

因为  $C$  是一个纯电抗元件，故不能有净功率流入  $C$  或由  $C$  流出。若假定  $\omega_1$  和  $\omega_2$  是不可通约的，则不会有由谐波的相互作用产生的功率时间平均值。由于

$$\begin{aligned} &(I_{nm} e^{j(n\omega_1 + m\omega_2)t} + I_{-n,-m} e^{-j(n\omega_1 + m\omega_2)t}) \\ &\quad \times (V_{nm} e^{j(n\omega_1 + m\omega_2)t} + V_{-n,-m} e^{-j(n\omega_1 + m\omega_2)t}) \end{aligned}$$

的时间平均值为

$$V_{nm} I_{-n,-m} + V_{-n,-m} I_{nm} = V_{nm} I_{nm}^* + V_{-n,-m}^* I_{-n,-m}$$

$$=V_{nm}I_{nm}^* + V_{-n-m}I_{-n-m}^*$$

故在频率为  $\pm |n\omega_1 + m\omega_2|$  时的平均功率为

$$\begin{aligned} P_{nm} &= (V_{nm}I_{nm}^* + V_{nm}^* I_{nm}) \\ &= (V_{nm}I_{nm}^* + V_{-n-m}I_{-n-m}^*) \\ &= P_{-n-m} \end{aligned} \quad (11.12)$$

因为由(11.12)式得  $P_{nm} = P_{-n-m}$ , 故功率守恒可以表示为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_{nm} = 0 \quad (11.13)$$

为了得到门雷——罗威关系式, 用  $(n\omega_1 + m\omega_2) / (n\omega_1 + m\omega_2)$  乘每一项, 并把其和分成两部分, 则得

$$\begin{aligned} \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{nP_{nm}}{n\omega_1 + m\omega_2} + \omega_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \\ \times \frac{mP_{nm}}{n\omega_1 + m\omega_2} = 0 \end{aligned} \quad (11.14)$$

现在来证明每一个双重和必须分别为零。我们可以用  $jQ_{nm}$  代替每一项  $I_{nm} / (n\omega_1 + m\omega_2)$ , 于是,  $P_{nm} / (n\omega_1 + m\omega_2)$  便成为  $-jV_{nm}Q_{nm}^* - jV_{-n-m}Q_{-n-m}^*$ , 且不显含与  $\omega_1$  和  $\omega_2$  的依赖关系, 不管  $\omega_1$  和  $\omega_2$  如何选取, 总是能够把除了  $C$  以外的各支路调节到使其电流能保持所有电压振幅  $V_{nm}$  不变, 于是  $Q_{nm}$  也就不变化, 因为它们只取决于  $V_{nm}$ 。当做到这一点时, 从(11.14)式看出, 有可能任意地改变  $\omega_1$  和  $\omega_2$  而保持包含  $P_{nm} / (n\omega_1 + m\omega_2) = -jV_{nm}Q_{nm}^* - jV_{-n-m}Q_{-n-m}^*$  的两个双重和不变。因此, 只有在

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{nP_{nm}}{n\omega_1 + m\omega_2} = 0 \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{mP_{nm}}{n\omega_1 + m\omega_2} = 0 \end{aligned}$$

时, (11.14)式才能对任意的  $\omega_1$  和  $\omega_2$  都成立。即  $\omega_1$  和  $\omega_2$  的系数必须分别为零。上述两个关系式就是门雷——罗威关系式。但通常把它

们写成稍为不同的形式。第一个和可写成

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{nP_{nm}}{n\omega_1 + m\omega_2} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{-nP_{-n-n}}{-n\omega_1 - m\omega_2}$$

此处，在第二项中已经用  $-n$  和  $-m$  代替了  $n$  和  $m$ 。因为  $P_{-n-n} = P_{nm}$ ，所以两部分是相等的，故得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{nP_{nm}}{n\omega_1 + m\omega_2} = 0 \quad (11.15a)$$

同理可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{mP_{nm}}{n\omega_1 + m\omega_2} = 0 \quad (11.15b)$$

这两个就是门雷——罗威关系式的标准形式。门雷——罗威关系式是普遍的功率守恒关系式，不依赖于任何具体电路（比如图11.3的电路）。这一点是显然的，因为在推导中没有考虑到外部电路。

作为门雷——罗威关系式应用的一个例子，我们来研究类似于图11.3中的电路，它用频率为  $f_1$  和  $f_2$  的波源。设除了  $f_1 + f_2$  以外，所有的谐波都开路，则  $f_1$ 、 $f_2$  和  $f_1 + f_2$  三个频率上的电流只可能在相应的支路里存在。在(11.15)式中只有  $n = \pm 1$ 、 $m = 0$  和  $n = 0$ 、 $m = \pm 1$  及  $n = m = \pm 1$  的项，故得

$$\frac{P_{10}}{\omega_1} + \frac{P_{11}}{\omega_1 + \omega_2} = 0 \quad (11.16a)$$

$$\frac{P_{01}}{\omega_2} + \frac{P_{11}}{\omega_1 + \omega_2} = 0 \quad (11.16b)$$

因为在频率  $\omega_1$  和  $\omega_2$  上供给功率，故  $P_{10}$  和  $P_{01}$  必为正。所以  $P_{11}$  是负的，功率由非线性电容送到  $\omega_1 + \omega_2$  的频率上。若  $\omega_1$  是输入信号频率， $\omega_2$  是泵浦频率，则  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  是输出频率。由(11.16a)式可得最大信号增益为

$$-\frac{P_{11}}{P_{10}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega_3}{\omega_1}$$

$$= 1 + \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (11.17)$$

这类参量放大器称为上变频器。因为在实际放大器中总是存在损耗，所以增益将小于 $\omega_2/\omega_1$ 。门雷——罗威关系式给出了可能的最大增益，从而提供了一个能用来判断实际的上变频器性能的一个准则。

### 11.3 参量放大器的线性化方程式

设有电荷——电压关系为 $Q = Cv$ 的一个线性电容器 $C$ 。流过 $C$ 的电流为

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(Cv) = C \frac{dv}{dt}$$

若使 $C$ 为时间的函数（例如一个板的间距随时间变化的平行板电容器），则其电流便为

$$i = \frac{d}{dt}(Cv) = v \frac{dC}{dt} + C \frac{dv}{dt} \quad (11.18)$$

若用一个非线性电容代替一个时变线性电容，其中的电荷 $Q$ 是电压的非线性函数 $Q(v)$ ，则电流为

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{dt}$$

若电压 $v$ 是频率为 $\omega_p$ 的泵浦电压 $v_p$ 与频率为 $\omega_s$ 的信号电压 $v_s$ 之和，且 $|v_s| \ll |v_p|$ ，则可将

$$Q(v) = Q(v_p + v_s)$$

在 $v_s = 0$ 附近展开为泰勒级数。于是得

$$\begin{aligned} Q(v_p + v_s) &= Q(v_p) + \left. \frac{\partial Q}{\partial v} \right|_{v_s=0} v_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 Q}{\partial v^2} \right|_{v_s=0} v_s^2 + \dots \end{aligned}$$

当 $v_1$ 足够小时，只保持前面两项就可以得到精确的结果。于是电流为

$$i = \frac{dQ(v_1)}{dt} + \frac{d}{dt} \left( \left. \frac{\partial Q}{\partial v} \right|_{v_1=0} v_1 \right) \quad (11.19a)$$

设 $v_1 = 0$ 时的 $\partial Q / \partial v$ 用 $C(t)$ 表示，则可将(11.19a)式写成

$$i = \frac{dQ(v_1)}{dt} + \frac{d}{dt} (C(t)v_1) \quad (11.19b)$$

若把此结果与(11.18)式比较，则可看出，当信号振幅与泵浦信号振幅相比为很小时，非线性电容具有类似于时变线性电容的作用。

(11.19)式中的第一项 $dQ(v_1)/dt$ 为泵浦频率上的电流，与信号电流无关。若泵浦电压也比结二极管上的直流偏置电压小得多时，则由于当 $V_1 \ll V_0$ 时， $(V_0 + V_1 \cos \omega_p t)^{-\frac{1}{2}} \approx V_0^{-\frac{1}{2}} (1 - (V_1/3V_0) \cos \omega_p t)$ ，故可以假定 $C(t)$ 具有如下的形式(参看(11.6)式)

线性化方程(11.19)和(11.20)是分析参量放大器时要使用的方程式。

$$C(t) = C_0 (1 + 2M \cos \omega_p t) \quad (11.20)$$

$p-n$ 结二极管的等效电路已表示在图11.2中。为了更便于分析，采用图11.4中所示的串联等效电路的形式。若取

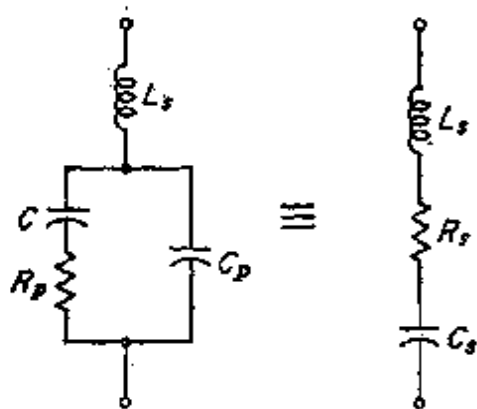


图 11.4 结二极管的串联等效电路

示在图11.2中。为了更便于分析，采用图11.4中所示的串联等效电路的形式。若取

$$R_s = \frac{R_p C^2}{(\omega C C_p R_p)^2 + (C + C_p)^2}$$

$$C_s = \frac{(\omega C C_p R_p)^2 + (C + C_p)^2}{(\omega C R_p)^2 C_p + C + C_p}$$

则在频率为 $\omega$ 时两个电路的输入阻抗相同，因而这两个电路等效。对大多数二极管来说，电阻 $R_s$ 比管座电抗 $1/\omega C_p$ 小得多，故 $\omega C_p R_s \ll 1$ 。在此情况下，可得

$$R_s \approx \left( \frac{C}{C+C_s} \right)^2 R_0 \quad C_s \approx C + C_0$$

当这些近似式成立时，这两个电路是等效的，且与频率无关。如果要用串联电路来分析，这是必要的条件，因为在参量放大器中，几个不同频率上的电流和电压同时存在。当  $C$  是电压的函数时， $R_s$  也将与电压有关。为了简单起见，电阻  $R_s$  对电压的依赖性，由于它很不显著，故予以忽略。换句话说，我们把  $R_s$  认为是一个恒定电阻。

## 11.4 参量上变频器

在上变频器中，加在二极管上的是频率为  $\omega_s$  的泵浦电压和频率为  $\omega_i$  的信号电压，而在较高的频率  $\omega_s + \omega_i$  上取出输出信号。发生的混频作用会产生  $\omega_s$  和  $\omega_i$  的所有可能的谐波。但是，在上变频器中，二极管的外部电路这样选取，使其只有信号频率  $\omega_i$ 、泵浦频率  $\omega_s$  和输出频率  $\omega_o$  的电流， $\omega_o$  取为泵浦和信号频率之和，即  $\omega_o = \omega_s + \omega_i$ 。因此，加在二极管上的电压将只有三个可能频率。若令二极管电压为

$$v_s = R_s(V_s e^{j\omega_s t}) = \frac{1}{2}(V_s e^{j\omega_s t} + V_s^* e^{-j\omega_s t})$$

$$v_i = R_s(V_i e^{j\omega_i t}) = \frac{1}{2}(V_i e^{j\omega_i t} + V_i^* e^{-j\omega_i t})$$

$$v_o = R_s(V_o e^{j\omega_o t}) = \frac{1}{2}(V_o e^{j\omega_o t} + V_o^* e^{-j\omega_o t})$$

则可以把(11.19)式和(11.20)式推广而得到

$$\begin{aligned} i = & \frac{dQ(v_s)}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} C_0 (1 + 2M \cos \omega_s t) \\ & \times (V_s e^{j\omega_s t} + V_s^* e^{-j\omega_s t} + V_o e^{j\omega_o t} + V_o^* e^{-j\omega_o t}) \end{aligned} \quad (11.21)$$

设把频率为  $\omega_i$  和  $\omega_o$  的电流表示为

$$i_s = \frac{1}{2}(I_s e^{j\omega_s t} + I_s^* e^{-j\omega_s t}) \quad (11.22)$$

$$i_o = \frac{1}{2}(I_o e^{j\omega_o t} + I_o^* e^{-j\omega_o t}) \quad (11.23)$$

当对(11.21)式取时间导数，并只保留频率为 $\omega_s$ 和 $\pm\omega_o$ 的项时，则得（因为不需要知道频率为 $\omega_o$ 的泵浦电流，故不必算它）

$$\begin{aligned} i_s + i_o = \frac{C_0}{2} & (j\omega_s V_s e^{j\omega_s t} - j\omega_s V_s^* e^{-j\omega_s t} \\ & + j\omega_o V_o e^{j\omega_o t} - j\omega_o V_o^* e^{-j\omega_o t} \\ & + j\omega_o M V_s e^{j\omega_o t} - j\omega_s M V_o^* e^{-j\omega_s t} \\ & - j\omega_o M V_s^* e^{-j\omega_o t} + j\omega_s M V_o e^{j\omega_s t}) \end{aligned}$$

利用(11.22)式和(11.23)式得

$$I_s = j\omega_s C_0 V_s + j\omega_s C_0 M V_o \quad (11.24a)$$

$$I_o = j\omega_o C_0 V_o + j\omega_o C_0 M V_s \quad (11.24b)$$

这两个方程式表明，对输入信号电流 $i_s$ 和输出信号电流 $i_o$ 来说，可以用如下的导纳矩阵来表示结电容：

$$\begin{bmatrix} I_s \\ I_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega_s C_0 & j\omega_s C_0 M \\ j\omega_o C_0 M & j\omega_o C_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ V_o \end{bmatrix} \quad (11.24c)$$

参数 $M$ 正比于泵浦电压，并表示在 $\omega_s$ 和 $\omega_o$ 两频率上电压之间的耦合。

图11.5表示一个上变频器的等效电路模型。其串联调谐电路的选取，是使三个回路具有谐振频率 $\omega_s$ 、 $\omega_o$ 和 $\omega_p$ ，且在每个回路中，只有分别与这些频率对应的电流能够存在。所以在输入回路中只存在 $I_s$ 。这三个回路只通过 $C_1$ 的时变部分 $C$ 耦合在一起。因此，对 $\omega_s$ 和 $\omega_o$ 两个频率来说，等效电路可化为图11.6所示的形式。在这个电路中，方框 $C(t)$ 是一个等效的阻抗网络，它在端电流和端电压之间保持由(11.24)式给出的关系。因为二极管已经被由(11.24)式描述的等效线性二端口网络所代替，所以，参量放大器的分析是一个

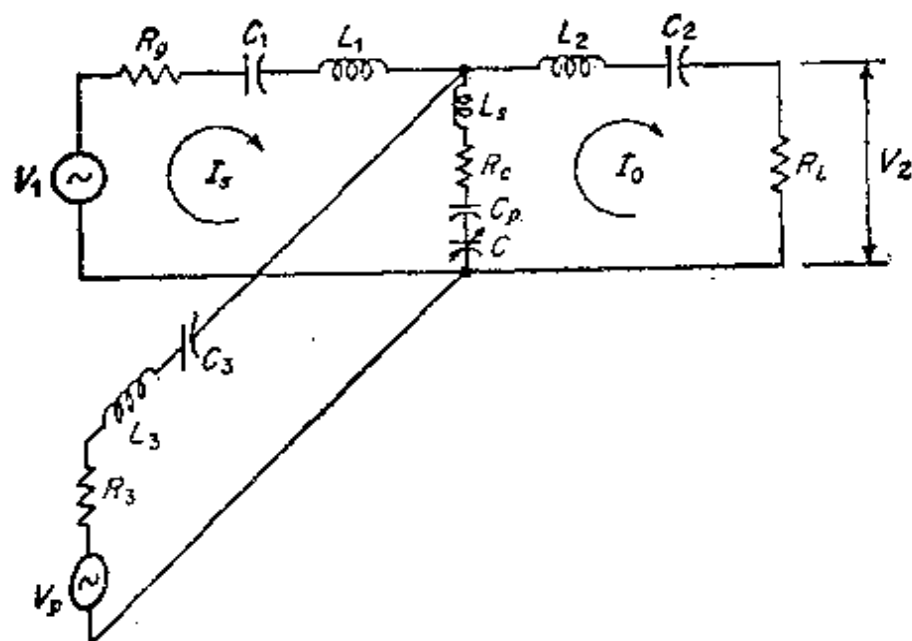


图 11.5 上变频器的等效电路模型

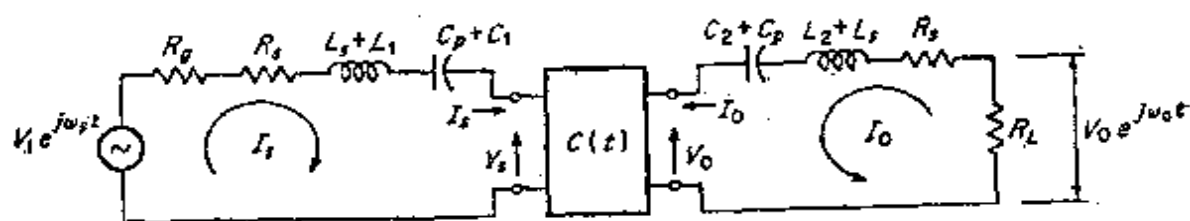


图 11.6 上变频器的简化等效电路

普通的网络分析问题”。认为在这个电路中的每一个回路除了对回路谐振频率的电流外，对所有其他频率的电流都呈现一个很高的阻抗。图11.5中的谐振电路已假定为没有损耗。电路损耗可以认为包括在 $R_g$ 和 $R_L$ 中。在分析的结果中，可以把 $R_g$ 和 $R_L$ 分成两部分，使电路损耗从波源阻抗和负载阻抗中分出来。事实上，电路损耗与二极管电阻 $R_c$ 及用 $R_g$ 和 $R_L$ 表示的外部负载引起的损耗比起来是很小的。

可以对(11.24c)式求解出以 $I_s$ 和 $I_o$ 表示的 $V_s$ 和 $V_o$ 得到

由于几个不同频率上的电流和电压同时出现，在分析时必须谨慎。



$$\begin{bmatrix} V_s \\ V_o \end{bmatrix} = \frac{1}{1-M^2} \begin{bmatrix} 1/j\omega_s C_o & -M/j\omega_o C_o \\ -M/j\omega_s C_o & 1/j\omega_o C_o \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_s \\ I_o \end{bmatrix} \quad (11.25)$$

对输入电路，可写为

$$\begin{aligned} V_1 &= I_s \left[ R_s + R_s + j\omega_s(L_s + L_1) + \frac{1}{j\omega_s(C_s + C_1)} \right] + V_s \\ &= I_s \left[ R_s + R_s + j\omega_s(L_s + L_1) + \frac{1}{j\omega_s(C_s + C_1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{j\omega_s(1-M^2)C_o} \right] - \frac{MI_o}{j\omega_o(1-M^2)C_o} \end{aligned}$$

而对输出电路可写为

$$\begin{aligned} 0 &= I_o \left[ R_L + R_s + j\omega_o(L_s + L_2) + \frac{1}{j\omega_o(C_s + C_2)} \right] + V_o \\ &= I_o \left[ R_L + R_s + j\omega_o(L_s + L_2) + \frac{1}{j\omega_o(C_s + C_2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{j\omega_o(1-M^2)C_o} \right] - \frac{MI_s}{j\omega_s(1-M^2)C_o} \end{aligned}$$

现在假定此电路是调谐的，所以下列条件成立：

$$\begin{aligned} \omega_s^2 &= \frac{1}{L_s + L_1} \left[ \frac{1}{C_s + C_1} + \frac{1}{(1-M^2)C_o} \right] \\ \omega_o^2 &= \frac{1}{L_s + L_2} \left[ \frac{1}{C_s + C_2} + \frac{1}{(1-M^2)C_o} \right] \end{aligned}$$

则得

$$\begin{aligned} V_1 &= I_s(R_s + R_s) + \frac{jMI_o}{\omega_o(1-M^2)C_o} \\ 0 &= I_o(R_L + R_s) + \frac{jMI_s}{\omega_s(1-M^2)C_o} \end{aligned}$$

求解  $I_o$  得

$$I_0 = \frac{-jV_1 M \omega_0 C_0 (1-M^2)}{M^2 + (R_s + R_i)(R_L + R_s) \omega_0 \omega_s (1-M^2)^2 C_0^2} \quad (11.26)$$

从波源来的最大有效输入功率为  $\frac{1}{2} (V_1^2 / 4R_s)$ ，在  $R_L$  上的输出功率为  $\frac{1}{2} |I_0|^2 R_L$ 。于是，当使用以  $V_1$  表示  $I_0$  的 (11.26) 式时，频带中心的功率增益为

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{4 |I_0|^2 R_L R_s}{V_1^2} \\ &= \frac{4 R_L R_s M^2}{\omega_s^2 (1-M^2)^2 C_0^2 \left[ (R_s + R_i)(R_L + R_s) + \frac{M^2}{\omega_0 \omega_s (1-M^2)^2 C_0^2} \right]^2} \end{aligned} \quad (11.27)$$

如果需要的话，只要在 (11.27) 式的分母中用  $R_s + R_{1i}$  和  $R_L + R_{2i}$  代替  $R_s$  和  $R_L$ ，就能够把电路损耗包括在内了，其中， $R_{1i}$  和  $R_{2i}$  表示输入和输出电路的损耗电阻。为了简单起见，取  $R_{1i} = R_{2i} = 0$ 。

为了达到最大增益，需要调整  $R_s$  和  $R_L$ 。由于在  $G_0$  的表示式中  $R_s$  和  $R_L$  对称地出现，故  $R_L$  和  $R_s$  的最佳值是相等的。因而，要求

$$G_0 = \frac{4 R_L^2 M^2}{\omega_s^2 (1-M^2)^2 C_0^2 \left[ (R_L + R_s)^2 + \frac{M^2}{\omega_0 \omega_s (1-M^2)^2 C_0^2} \right]^2}$$

的极大值。使  $dG_0/dR_L$  等于零，并求解  $R_L$  得

$$R_L = R_s \left[ 1 + \frac{M^2}{\omega_0 \omega_s R_s^2 (1-M^2)^2 C_0^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (11.28)$$

可以把二极管的等效  $Q$  值定义为

$$Q = \frac{1}{R_s \omega_s (1-M^2) C_0} \quad (11.29)$$

则得

$$R_L = R_s \left[ 1 + \frac{\omega_s}{\omega_0} (MQ)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (11.30)$$

从而得最大增益为

$$G_0 = \frac{\omega_0}{\omega_s} \frac{\delta}{(1 + \sqrt{1 + \delta})^2} \quad (11.31)$$

式中， $\delta = (\omega_s/\omega_0)(MQ)^2$ 。按照11.2节中所讨论的门雷——罗威关系式，上变频器的最大增益为 $\omega_0/\omega_s$ ，所以可以把量 $\delta/(1 + \sqrt{1 + \delta})^2$ 认为是增益下降因数。当二极管的Q值接近于无限大时，即 $R_L$ 趋向于零时， $\delta$ 接近无穷大，则增益下降因数变为1。所以，如门雷——罗威关系式所预期的，对无耗二极管来说，增益变为 $\omega/\omega_s$ 。在典型的微波二极管中， $MQ$ 可等于10。若 $\omega_s/\omega_0$ 也等于10，则由(11.31)式得出的最大增益为7.3分贝。

要得到高增益的上变频器，需要输出频率与输入频率之比 $\omega_0/\omega_s$ 大。在较高的微波频率下，这不是很现实的技术要求，因此，上变频器通常限于在低于1000兆赫的信号频率上工作，由负阻式参量放大器可获得更高的增益，它在下一节讨论。

## 11.5 负阻式参量放大器

在负阻式参量放大器中，允许存在信号频率 $\omega_s$ 、泵浦频率 $\omega_p$ 和空闲频率 $\omega_i = \omega_p - \omega_s$ 的电流。图11.7表示将要分析的电路模型。

当用 $v_i = \frac{1}{2} (V_i e^{j\omega_i t} + V_i^* e^{-j\omega_i t})$ 代替(11.21)式中的电压 $v_p$ ，并引入空闲电流 $i_i = \frac{1}{2} (I_i e^{j\omega_i t} + I_i^* e^{-j\omega_i t})$ 时，就可用处理上变频

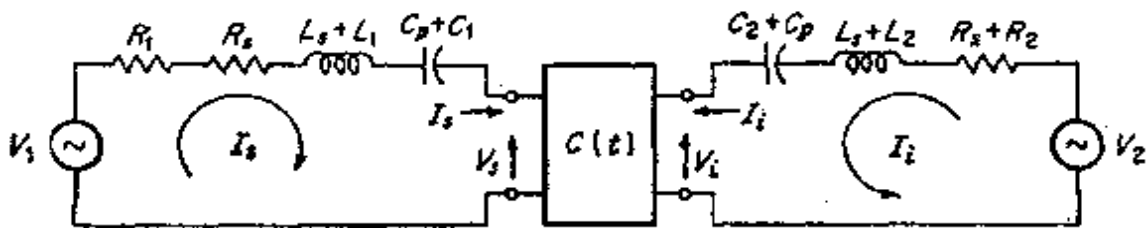


图 11.7 负阻式参量放大器的等效电路

器同样的方式，解出用 $V_1$ 和 $V_2$ 表示的 $I_1$ 和 $I_2$ 。当 $\omega_1 = \omega_s, -\omega_s$ 时，不难求出

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega_1 C_0 & j\omega_1 C_0 M \\ -j\omega_s C_0 M & -j\omega_s C_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2^* \end{bmatrix} \quad (11.32a)$$

和

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2^* \end{bmatrix} = \frac{1}{1-M^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{j\omega_1 C_0} & \frac{M}{j\omega_s C_0} \\ \frac{-M}{j\omega_1 C_0} & \frac{-1}{j\omega_s C_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2^* \end{bmatrix} \quad (11.32b)$$

对于图11.7中的电路，可写出下列方程：

$$\begin{aligned} V_1 = I_s \left[ R_1 + R_s + j\omega_s(L_1 + L_s) + \frac{1}{j\omega_s(C_p + C_1)} \right. \\ \left. + \frac{1}{j\omega_s(1-M^2)C_0} \right] + \frac{M}{(1-M^2)j\omega_s C_0} I_2^* \end{aligned} \quad (11.33a)$$

$$\begin{aligned} V_2 = I_1 \left[ R_2 + R_s + j\omega_1(L_2 + L_s) + \frac{1}{j\omega_1(C_p + C_2)} \right. \\ \left. + \frac{1}{j\omega_1(1-M^2)C_0} \right] + \frac{M}{(1-M^2)j\omega_s C_0} I_2^* \end{aligned} \quad (11.33b)$$

若加上调谐条件

$$\begin{aligned} \omega_s^2 &= \frac{1}{L_1 + L_s} \left[ \frac{1}{C_p + C_1} + \frac{1}{(1-M^2)C_0} \right] \\ \omega_1^2 &= \frac{1}{L_2 + L_s} \left[ \frac{1}{C_p + C_2} + \frac{1}{(1-M^2)C_0} \right] \end{aligned}$$

则得

$$V_1 = (R_1 + R_s)I_s - \frac{jM}{\omega_1(1-M^2)C_0} I_2^* \quad (11.34a)$$

$$V_2 = (R_2 + R_s) I_1 - \frac{jM}{\omega_s(1-M^2)C_0} I_1 \quad (11.34b)$$

若假定  $V_2 = 0$ ，则由(11.34)式可求出  $I_1$ ，从而计算增益  $G_0 = 4R_1 R_2 |I_1|^2 / V_1^2$ 。不难求得

$$G_0 = \frac{4R_1 R_2 M^2}{\left[ R_1 + R_s - \frac{M^2}{(R_1 + R_s) \omega_i \omega_s (1-M^2)^2 C_0^2} \right]^2 (R_2 + R_s)^2} \times \omega_s^2 C_0^2 (1-M^2)^2 \quad (11.35)$$

可以把  $-M^2 / ((R_2 + R_s) \omega_i \omega_s (1-M^2)^2 C_0^2)$  项认为是一个等效负电阻  $-R$ 。引入  $R$  后，可以把  $G_0$  表示为

$$G_0 = \frac{4R_1 R_2 (\omega_i (1-M^2) C_0 R)^2}{M^2 (R_1 + R_s - R)^2} \quad (11.36)$$

显然，若使  $R$  几乎与  $R_1 + R_s$  相等，则可得到很高的增益。但是，必须使  $R$  不能太接近于  $R_1 + R_s$ ，因为这样一来，参量稍有变化，就会引起增益很大的变化，而当  $R$  变成等于  $R_1 + R_s$  时，将引起振荡。

上面所讨论的参量放大器称为负阻式变换器，在同样的频率  $\omega_s$  下，把输出端作为输入端是可能的。若把  $R_1$  分成波源的内阻  $R_g$  加负载电阻  $R_L$ ，则传送到  $R_L$  上的功率为  $\frac{1}{2} R_L |I_s|^2$ ，功率增益便为

$$G_0 = \frac{4R_g R_L |I_s|^2}{V_1^2}$$

可由(11.34)式求出  $I_1$ ，而后得

$$G_0 = \frac{4R_g R_L}{(R_g + R_L + R_s - R)^2} \quad (11.37)$$

如前所述，式中的  $R$  为

$$R = \frac{M^2}{(R_2 + R_s) \omega_i \omega_s (1-M^2)^2 C_0^2} \quad (11.38)$$

等效负阻  $-R$  的出现，可从以下的分析中看出：把信号和泵浦功率加到非线性电容上以引起混频。当允许电流在空闲频率  $\omega_s, -\omega_s$

上存在时，泵浦频率和空闲频率的功率发生进一步混频。后一次混频将产生 $\omega_s$ 和 $\omega_i = \omega_s - \omega_c$ 的谐波，特别是产生频率为 $\omega_s$ 的功率。当经过混频后所产生的功率超过信号频率 $\omega_s$ 所供给的功率时，二极管就呈现一个负电阻。若不允许存在空闲电流时，则参照(11.38)式就可知道，当使 $R_2$ 为无穷大(对空闲信号开路)时，负阻变为零。

同频率输入和输出的负阻式参量放大器不是很稳定的。其原因是，在微波系统中， $R_s$ 和 $R_L$ 是向输入和输出传输线端口看去的阻抗。若接到输入和输出传输线上的负载不匹配，则会出现反射波。在输出线上的反射波回到放大器被放大而馈送到输入和输出线上。结果是使其增益成为外部波源阻抗和负载阻抗的敏感函数。使用如图11.8所示的环行器，会大大改善放大器的稳定性，因为使用环行器使放大器的终端负载等于传输线的特性阻抗。而与外部的波源阻

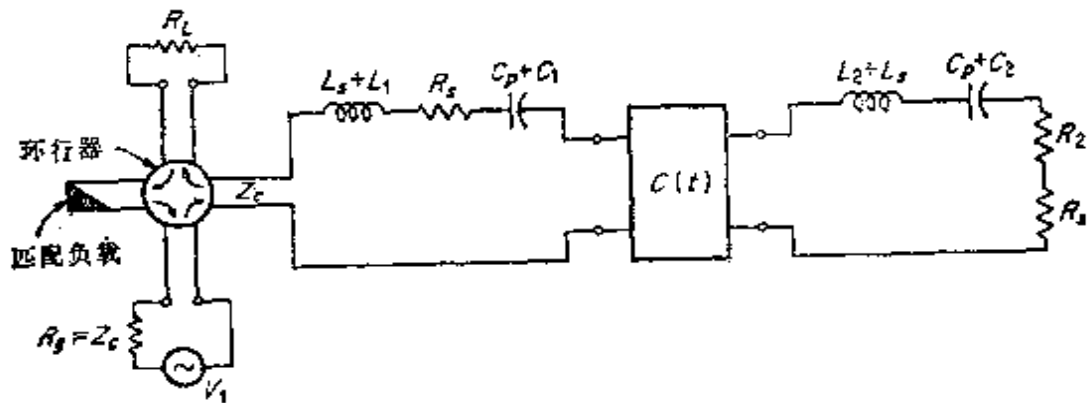


图 11.8 用环行器的负阻式参量放大器

抗 $Z_c$ 或负载阻抗 $Z_L$ 无关。虽然得自波源的有效功率仍为 $\frac{1}{2}V_1^2/4R_s$ ，但是，现在把放大器功率全部传送到负载 $R_L = Z_c$ 上，而不在波源内阻 $R_s$ 上消耗。因此，当 $R_L = R_s \gg R$ 时，由于在输入电路中的串联电阻现在是 $R_L + R_s$ ，而不是 $R_L + R_s + R \approx 2R_L$ ，这就使 $I_s$ 接近于加倍，从而使功率增益接近于四倍。由于在谐振时 $Z_{in} = R_s - R$ ，并取 $R_L = Z_c$ ，故功率增益为电压反射系数的平方(参看10.8节对负阻式微波量子放大器的讨论)

$$G_0 = \left| \frac{Z_{in} - Z_c}{Z_{in} + Z_c} \right|^2 = \frac{(R_s - R - R_L)^2}{(R_s + R_L - R)^2}$$

对于高增益的情况,  $R \approx R_L + R_s$ , 且远比  $R_s$  大。所以, 增益可表示为

$$G_0 = \frac{4R_L^2}{(R_L + R_s - R)^2} \quad (11.39)$$

能够得到的最大负阻值决定于所用的二极管。若在(11.38)式中使  $R_s = 0$ , 则可认为  $R$  的最大值为  $R_m$ , 而在使用了引入二极管  $Q$  值定义的(11.29)式之后得

$$R_m = -\frac{\omega_1}{\omega_2} (MQ)^2 R_s \quad (11.40)$$

若认为  $R$  是固定的, 则可看出, 当放大器不带环行器时, 由(11.37)式可知, 必须使  $R_s + R_L + R_s \approx R$ 。但当  $R_s = R_L = Z_c$  比  $R_s$  大得多时, 则得  $R_s = R_L \approx R/2$ , 于是, 由(11.37)式得

$$G_0 = \frac{R^2}{(2R_L + R_s - R)^2} \quad (11.41a)$$

而当放大器有环行器时,  $R_L \approx R$ , 则得

$$G_0 = \frac{4R^2}{(R_L + R_s - R)^2} \quad (11.41b)$$

要注意, 当使用环行器时,  $R_L$  的最佳值为不用环行器时的两倍。所以(11.41a)和(11.41b)式的分母是相同的。这些关系式表明, 当二极管负载大小相同时, 用环行器可多得6分贝的增益, 从而将使增益——带宽积增大到两倍。

若取泵浦频率为信号频率的两倍, 则空闲频率  $\omega_1 = \omega_p - \omega_s = \omega_s$ , 即等于信号频率。此情况下的参量放大器称为简并负阻式参量放大器。对简并放大器来说, 其信号电路和空闲电路为一个谐振电路。简并放大器的分析与已进行过的分析类似, 这里不再介绍(11.6节给出噪声特性的某些结果)。

微波参量放大器有许多不同的构成方法。可以用传输线、波导或此两者组合来组成适当的空腔谐振器, 以用作谐振电路。图11.9表示了一个典型的负阻式微波参量放大器\*。在X波段, 泵浦腔和

\* W.O.Troetschel and H.J.Heuer, *A Parametric Amplifier for* 1296 Mc, *QST*, January, 1961.

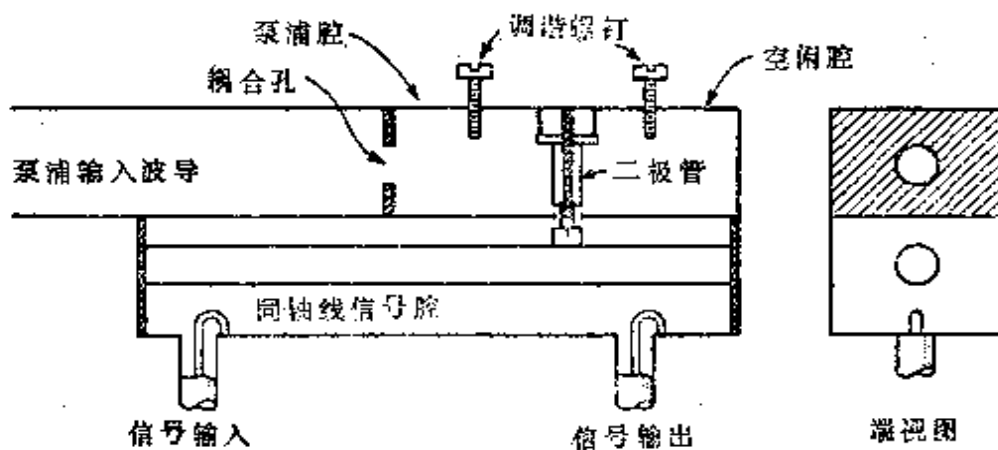


图 11.9 微波负阻式参量放大器

空闲腔由矩形波导构成。信号腔是一个同轴传输线谐振器。变容二极管安装在位于泵浦腔和空闲腔之间的感性膜片中心。与信号腔的耦合是通过把二极管接在同轴线信号腔的中心导体上来实现的。与泵浦的耦合是通过泵浦腔的耦合孔，泵浦频率取在9200兆赫附近，空闲频率为7900兆赫，输入和输出信号频率是相同的，都等于1300兆赫。此放大器给出的增益为25分贝或者更高一些，其带宽约为5兆赫。

对上面所讨论的这类负阻式参量放大器来说，得到高增益时的带宽是窄的。负阻有增大有载Q值的作用，从而形成窄带的高Q谐振电路。为了分析带宽特性，假定图11.7表示的电路模型是合适的。高Q的信号和空闲电路的阻抗可表示为如下的形式：

$$Z_1 = (R_1 + R_s) \left( 1 + 2j \frac{\Delta\omega_1}{\omega_1} Q_1 \right) \quad (11.42a)$$

$$Z_2 = (R_2 + R_s) \left( 1 + 2j \frac{\Delta\omega_2}{\omega_2} Q_2 \right) \quad (11.42b)$$

式中

$$Q_1 = \omega_1 \frac{L_1 + L_s}{R_1 + R_s} \quad Q_2 = \omega_2 \frac{L_2 + L_s}{R_2 + R_s}$$

这些表示式的推导如下：根据(11.33a)式，在频率 $\omega_s + \Delta\omega_s$ 上的信号电路阻抗为



$$\begin{aligned}
Z_2 &= R_1 + R_2 + j(\omega_s + \Delta\omega_s) \left[ (L_1 + L_2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{(\omega_s + \Delta\omega_s)^2} \left( \frac{1}{C_2 + C_1} + \frac{1}{C_0 - M^2 C_0} \right) \right] \\
&= R_1 + R_2 + j(\omega_s + \Delta\omega_s)(L_1 + L_2) \left[ 1 - \frac{\omega_s^2}{(\omega_s + \Delta\omega_s)^2} \right] \\
&= R_1 + R_2 + j \frac{L_1 + L_2}{\omega_s + \Delta\omega_s} (2\omega_s \Delta\omega_s + \Delta\omega_s^2) \\
&\approx (R_1 + R_2) \left( 1 + j2Q_1 \frac{\Delta\omega_s}{\omega_s} \right)
\end{aligned}$$

对  $Z_1$  也可以作类似的推导，

由 (11.33) 式得

$$\begin{aligned}
V_1 &= I_1 (R_1 + R_2) \left( 1 + 2jQ_1 \frac{\Delta\omega_s}{\omega_s} \right) \\
&\quad + \frac{M I_1^*}{(1 - M^2) j(\omega_s + \Delta\omega_s) C_0} \quad (11.43a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_2 &= I_2 (R_2 + R_1) \left( 1 + 2jQ_2 \frac{\Delta\omega_s}{\omega_s} \right) \\
&\quad + \frac{M I_2^*}{(1 - M^2) j(\omega_s + \Delta\omega_s) C_0} \quad (11.43b)
\end{aligned}$$

若  $R_1 = R_2 + R_L$ ，且在频率  $\omega_s$  上取输出，则其增益为

$$G = \frac{4R_2 R_L |I_1|^2}{V_1^2}$$

由 (11.43) 式解出  $I_1$ ，就可得出（注意此情况下  $V_2 = 0$ ）

$$G = \frac{4R_2 R_L}{\left| Z_1 - \frac{M^2}{(\omega_s + \Delta\omega_s)(\omega_s + \Delta\omega_s)(1 - M^2)^2 C_0^2} Z_1^* \right|^2} \quad (11.44)$$

因为泵浦频率是固定的，所以  $\Delta\omega_s = -\Delta\omega_s$ ，频带中心的增益  $G_0$  由

(11.37) 式给定。为了确定带宽,使(11.44)式的  $G$  等于  $G_0/2$ , 并求解  $\Delta\omega_s$ 。当增益  $G_0$  高时, 可得出很好的近似式为

$$4 \left( \frac{\Delta\omega_s}{\omega_s} \right)^2 = \frac{(R_1 + R_2 - R)^2}{(R_1 + R_2)^2 (Q_1 + \omega_s Q_2 / \omega_1)^2} \quad (11.45)$$

于是增益——带宽积成为

$$2 \frac{\Delta\omega_s}{\omega_s} \sqrt{G_0} = \frac{2\sqrt{R_2 R_L}}{(R_1 + R_2)(Q_1 + Q_2 \omega_s / \omega_1)} \quad (11.46)$$

作为一种典型情况, 如果假定  $R_2 + R_L = R_1 + R_2$  和  $R_2 = R_L$ , 并注意到高增益时  $R_1 + R_2 \approx R$  则得

$$2\sqrt{G_0} \frac{\Delta\omega_s}{\omega_s} = \frac{1}{Q_1 + (\omega_s / \omega_1) Q_2}$$

要是  $C_2 + C_1$  等于零, 则  $Q_1$  出现可能的最小值。在此情况下,

$$Q_1 = \frac{\omega_s (L_1 + L_2)}{R_1 + R_2} = \frac{1}{\omega_s (1 - M^2) C_0 (R_1 + R_2)}$$

$$\approx \frac{1}{\omega_s (1 - M^2) C_0 R}$$

同理, 若  $C_2 + C_1 = 0$ , 则可得到  $Q_2$  可能的最小值, 且为

$$Q_2 = \frac{1}{\omega_1 (1 - M^2) C_0 (R_2 + R_1)}$$

若参考(11.38)的  $R$  表示式, 则可得出  $M^2 Q_1 Q_2 = 1$ 。于是

$$2\sqrt{G_0} \frac{\Delta\omega_s}{\omega_s} = \frac{1}{Q_1 + \omega_s / M^2 \omega_1 Q_1}$$

这个增益——带宽积的表示式, 在

$$Q_1 = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{\omega_s}{\omega_1}}$$

时有最大值。所以, 最大的增益——带宽积为

$$\left( 2\sqrt{G_0} \frac{\Delta\omega_s}{\omega_s} \right)_{\max} = \frac{M}{2} \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_s}} \quad (11.47)$$

当增益为20分贝时, 所得到的带宽为

$$\frac{2\Delta\omega_s}{\omega_s} = \frac{M}{20} \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_s}}$$

一般说,  $M$  不大于 0.2 左右, 所以带宽的百分数近似地等于  $\sqrt{\omega_1/\omega_s}$ , 对一个实际的放大器来说, 由于电容  $C_1 + C_2$  和  $C_2 + C_3$  不能减少到零, 故增益——带宽积比其最大值要小一些。

当然, 使用宽频带信号电路和空闲电路, 参量放大器是可以做成宽频带的。获得宽频带工作的另一种方案, 是用行波式参量放大器, 它完全避免了谐振电路。在行波式参量放大器中, 波导系统周期性地以变容二极管加载。当加入泵浦功率和信号功率而发生混频时, 便会在信号频率上产生合成功率。要进行详细分析, 可参阅本章末所引用的参考文献。

## 11.6 参量放大器的噪声特性

参量放大器所产生的噪声, 是等效电路的电阻中的热噪声。对图 11.6 中所示的上变频器来说, 频率为  $\omega_s$  的输入热噪声是由波源电阻  $R_s$  引起的噪声。  $R_s$  两端的均方噪声电压为  $e_1^2 = 4kTR_s\Delta f$ 。若与二极管电阻  $R_d$  比较, 电路的损耗可以忽略(这是一个合理的近似), 则信号电路中的其他噪声来源, 就仅仅是  $R_d$  了。频率为  $\omega_s$  时,  $R_d$  上的均方噪声电压为  $e_2^2 = 4kTR_d\Delta f$ 。我们用  $T_e$  表示在频率  $\omega_s$  下的二极管的等效噪声温度。在信号电路中, 频率为  $\omega_s$  的噪声被放大, 并被变换为输出频率  $\omega_0$  上的噪声。频带中心被放大的输出噪声为 (在图 11.6 中用  $\sqrt{e_1^2 + e_2^2}$  代替  $V_1$ )

$$P_1 = |I_1|^2 R_L = \frac{R_L(e_1^2 + e_2^2)M^2\omega_0^2 C_0^2(1-M^2)^2}{(M^2 + (R_s + R_d)(R_L + R_d)\omega_0\omega_s(1-M^2)^2 C_0^2)^2}$$

其中, 噪声电流  $I_1$  是通过在 (11.26) 式中用  $(e_1^2 + e_2^2)^{\frac{1}{2}}$  代替  $V_1$  而得到的。若引入频带中心增益  $G_0$ , 则得(参看 (11.27) 式)

$$P_1 = \frac{e_1^2 + e_2^2}{4R_s} G_0 = \frac{k\Delta f(R_s T_e + R_d T_e)}{R_s} G_0 \quad (11.48)$$

在输出电路中，也存在由电阻 $R_s$ 产生的频率为 $\omega_s$ 的噪声。设频率为 $\omega_s$ 时的二极管噪声温度为 $T_0$ ，则在输出电路中 $R_s$ 上呈现的等效噪声电压为 $e_s^2 = 4kT_0 R_s \Delta f$ 。当解出所产生的噪声电流 $I_s$ ，并计算 $P_s = |I_s|^2 R_L$ 可得

$$P_s = \frac{\omega_s^2 (1-M^2)^2 C_0^2 (R_s + R_L)^2 G_0 e_s^2}{4R_s M^2}$$

$$= \frac{\omega_s^2 (1-M^2)^2 C_0^2 (R_s + R_L)^2 kT_0 R_s \Delta f G_0}{R_s M^2} \quad (11.49)$$

频率为 $\omega_s$ 时的总输出噪声功率为 $P_s = P_1 + P_2$ 。由 $R_s$ 产生的有效输入噪声功率为 $kT \Delta f$ 。所以噪声系数为（在 $F$ 的定义中， $T = 290^\circ$ ）

$$F = \frac{P_1 + P_2}{G_0 kT \Delta f} = 1 + \frac{R_s T_1}{R_s T}$$

$$+ \frac{\omega_s^2 (1-M^2)^2 C_0^2 (R_s + R_L)^2 R_s T_0}{R_s M^2 T} \quad (11.50)$$

应当指出，由于增益 $G_s$ 定义为输出功率除以来自输入信号源的有效功率，所以上面求出的 $F$ 与公认的噪声系数定义一致。若在 $\omega_s$ 和 $\omega_c$ 两个频率上取二极管噪声温度等于 $T_2$ ，则在引入定义二极管 $Q$ 值的（11.29）式后得

$$F = 1 + \frac{R_s}{R_s} \frac{T_2}{T} \left[ 1 + \frac{(R_s + R_L)^2}{M^2 Q^2 R_s^2} \right] \quad (11.51)$$

根据（11.30）式可知，为得到最大增益，需使

$$R_s = R_L = R_s \left( 1 + \frac{\omega_s}{\omega_c} M^2 Q^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

所以，在最大增益的条件下，噪声系数为

$$F = 1 + \frac{T_2}{T} \left( 1 + \frac{\omega_s}{\omega_c} M^2 Q^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left( 1 + \frac{\{ 1 + [1 + (\omega_s / \omega_c) M^2 Q^2]^{\frac{1}{2}} \}^2}{M^2 Q^2} \right)$$

$$\approx 1 + \frac{T_s}{T} \left( 1 + \frac{\omega_s}{\omega_0} M^2 Q^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (11.52)$$

作为一个典型的例子，设  $T_s = T$ ， $\omega_s = 10\omega_0$  和  $MQ = 10$ ，则得  $F = 1.36$ ，即 1.3 分贝。这个例子清楚地表明参量放大器的低噪声特性。

二极管的噪声温度  $T_s$ ，由于载流子通过结时的不规则运动引起散粒噪声而稍高于环境温度。此外，电阻  $R_s$  在两个频率上通常不是严格地相同的。但是，可以通过取  $T_s$  和  $T_s'$  的适当值来考虑到这个差别。用  $R_{s1}T + R_sT_s$  代替  $R_sT_s$  和用  $R_{s2}T + R_sT_s'$  代替  $R_sT_s$ ，可以很简单地把由电路损耗引起的热噪声包括在 (11.50) 式中，其中的  $R_{s1}$  和  $R_{s2}$  表示等效电路的电阻。但是，由于大多数二极管的等效  $Q$  值，即  $(1 - M^2) \omega_s C_s R_s$  很少超过 50，而电路的  $Q$  值通常为 1000 或更大，所以电阻  $R_{s1}$  和  $R_{s2}$  与二极管电阻  $R_s$  相比可以忽略。

负阻式参量放大器的噪声特性已由尤诺哈拉和其他人分析过了，并已作过测量。\*下面介绍应用环行器且输出信号与输入信号取同样的频率  $\omega_s$  的负阻式参量放大器的噪声理论。

参阅图 11.10，要考虑的主要噪声源是：(1) 由  $R_1 = Z_1$  在温度为  $T_1$  和在频率  $\omega_s$  上产生的噪声；(2)  $R_2$  在空闲频率  $\omega_i = \omega_s - \omega_s$  上引

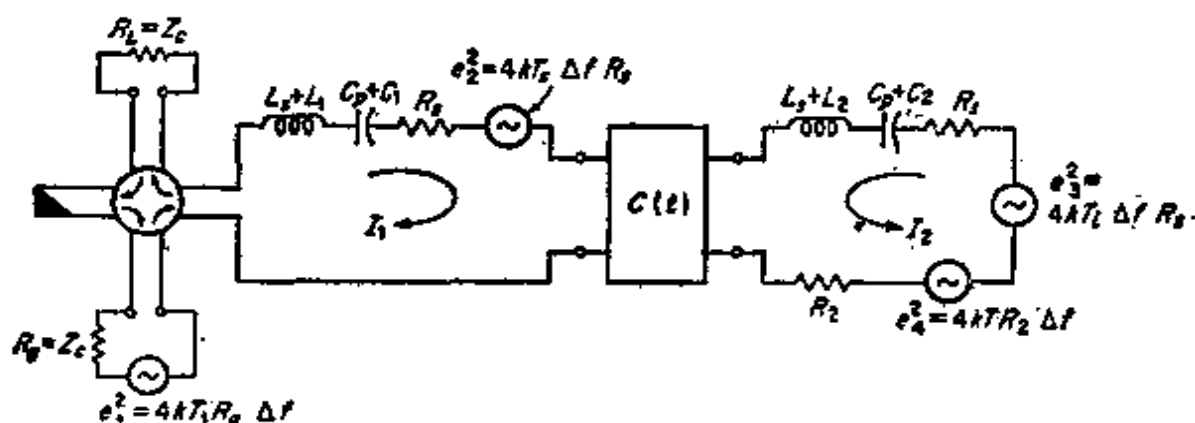


图 11.10 负阻式参量放大器的噪声电路

\* M. Uenohara, Noise Considerations on the Variable Capacitance Parametric Amplifier Proc. IRE, Vol. 48, pp. 169-179, February, 1960.

起的输入噪声；(3)二极管电阻 $R_s$ 在频率 $\omega_s$ 上引起的噪声（等效噪声温度为 $T_s$ ）；(4) $R_s$ 在空闲频率 $\omega_i$ 上引起的噪声（等效噪声温度为 $T_i$ ）。由于这些噪声信号在二极管中混频后被变换成在频率 $\omega_s$ 上的噪声信号，故研究在空闲频率上的噪声源也是重要的，其等效电路和噪声电压源如图11.10所示。

由 $R_s$ 产生的输入噪声功率为 $kT_i \Delta f$ 。这会在输出负载 $R_L$ 上表现为放大的噪声，其值为

$$P_1 = G_0 k T_i \Delta f = \frac{4R_L^2 k T_i \Delta f}{(R_L + R_s - R)^2} \quad (11.53)$$

式中的 $G_0$ 是在高增益情况下由(11.39)式得到的。

来自放大器的噪声用电压源 $e_1$ 、 $e_2$ 和 $e_3$ 来表示。因为这三个噪声源是不相关的，故噪声功率相加。因而在空闲电路中等效噪声电压为 $e_i = \sqrt{e_3^2 + e_4^2}$ 。在频带中心描述噪声电流 $I_1$ 和 $I_2$ 的方程由(11.34)式得到。因为由电压源 $e_2$ 看，信号电路的负载 $R_1$ 为 $Z_c = R_L$ 。所以

$$e_2 = (R_L + R_s) I_1 - \frac{j M I_2^*}{\omega_i (1 - M^2) C_0} \quad (11.54a)$$

$$e_i = (R_2 + R_s) I_2 - \frac{j M I_1^*}{\omega_i (1 - M^2) C_0} \quad (11.54b)$$

解出(11.54)式的 $I_1$ ，就可以算出传送到外部负载 $R_L$ 上的噪声功率为

$$P_2 = |I_1|^2 R_L$$

由最后的结果，就可得出

$$I_1 = \frac{e_2}{R_L + R_s - R} + \frac{j M e_i^*}{\omega_i (1 - M^2) C_0 (R_L + R_s - R) (R_2 + R_s)}$$

由于噪声电压不能相加，故必须分别地求出 $e_2$ 和 $e_i$ 所贡献的噪声功率。由 $e_2$ 贡献的功率为

$$P(e_2) = \frac{e_2^2 R_L}{(R_L + R_s - R)^2}$$

由 $e_i$ 贡献的功率为

$$P(e_i) = \frac{e_i^2 R_L M^2}{(\omega_i(1-M^2)C_0(R_L+R_s-R)(R_2+R_s))^2}$$

$$= \frac{e_i^2 R_L R \omega_s}{\omega_i(R_L+R_s-R)^2(R_2+R_s)}$$

所以

$$P_2 = P(e_2) + P(e_i) = \frac{G_0}{4R_L} \left( e + \frac{\omega_s}{\omega_i} \frac{e_i^2 R}{R_2+R_s} \right)$$

$$= \frac{G_0 k \Delta f}{R_L} \left[ R_s T_s + \frac{\omega_s}{\omega_i} \frac{R}{R_2+R_s} (R_s T_s + R_2 T) \right]$$
(11.55)

若假定 $T_s = T_1 = T = T_2$ ，则得简化表示式：

$$P_2 = G_0 k \Delta f T_s \frac{R_s}{R_L} \left( 1 + \frac{\omega_s}{\omega_i} \frac{R}{R_s} \right)$$
(11.56)

相应的噪声系数 $F$ 为

$$F = \frac{P_1 + P_2}{k T_1 \Delta f G_0} = 1 + \frac{T_2}{T_1} \frac{R_s}{R_L} \left( 1 + \frac{\omega_s}{\omega_i} \frac{R}{R_s} \right)$$
(11.57)

式中，按 $F$ 的标准定义， $T_1$ 必须取 $290^\circ\text{K}$ 。在(11.57)式中 $R$ 可以用 $R_L + R_s$ 代替，因为这是高增益的要求。于是得

$$F = 1 + \frac{T_2}{T_1} \left( \frac{\omega_s}{\omega_i} \frac{R_L + R_s}{R_L} - 1 \right)$$
(11.58)

作为一个例子，假定 $T_2 = T_1$ ，取 $\omega_s = 1.5\omega_i$ ，并令 $R_L$ 远大于 $R_s$ ，则得噪声系数为1.5，即1.76分贝。

前面的分析只在 $\omega_s$ 和 $\omega_i$ 两个频率相差大于信号和空闲电路的通带时才是正确的，当不是这种情况，而是 $\omega_s \approx \omega_i$ 时，放大器便是一个简并的负阻式放大器。输入源电阻 $R_s$ 在频率 $\omega_i$ 上产生的噪声电流将在信号电路中出现。同理，由 $R_s$ 在频率 $\omega_i$ 和 $\omega_s$ 上引起的噪声电流将在信号电路和空闲电路中出现。在简并放大器中，信号腔和空闲腔是完全相同的，且其等效电路如图11.11中所示。若此放大器的

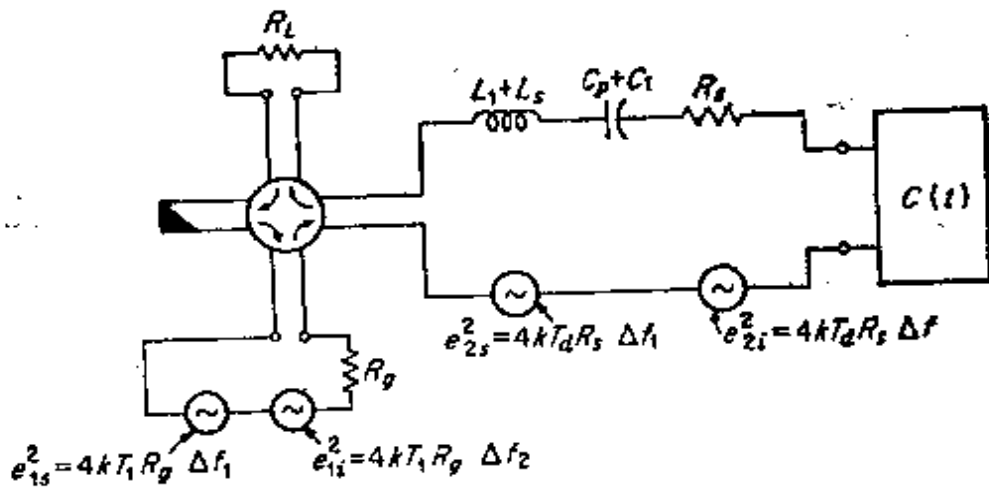


图 11.11 简并参量放大器的噪声电路

通带在 $\omega_p/2$ 两边是对称的，则在频率 $\omega_s < \omega_p/2$ 上的噪声被放大，并有频率为 $\omega_s$ 的噪声功率输出，还被变换和放大为在频率 $\omega_i = \omega_p - \omega_s$ 上的噪声功率输出。 $\omega_s$ 和 $\omega_i$ 两个频率对称地位于 $\omega_p/2$ 两边，并落入放大器的通带内。因此，在计算总输出噪声功率时，我们必须把在这两个频率上来自 $R_s$ 和 $R_g$ 的噪声认为是各不相关的噪声。

此种情况概略地表示在图 11.12 中。通带被分成相等的两部分： $\Delta f_1$ 和 $\Delta f_2$ ，它们对称地位于 $\omega_p/2$ 的两侧。频率 $\Delta f_1$ 中的噪声被放大后，在输出端有在同一频带 $\Delta f_1$ 的噪声。此外，频带 $\Delta f_1$ 中的噪声还被放大，并在输出端变换成频带 $\Delta f_2$ 的噪声。下边带 $\Delta f_1$ 将被认为是信号边带。

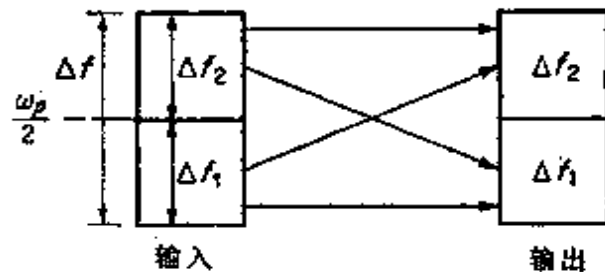


图 11.12 噪声变换的说明

此外，频带 $\Delta f_1$ 中的噪声还被放大，并在输出端变换成频带 $\Delta f_2$ 的噪声。下边带 $\Delta f_1$ 将被认为是信号边带。

因为 $\omega_s \approx \omega_i$ ，所以由 $R_s$ 和 $R_g$ 在频带 $\Delta f_1$ 内引起的噪声功率在输出频带 $\Delta f_1$ 和 $\Delta f_2$ 中产生同样数量的噪声功率，如同 $R_s$ 和 $R_g$ 在频带 $\Delta f_2$ 中所产生的噪声功率一样。因而，只需要具体地研究低频带 $\Delta f_1$ 中的噪声。

用图 11.11 中等效噪声电压源 $e_{1i}$ ，可表示由 $R_g$ 在频带 $\Delta f_1$ 中引起



的噪声。为了计算由 $e_{1s}$ 传送到 $R_L$ 上的噪声功率，我们将在整个通带内取电路的串联阻抗 $R_s + R_L$ 来作近似。用 $I_1$ 和 $I_2$ 来表示在频率 $\omega_s$ 和 $\omega_i$ 上的噪声电流。

在信号频率上的有效增益为 $G_0 = |\Gamma|^2$ 。由于在高增益的条件下 $R_L + R_s \approx R$ ，所以，可以用(11.39)式求 $G_0$ 。由于假定 $R_s = R_L = Z_0$ ，故由 $e_{1s}$ 引起的有效噪声功率为 $e_{1s}^2/4R_s = e_{1s}^2/4R_L$ 。于是在频带 $\Delta f_1$ 内传送到 $R_L$ 上的噪声功率为

$$P_{1s} = G_0 \frac{e_{1s}^2}{4R_L} = G_0 kT_1 \Delta f_1 \quad (11.59)$$

当频率 $\omega_i$ 上没有外加电压时，电流 $I_1$ 和 $I_2$ 的关系为(参看(11.34)式，其中的 $R_2 = R_L$ )

$$(R_L + R_s)I_2 = \frac{jMI_1}{\omega_i(1-M^2)C_0}$$

因为当 $\omega_s \approx \omega_i$ 时， $R = M^2 / (\omega_i^2(1-M^2)^2 C_0^2 (R_L + R_s))$ ，所以在频带 $\Delta f_2$ 内传送到 $R_L$ 上的功率 $P_{1i}$ 为

$$P_{1i} = |I_2|^2 R_L = \frac{|I_2|^2}{|I_1|^2} P_{1s} = \frac{R}{R_L + R_s} P_{1s} \quad (11.60)$$

噪声源 $e_{1s}$ 在频带 $\Delta f_2$ 内把等于 $P_{1s}$ 的功率传送到 $R_L$ 上，并把等于 $P_{1i}$ 的功率送入频带 $\Delta f_1$ 内。因为 $R \approx R_L + R_s$ ， $2\Delta f_1 = \Delta f$ ，所以，经由 $R_s$ 传送到 $R_L$ 上的总的噪声功率在 $\Delta f_1$ 和 $\Delta f_2$ 两个频带内是相同的，且为

$$\begin{aligned} P_1 &= P_{1s} + P_{1i} = G_0 kT_1 \Delta f_1 \left(1 + \frac{R}{R_L + R_s}\right) \\ &= 2G_0 kT_1 \Delta f_1 = G_0 kT_1 \Delta f \end{aligned} \quad (11.61)$$

为了计算经由 $R_s$ 传送到 $R_L$ 上的噪声功率，我们首先研究在频带 $\Delta f_1$ 内的噪声。等效电压源为 $e_{2s}$ ，电路方程为(可令 $\omega_i = \omega_s$ )

$$e_{2s} = (R_L + R_s)I_1 - \frac{jMI_2}{\omega_i(1-M^2)C_0} \quad (11.62a)$$

$$0 = (R_L + R_s) I_2 - \frac{jMI_1}{\omega_c(1-M^2)C_s} \quad (11.62b)$$

在 $\Delta f_1$ 和 $\Delta f_2$ 两个频带内的输出噪声为

$$P_{2s} = |I_1|^2 R_L \quad P_{2i} = |I_2|^2 R_L$$

解出 $I_1$ 和 $I_2$ ，可得

$$P_{2s} = \frac{e_{2s}^2 R_L}{(R_L + R_s - R)^2} = \frac{e_{2s}^2 G_0}{4R_L} = \frac{kT_s \Delta f_1 R_s G_0}{R_L} \quad (11.63)$$

由 $e_{2s}$ 引起的在频带 $\Delta f_2$ 内的输出噪声为

$$P_{2i} = \frac{R}{R_L + R_s} P_{2s} \approx P_{2s} \quad (11.64)$$

因为噪声源 $e_{2s}$ 在频带 $\Delta f_2$ 内贡献的噪声功率为 $P_{2s}$ ，在频带 $\Delta f_1$ 内贡献的噪声功率为 $P_{2i}$ ，所以，由放大器内部噪声源传送到 $R_L$ 上的总的噪声功率为（在每一个频带 $\Delta f_1$ 和 $\Delta f_2$ 内）

$$P_2 = P_{2s} + P_{2i} = \frac{2kT_s \Delta f_1 R_s G_0}{R_L} = \frac{kT_s R_s G_0 \Delta f}{R_L} \quad (11.65)$$

由 $R_s$ 和 $R_s$ 两者引起的总的输出噪声为

$$P_n = P_1 + P_2 = k\Delta f G_0 \left( T_1 + \frac{R_s}{R_L} T_s \right) \quad (11.66)$$

若把简并放大器作为单边带放大器（信号只在低频带 $\Delta f_1$ 内输入），则单边带噪声系数 $F_n$ 的定义是：频带 $\Delta f = 2\Delta f_1$ 内总的输出噪声功率与信号频带 $\Delta f_1$ 内的有效输入噪声功率之比。于是

$$F_n = \frac{k\Delta f G_0 T_1}{k\Delta f_1 G_0 T_1} \left( 1 + \frac{T_s}{T_1} \frac{R_s}{R_L} \right) = 2 \left( 1 + \frac{T_s}{T_1} \frac{R_s}{R_L} \right) \quad (11.67)$$

可见，单边带工作时，噪声系数不可能小于2，即3分贝。输入端信号频带 $\Delta f_1$ 内的信号——噪声功率比为 $P_s / (k\Delta f_1 T_1)$ 。而在输出端，频带 $\Delta f_1$ 内的信号——噪声功率比为 $G_0 P_s / P_n$ ，它由于乘上单边带噪声系数而变得更坏。噪声简并是由于噪声进入不存在信号的空闲频带 $\Delta f_2$ 而引起的。

对双边带工作，输入信号功率在频带 $\Delta f_1$ 和 $\Delta f_2$ 内都存在。在此情况下，由于把有效的输入噪声功率认为是频带 $\Delta f$ 内的输入噪声功率。所以双边带噪声系数为

$$F_{ds} = \frac{k\Delta f G_0 T_1}{k\Delta f G_0 T_1} \left( 1 + \frac{T_d}{T_1} \frac{R_s}{R_L} \right) = 1 + \frac{T_d}{T_1} \frac{R_s}{R_L} \quad (11.68)$$

它比单边带的情况好一倍（3分贝）。

尤诺哈拉已经测得几种不同的二极管的双边带噪声系数。人们发现，上面给出的理论是相当精确的。测得噪声系数的一般范围从0.9到4.5分贝。对于 $\omega C_0 R_s$ 小于0.1的二极管来说，噪声系数为2分贝或者更好。在测得的噪声系数和二极管的品质因数 $Q$ 之间有强的相关。这也是理论预计到的。由于高增益时 $R_L + R_s \approx R_s$ ，由(11.29)式和(11.38)式可以把 $R$ 表示为

$$R = \frac{R_s}{R_L + R_s} M^2 Q^2 R_s \gg R_s$$

可见， $R_L + R_s$ 的最佳值为 $MQR_s$ 。现在可以用 $(MQ-1)^{-1}$ 代替噪声系数表示式中的因子 $R_s/R_L$ 而得到

$$F_{ds} = 1 + \frac{T_d}{T_1} \frac{1}{MQ-1}$$

它表示噪声系数随二极管的质量因数 $Q$ 的提高而改善。

参量放大器的噪声主要是在二极管电阻 $R_s$ 中的热噪声。放大器的等效噪声温度为 $T_A = (F-1)T_1$ ，式中， $T_1 = 290^\circ K$ （对于单边带工作的简并放大器来说， $T_A = (F-2)T_1$ ）。把此放大器冷却到液氮温度下，已获得低于 $100^\circ K$ 的噪声温度。

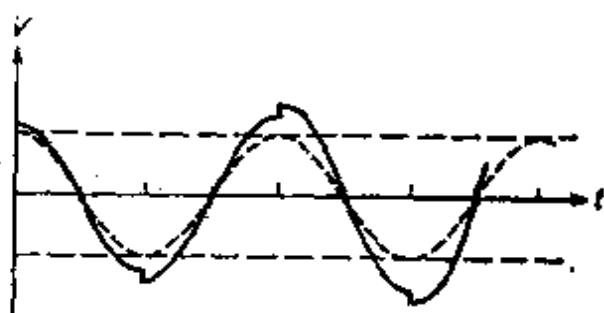
## 习 题

11.1 设有一个输出电流为  $i(t) = k(v(t))^2$  的平方律混频器，其中， $v(t)$  是所加的电压， $k$  是一个常数。设所加的本机振荡

\* 见前一个注释给出的参考文献。

信号为  $V_P \cos \omega_P t$ , 所加的信号为  $V_S \cos \omega_S t$ ,  $V_S \ll V_P$ 。试证明和频与差频  $\omega_P \pm \omega_S$  上的输出电流在  $V_S \ll V_P$  时, 是  $V_S$  的线性函数。从而证明在信号振幅很小时, 此平方律混频器是一个线性变换器。

11.2 有一个电容为  $C_0$  的平行板电容器。设所加的电压  $V = V_S \cos \omega_S t$ 。在  $t = 0$  瞬时, 突然增加板间距离, 使电容由  $C_0$  变到  $C = C_0 - \Delta C$ 。由于电荷不能同时发生变化, 故电压必须增大。在  $t = (4f_s)^{-1}$  瞬时, 当  $V = 0$  和  $Q = 0$  时, 令板间距离回复原值。由于在此时  $V = 0$ , 故  $V$  没有变化。当  $t = (2f_s)^{-1}$  时, 令电容又突然减少到值  $C$ 。当这个过程连续进行



习题 11.2

时, 加在  $C$  上的总电压被放大, 并将具有如图的波形。这是以信号频率的两倍速率变化的线性电容的一个例子。试求每半个周期内发生的电压增量变化和泵浦源所供给的功率。为了求后者, 需先求出每次  $C$  突然减小时所发生的储能的变化。

11.3 下变频器是一个参量放大器, 其输入信号频率为  $\omega_0 = \omega_s + \omega_P$ , 而输出信号频率为  $\omega_s$ 。用图11.6的电路, 证明下变频器的增益 (实际上是损耗) 是  $\omega_0$  和  $\omega_s$  互换后的 (11.27) 式。

11.4 推导 (11.32) 式。

11.5 推导负阻式参量放大器增益表示式 (11.35) 式。

11.6 推导噪声功率  $P_2$  的表示式 (11.49) 式。

11.7 求出参量上变频器等效噪声温度的表示式。

11.8 推导如图11.11所示的负阻式简并参量放大器增益的表示式。

11.9 如图11.11所示的带有环行器的简并参量放大器。假定以频率为  $\omega_s$  的输入波源电压  $V_s$  代替  $e_{1s}$  和  $e_{11}$ 。波源把电流为  $I_1^+$  的波送入此放大器, 这里的  $I_1^+$ , 由于当  $R_1 = Z_c$  时  $V_s$  有一个匹配负载,

故  $I_1^+$  必定等于  $V_s/(R_s+Z_c)=V_s/2Z_c$ 。产生的反射波的电流  $I_1^- = -\Gamma I_1^+$ 。在  $R_L$  中的负载电流，当不考虑相角时为  $I_1^-$ 。频率为  $\omega_s$  的放大器总电流为  $I_1 = I_1^- + I_1^+$ 。根据这些条件，列出类似于(11.34)式的  $I_1$  和  $I_2$  的适当的电路方程式。

11.10 一个参量二极管具有下列参数值： $C_0=2$ 微微法， $R_s=1$ 欧姆。调制度  $M=0.25$ ，频率  $f_s=5000$ 兆赫， $f_p=12000$ 兆赫。求此二极管的等效  $Q$  值。求出图11.8所示的负阻式参量放大器增益为20分贝时的负载电阻  $R_L$ 。假定  $R_s=R_L=R_2$ ，求增益为20分贝时的  $R$ 。

### 参 考 文 献

1. Blackwell, L.A., and K.L.Kotzebue: "Semiconductor-diode Parametric Amplifiers," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1961.
2. Penfield, P., and R.P.Rafuse: "Varactor Applications," The M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1962.
3. Chang, K.K.N.: "Parametric and Tunnel Diodes," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.

#### 行波式参量放大器

4. Cullen, A.L.: "A Traveling Wave Parametric Amplifier," Nature, Vol.181, February, 1958.
5. Honey, R.C., and E.M.T.Jones: "A Wide-band UHF Traveling Wave Variable Reactance Amplifier," IRE Trans., Vol.MTT-8, pp.351-361, May, 1960.
6. Heilmeier, G.H.: "An Analysis of Parametric Amplification in Periodically Loaded Transmission Lines," RCA Rev., Vol.20, pp.442-454, September, 1959.

#### 宽频带技术

7. Matthaei, G.L.: "A Study of the Optimum Design of Wideband Parametric Amplifiers and Up-converters," IRE Trans., Vol.MTT-9, pp.23-28, January, 1961.
8. Gilden, M., and G.L.Matthaei: "Practical Design and Performance of Nearly Optimum Wide Band Degenerate Parametric Amplifiers," IRE Trans., vol.MTT-9, pp 484-490, November, 1961.

# 附录 I 由矢量分析得到的 有用关系式

## I.1 矢量代数

设把矢量  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  表示为右手正交坐标系中沿单位矢量  $\mathbf{a}_1$ 、 $\mathbf{a}_2$ 、 $\mathbf{a}_3$  的各分量，则

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_1 \pm B_1)\mathbf{a}_1 + (A_2 \pm B_2)\mathbf{a}_2 + (A_3 \pm B_3)\mathbf{a}_3 \quad (\text{I.1})$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \quad (\text{I.2})$$

式中， $\theta$  为  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  之间的夹角。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \mathbf{a}_1(A_2 B_3 - A_3 B_2) + \mathbf{a}_2(A_3 B_1 - A_1 B_3) \\ &+ \mathbf{a}_3(A_1 B_2 - A_2 B_1) \end{aligned} \quad (\text{I.3a})$$

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta \quad (\text{I.3b})$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad (\text{I.4})$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (\text{I.5})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (\text{I.6})$$

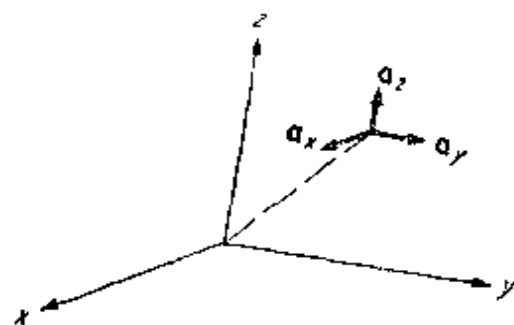


图 1.1 直角坐标

## I.2 普通坐标系中矢量的运算

直角坐标

$$\nabla \phi = \mathbf{a}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (\text{I.7})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = & a_x \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + a_y \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ & + a_z \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (1.10)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = a_x \nabla^2 A_x + a_y \nabla^2 A_y + a_z \nabla^2 A_z \quad (1.11)$$

圆柱坐标

$$\nabla \phi = a_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + a_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & a_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + a_\varphi \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \\ & + a_z \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (1.15)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.16)$$

注意：因为单位矢量  $a_r$ 、 $a_\varphi$  的方位随坐标  $r$ 、 $\varphi$  而变化，故由于  $\nabla^2 a_r A_r \neq a_r \nabla^2 A_r$ ，等等，所以  $\nabla^2 A \neq a_r \nabla^2 A_r + a_\varphi \nabla^2 A_\varphi + a_z \nabla^2 A_z$ 。

球坐标

$$\nabla \phi = a_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + a_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \quad (1.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta)$$

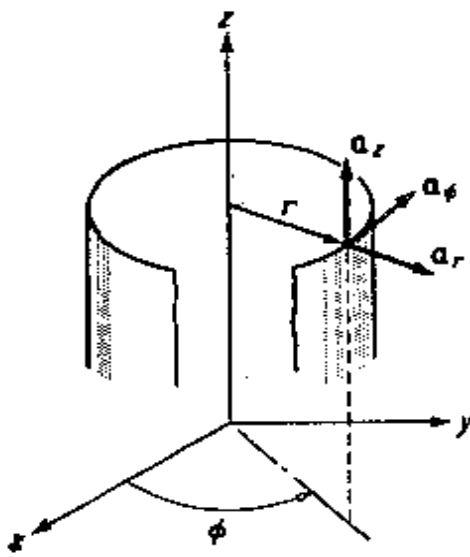


图 1.2 圆柱坐标

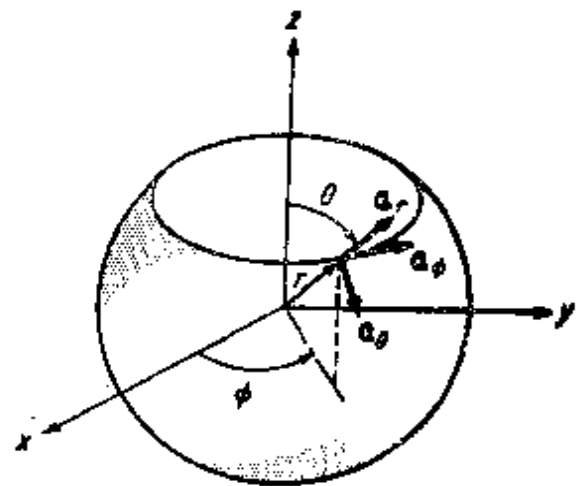


图 1.3 球坐标

$$+ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \frac{\mathbf{a}_r}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \\ & + \frac{\mathbf{a}_\theta}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \\ & + \frac{\mathbf{a}_\varphi}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \quad (1.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi = & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \quad (1.20) \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.21)$$

### 1.3 矢量恒等式

$$\nabla(\Phi\Psi) = \Psi\nabla\Phi + \Phi\nabla\Psi \quad (1.22)$$

$$\nabla \cdot (\Psi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \Psi + \Psi \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (1.23)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} \quad (1.24)$$



$$\nabla \times (\psi \mathbf{A}) = (\nabla \psi) \times \mathbf{A} + \psi \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{I.25})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (\text{I.26})$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (\text{I.27})$$

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi \quad (\text{I.28})$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (\text{I.29})$$

$$\nabla \times \nabla \phi = 0 \quad (\text{I.30})$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (\text{I.31})$$

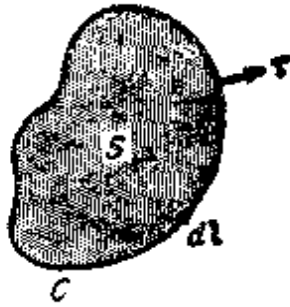


图 I.4 闭合围线C所包围的曲面S

设 $\mathbf{A}$ 和 $\phi$ 在 $V$ 中和 $S$ 上(或在 $S$ 上和包围 $S$ 的闭合围线 $C$ 上)是至少具有一阶导数分段连续的连续函数, 则

$$\int_V \nabla \phi dV = \oint_S \phi dS \quad (\text{I.32})$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{散度定理}) \quad (\text{I.33})$$

$$\int_V \nabla \times \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS \quad d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS \quad (\text{I.34})$$

$$\int_S \mathbf{n} \times \nabla \phi dS = \oint_C \phi d\mathbf{l} \quad (\text{I.35})$$

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{斯托克斯定理}) \quad (\text{I.36})$$

#### 1.4 格林恒等式

设 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\phi$ 和 $\psi$ 是具有一阶导数分段连续的连续函数, 则

$$\int_V (\nabla \phi \cdot \nabla \psi + \psi \nabla^2 \phi) dV = \oint_S \psi \nabla \phi \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{I.37})$$

它是格林第一恒等式, 格林第二恒等式为

$$\int_V (\Psi \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \Psi) dV = \oint_S (\Psi \nabla \Phi - \Phi \nabla \Psi) \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{I.38})$$

在二维的情况下, (I.37)式成为

$$\iint_S (\nabla_t \Phi \cdot \nabla_t \Psi + \Psi \nabla_t^2 \Phi) dS = \oint_C \Psi \nabla_t \Phi \cdot \boldsymbol{\tau} dl \quad (\text{I.39})$$

式中,  $\nabla_t$ 是二维情况下的 $\delta$ 算符,  $\boldsymbol{\tau}$ 是垂直于 $C$ 并在 $S$ 面上的单位矢量。(I.38)的二维形式是类似的。

格林恒等式的矢量形式是

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B}) dV &= \int_V [(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &\quad - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{B}] dV \\ &= \oint_S \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (\text{I.40})$$

$$\begin{aligned} \iint_V (\mathbf{B} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{B}) dV \\ = \oint_S \{ \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (\text{I.41})$$

## 附录 II 贝塞尔函数

### II.1 普通贝塞尔函数

波动方程、亥姆霍兹方程和拉普拉斯方程在柱坐标下是可分离的。描述径向关系的解的微分方程, 是贝塞尔微分方程。贝塞尔方程是

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{df}{dr} + \left( k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) f = 0 \quad (\text{II.1})$$

当 $k^2$ 为实数且为正时, 贝塞尔方程的两个独立的解分别地称为第一类和第二类贝塞尔函数, 并分别地用 $J_n(kr)$ 和 $Y_n(kr)$ 表示。这些解

可以表示为如下的幂级数:

$$J_n(kr) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (kr/2)^{n+2m}}{m!(n+m)!} \quad (\text{I.2})$$

$$\begin{aligned} Y_n(kr) = & \frac{2}{\pi} \left( \gamma + \ln \frac{kr}{2} \right) J_n(kr) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \\ & \times \frac{(n-m-1)!}{m!} \left( \frac{2}{kr} \right)^{n-2m} \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (kr/2)^{n+2m}}{m!(n+m)!} \\ & \times \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right. \\ & \left. + \frac{1}{n+m} \right) \quad (\text{I.3}) \end{aligned}$$

式中,  $\gamma=0.5772$ 是欧拉常数。下标  $n$  表示贝塞尔函数的阶, 在实际问题中, 它通常是一个整数。当  $r=0$  时,  $Y_n$  函数变成无穷大; 当  $kr$  为很大的值时, 贝塞尔函数接近于减幅正弦函数:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} J_n(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) \quad (\text{I.4a})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} Y_n(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sin\left(kr - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) \quad (\text{I.4b})$$

几个最低阶贝塞尔函数的曲线画在图 I.1 中。

为了表示径向传播波而组成的  $J_n$  和  $Y_n$  的线性组合, 称为第一类和第二类汉格尔函数。第一类汉格尔函数为

$$H_n^{(1)}(kr) = J_n(kr) + jY_n(kr) \quad (\text{I.5a})$$

第二类汉格尔函数为

$$H_n^{(2)}(kr) = J_n(kr) - jY_n(kr) \quad (\text{I.5b})$$

当  $kr$  为很大的值时, 汉格尔函数可用如下的表示式表示:

$$H_n^{(1)}(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{kr\pi}} e^{j(kr - \pi/4 - n\pi/2)} \quad (\text{I.6a})$$

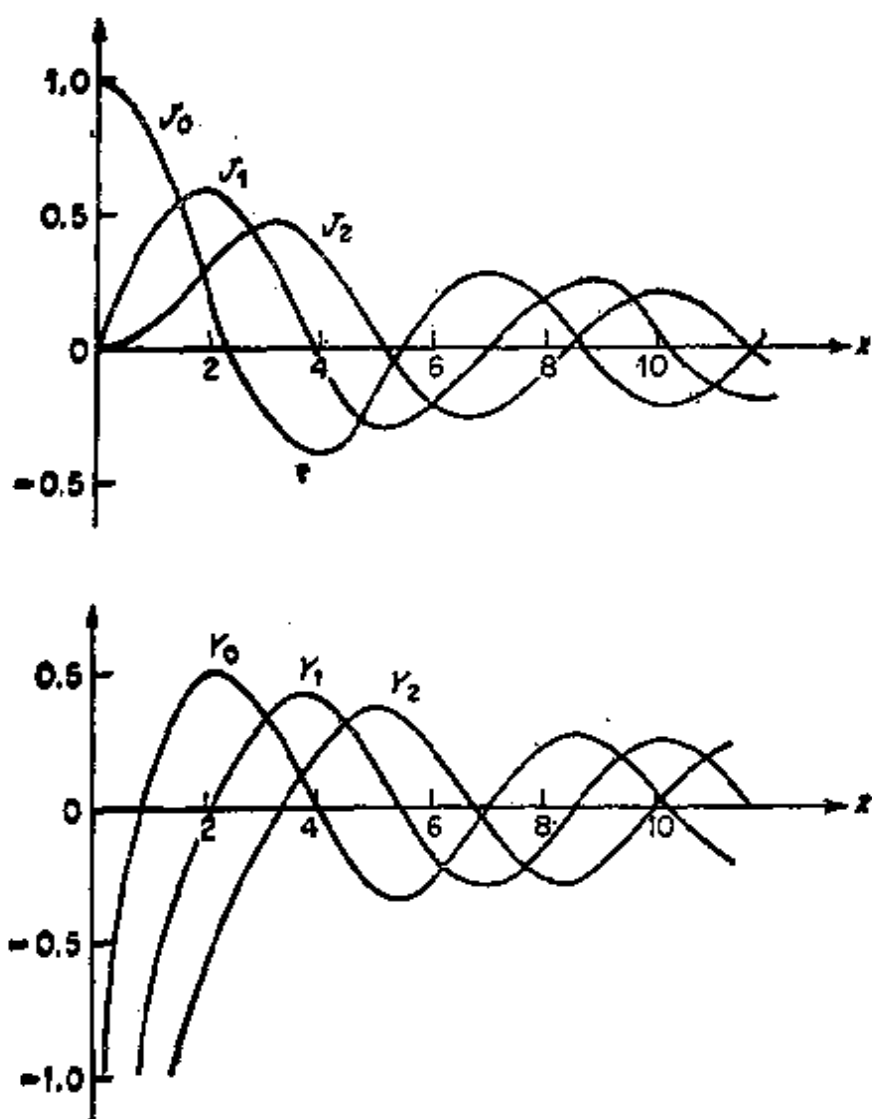


图 1.1 普通的贝塞尔函数

$$H_n^{(2)}(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{kr\pi}} e^{-j(kr - \pi/4 - n\pi/2)} \quad (\text{I.6b})$$

下面给出几个对任何贝塞尔函数  $J_n$ 、 $Y_n$  或  $H_n$  都成立的有用的关系式，其中的  $Z_n$  代表  $J_n$ 、 $Y_n$  或  $H_n$ ：

$$\begin{aligned} xZ_n'(x) &= nZ_n(x) - xZ_{n+1}(x) \\ &= -nZ_n(x) + xZ_{n-1}(x) \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

式中，一撇表示对  $x$  的微分。

$$\int_0^x Z_n(kx)Z_n(lx)x dx = \frac{x}{k^2 - l^2} (kZ_n(lx)Z_{n+1}(kx)$$

$$-I_n(kx)Z_{n+1}(lx)) \quad (\text{II.8})$$

$$\int Z_n^2(kx)xdx = \frac{x^2}{2} \left[ Z_n'^2(x) + \left(1 - \frac{n^2}{k^2x^2}\right) Z_n^2(kx) \right] \quad (\text{II.9})$$

## II.2 变形的贝塞尔函数

当 $k^2$ 为负时， $k$ 为虚数。若令 $k=jh$ ，则贝塞尔方程的解为 $J_n(jhr)$ 和 $Y_n(jhr)$ 。但是，为了方便，引入新的变形的贝塞尔函数，并用 $I_n(hr)$ 和 $K_n(hr)$ 表示。第一类变形的贝塞尔函数 $I_n(hr)$ 为

$$I_n(hr) = j^{-n} J_n(jhr) = j^n J_n(-jhr) \quad (\text{II.10})$$

第二类变形的贝塞尔函数为

$$\begin{aligned} K_n(hr) &= \frac{\pi}{2} j^{n+1} (J_n(jhr) + jY_n(jhr)) \\ &= \frac{\pi}{2} j^{n+1} H_n^{(1)}(jhr) \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

当 $hr$ 的值很大时，得

$$I_n(hr) \sim \frac{e^{hr}}{\sqrt{2\pi hr}} \quad (\text{II.12a})$$

$$K_n(hr) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2hr}} e^{-hr} \quad (\text{II.12b})$$

前几阶变形的贝塞尔函数的曲线绘在图 II.2 中。

对变形的贝塞尔函数适用的若干个有用的关系式为：

$$\begin{aligned} xI_n'(x) &= nI_n(x) + xI_{n+1}(x) \\ &= -nI_n(x) + xI_{n-1}(x) \end{aligned} \quad (\text{II.13a})$$

$$I_0'(x) = -I_1(x) \quad (\text{II.13b})$$

$$\int x^{-n} I_{n+1}(x) dx = x^{-n} I_n(x) \quad (\text{II.14a})$$

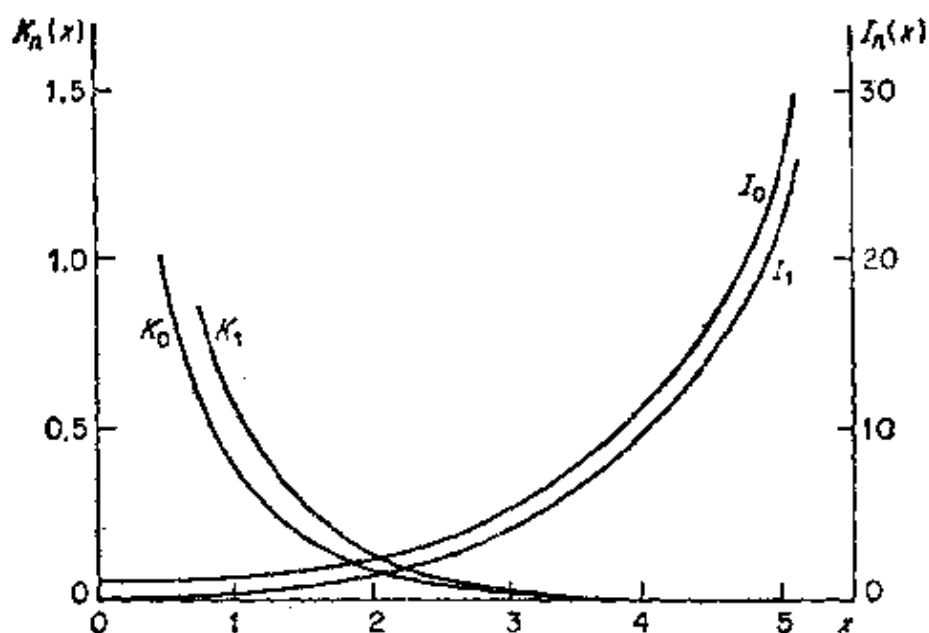


图 1.2 变形的贝塞尔函数

$$\int^x x^n I_{n-1}(x) dx = x^n I_n(x) \quad (\text{II}.14b)$$

当  $n > -1$  时, 得

$$\int_0^x I_n(kx) I_n(lx) x dx = \frac{x}{k^2 - l^2} \{ k I_n(lx) I_{n+1}(kx) - l I_n(kx) I_{n+1}(lx) \} \quad (\text{II}.15)$$

$$\int_0^x I_n^2(kx) x dx = -\frac{x^2}{2} \left[ I_n'^2(kx) - \left( 1 + \frac{n^2}{k^2 x^2} \right) I_n^2(kx) \right] \quad (\text{II}.16)$$

$$\begin{aligned} x K_n'(x) &= n K_n(x) - x K_{n+1}(x) \\ &= -n K_n(x) - x K_{n-1}(x) \end{aligned} \quad (\text{II}.17a)$$

$$K_0(x) = -K_1(x) \quad (\text{II}.17b)$$

$$\int^x x^{-n} K_{n+1}(x) dx = -x^{-n} K_n(x) \quad (\text{II}.18a)$$

$$\int_x^\infty x^n K_{n-1}(x) dx = -x^n K_n(x) \quad (\text{I.18b})$$

当  $\text{Re}(k+1) > 0$  时, 得

$$\begin{aligned} \int_x^\infty K_n(kx) K_n(lx) x dx &= \frac{x}{k^2 - l^2} \{ k K_n(lx) K_{n+1}(kx) \\ &\quad - l K_n(kx) K_{n+1}(lx) \} \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

当  $\text{Re}k > 0$  时,

$$\begin{aligned} \int_x^\infty x K_n^2(kx) dx &= \frac{x^2}{2} \left[ K_n'^2(x) \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 + \frac{n^2}{k^2 x^2} \right) K_n^2(kx) \right] \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

### 参 考 文 献

1. Watson, G.N., "Theory of Bessel Functions," Cambridge University Press, New York, 1922.
2. McLachlan, N.W., "Bessel Functions for Engineers," 2d ed., Oxford University Press, Fair Lawn, N.J., 1948.
3. Bowman, F., "Introduction to Bessel Functions," Dover Publications, Inc., New York, 1958.

## 附录 III 物理常数和其他数据

### III. 1 物理常数

真空中的电容率  $= \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \approx (1/36\pi) \times 10^{-9}$  法拉/米

真空中的导磁率  $= \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  亨利/米

自由空间的阻抗  $= Z_0 = 376.7 \approx 120\pi$  欧姆

光的速度  $= c = 2.998 \times 10^8$  米/秒

电子的电荷  $= e = 1.602 \times 10^{-19}$  库仑

电子的质量  $= m = 9.107 \times 10^{-31}$  千克

$\eta = e/m = 1.76 \times 10^{11}$  库仑/千克

质子的质量  $= M = 1.67 \times 10^{-27}$  千克

玻耳兹曼常数  $= k = 1.380 \times 10^{-23}$  焦耳/ $^{\circ}K$

普朗克常数  $= h = 6.547 \times 10^{-34}$  焦耳·秒

$10^7$  尔格 = 1 焦耳

1 焦耳 =  $0.6285 \times 10^{19}$  电子伏特

1 电子伏特 = 一个电子通过 1 伏特的电位加速所得的能量

1 电子伏特的能量 = 电子的等效温度为  $1.15 \times 10^4$   $^{\circ}K$  电子的等离子

体频率  $f_P = \frac{e}{2\pi} \left( \frac{N}{m\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} = 8.97 N^{\frac{1}{2}}$  赫, 其中,  $N$  是每立方米的电子数

电子回旋加速频率  $f_c = eB/2\pi m = 28000B$  兆赫,  $B$  以韦伯/米<sup>2</sup> 为单位;  $f_c = 2.8B$  兆赫,  $B$  以高斯为单位。

$10^4$  高斯 = 1 韦伯/米<sup>2</sup>



### III.2

### 材 料 的 导 电 率

材 料	导电率(姆欧/米)	材 料	导电率(姆欧/米)
铜(已退火)	$5.8 \times 10^7$	铜	$0.5-1.0 \times 10^7$
铝	$3.54 \times 10^7$	水(蒸馏)	$2 \times 10^{-4}$
银	$6.14 \times 10^7$	海水	3-5
镍	$1.28 \times 10^7$	石英(已熔化)	$< 2 \times 10^{-17}$

### III.3

### 材 料 的 相 对 电 容 率

材 料	频率(兆赫)	$\epsilon'/\epsilon$	损耗角正切 $\epsilon''/\epsilon'$
聚苯乙烯	3,000	2.54	0.00025—0.0010
聚苯乙烯(泡沫)	3,000	1.05	0.00003
丙烯酸树脂	10,000	2.58	0.005
聚四氟乙烯	10,000	2.08	0.00037
熔化的石英	10,000	3.78	0.0001
红宝石云母	3,000	5.4	0.0003
二氧化钛	10,000	90	0.002
红 木	10,000	1.7	0.021

### III.4

### 铜 的 趋 肤 深 度

频 率(赫)	10	60	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$
趋肤深度 $\delta_s$ (厘米)	2.08	0.85	0.66	0.208	$6.6 \times 10^{-2}$	$6.6 \times 10^{-4}$

铜的 $\delta_s = \sqrt{2/\omega\mu\sigma} = 0.66f^{-1/2}$ 厘米( $\sigma = 5.8 \times 10^7$ 姆欧/米)。

## 人名对照表

### 二 划

门雷 *Manley*

### 三 划

马克维兹 *Marcovitz*  
马撒 *Matthaei*  
马萨马鲁 *Matsumaru*

### 四 划

戈登 *Gordon*  
戈斯 *Ghose*  
贝蒂 *Bethe*  
贝克 *Beck*  
贝文西 *Bevenssee*  
韦斯 *Weiss*  
内卡哈拉 *Nakahara*  
巴顿 *Button*  
巴洛 *Barlow*  
比姆 *Beam*  
尤诺哈拉 *Uenohara*

### 五 划

卡林 *Carlin*  
卡伦 *Cullen*  
卡肖 *Culshaw*  
卡鲍韦克 *Karbowiak*  
佛罗姆 *From*

弗利斯	<i>Frits</i>
布兰奇	<i>Branch</i>
布朗	<i>Brown</i>
布鲁尔	<i>Brewer</i>
布朗韦尔	<i>Bronwell</i>
布里渊	<i>Brillouin</i>
布雷德利	<i>Bradley</i>
布莱克韦尔	<i>Blackwell</i>
艾希	<i>Ishii</i>
艾尔斯	<i>Ayres</i>
艾德勒	<i>Adler</i>
古鲍	<i>Goubau</i>
古雷	<i>Gouray</i>
古雷维奇	<i>Gurevich</i>
丘	<i>Chu</i>
本森	<i>Benson</i>
卢德尔	<i>Luderer</i>
兰科	<i>Ranco</i>
皮尔斯	<i>Pierce</i>
汉密尔顿	<i>Hamilton</i>

## 六 划

乔丹	<i>Jordan</i>
乔唐罗	<i>Chodorow</i>
西尔弗	<i>Silver</i>
西格曼	<i>Siegman</i>
米兰	<i>Mihran</i>
米尔福德	<i>Milford</i>
米勒	<i>Miller</i>
杨	<i>Young</i>
列文	<i>Lewin</i>

休尔	<i>Heuer</i>
吉尔登	<i>Gilden</i>
伦吉尔	<i>Lenygel</i>
亚里夫	<i>Yario</i>
瓦坦尼	<i>Vartanian</i>
齐特利	<i>Zitelh</i>
芒掘德	<i>Mumford</i>
安德森	<i>Anderson</i>
托雷多·代·弗朗西	<i>Toraldo di Franca</i>

## 七 划

克尔	<i>Kerr</i>
克利	<i>Kleen</i>
克吕伐	<i>Kluver</i>
克恩斯	<i>Kerns</i>
克洛普芬斯坦	<i>Klopfenstein</i>
克劳斯	<i>Kraus</i>
克劳斯	<i>Krauss</i>
克拉里科茨	<i>Clarricoats</i>
克里斯琴	<i>Christian</i>
沃森	<i>Watson</i>
沃尔施太克	<i>Vuylsteke</i>
沃特金斯	<i>Watkins</i>
希夫	<i>Schiff</i>
希沙	<i>Hisull</i>
里布莱特	<i>Riblet</i>
里格罗德	<i>Rigrod</i>
库罗卡维	<i>Kurokawa</i>
库珀	<i>Kuper</i>
利	<i>Li</i>
辛格	<i>Singer</i>

苏胡	<i>Sookoo</i>
索利马	<i>Solymar</i>
刘易斯	<i>Lewis</i>
亨斯珀格	<i>Hensperger</i>
麦克拉克伦	<i>Melachlan</i>

## 八 划

金	<i>King</i>
金兹顿	<i>Ginzton</i>
阿林森	<i>Allison</i>
阿特沃特	<i>Atwater</i>
阿特伍德	<i>Aitwood</i>
罗	<i>Rowe</i>
罗伯兹	<i>Roberts</i>
范诺	<i>Fano</i>
范德齐	<i>Van der Ziel</i>
范布莱尔	<i>Van Bladel</i>
拉根	<i>Ragan</i>
拉克斯	<i>Lax</i>
波林	<i>Pauling</i>
迪克	<i>Diche</i>
奈普	<i>Knipp</i>
昂格尔	<i>Unger</i>
洋内博格	<i>Ponnenborg</i>

## 九 划

哈林顿	<i>Harrington</i>
哈特里	<i>Hartree</i>
哈恩	<i>Hahn</i>
哈维	<i>Harvey</i>
柯林	<i>Collin</i>

柯林斯  
科恩  
科诺  
威尔逊  
珀塞尔  
施莱辛格

*Collins*  
*Cohn*  
*Kohn*  
*Wilson*  
*Purcell*  
*Schlesinger*

## 十 划

钱  
钱德勒  
莫茨  
莫里森  
特鲁普  
特罗谢尔  
索思沃思  
海尔迈耶  
埃利奥特  
格斯廷西克

*Chang*  
*Chandler*  
*Motz*  
*Morrison*  
*Troup*  
*Troetschel*  
*Southworth*  
*Heilmeyer*  
*Elliott*  
*Gustincic*

## 十一 划

康泽布  
康帕奈伊斯  
梅尔乔  
基尔霍夫

*Kotzebue*  
*Kompaneys*  
*Melchor*  
*Schelkunoff*

## 十二 划

斯卡尼  
斯马林  
斯莱特  
斯特拉顿  
斯洋吉伯格

*Skalnik*  
*Smullin*  
*Slater*  
*Stratton*  
*Spangenberg*

博尔扬	<i>Polljakn</i>
博林特	<i>Bolinder</i>
博伊德	<i>Boyd</i>
博布罗夫	<i>Bobroff</i>
琼生	<i>Johnson</i>
琼斯	<i>Jones</i>
奥邓格	<i>Ordung</i>
奥赞基	<i>Ozaki</i>
温伯格	<i>Weinberg</i>
温策尔	<i>Wenzel</i>
道	<i>Dow</i>
惠尼里	<i>Whinnery</i>
普朗西	<i>Plonsey</i>
蒂斯彻	<i>Tischer</i>
森赛普	<i>Sensiper</i>
彭菲尔德	<i>Penfield</i>

### 十三 划

赖克	<i>Reich</i>
赖茨	<i>Reitz</i>
鲍曼	<i>Lowman</i>
福克斯	<i>Fox</i>
雷富斯	<i>Rafuse</i>
蒙哥马利	<i>Monigomery</i>

### 十四 划

赫夫纳	<i>Heffner</i>
赫脱尔	<i>Hutter</i>
豪斯	<i>Haus</i>

## 十五 划

摩根

*Morgan*

## 十六 划

诨尼

*Honey*

霍普费

*Hopfer*

霍索诺

*Hosono*

萨格

*Sugi*