

## 第 2 章

### 库仑定律

|                           |    |
|---------------------------|----|
| 2.1 电荷.....               | 3  |
| 2.2 库仑定律.....             | 3  |
| 动画 2.1: 范德格拉夫起电机.....     | 4  |
| 2.3 叠加原理.....             | 4  |
| 例 2.1: 三个电荷.....          | 5  |
| 2.4 电场.....               | 6  |
| 动画 2.2: 点电荷的电场.....       | 7  |
| 2.5 电场线.....              | 7  |
| 2.6 电场中带电粒子受到的力.....      | 8  |
| 2.7 电偶极子.....             | 9  |
| 2.7.1 偶极子的电场.....         | 9  |
| 动画 2.3: 电偶极子.....         | 10 |
| 2.8 电场中的偶极子.....          | 11 |
| 2.8.1 电偶极子的势能.....        | 12 |
| 2.9 电荷密度.....             | 13 |
| 2.9.1 体电荷密度.....          | 13 |
| 2.9.2 面电荷密度.....          | 14 |
| 2.9.3 线电荷密度.....          | 14 |
| 2.10 连续电荷分布的电场.....       | 14 |
| 例 2.2 棒的轴线上的电场.....       | 14 |
| 例 2.3 棒的垂直平分线上的电场.....    | 15 |
| 例 2.4 圆环轴线上的电场.....       | 17 |
| 例 2.5 均匀带电圆盘的电场.....      | 18 |
| 2.11 总结.....              | 20 |
| 2.12 解题技巧.....            | 21 |
| 2.13 解题.....              | 23 |
| 2.13.1 氢原子.....           | 23 |
| 2.13.2 密立根油滴实验.....       | 24 |
| 2.13.3 垂直于电场方向的电荷运动.....  | 25 |
| 2.13.4 偶极子的电场.....        | 27 |
| 2.13.5 电荷弧线的电场.....       | 29 |
| 2.13.6 有限长度棒的非轴线上的电场..... | 29 |
| 2.14 概念题.....             | 31 |
| 2.15 附加题.....             | 31 |
| 2.15.1 三个点电荷.....         | 31 |
| 2.15.2 三个点电荷.....         | 32 |
| 2.15.3 四个点电荷.....         | 32 |

|                       |    |
|-----------------------|----|
| 2.15.4 半圆形绝缘线 .....   | 32 |
| 2.15.5 电偶极子 .....     | 33 |
| 2.15.6 带电柱壳与柱体 .....  | 33 |
| 2.15.7 两个导电球 .....    | 34 |
| 2.15.8 电偶极子上的转矩 ..... | 34 |

# 库仑定律

## 2.1 电荷

我们观察到的电荷有两种，分别称为正电荷和负电荷。这种约定来自本杰明·富兰克林的实验。他用丝绸摩擦玻璃棒，将玻璃棒上带的电荷叫做正电荷。他又用毛皮摩擦火漆，并将火漆所带的电荷称为负电荷。同号电荷相互排斥，异号电荷相互吸引。电荷的单位叫库仑（C）。

自然界中最小的“自由”电荷是电子或质子所带的电荷，其大小为

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (2.1.1)$$

日常物体所带电荷都是  $e$  的整数倍。电子带一个单位的负电荷  $-e$ ，而质子则带一个单位的正电荷  $+e$ 。在一个封闭系统中，由于电荷既不会产生也不会被消灭，因此总电荷是守恒的。但电荷可以从一个物体转移到另一个物体。

## 2.2 库仑定律

考虑由真空中两个距离为  $r$  的点电荷  $q_1$  和  $q_2$  组成的系统。 $q_1$  作用在  $q_2$  上的力按库仑定律确定：

$$\vec{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (2.2.1)$$

这里  $k_e$  是库仑常数， $\hat{r} = \vec{r}/r$  是从  $q_1$  指向  $q_2$  的单位矢量，如图 2.2.1(a) 所示。

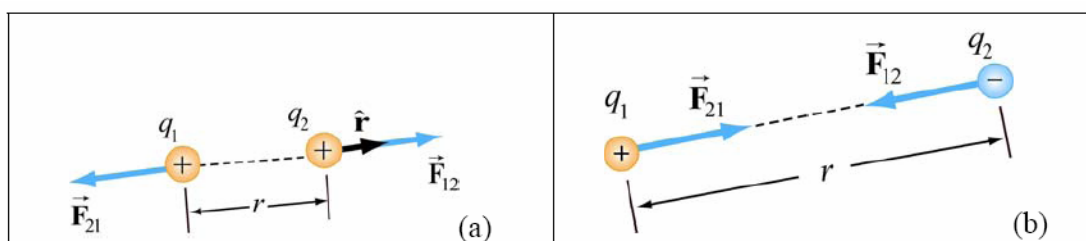


图 2.2.1 两个电荷之间的库仑相互作用

注意，电性力是一个既有大小又有方向的矢量。在国际单位之下，库仑常数  $k_e$  为

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.9875 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \quad (2.2.2)$$

这里

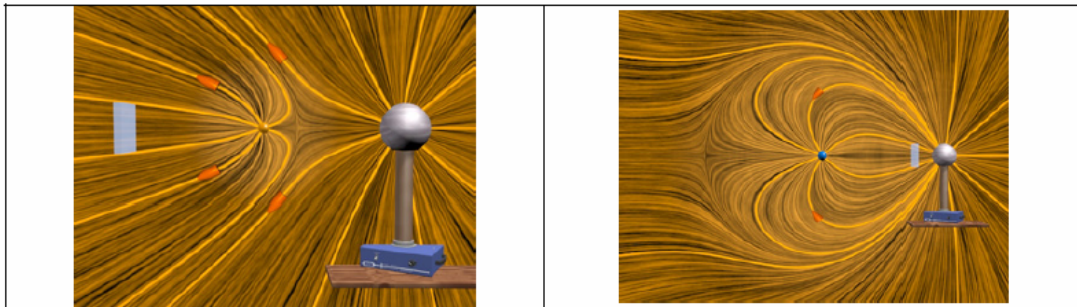
$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi(8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2)} = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N} \cdot \text{m}^2 \quad (2.2.3)$$

是“真空介电常数”。类似地， $q_2$  作用在  $q_1$  上的力为  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ ，如图 2.2.1(b) 所示。这与牛顿第三定律是一致的。

作为例子，我们来考虑由相距  $r = 5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$  的质子（原子核）和电子组成的氢原子。两个粒子间的静电力可近似为  $F_e = k_e e^2 / r^2 = 8.2 \times 10^{-8} \text{ N}$ 。另一方面，我们可以证明，二者间的万有引力则只有  $F_g \approx 3.6 \times 10^{-47} \text{ N}$ 。因此在考虑静电力时，物体之间的万有引力可忽略不计！

## 动画 2.1：范德格拉夫起电机

考虑图 2.2.2(a)。这个图展示了两个物体之间由于各自的电场而传递的排斥力。整个系统由范德格拉夫起电机上的带电金属球组成。球的空间位置固定，不能自由移动。另一个物体是一个可自由移动的小带电球（我们忽略该球的重力）。按照库仑定律，这两个同号带电体之间互相排斥，就是说，小带电球将收到一个来自范德格拉夫球的排斥力。



**图 2.2.2** (a) 两个同号电荷之间由于各自电场之间的“应力”而互相排斥。这里对电荷的电场用了“草籽”表示和“场线”表示。(b) 两个异号电荷之间由于各自电场之间的“应力”而互相吸引。

动画描述了小球的运动和该情形下的电场。注意，为了重复动画中小球的运动，我们在范德格拉夫起电机不远处安置了小挡板来“反弹”小球。

在讨论这个动画之前，我们先来看看图 2.2.2(b)，它显示了异号电荷相互作用的一个片断。这里小球上的电荷与范德格拉夫球上的电荷异号。由库仑定律知，这两个物体相互吸引，小球要收到一个吸向范德格拉夫起电机的力。为了重复动画中小球的运动，我们在范德格拉夫起电机不远处安置了小挡板来“反弹”小球。

这两个动画的关键是强调了这样一个事实：两电荷之间的库仑力不是一种“远程作用”。而是由范德格拉夫球上电荷的电场通过周边空间直接“接触”传递的应力作用。这种应力以连续方式从一个空间元传递到相邻的另一个空间元，一直传递到小球所在的空间，最终达到小球本身。虽然两个球彼此并不直接接触，但它们直接与媒质接触，或者说与它们之间存在的机制有关。小球与范德格拉夫球之间的力是由它们所在的空间里感应出的应力（以有限速度）传递的。

迈克尔·法拉第率先提出了场的理论；他用“力线”或“场线”来表示场。他也用画出力线的方法来得到对场传递应力的认识。他第一个认为，在带电体之间连续存在的这些场能够传递应力，这种应力导致带电物体间存在力的作用。

## 2.3 叠加原理

库仑定律可以应用到任意一对电荷上。当空间存在不止两个电荷体时，其中任意一个电荷体受到的力等于所有其他电荷体单独存在时对它作用的矢量和。例如，如果有三个电荷，则电荷  $q_3$  受到  $q_1$  和

$q_2$ 的力可以写为

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} \quad (2.3.1)$$

叠加原理可以从下面的例子看出来。

### 例 2.1：三个电荷

三个电荷布局如图 2.3.1 所示。求  $q_3$  上受到力。假定  $q_1 = 6.0 \times 10^{-6} \text{C}$ ， $q_2 = -q_1 = -6.0 \times 10^{-6} \text{C}$ ， $q_3 = +3.0 \times 10^{-6} \text{C}$ ， $a = 2.0 \times 10^{-2} \text{m}$ 。

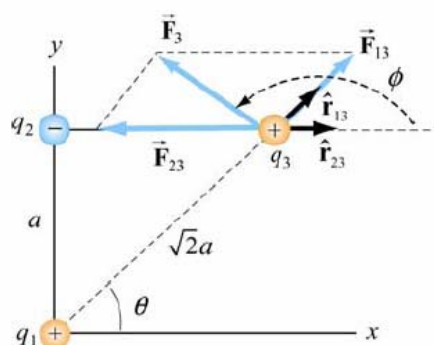


图 2.3.1 三个电荷的系统

**解：**

利用叠加原理， $q_3$ 上受到力为

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \hat{r}_{13} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}^2} \hat{r}_{23} \right)$$

在这个例子中，第二项有负的系数，因为  $q_2$  是负的。单位矢量  $\hat{r}_{13}$  和  $\hat{r}_{23}$  方向并不相同。为了计算这个和，我们将这两个单位矢量在笛卡尔坐标系下分解为相应的分量，并将力按矢量相加的原理进行加和。

由图可见，从  $q_1$  指向  $q_3$  的单位矢量  $\hat{r}_{13}$  可以写成

$$\hat{r}_{13} = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{i} + \hat{j})$$

类似地，我们可以写出从  $q_2$  指向  $q_3$  的单位矢量  $\hat{r}_{23} = \hat{i}$ 。因此总的力为

$$\begin{aligned} \vec{F}_3 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \hat{r}_{13} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}^2} \hat{r}_{23} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_3}{(\sqrt{2}a)^2} \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{i} + \hat{j}) + \frac{(-q_1) q_3}{a^2} \hat{i} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{a^2} \left[ \left( \frac{\sqrt{2}}{4} - 1 \right) \hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{4} \hat{j} \right] \end{aligned}$$

总的力的大小为

$$F_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{a^2} \left[ \left( \frac{\sqrt{2}}{4} - 1 \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$= (9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2) \frac{(6.0 \times 10^{-6} \text{ C})(3.0 \times 10^{-6} \text{ C})}{(2.0 \times 10^{-2} \text{ m})^2} (0.74) = 3.0 \text{ N}$$

这个力与正  $x$  轴的夹角为

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{F_{3,y}}{F_{3,x}} \right) = \tan^{-1} \left[ \frac{\sqrt{2}/4}{-1 + \sqrt{2}/4} \right] = 151.3^\circ$$

注意，这个方程有两个解。第二个解  $\phi = -28.7^\circ$  不正确，因为它表示这个力有正  $\hat{i}$  分量和负  $\hat{j}$  分量。

对于有  $N$  个电荷的系统，第  $j$  个电荷受到的力为

$$\vec{F}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \vec{F}_{ij} \quad (2.3.2)$$

这里  $\vec{F}_{ij}$  表示第  $i$  个电荷与第  $j$  个电荷之间的作用力。叠加原理意味着，任何两个电荷之间的净作用力与其他电荷存在与否无关。当然这只有在电荷的位置均固定不变的情形下才是对的。

## 2.4 电场

如同万有引力一样，静电力也是一种远程作用力，它甚至无需物体彼此间接触。为了正确理解这个概念，我们将这种远程作用合理地说是电荷产生一个场，并通过这个场与另一个电荷作用。

电荷  $q$  产生的场分布在空间各处。为了定量确定这个场的强度，我们用置于空间某点上的正的“检验电荷”  $q_0$  来测量其受到的力。电场  $\vec{E}$  定义为：

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_e}{q_0} \quad (2.4.1)$$

我们将  $q_0$  取得无限小，使得  $q_0$  自身的场不会对“源电荷”场产生干扰。电场与重力场  $\vec{g} = \lim_{m_0 \rightarrow 0} \vec{F}_m / m_0$  的类比见图 2.4.1。

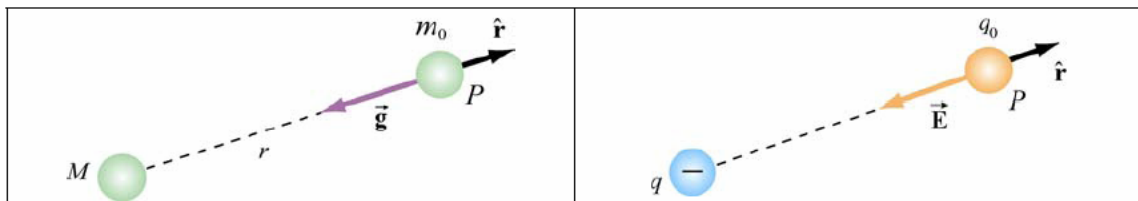


图 2.4.1 电场  $\vec{E}$  与重力场  $\vec{g}$  的类比

从场论的观点看，我们说电荷  $q$  产生一个电场  $\vec{E}$ ，它对检验电荷  $q_0$  时加一个作用力  $\vec{F}_e = q_0 \vec{E}$ 。

利用方程(2.4.1)给出的电场定义和库仑定律，电荷  $q$  在  $r$  距离位置上的电场为

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (2.4.2)$$

运用叠加原理，电荷组的总电场等于每个电荷各自电场的矢量和：

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r} \quad (2.4.3)$$

## 动画 2.2：点电荷的电场

图 2.4.2 给出了正、负运动点电荷电场的一个示意片断，这里假定电荷的运动速度远小于光速。

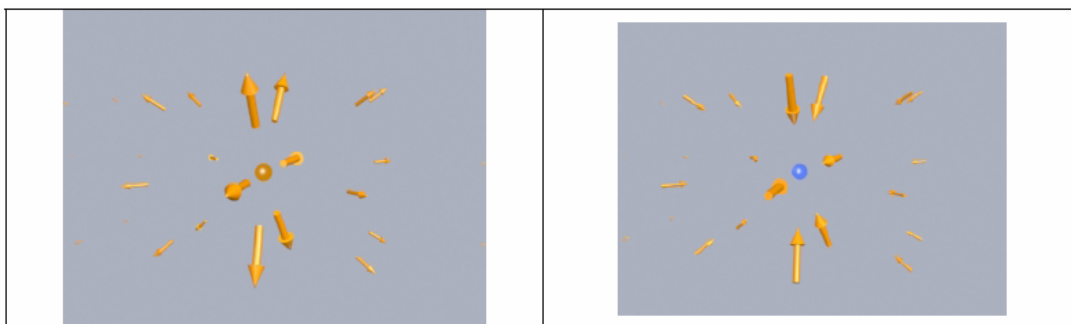


图 2.4.2 (a) 正运动电荷的电场；(b) 负运动电荷的电场，假定电荷的运动速度均远小于光速。

## 2.5 电场线

电场线为空间电场的几何表示提供了方便。正电荷和负电荷的电场线见图 2.5.1。

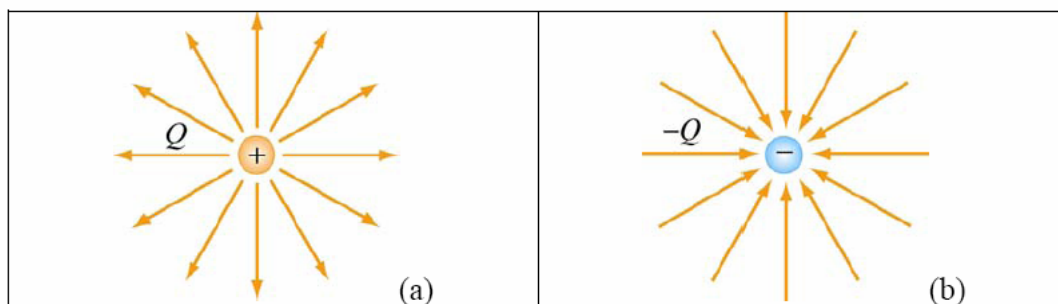


图 2.5.1 (a) 正电荷的电场线；(b) 负电荷的电场线。

注意，正电荷的电场线沿径向向外，负电荷的电场线沿径向向内。对于一对大小相等、符号相反的电荷（电偶极子），其电场线分布见图 2.5.2。



### 图 2.5.2 电偶极子的电场线

电场线的图案有以下一些特征：

- (1) 对称性：连接两电荷的电场线上方的每个点都会在其下方找到相应的对称点。因此，电场线的图案必然是对称的。
- (2) 近场：电荷附近地方的场占优势。因此，电场线是径向且球对称的。
- (3) 远场：在远离电荷系的地方，电场的分布就像是  $Q = \sum_i Q_i$  的点电荷的场分布。因此场线也是沿径向向外的，除非  $Q = 0$ 。
- (4) 零点：它是  $\vec{E} = \vec{0}$  的点，该点上没有电场线通过。

电场线的特征可总结如下：

- 电场矢量  $\vec{E}$  在空间点的方向即为电场线的切线方向。
- 对于垂直于场线的曲面，通过单位面积的场线数目正比于该区域电场的强度。
- 场线一定始于正电荷（或无穷远）而止于负电荷（或无穷远）。
- 没有两根场线会彼此相交；否则电场在该点就会有两个不同的方向。

## 2.6 电场中带电粒子受到的力

考虑一个带  $+q$  电荷的粒子在两带异号电荷的平行极板间运动，如图 2.6.1 所示。

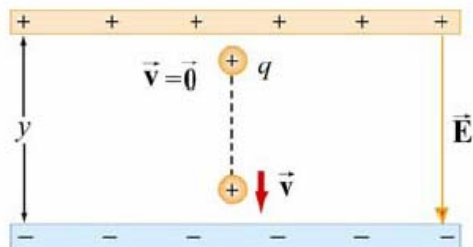


图 2.6.1 电荷在均匀电场中运动

令板间电场为  $\vec{E} = -E_y \hat{j}$ ，且  $E_y > 0$ 。（在第 4 章，我们将证明，在无穷大带异号电荷的平行极板间的电场是均匀的。）运动电荷将受到一个向下的库仑力：

$$\vec{F}_e = q\vec{E} \quad (2.6.1)$$

注意，受力的电荷  $q$  和作为场源的极板上的电荷是有区别的。虽然电荷  $q$  也是一个电场的源，但按照牛顿第三定律，该电荷不可能作用到自身。因此， $\vec{E}$  只是“源”电荷产生的场。

按照牛顿第二定律，净力将引起电荷作加速度运动：



$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_e}{m} = \frac{q\vec{E}}{m} = -\frac{qE_y}{m} \hat{j} \quad (2.6.2)$$

假定粒子从正极板逸出时是静止的 ( $v_0 = 0$ )。当它碰上负极板时，其最终速度  $v$  为

$$v_y = \sqrt{2|a_y|y} = \sqrt{\frac{2yqE_y}{m}} \quad (2.6.3)$$

这里  $y$  是两极板间距离。当粒子到达负极板时，其动能为

$$K = \frac{1}{2}mv_y^2 = qE_y y \quad (2.6.4)$$

## 2.7 电偶极子

电偶极子由两个等量异号的电荷  $+q$  和  $-q$  组成，二者间相距  $2a$ ，如图 2.7.1 所示。

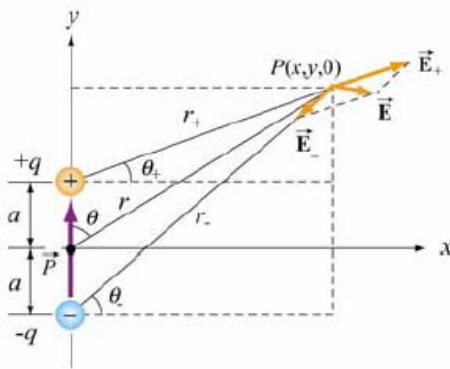


图 2.7.1 电偶极子

偶极矩矢量  $\vec{p}$  由  $-q$  指向  $+q$  (沿  $+y$  方向):

$$\vec{p} = 2qa \hat{j} \quad (2.7.1)$$

电偶极矩的大小为  $p = 2qa$ ，其中  $q > 0$ 。对有  $N$  个电荷的总体电中性系统，电偶极矩  $\vec{p}$  定义为

$$\vec{p} \equiv \sum_{i=1}^{i=N} q_i \vec{r}_i \quad (2.7.2)$$

这里  $\vec{r}_i$  是  $q_i$  的位置矢量。偶极子的事例有 HCl, CO, H<sub>2</sub>O 和其他偶极分子。原则上，任何正、负电荷中心不重合的分子都可以看成是偶极子。在第 5 章，我们还将给出，外电场可以使非极化分子感应出偶极矩。

### 2.7.1 偶极子的电场

电偶极子的电场是怎样的呢？从图 2.7.1 我们看到， $P$  点电场的  $x$  分量为

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\cos\theta_+}{r_+^2} - \frac{\cos\theta_-}{r_-^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{x}{[x^2 + (y-a)^2]^{3/2}} - \frac{x}{[x^2 + (y+a)^2]^{3/2}} \right) \quad (2.7.3)$$

这里

$$r_{\pm}^2 = r^2 + a^2 \mp 2ra \cos\theta = x^2 + (y \mp a)^2 \quad (2.7.4)$$

类似地,  $y$  分量为

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\sin\theta_+}{r_+^2} - \frac{\sin\theta_-}{r_-^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{y-a}{[x^2 + (y-a)^2]^{3/2}} - \frac{y+a}{[x^2 + (y+a)^2]^{3/2}} \right) \quad (2.7.5)$$

在  $r \gg a$  的“点偶极子”极限情形下, 我们可以证明(见解题 2.13.4) 上述公式可以简化为

$$E_x = \frac{3p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin\theta \cos\theta \quad (2.7.6)$$

和

$$E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3\cos^2\theta - 1) \quad (2.7.7)$$

这里  $\sin\theta = x/r$ ,  $\cos\theta = y/r$ 。利用  $3p r \cos\theta = 3\vec{p} \cdot \vec{r}$  和其他代数运算, 偶极子电场可以写为

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{\vec{p}}{r^3} + \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} \right) \quad (2.7.8)$$

注意, 方程(2.7.8)对  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  的三维情形也成立。这个方程表明, 偶极子电场  $\vec{E}$  随  $r$  按  $1/r^3$  下降, 这一点与点电荷情形不同。这是预料中的, 因为偶极子的净电荷为零, 因此随着距离增大应当比点电荷的  $1/r^2$  有更快的下降。有限偶极子和点偶极子的电场线见图 2.7.2。

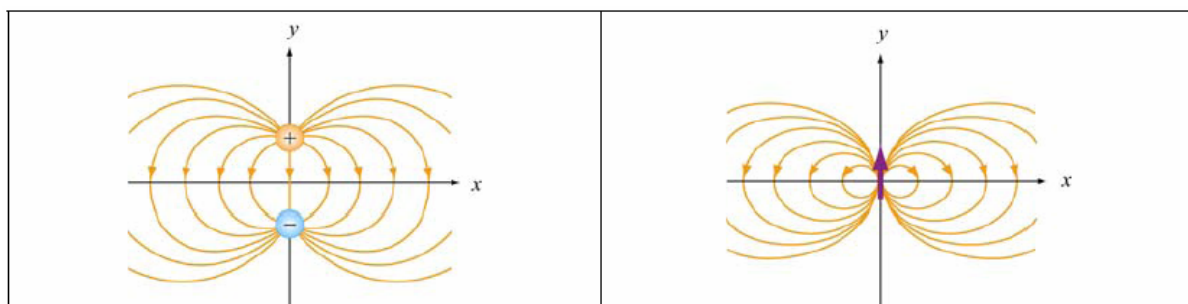


图 2.7.2 (a) 有限电偶极子的电场线; (b) 点电偶极子的电场线

### 动画 2.3: 电偶极子

图 2.7.3 用人机互动的 ShockWave 模拟显示了偶极子图形的产生的过程。在观察点上, 我们显示了每个电荷的电场, 其矢量和给出了总电场。为了直观感知这个总电场, 我们也显示了这一情形下电

场的“草籽”表示。观察点可在空间移动，以便从不同视角来观察每个电荷的电场对总电场的贡献。

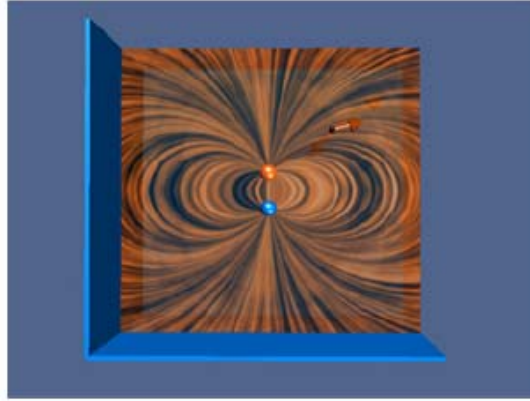


图 2.7.3 两个等量异号电荷的电场的人机互动 ShockWave 模拟

## 2.8 电场中的偶极子

当我们将一个偶极矩矢量  $\vec{p}$  与  $x$  轴有一定夹角的电偶极子放入均匀电场  $\vec{E} = E\hat{i}$  中会出现什么情况呢？从图 2.8.1 可以看出，指向  $\vec{p}$  方向的单位矢量为  $\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$ 。因此，我们有

$$\vec{p} = 2qa(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}) \quad (2.8.1)$$

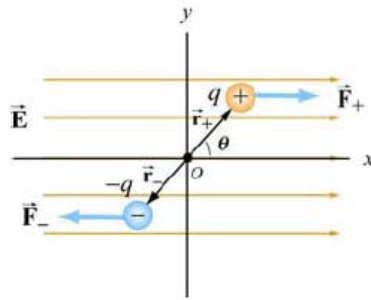


图 2.8.1 均匀电场中的偶极子

正如我们在图 2.8.1 看到的，由于每个电荷都受到相等但相反的电场所施加的力的作用，偶极子上的净力  $\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = 0$ 。尽管净力为零，但电场对偶极子施加的转矩却不为零。这个对偶极子中点的转矩为

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = (a\cos\theta\hat{i} + a\sin\theta\hat{j}) \times (F_+\hat{i}) + (-a\cos\theta\hat{i} - a\sin\theta\hat{j}) \times (-F_-\hat{i}) \\ &= a\sin\theta F_+(-\hat{k}) + a\sin\theta F_-(-\hat{k}) \\ &= 2aF\sin\theta(-\hat{k}) \end{aligned} \quad (2.8.2)$$

这里  $F_+ = F_- = F$ 。转矩的方向是  $-\hat{k}$ ，或者说是指向纸内。转矩  $\vec{\tau}$  的作用是使偶极子顺时针转动使得偶极矩  $\vec{p}$  变得沿电场  $\vec{E}$  的方向。由  $F = qE$  知，转矩的大小可以写成

$$\tau = 2a(qE)\sin\theta = (2aq)E\sin\theta = pE\sin\theta$$

转矩的一半表达式为

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (2.8.3)$$

因此，我们看到，偶极矩与电场的叉积等于转矩。

### 2.8.1 电偶极子的势能

电场使偶极子转过  $\theta$  角所做的功为

$$dW = -\tau d\theta = -pE \sin \theta d\theta \quad (2.8.4)$$

负号表示转矩的方向与转角  $\theta$  增加的方向相反。因此，电场使偶极子由  $\theta_0$  转到  $\theta$  时所做的总功为

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} (-pE \sin \theta) d\theta = pE (\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (2.8.5)$$

这个结果说明，当  $\cos \theta > \cos \theta_0$  时，电场做正功。偶极子势能的变化  $\Delta U$  是电场做功的负值：

$$\Delta U = U - U_0 = -W = -pE (\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (2.8.6)$$

这里  $U_0 = -pE \cos \theta_0$  是偶极子参考点的势能。我们一般选  $\theta_0 = \pi/2$  作为参考点，以便使其势能为零， $U_0 = 0$ 。因此，在外场中偶极子的势能为

$$U = -pE \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (2.8.7)$$

当系统的势能最低时系统处于稳定平衡态。这时偶极子  $\vec{p}$  沿电场  $\vec{E}$  的方向，其势能最小，为  $U_{\min} = -pE$ 。反之，当  $\vec{p}$  与电场  $\vec{E}$  反平行时，其势能最高，为  $U_{\min} = +pE$ ，此时系统处于不稳定状态。

如果偶极子是处于非均匀电场中，这时偶极子除了受到转矩作用外，还受到一个净力的作用，其结果合运动是线性加速和转动的叠加。在图 2.8.2 中，我们假设了  $+q$  处的电场  $\vec{E}_+$  不同于  $-q$  处的电场  $\vec{E}_-$ 。

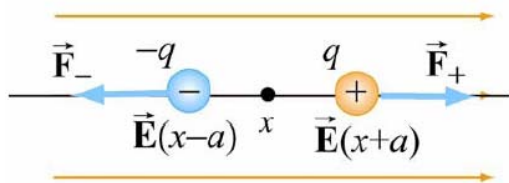


图 2.8.2 偶极子的受力

假定偶极子非常小，我们将电场作关于  $x$  的展开：

$$E_+(x+a) \approx E(x) + a \left( \frac{dE}{dx} \right), \quad E_-(x-a) \approx E(x) - a \left( \frac{dE}{dx} \right) \quad (2.8.8)$$

于是偶极子上的受力为

$$\vec{F}_e = q(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = 2qa \left( \frac{dE}{dx} \right) \hat{i} = p \left( \frac{dE}{dx} \right) \hat{i} \quad (2.8.9)$$

偶极子受到净力作用的一个例子是纸屑与经梳理头发而带电的梳子之间的相互吸引。纸屑上带有感应出的偶极矩（深入讨论见第 5 章），而梳子上的电场因其不规则形状则是非均匀的（图 2.8.3）。

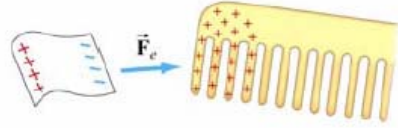


图 2.8.3 纸屑与梳子之间的静电吸引

## 2.9 电荷密度

少量带电粒子的电场可以用叠加原理很快计算出来。但如果我们遇到的是空间某区域中大量电荷分布的情形又当如何呢？我们来考虑图 2.9.1 的体系：

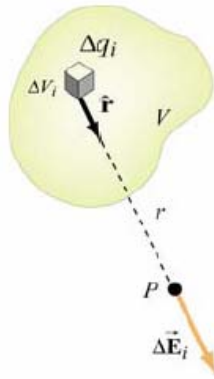


图 2.9.1 小电荷元  $\Delta q_i$  的电场

### 2.9.1 体电荷密度

假定我们要求空间  $P$  点的电场。我们在电荷体内取一小块含有  $\Delta q_i$  电荷量的体积元  $\Delta V_i$ 。这个体积元  $\Delta V_i$  内电荷间的距离要远小于  $\Delta V_i$  到  $P$  点的距离  $r$ 。在  $\Delta V_i$  趋于无穷小的极限情形下，我们定义体电荷密度  $\rho(\vec{r})$  为

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\Delta q_i}{\Delta V_i} = \frac{dq}{dV} \quad (2.9.1)$$

$\rho(\vec{r})$  的量纲在国际单位之下是电荷/单位体积 ( $C/m^3$ )。整个体积  $V$  内的总电荷量为

$$Q = \sum_i \Delta q_i = \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad (2.9.2)$$

这里电荷密度的概念可与质量密度  $\rho_m(\vec{r})$  相类比。当大量原子被约束在一定体积内时，我们也是取连续体极限来求得物体的质量：

$$M = \int_V \rho_m(\vec{r}) dV \quad (2.9.3)$$

## 2.9.2 面电荷密度

在某些情形下，电荷可以分布在面积为  $A$  的曲面  $S$  上，此时的面电荷密度  $\sigma$  定义为：

$$\sigma(\vec{r}) = \frac{dq}{dA} \quad (2.9.4)$$

$\sigma$  的量纲在国际单位之下是电荷/单位面积 ( $\text{C}/\text{m}^2$ )。整个曲面  $S$  上的总电荷量为

$$Q = \iint_S \sigma(\vec{r}) dA \quad (2.9.5)$$

## 2.9.3 线电荷密度

如果电荷分布在长度为  $l$  的线上，则我们定义线电荷密度  $\lambda$  为：

$$\lambda(\vec{r}) = \frac{dq}{d\ell} \quad (2.9.6)$$

$\lambda$  的量纲在国际单位之下是电荷/单位长度 ( $\text{C}/\text{m}$ )。整个线段上的总电荷量为

$$Q = \int_{\text{line}} \lambda(\vec{r}) d\ell \quad (2.9.7)$$

如果电荷在整个区域内是均匀分布的，则密度 ( $\rho$ ,  $\sigma$  或  $\lambda$ ) 也是均匀的。

## 2.10 连续电荷分布的电场

每个电荷元  $dq$  在  $P$  点的电场由库仑定律给出：

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r} \quad (2.10.1)$$

这里  $r$  是  $dq$  到  $P$  点的距离， $\hat{r}$  是相应的单位矢量（见图 2.9.1）。例用叠加原理，总电场  $\vec{E}$  是所有这些无穷小电荷元贡献的矢量和：

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{dq}{r^2} \hat{r} \quad (2.10.2)$$

这是一个矢量积分，它由三个分离的积分组成，每个积分给出电场的分量。

### 例 2.2 棒的轴线上的电场

长  $l$  的非导体棒上的均匀正电荷密度为  $\lambda$ ，总电荷量为  $Q$ ，棒沿  $x$  轴放置，如图 2.10.1。

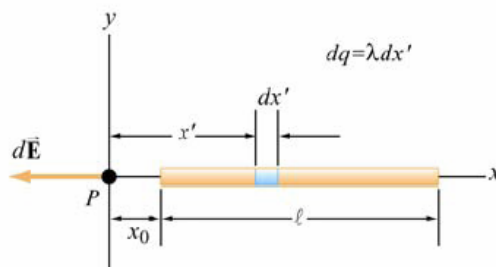


图 2.10.1 线电荷沿轴线的电场

求棒的轴线上距一端距离为  $x_0$  处  $P$  点的电场。

**解:**

线电荷密度均匀, 为  $\lambda = Q/l$ 。小线元  $dx'$  的电荷为  $dq = \lambda dx'$ 。由于源带的是正电荷, 故  $P$  点的电场指向  $-x$  方向, 从源指向  $P$  的单位矢量为  $\hat{\mathbf{r}} = -\hat{\mathbf{i}}$ 。 $dq$  在  $P$  点的电场为

$$d\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{x'^2} (-\hat{\mathbf{i}}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q dx'}{\ell x'^2} \hat{\mathbf{i}}$$

对整个长度积分, 得

$$\vec{\mathbf{E}} = \int d\vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\ell} \int_{x_0}^{x_0+\ell} \frac{dx'}{x'^2} \hat{\mathbf{i}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\ell} \left( \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0+\ell} \right) \hat{\mathbf{i}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x_0(\ell+x_0)} \hat{\mathbf{i}} \quad (2.10.3)$$

注意, 当  $P$  点离棒很远时,  $x_0 \gg l$ , 上述公式变为

$$\vec{\mathbf{E}} \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x_0^2} \hat{\mathbf{i}} \quad (2.10.4)$$

这一结果是预料中的, 因为在足够远的地方, 连续电荷分布与点电荷的区别已变得极小。

### 例 2.3 棒的垂直平分线上的电场

长  $l$  的非导体棒具有均匀正电荷密度  $\lambda$  和总电荷  $Q$ , 棒沿  $x$  轴放置, 如图 2.10.2 所示。计算棒的垂直平分线上距棒的中点距离为  $y$  的  $P$  点处的电场。

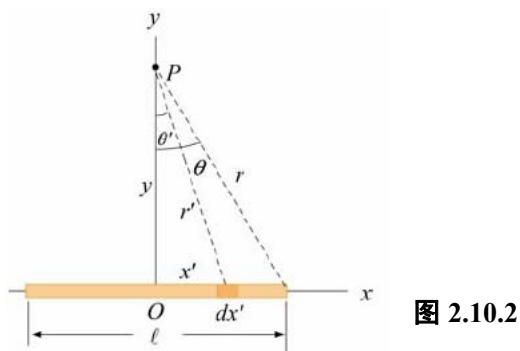


图 2.10.2

**解:**

我们遵循例 2.2 的类似步骤来解。线电荷密度均匀, 为  $\lambda = Q/l$ 。小线元  $dx'$  的电荷  $dq = \lambda dx'$  对  $P$  点电场的贡献为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r'^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2} \quad (2.10.5)$$

利用对称性 (见图 2.10.3), 即可证明电场的  $x$  分量为零。

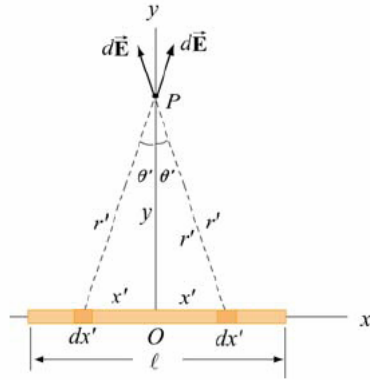


图 2.10.3 对称性给出  $E_x = 0$

$dE$  的  $y$  分量为

$$dE_y = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{x'^2 + y^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda y dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} \quad (2.10.6)$$

沿棒积分，即得棒在  $P$  点的总电场为

$$E_y = \int dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{\lambda y dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\lambda y}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} \quad (2.10.7)$$

作变量代换： $x' = y \tan \theta'$ ，由此得  $dx' = y \sec^2 \theta' d\theta'$ ，上述积分变成

$$\begin{aligned} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} &= \int_{-\theta}^{\theta} \frac{y \sec^2 \theta' d\theta'}{y^3 (\sec^2 \theta' + 1)^{3/2}} = \frac{1}{y^2} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{\sec^2 \theta' d\theta'}{(\tan^2 \theta' + 1)^{3/2}} = \frac{1}{y^2} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{\sec^2 \theta' d\theta'}{\sec^3 \theta'} \\ &= \frac{1}{y^2} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{d\theta'}{\sec \theta'} = \frac{1}{y^2} \int_{-\theta}^{\theta} \cos \theta' d\theta' = \frac{2 \sin \theta}{y^2} \end{aligned} \quad (2.10.8)$$

由此给出

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda \sin \theta}{y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{y} \frac{\ell/2}{\sqrt{y^2 + (\ell/2)^2}} \quad (2.10.9)$$

在  $y \gg \ell$  的极限情形下，上述公式退化为“点电荷”极限情形：

$$E_y \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{y} \frac{\ell/2}{y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \ell}{y^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{y^2} \quad (2.10.10)$$

另一方面，在  $\ell \gg y$  的情形下，我们有

$$E_y \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{y} \quad (2.10.11)$$

在此无限长极限情形下，系统具有柱对称性。这时我们可运用基于高斯定律的另一种处理方法（见第 4 章）来得到方程(2.10.11)。 $E_y/E_0$ （这里  $E_0 = Q/4\pi\epsilon_0 \ell^2$ ）关于  $y/\ell$  的函数性态见图 2.10.4。



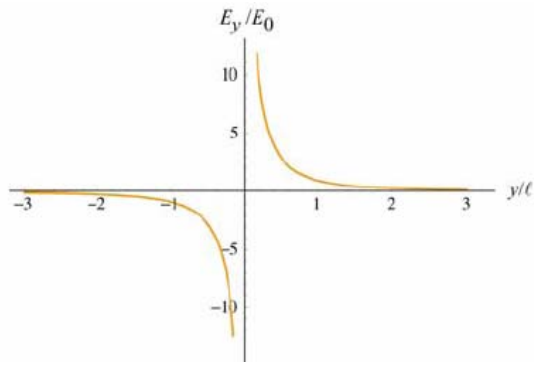


图 2.10.4 非导电棒电场关于  $y/l$  的函数关系

### 例 2.4 圆环轴线上的电场

半径为  $R$  的非导体圆环具有均匀电荷密度  $\lambda$  和总电荷  $Q$ ，圆环处于  $xy$  平面上，如图 2.10.5 所示。计算圆环轴线上方距环圆心距离  $z$  处  $P$  点的电场。

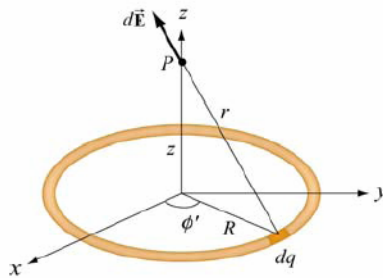


图 2.10.5 电荷元  $dq$  在  $P$  点的电场

解：

环上小线元  $dl'$  的电荷为  $dq = \lambda dl' = \lambda R d\phi'$ 。它对  $P$  点电场的贡献为

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\phi'}{r^2} \hat{r} \quad (2.10.12)$$

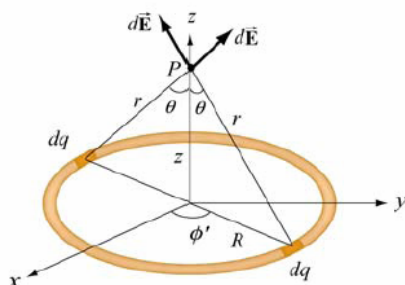


图 2.10.6

利用图 2.10.6 所示的对称性，我们看到， $P$  点的电场必然沿  $+z$  方向。

$$dE_z = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\phi'}{R^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{Rz d\phi'}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2.10.13)$$

对整个环积分，得

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{Rz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \oint d\phi' = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi Rz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2.10.14)$$

这里总电荷是  $Q = \lambda(2\pi R)$ 。电场随  $z$  的变化图见图 2.10.7。

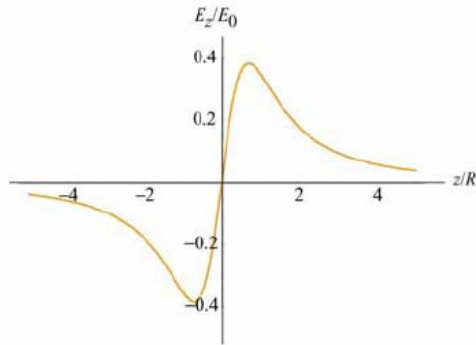


图 2.10.7 半径为  $R$  的非导电圆环对称轴上的电场，其中  $E_0 = Q/4\pi\epsilon_0 R^2$ 。

注意，环的圆心处的电场为零。这一点由对称性即可知。

### 例 2.5 均匀带电圆盘的电场

半径为  $R$  的均匀带电圆盘的总电荷为  $Q$ ，圆盘处于  $xy$  平面上。求圆盘中心轴线上方距圆盘圆心距离  $z$  处  $P$  点的电场。假定  $R \gg z$ 。

解：

将圆盘看成是一组均匀带电的同心环，然后利用例 2.4 的结果。考虑半径为  $r'$ 、宽度为  $dr'$  的环如图 2.10.8 所示。

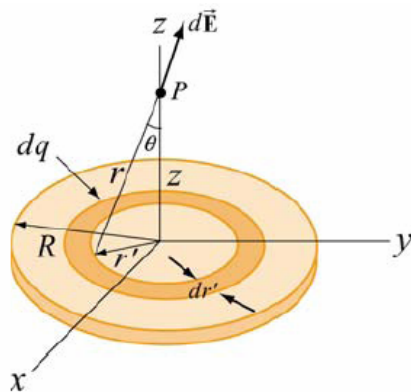


图 2.10.8 半径为  $R$  的均匀带电圆盘

由对称性可知， $P$  点电场的方向在  $+z$  方向上。小环上的电荷为  $dq = \sigma(2\pi r' dr')$ 。由方程(2.10.14)知，小环对  $P$  点电场的贡献为

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z dq}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z(2\pi\sigma r' dr')}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2.10.15)$$

对环从  $r' = 0$  到  $r' = R$  进行积分，即得  $P$  点的总电场为

$$\begin{aligned}
 E_z &= \int dE_z = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r' dr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0} \int_{z^2}^{R^2+z^2} \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0} \left. \frac{u^{-1/2}}{(-1/2)} \right|_{z^2}^{R^2+z^2} \\
 &= -\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}} \right] = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[ \frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \right]
 \end{aligned} \tag{2.10.16}$$

上述方程可重写为

$$E_z = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right], & z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[ -1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right], & z < 0 \end{cases} \tag{2.10.17}$$

电场  $E_z/E_0$  (这里  $E_0 = \sigma/2\varepsilon_0$ ) 关于  $z/R$  的函数性态见图 2.10.9。

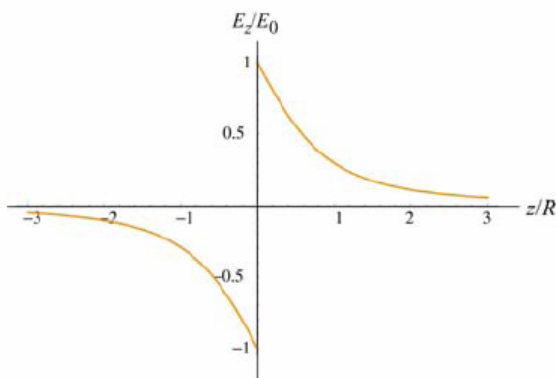


图 2.10.9 具有均匀电荷密度的非导电圆盘的电场。

为了证明在  $z \gg R$  时上述电场退化到“点电荷”极限情形，我们利用泰勒级数展开：

$$1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} = 1 - \left( 1 + \frac{R^2}{z^2} \right)^{-1/2} = 1 - \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} + \dots \right) \approx \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} \tag{2.10.18}$$

由此给出

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{R^2}{2z^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma\pi R^2}{z^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{z^2} \tag{2.10.19}$$

这正是我们预料的“点电荷”的结果。另一方面，我们还可以考虑  $R \gg z$  的情形。物理上说，这意味着盘面非常大，场点  $P$  距离盘面非常近。在此极限下电场变为（以单位矢量表示）：

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{\mathbf{k}}, & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{\mathbf{k}}, & z < 0 \end{cases} \tag{2.10.20}$$

此极限下的电场分布见图 2.10.10。

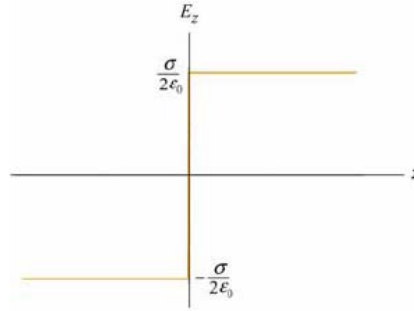


图 2.10.10 无穷大非导电平面的电场。

注意，此时电场在跨过平面时是不连续的。这种不连续性由下式给出：

$$\Delta E_z = E_{z+} - E_{z-} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.10.21)$$

正如我们将在第 4 章看到的，如果给定平面具有面电荷密度  $\sigma$ ，则电场的法向分量在平面的两侧总是不具有连续性  $\Delta E_n = \sigma / \epsilon_0$ 。

## 2.11 总结

- $q_1$  作用在第二个电荷  $q_2$  上的静电力由**库仑定律**给出：

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

这里

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$$

是库仑常数。

- 空间某点上的**电场**由放置在该点上的检验电荷  $q_0$  受到的静电力除以  $q_0$  给出：

$$\vec{\mathbf{E}} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{\mathbf{F}}_e}{q_0}$$

- 电荷  $q$  在距离  $r$  处的电场为

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

- 利用**叠加原理**，由位于  $r_i$  处的电荷  $q_i$  等点电荷共同组成的电荷组的电场为

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i$$

- 质量为  $m$  电荷为  $q$  的粒子在电场  $\vec{E}$  中运动时具有加速度

$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

- 电偶极子由两个等量异号电荷组成。电偶极矩矢量  $\vec{p}$  由负电荷指向正电荷，其大小为

$$p = 2aq$$

- 作用在均匀电场  $\vec{E}$  中电偶极子上的**转矩**为

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

- 均匀外电场  $\vec{E}$  中电偶极子具有的**势能**为

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

- 连续电荷元  $dq$  在空间某点上的电场为

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

- 在离有限数量的连续电荷分布足够远的地方，电场可以按“点电荷”来处理。

## 2.12 解题技巧

本章中，我们已经讨论了对离散的和连续的电荷分布如何计算其电场的问题。对前者，我们运用叠加原理：

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

对后者，则必须进行矢量积分

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

这里  $r$  是  $dq$  到场点  $P$  的距离， $\hat{r}$  是相应的单位矢量。为了完成积分，我们应当遵循以下一些步骤：

(1) 由  $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r}$  开始；

(2) 根据电荷是线分布、面分布还是体分布，将电荷元  $dq$  改写为

$$dq = \begin{cases} \lambda d\ell & \text{(长度)} \\ \sigma dA & \text{(面积)} \\ \rho dV & \text{(体积)} \end{cases}$$

(3) 将  $dq$  的具体形式代入  $d\vec{E}$  的表达式。

(4) 选择适当坐标系(直角坐标系、柱坐标系或球极坐标系), 写出该坐标系下的微元 ( $d\ell, dA$  或  $dV$ )

和  $r$  的表达式 (总结见表 2.1):

|         | 直角坐标系 $(x, y, z)$     | 柱坐标系 $(\rho, \phi, z)$                      | 球极坐标系 $(r, \theta, \phi)$   |
|---------|-----------------------|---|---|
| $d\ell$ | $dx, dy, dz$          | $d\rho, \rho d\phi, dz$                     | $dr, r d\theta, r \sin \theta d\phi$                                  |
| $dA$    | $dx dy, dy dz, dz dx$ | $d\rho dz, \rho d\phi dz, \rho d\phi d\rho$ | $r dr d\theta, r \sin \theta dr d\phi, r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ |
| $dV$    | $dx dy dz$            | $\rho d\rho d\phi dz$                       | $r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$                                    |

**表 2.1** 不同坐标系下的长度、面积和体积微元

(5) 根据积分变量改写  $d\vec{E}$  的表达式, 利用对称性确认电场的非零分量。

(6) 计算积分得到  $\vec{E}$ 。

在下表中, 我们图示了对于无限长电荷、电荷缓和均匀电荷圆盘如何按照上述方法求解电场的过程。

|  | Line charge  | Ring of charge   | Uniformly charged disk  |
|--|--|--|---|
| Figure   |  |  |   |
| (2) Express $dq$ in terms of charge density  | $dq = \lambda dx'$   | $dq = \lambda dl$  | $dq = \sigma dA$  |
| (3) Write down $dE$  | $dE = k_e \frac{\lambda dx'}{r'^2}$  | $dE = k_e \frac{\lambda dl}{r'^2}$   | $dE = k_e \frac{\sigma dA}{r'^2}$   |
| (4) Rewrite $r$ and the differential element in terms of the appropriate coordinates | $dx'$<br>$\cos \theta = \frac{y}{r'}$<br>$r' = \sqrt{x'^2 + y^2}$  | $d\ell = R d\phi'$<br>$\cos \theta = \frac{z}{r}$<br>$r = \sqrt{R^2 + z^2}$  | $dA = 2\pi r' dr'$<br>$\cos \theta = \frac{z}{r}$<br>$r = \sqrt{r'^2 + z^2}$  |
| (5) Apply symmetry argument to identify non-vanishing component(s) of $dE$           | $dE_y = dE \cos \theta$<br>$= k_e \frac{\lambda y dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}}$  | $dE_z = dE \cos \theta$<br>$= k_e \frac{\lambda R z d\phi'}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$  | $dE_z = dE \cos \theta$<br>$= k_e \frac{2\pi \sigma z r' dr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}}$  |
| (6) Integrate to get $E$   | $E_y = k_e \lambda y \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$<br>$= \frac{2k_e \lambda}{y} \frac{\ell/2}{\sqrt{(\ell/2)^2 + y^2}}$ | $E_z = k_e \frac{R \lambda z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \oint d\phi'$<br>$= k_e \frac{(2\pi R \lambda) z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$<br>$= k_e \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$ | $E_z = 2\pi \sigma k_e z \int_0^R \frac{r' dr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}}$<br>$= 2\pi \sigma k_e \left( \frac{z}{ z } - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$ |

## 2.13 解题

### 2.13.1 氢原子

在氢原子的经典模型里，电子在半径为  $r = 0.53 \times 10^{-10}$  米的轨道上绕质子运动。电子和质子的电荷大小均为  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$ 。

- 电子与质子之间的静电力的大小是多少？
- 质子在  $r$  处的电场多大？
- 电子与质子之间的静电力与万有引力的比值是多少？这个结果与电子与质子间的距离有关吗？
- 根据(b)的计算，解释为什么静电力不会影响行星的运动。

**解:**

(a) 静电力的大小是

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

将已知量代入，知氢原子中电子与质子之间的静电力为

$$F_e = \frac{(9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2)(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(5.3 \times 10^{-11} \text{ m})^2} = 8.2 \times 10^{-8} \text{ N}$$

(b) 质子在  $r$  处的电场大小为

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{(9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2)(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})}{(0.5 \times 10^{-10} \text{ m})^2} = 5.76 \times 10^{11} \text{ N/C}$$

(c) 电子质量为  $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ，质子质量为  $m_p = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ，因此静电力与万有引力的比值为

$$\gamma = \frac{\left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \right)}{\left( G \frac{m_p m_e}{r^2} \right)} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} e^2}{G m_p m_e} = \frac{(9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2)(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2)(1.7 \times 10^{-27} \text{ kg})(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})} = 2.2 \times 10^{39}$$

它与质子和电子间的距离  $r$  无关。

(d) 电子和质子间的静电力要比万有引力强 39 个量级。那为什么行星的大尺度运动取决于万有引力而不取决于静电力呢？原因是电子电荷与质子电荷数量上相等。最有说服力的实验显示，二者间的误差小于  $10^{-24}$  量级。由于像行星这样的星体其电子数和质子数相等，因此它们基本上是电中性的。因此行星间的力主要是引力。

### 2.13.2 密立根油滴实验

半径为  $r = 1.64 \times 10^{-6} \text{ m}$ 、质量密度  $\rho_{oil} = 8.51 \times 10^2 \text{ kg/m}^3$  的油滴由静止下落，穿过恒定的方向向下的外加电场  $\vec{E}$  区域。油滴携带数量不明的电荷  $q$ （由 X 射线辐照生成）。电场的强度被调整到油滴受到的静电力  $\vec{F}_e = q\vec{E}$  恰好与其重力  $\vec{F}_g = m\vec{g} = -mg\hat{j}$  相平衡。假定达到平衡时电场为  $\vec{E} = -E_y\hat{j} = -(1.92 \times 10^5)\hat{j} [\text{N/C}]$ 。

(a) 油滴的质量是多少？

(b) 油滴携带了多少个电子单位 ( $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ) 的电荷？

**解:**

(a) 由油滴的质量密度  $\rho_{oil}$  乘以油滴的体积即得到油滴的总质量  $M$ :

$$M = \rho_{oil} V = \rho_{oil} \left( \frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$



这里假定油滴呈半径为  $r$  的球形，其体积为  $V = 4\pi r^3/3$ 。

现在我们将这些数值代入质量表达式，

$$M = \rho_{\text{oil}} \left( \frac{4}{3} \pi r^3 \right) = (8.51 \times 10^2 \text{ kg/m}^3) \left( \frac{4\pi}{3} \right) (1.64 \times 10^{-6} \text{ m})^3 = 1.57 \times 10^{-14} \text{ kg}$$

(b) 当油滴的重力与其受到的静电力严格相等时， $\vec{F}_g + \vec{F}_e = 0$ ，油滴处于静平衡态。由于重力指向下，故静电力必然指向上。利用力平衡方程，有

$$0 = m\vec{g} + q\vec{E} \Rightarrow mg = -qE_y$$

既然静电力向上，因此可判断油滴携带的是负电荷。注意，我们这里取单位矢量  $\hat{j}$  指向上。由此可解油滴的电荷方程：

$$q = -\frac{mg}{E_y} = -\frac{(1.57 \times 10^{-14} \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)}{1.92 \times 10^5 \text{ N/C}} = -8.03 \times 10^{-19} \text{ C}$$

由于电子电荷为  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ，故油滴带有的电子数为

$$N = \frac{q}{e} = \frac{8.02 \times 10^{-19} \text{ C}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ C}} = 5$$

对这个数是个整数这一点你或许会感到诧异，但正是密立根油滴实验第一次给出了电荷呈量子化的直接证据。因此，从给定的数据我们断定，这个油滴上有 5 个电子！

### 2.13.3 垂直于电场方向的电荷运动

电子被水平射入由两带等量异号电荷的极板形成的均匀电场，如图 2.13.1 所示。电子的初始速度  $\vec{v}_0 = v_0 \hat{i}$  垂直于  $\vec{E}$ 。

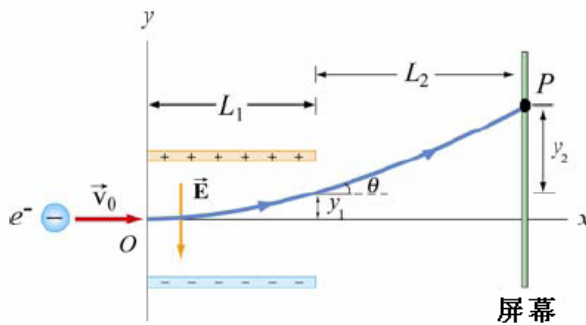


图 2.13.1 垂直于电场方向的电荷运动

- 当电子处于极板间时，它受到的力如何？
- 当处于极板间时，电子得到的加速度是多大？
- 极板沿  $x$  方向长为  $L_1$ 。电子离开极板的时刻  $t_1$  是多少？
- 假定电子进入极板的时刻为  $t = 0$ 。则它在  $t_1$  时刻离开极板时的速度是多少？
- 电子在  $t_1$  时刻离开极板时的垂直位移是多少？

- (f) 电子在  $t_1$  时刻离开极板时的轨迹与水平面的夹角  $\theta_1$  是多少?  
 (g) 假设电子在  $t_2$  时刻打到屏幕上, 屏幕距极板出射端的水平距离为  $L_2$ 。则从  $t=0$  算起, 到  $t_2$  时刻电子总的垂直位移是多少?

**解:**

- (a) 由于电子带负电荷,  $q = -e$ , 因此电子的受力为

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = -e\vec{E} = (-e)(-E_y)\hat{j} = eE_y\hat{j}$$

这里电场写成  $\vec{E} = -E_y\hat{j}$  且  $E_y > 0$ 。电子受力向上。注意, 这里电子的运动相当于一定质量的物体被水平地抛入恒定重力场中的运动。只是物体的抛物线轨道向下。但由于电子是负电性的, 作用在电子上的恒力指向上, 因此电子作向上的抛物线轨道运动。

- (b) 当处于极板间时, 电子得到的加速度是

$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} = -\frac{qE_y}{m}\hat{j} = \frac{eE_y}{m}\hat{j}$$

其方向向上。

- (c) 电子穿越极板的时间为  $t_1 = L_1/v_0$ 。这个  $t_1$  时间不受加速度的影响, 因为它由电子的水平速度分量  $v_0$  确定, 与电场无关。

- (d) 电子的初始水平速度是  $\vec{v}_0 = v_0\hat{i}$ 。而电子的加速度在  $+y$  方向, 故只有速度的  $y$  分量有变化。  $t_1$  时刻后的速度为

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = v_0\hat{i} + a_y t_1\hat{j} = v_0\hat{i} + \left(\frac{eE_y}{m}\right)t_1\hat{j} = v_0\hat{i} + \left(\frac{eE_y L_1}{mv_0}\right)\hat{j}$$

- (e) 由图可见, 电子在  $t_1 = L_1/v_0$  时间内穿越了水平距离  $L_1$ , 故离开极板时的垂直位移是

$$y_1 = \frac{1}{2}a_y t_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{eE_y}{m}\right)\left(\frac{L_1}{v_0}\right)^2$$

- (f) 电子在  $t_1$  时刻离开极板时, 其轨迹与水平面的夹角  $\theta_1$  由两方向上速度分量的比值确定:

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{(eE_y/m)(L_1/v_0)}{v_0} = \frac{eE_y L_1}{mv_0^2}$$

- (g) 电子离开极板后, 就不再受电场力的作用, 故此电子作直线运动。其偏转量  $y_2$  为

$$y_2 = L_2 \tan\theta_1 = \frac{eE_y L_1 L_2}{mv_0^2}$$

总的垂直位移是

$$y = y_1 + y_2 = \frac{1}{2}\frac{eE_y L_1^2}{mv_0^2} + \frac{eE_y L_1 L_2}{mv_0^2} = \frac{eE_y L_1}{mv_0^2}\left(\frac{1}{2}L_1 + L_2\right)$$

### 2.13.4 偶极子的电场

考虑如图 2.7.1 所示的电偶极矩。

(a) 证明：在  $r \gg a$  的极限情形下，偶极子的电场为

$$E_x = \frac{3p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin\theta \cos\theta, \quad E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3\cos^2\theta - 1)$$

这里  $\sin\theta = x/r$ ,  $\cos\theta = y/r$ 。

(b) 证明：在极坐标系下，上述电场表达式可以写成

$$\vec{E}(r, \theta) = E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta}$$

这里

$$E_r = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\theta = \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

**解：**

(a) 我们来计算  $r \gg a$  的距离时偶极子的电场。在直角坐标系下， $P$  点  $(x, y, 0)$  电场的  $x$  分量为

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\cos\theta_+}{r_+^2} - \frac{\cos\theta_-}{r_-^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{x}{[x^2 + (y-a)^2]^{3/2}} - \frac{x}{[x^2 + (y+a)^2]^{3/2}} \right)$$

这里

$$r_\pm^2 = r^2 + a^2 \mp 2ra \cos\theta = x^2 + (y \mp a)^2$$

类似地， $y$  分量为

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\sin\theta_+}{r_+^2} - \frac{\sin\theta_-}{r_-^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{y-a}{[x^2 + (y-a)^2]^{3/2}} - \frac{y+a}{[x^2 + (y+a)^2]^{3/2}} \right)$$

我们用泰勒级数对电场作多项式展开，然后保留与  $1/r^3$  成正比的项，略去其他与  $1/r^5$  成正比的项，这里  $r = +(x^2 + y^2)^{1/2}$ 。

首先有

$$[x^2 + (y \pm a)^2]^{-3/2} = [x^2 + y^2 + a^2 \pm 2ay]^{-3/2} = r^{-3} \left[ 1 + \frac{a^2 \pm 2ay}{r^2} \right]^{-3/2}$$

在  $r \gg a$  的极限情形下，对  $s \equiv (a^2 \pm 2ay)/r^2$  作泰勒级数展开：

$$(1+s)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}s + \frac{15}{8}s^2 - \dots$$

于是上述关于电场分量的方程变成

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{6xya}{r^5} + \dots$$

和

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{2a}{r^3} + \frac{6y^2a}{r^5} \right) + \dots$$

这里我们忽略了  $O(s^2)$  的项。于是电场可以写成

$$\vec{E} = E_x \hat{\mathbf{i}} + E_y \hat{\mathbf{j}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{2a}{r^3} \hat{\mathbf{j}} + \frac{6ya}{r^5} (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}) \right] = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[ \frac{3yx}{r^2} \hat{\mathbf{i}} + \left( \frac{3y^2}{r^2} - 1 \right) \hat{\mathbf{j}} \right]$$

这里我们用了电偶极子大小的定义  $p = 2aq$ 。

在  $\sin\theta = x/r$  和  $\cos\theta = y/r$  的极坐标系下（见图 2.13.4），我们得到所要的结果：

$$E_x = \frac{3p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin\theta \cos\theta, \quad E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3\cos^2\theta - 1)$$

(b) 我们从(a)得到的直角坐标系下偶极子的表达式开始：

$$\vec{E}(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[ 3\sin\theta \cos\theta \hat{\mathbf{i}} + (3\cos^2\theta - 1) \hat{\mathbf{j}} \right]$$

经过适当代数运算，上述公式可改写成

$$\begin{aligned} \vec{E}(r, \theta) &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[ 2\cos\theta (\sin\theta \hat{\mathbf{i}} + \cos\theta \hat{\mathbf{j}}) + \sin\theta \cos\theta \hat{\mathbf{i}} + (\cos^2\theta - 1) \hat{\mathbf{j}} \right] \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[ 2\cos\theta (\sin\theta \hat{\mathbf{i}} + \cos\theta \hat{\mathbf{j}}) + \sin\theta (\cos\theta \hat{\mathbf{i}} - \sin\theta \hat{\mathbf{j}}) \right] \end{aligned}$$

这里用了三角恒等式  $(\cos^2\theta - 1) = -\sin^2\theta$ 。极坐标系下的单位矢量  $\hat{\mathbf{r}}$  和  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  可以分解为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= \sin\theta \hat{\mathbf{i}} + \cos\theta \hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \cos\theta \hat{\mathbf{i}} - \sin\theta \hat{\mathbf{j}}, \end{aligned}$$

因此极坐标系下的电场表达式为

$$\vec{E}(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[ 2\cos\theta \hat{\mathbf{r}} + \sin\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right]$$

$\vec{E}$  的大小为

$$E = (E_r^2 + E_\theta^2)^{1/2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3\cos^2\theta + 1)^{1/2}$$

### 2.13.5 电荷弧线的电场

具有均匀线电荷密度  $\lambda$  的细棒被弯成弧形，弧的半径为  $R$ 。弧所对的圆心角为  $2\theta_0$ ，整个弧关于  $x$  轴对称，如图 2.13.2 所示。该弧在  $O$  点的电场是多少？

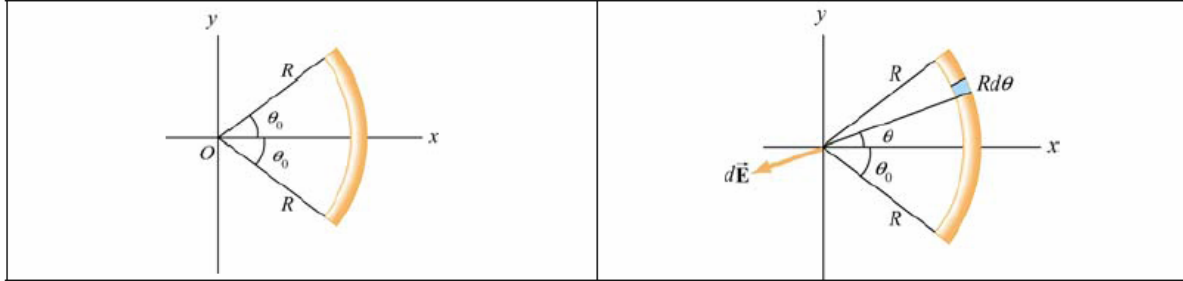


图 2.13.2 (a) 电荷源的几何形状。(b) 电荷元  $dq$

解：

考虑与  $x$  轴夹角为  $\theta$  的线段微元  $dl = R d\theta$ ，如图 2.13.2(b) 所示。其所携带电荷为  $dq = \lambda dl = \lambda R d\theta$ 。这段电荷源对  $O$  点电场的贡献为

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} (-\cos\theta \hat{i} - \sin\theta \hat{j}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\theta}{R} (-\cos\theta \hat{i} - \sin\theta \hat{j})$$

从  $-\theta_0$  到  $+\theta_0$  积分，得

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} d\theta (-\cos\theta \hat{i} - \sin\theta \hat{j}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} (-\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}) \Big|_{-\theta_0}^{\theta_0} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda \sin\theta_0}{R} \hat{i}$$

我们看到，电场只有  $x$  分量，这与对称性讨论的结果一致。如果取极限  $\theta_0 \rightarrow \pi$ ，弧即变成圆环。由于  $\sin\pi = 0$ ，上述方程意味着在非导电圆环中心电场为零。这与对称性所要求的结果一致。另一方面，对很小的  $\theta_0$ ， $\sin\theta_0 \approx \theta_0$ ，我们回到点电荷情形：

$$\vec{E} \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda\theta_0}{R} \hat{i} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda\theta_0 R}{R^2} \hat{i} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{i}$$

这里弧上的总电荷为  $Q = \lambda l = \lambda(2R\theta_0)$ 。

### 2.13.6 有限长度棒的非轴线上的电场

沿  $x$  轴放置的长  $l$  的非导体棒具有均匀正电荷密度  $\lambda$  和总电荷  $Q$ ，如图 2.12.3 所示。计算离棒的轴线距离为  $y$  的  $P$  点处的电场。

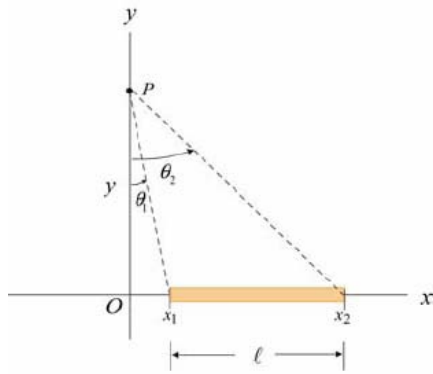


图 2.13.3

解:

这个问题可按例题 2.3 的求解步骤进行。考虑棒上线元  $dx'$ ，如图 2.13.4 所示。该线元所带电荷为  $dq = \lambda dx'$

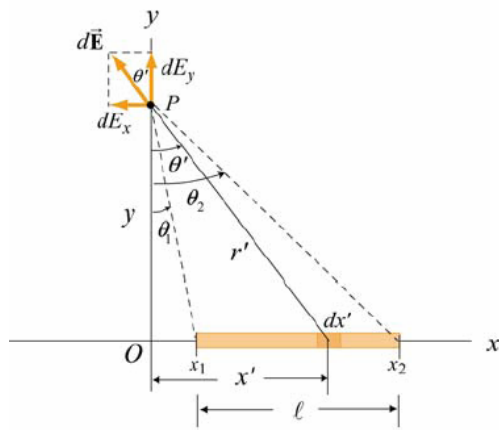


图 2.13.4

该线元在  $P$  点产生的电场为

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r'^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2} (-\sin\theta' \hat{i} + \cos\theta' \hat{j})$$

这里单位矢量  $\hat{r}$  在直角坐标系下的表达式为  $\hat{r} = -\sin\theta' \hat{i} + \cos\theta' \hat{j}$ 。在没有对称性的情形下， $P$  点的电场既有  $x$  分量也有  $y$  分量。电场的  $x$  分量为

$$dE_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2} \sin\theta' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2} \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y^2}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda x' dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}}$$

从  $x' = x_1$  到  $x' = x_2$  积分，得到

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x' dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_{x_1^2 + y^2}^{x_2^2 + y^2} \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} u^{-1/2} \Big|_{x_1^2 + y^2}^{x_2^2 + y^2} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{x_2^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y^2}} \right] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \left[ \frac{y}{\sqrt{x_2^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x_1^2 + y^2}} \right] \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1) \end{aligned}$$

类似地，电场的  $y$  分量为

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2} \cos\theta' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{x'^2 + y^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda y dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}}$$

沿整个棒长积分，得

$$E_y = \frac{\lambda y}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\lambda y}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta' d\theta' = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

这里我们在完成积分时用了方程(2.10.8)的结果。

在  $x_1 \rightarrow -\infty$  和  $x_2 \rightarrow +\infty$  的无限长极限情形下，由  $x_i = y \tan\theta_i$  知，相应的角度为  $\theta_1 = -\pi/2$  和  $\theta_2 = +\pi/2$ 。代入上述公式，我们有

$$E_x = 0, \quad E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{y}$$

这与方程(2.10.11)的结果完全一致。

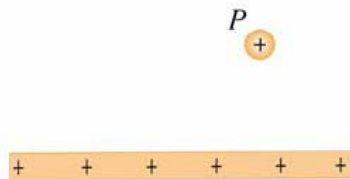
## 2.14 概念题

1. 将库仑定律  $F_e = kq_1q_2/r^2$  与牛顿万有引力定律  $F_g = Gm_1m_2/r^2$  进行对比。
2. 电场线彼此能相交吗？请解释。
3. 两个异号电荷摆成一直线，如下图所示。



右边的电荷量是左边的三倍。除了无穷远处，哪个地方的电场也为零？

4. 在带正电的绝缘棒附近放置了一个检验电荷（如下图）。如果检验电荷的电荷量减少并改变符号，其他一切不变，则电场的大小和方向有何变化？



5. 由绝缘棒两端的等量异号电荷构成的偶极子可以绕棒的中心自由转动。然后将棒至于一非均匀电场中。求棒受到的力和转矩。

## 2.15 附加题

### 2.15.1 三个点电荷

三个点电荷置于等边三角形的三个顶点上，如图 2.15.1 所示。

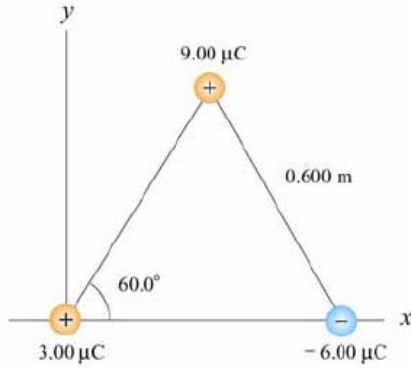


图 2.15.1 三个点电荷

计算下述两电荷受到的净的静电

力：(a)  $9.00 \mu\text{C}$  的电荷；(b)  $-6.00 \mu\text{C}$  的电荷。

### 2.15.2 三个点电荷

边长为  $a$  的等腰直角三角形的三个顶点上分别放有电荷  $+q$ 、 $+2q$  和  $-q$ ，如图 2.15.2 所示。

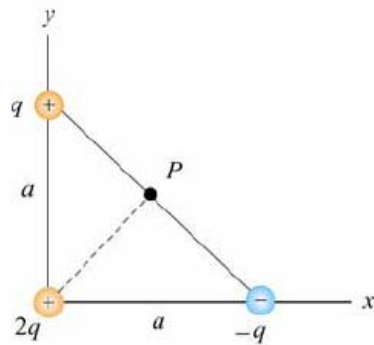


图 2.15.2

$+q$  和  $-q$  连线中点  $P$  处的电场如何？给出大小和方向。

### 2.15.3 四个点电荷

四个点电荷置于边长为  $a$  的正方形的四个顶点上，如图 2.15.3 所示。

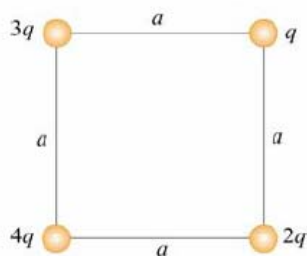


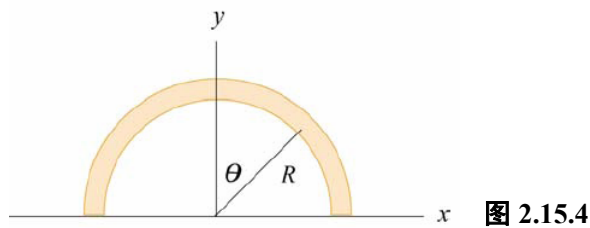
图 2.15.3 四个点电荷

- (a) 电荷  $q$  位置上的电场如何？
- (b)  $2q$  电荷受到的净的静电力如何？

### 2.15.4 半圆形绝缘线

一根带正电的绝缘线被弯成半径为  $R$  的半圆形，如图 2.15.4 所示。





绝缘线上总电荷为  $Q$ ，但线电荷密度分布是不均匀的，为  $\lambda = \lambda_0 \cos \theta$ 。

- (a)  $\lambda_0$  与  $R$  和  $Q$  有什么关系？
- (b) 如果将电荷  $q$  放在原点，该电荷上总的受力如何？

### 2.15.5 电偶极子

处于  $xy$  平面内的电偶极子被置于沿  $+x$  方向的均匀电场中，初始时偶极子与平衡位置有一夹角  $\theta$ ，如图 2.15.5 所示。

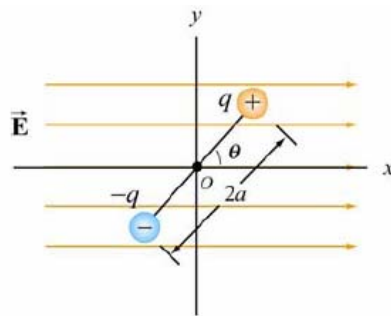


图 2.15.5

两电荷相距  $2a$ ，偶极子的惯量矩为  $I$ 。如果将偶极子从如图位置释放，证明：其角度取向将作简谐运动。其振荡频率是多少？

### 2.15.6 带电柱壳与柱体

- (a) 半径为  $R$  高度为  $h$  的均匀带电圆柱壳所带的总电荷为  $Q$ 。它在轴线上离底面距离为  $z$  的  $P$  点处（如图 2.15.6）的电场是多少？（提示：将柱面看作是一系列电荷圆环。）

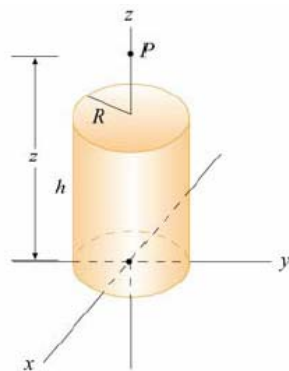


图 2.15.6 均匀带电圆柱壳

- (b) 如果将上图看成是半径为  $R$ 、高度为  $h$  且具有均匀体电荷密度分布的实体圆柱，则  $P$  点的电场是多少？（提示：将实体柱看作是一系列电荷圆盘。）

### 2.15.7 两个导电球

两个等质量  $m$ 、等电量  $q$  的小导电球用长  $l$  的绝缘线吊在梁上。平衡时两导电球与竖直方向夹角均为  $\theta$ ，如图 2.15.7 所示。假定  $\theta$  很小，有  $\tan \theta \approx \sin \theta$ 。

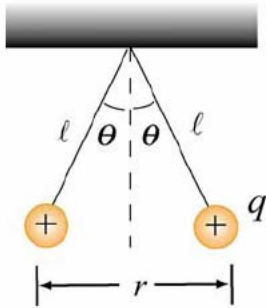


图 2.15.7

(a) 证明：平衡时两球分离距离为

$$r = \left( \frac{q^2 l}{2\pi\epsilon_0 mg} \right)^{1/3}$$

(b) 如果  $l = 1.2 \times 10^2 \text{ cm}$ ， $m = 1.0 \times 10^1 \text{ g}$ ， $x = 5.0 \text{ cm}$ ，问  $q$  是多大？

### 2.15.8 电偶极子上的转矩

由  $q_1 = +2e$  和  $q_2 = -2e$  ( $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ )，二者相距  $d = 10^{-9} \text{ m}$  的两个电荷组成的电偶极子沿  $y$  轴放置，如图 2.15.8 所示。

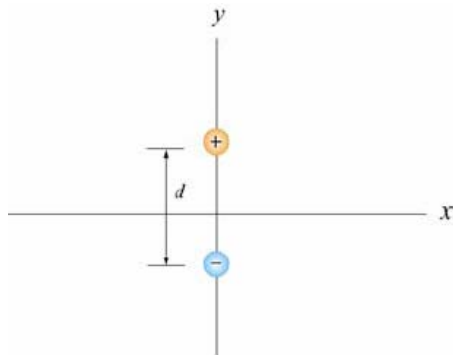


图 2.15.8

假定外电场为  $\vec{E}_{\text{ext}} = 3\hat{i} + 3\hat{j} \text{ [N/C]}$ 。

- 偶极矩的大小和方向如何？
- 作用在偶极子上的转矩的大小和方向如何？
- 电荷  $q_1$  和  $q_2$  的电场对这个转矩有贡献吗？简要解释你的答案。



